

www.e-rara.ch

Arithmetica Universalis Sive De Compositione Et Resolutione Arithmetica

**Newton, Isaac
Castillon, Giovanni Francesco Mauro Melchiorre
Amstelodami, MDCCLXI**

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5014

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3715>

Sectio quarta.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

pecunia x post annum solvenda valebit ax paratæ pecuniæ, post duos annos axx (d), post tres ax^3 , post quatuor ax^4 , & post quinque ax^5 . Adde jam hos quinque terminos & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, seu

$x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimensionum, cujus ope cum x per $\dagger$ regulas post docendas inventum fuerit, pone $x.1 :: 100 y$. Et erit y — 100 usura usuræ centum librarum per annum. (e)

Atque has in quæstionibus, ubi solæ quantitatum proportionibus absque positionibus linearum considerandæ veniunt, instantias dedisse sufficiat: pergamus jam ad problematum geometricorum solutiones.

SECTIO QUARTA.

CAPUT PRIMUM.

Quomodo Quæstiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

I. **Q**uæstiones Geometricæ eadem facilitate iisdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi possunt, ac quæ de abstractis quantitativis proponuntur. Ut si recta AB in extrema & media proportionis secanda sit in C , hoc est ita ut BE quadratum maximæ partis sit TAB. I.
Fig. 5. æqua-

Si scrire possemus quid una libra post annum solvenda valeat paratæ pecuniæ; omnia nosceremus dicentes si x paratæ pecuniæ valet unum post annum, centum pecuniæ pariter paratæ quid post idem tempus valebunt? Valor autem ipsius x sic reperitur; si 1 post annum valet nunc x , quid valebit a ? Resp. ax quæ exponit præsentem pecuniam pro a post annum.

(d) Cum autem a quotannis solvenda sit, soluta nunc ax pro primo anno, solvere debebo a post duos annos, quam si præstare vellem initio secundi anni dare deberem ax , sed volo hanc solvere initio primi; ergo

1. $x :: ax. ax^2$ pro secundi anni pensione nunc solvenda; quod ratiocinium dabit pecuniam præsentem pro tertio anno $= ax^3$ &c.; ergo pecunia nunc danda, ut liberer a tota quinquenni pensione,
 $= ax^5 + ax^4 + ax^3 + ax^2 + ax = c$ ex pacto convento.

parum diversum, a *Clar. LEIBNITIO* propositum in *Actis Lips.* anni 1683, mense Octob. & ibidem solutum ab eo, ratione paulum a nostra, diversa.

Si annua usura centum librarum data sint (puta, vicesima) quid nunc solvendum est pro certa pecunia qua præstari solum deberes post annum?

Sit 100 $= a$, usuræ centum librarum $= b$, pecunia post annum numeranda $= c$, quæ autem nunc exhiberi debet $= y$, & usuræ post annum hujus summæ y , sint $= x$. Erit $a.b :: y.x$, & $a + b. b :: y + x. x$, sed quod nunc solvere debes, & ejus annuæ usuræ simul æquant pecuniam post annum dandam,

ergo $x + y = c$, & $a + b. b :: c. x = \frac{bc}{a + b}$

quare $y = c - x = \frac{ac}{a + b}$.

$\dagger$ Nempe inveniendi figuras primas, radices per constructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vieta.

(e) Libet ob rei utilitatem subdere problema
Tom. I.

æquale rectangulo BD sub tota & minore parte contento: posito $AB = a$ & $BC = x$ erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; (a) æquatio quæ per reductionem dat (b) $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa}$.

TAB. I.
Fig. 6.

II. Sed in rebus geometricis, quæ frequentius occurrunt a variis linearum positionibus & relationibus complexis ita dependere solent, ut egeant ulteriori inventionem & artificio, quo ad algebraicos terminos deduci possint. Et licet in hujusmodi casibus difficile sit aliquid præscribere, & cujusque ingenium sibi debeat esse operandi norma; conabor tamen discipulis viam præsternere. Sciendum est itaque quod quæstiones circa easdem lineas definito quolibet modo sibi invicem relatas, possint varie proponi, ponendo alias atque alias quærendas esse ex aliis datis. Sed de quibuscunque tamen datis vel quæsitis instituitur quæstio, solutio ejus eadem plane methodo ex analyseos serie perficietur, nulla omnino circumstantia variata præter fictas linearum species sive nomina, quibus data a quæsitis solemus distinguere. (c) Quemadmodum si quæstio sit de isoscele CBD in circulum inscripto, cujus latera BC, BD, & basis CD cum diametro circuli AB conferenda sunt; ea vel proponi potest de investigatione *diametri* ex datis lateribus & basi, vel de investigatione *basis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de investigatione *laterum* ex datis basi & diametro. Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem seriem analyseos. Nempe, si quærat *diameter*, pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC,) propter similia triangula ABC & CBE est $AB : BC :: BC : BE$, five $x : b :: b : BE$. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Est & $CE =$

$\frac{1}{2}CD$ five $\frac{1}{2}a$: & propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$,

hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio per reductionem dabit quæsitum x . (e)

III.

(a) Nam per problematis legem, quadratum ex BC æquat rectangulum ex BA in AC. Vide EUCL. 11. II., & 30. VI.

(b) Vide Sect. II. Art. IX. & X.

(c) Etenim algebraica problematis solutio fit per æquationem, æque ac solutio problematis arithmetici, id est, in hoc solutionum genere quæritur quomodo variæ quantitates invicem æquales fiant, quod æque bene fit, ut patet, quærendo quo pacto datæ æquantur quæsitis, aut quæsitæ datis.

(d) Ratiocinium, quo hoc problema solvitur in tribus his casibus est unicum, nempe (per EUCL. 8. VI.) $AB : BC :: CB : BE$, & (ob EUCL. 47. I.) $CEq + BEq = BCq$; & ex hac

unica synthesi deducuntur æquationes tres, pro tribus casibus, quæ symbolis tantum differunt; ut videre potes hoc, & sequenti articulo.

(e) Reductio fit primum, ducendo cuncta in xx , unde $\frac{aaxx}{4} + b^4 = bbxx$, & rursus in 4, ne ulla manet quantitas fracta, & exit $aaxx + 4b^4 = 4bbxx$ 2º. Conjiciendo in eadem partes terminos omnes, ubi est xx , quod dat $4b^4 = 4bbxx - aaxx$; tum omnia dividendo per $4bb - aa$, unde conficitur $\frac{4b^4}{4bb - aa} = xx$; demum extrahendo radicem quadratam, ex quo fit $x = \sqrt{\frac{2bb}{4bb - aa}}$.

QUOMODO QUÆSTIONES GEOMET. AD ÆQUAT. REDIG. 139

III. Sin quærat *basis*, pono $AB = c$, $CD = x$ & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est $AB.BC :: BC.BE$, five $c.b :: b.BE$. Quare $BE = \frac{bb}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2} CD$ five $\frac{1}{2} x$, & propter angulum CEB rectum $CEq + BEq = BCq$ hoc est $\frac{1}{4} xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x . (f)

IV. Atque ita si *latus* BC vel BD quærat, pono $AB = c$, $CD = a$, & BC vel $BD = x$. Et (AC ut ante ducta) propter similia triangula ABC & CBE est $AB.BC :: BC.BE$; five $c.x :: x.BE$. Quare $BE = \frac{xx}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2} CD$ five $\frac{1}{2} a$; & propter angulum CEB rectum est $CEq + EBq = BCq$, hoc est $\frac{1}{4} aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x . (g)

V. Vides itaque quod in unoquoque casu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia similis sit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas aliis literis designavi prout datae vel quæsitæ ponuntur. Ex diversis quidem datis & quæsitis oritur diversitas in reductione æquationis inventæ. Nam æquationis $\frac{1}{4} aa + \frac{b^4}{xx} = bb$ alia est reductio ut obti-

(f) Est enim (cunctis ductis in 4) $xx + \frac{4b^4}{cc} = 4bb$, vel $xx = 4bb - \frac{4b^4}{cc}$, vel $xx = \frac{4bbcc - 4b^4}{cc}$, & $x = \sqrt{\frac{4bbcc - 4b^4}{cc}}$
 $= \frac{2b}{c} \sqrt{cc - bb}$ (Sect. I. art. LXXI.).

Hæc autem æquatio facile per substitutionem ex superiori deducitur; Nam vocavimus c rectam, quam ibi x , & x quam ibi a ; atque ideo, has pro illis notis substituendo, prior æquatio fit $xx + \frac{b^4}{cc} = 4bb$; secunda ipsissima.

(g) Siquidem, cunctis in cc ductis, est $\frac{1}{4} aacc + x^4 = ccxx$, & $x^4 = ccxx - \frac{1}{4} aacc$, ac $xx = \frac{cc}{2} \pm \sqrt{\frac{c^4 - aacc}{4}}$ $= \frac{cc \pm c}{2}$
 $\sqrt{cc - aa}$, & $x = \sqrt{\left(\frac{cc \pm c}{2}\right) \sqrt{cc - aa}}$

neatur Sed & hæc æquatio ex duabus superioribus elicitur substituendo in priori c pro x , & x pro b , & in secunda a pro x , & x pro b . Quid si problemata generalius proponerentur tanquam theorematum investiganda, & quantitates exponerentur græcis litteris, quibus nullam distinctionis inter datas, & quæsitæ, ideam subnectere consuevimus? Proponamus, ex. gr. hoc problema sit. *Quæritur relatio quæ est inter latus, basim trianguli isoscelis, & diametrum circuli circumscripti.*

Sit $AB = a$, $BC = \beta$, $CD = \gamma$, & per superius ratiocinium est $BE = \frac{\beta\beta}{a}$, & $CE = \frac{\gamma}{2}$;

quare $\beta\beta (BCq) = \frac{\gamma\gamma}{4} + \frac{\beta^4}{aa} (CEq + EBq)$

In hac generalissima æquatione substitue x pro a , si quæras diametrum; pro γ si basim; si demum latus pro β ; & reperies superiores æquationes, digito tangens veritatem superioris asserti.

neatur $x = \sqrt{\frac{2bb}{4bb - aa}}$ valor de AB, & æquationis $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$ alia reductio ut obtineatur $x = \frac{2b}{c} \sqrt{cc - bb}$ valor de CD; & æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ reductio longe alia ut obtineatur $x = \sqrt{(\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}c) \sqrt{cc - aa}}$ valor de BC vel BD: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad

eliciendum c , a , vel b diversis modis reduci debet:) (b) sed in harum æquationum inventionem nulla fuit diversitas. Et hinc est quod jubent ut nullum inter datas & quæsitæ quantitates habeatur discrimen. Nam cum eadem computatio cuique casui datorum & quæsitæ competat, convenit ut sine discrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi: vel potius convenit ut fingas quæstionem de ejusmodi datis & quæsitæ propositam esse per quas arbitreris te posse ad æquationem facillime pervenire.

VI. (i) Proposito igitur aliquo problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæsitæ habito discrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependant ut cognoscas quænam si assumantur, synthetice gradiendo, dabunt ceteras. Ad quod faciendum non opus est ut prima fronte de modo cogites quo aliæ ex aliis per calculum algebraicum deduci possint, sed sufficit animadversio generalis quod possint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratia; si quæstio sit de circuli diametro AD tribusque lineis AB, BC, & CD in semicirculo inscriptis, & ex reliquis datis quærat BC; primo intuitu manifestum est diametrum AD determinare semicirculum, dein lineas AB & CD per inscriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæsitum BC idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per analysin eruatur non ita manifestum est. Hoc idem quoque de AB vel CD, si ex reliquis datis quærerentur, intelligendum est. Quod si AD ex datis AB, BC, & CD quæreretur, æque patet id non fieri posse synthetice; siquidem punctorum A ac D distantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ sunt inscribendæ, & ille circulus non datur ignota AD diametro. Rei igitur natura postulat ut AD non syntethice sed ex ejus assumptione quærat ut ad data fiat regressus. (k)

VII.

(b) Hic Auctori æquatio $\frac{aa}{4} + \frac{b^4}{cc} = bb$ eadem præstat, ac nobis æquatio $\frac{yy}{4} + \frac{b^4}{aa} = \beta\beta$.

nam recta quæsitæ symbolo sit distinguenda. Probe enim scire debemus quod quæri debeat, & plures sæpe sunt lineæ, quæ, si magnitudine &c. darentur, problema solverent. In hoc labyrintho filus est regula sequens Auctoris.

(i) Antequam problema ad æquationem deducendum aggredimur, prænotandum est unde ratiocinium incipiemus, ne temere persensuosa & invia loca agamur, & deinde quæ-

(k) Huic regulæ adde has.

1. Si tales plures adsint ex iis eligi debet ea, cujus valores sunt pauciores. Æquatio enim inferioris gradus hinc exsurget.

VII. Cum varios ordines, quibus termini quæstionis sic evolvi possint, perspexeris, *e syntheticis quoslibet adhibe, assumendo lineas tanquam datas, a quibus ad alias facillimus videtur progressus & ad ipsas vicissim difficillimus.* Nam computatio, ut per varia media possit incedere, tamen ab istis lineis initium sumet; ac promptius perficietur fingendo quæstionem ejusmodi esse ac de istis datis & quæsito aliquo ab istis facillime prodituro institueretur, quam de quæstione, prout revera proponitur, cogitando. Sic in exemplo jam allato si ex reliquis datis quæritur AD; cum id synthetice fieri non posse percipiam, sed ab ipso tamen, si modo daretur, discursum ad alia directo nexu incedere, assumo AD tanquam datum & abinde computationem ab assumptis ad ceteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem alicujus quantitatis valores semper obtinebitur, sive ex valoribus unus sit litera sub initio operis quantitati pro nomine imposita, & alter per computationem inventus, sive uterque per computationem diversimode institutam inveniatur.

TAB. I.
Fig. 7.

VIII.

2. Si vero plures sint, quarum valores numero sint æquales, ea sumenda, qua plures habet æquales magnitudine.

3. Facilius enim solvuntur æquationes, in quibus aliqui valores æquales sunt, ut infra videbis; & præterea minus anceps est problematis solutio, & æquatio simplicior. Nam si æquatio duarum dimensionum duos æquales valores habeat, ea erit aut non affecta, aut binomii quadratum; quarum radix facilius invenitur, quam æquationis quadraticæ affectæ, & æquatio ipsa certe simplicior est.

4. Ad regulas has servandas plurimum conducit pendere utrum quæsita positio varia possit esse; tunc enim duo habentur valores, si ea duos locos occupare potest; tres, si tres locos; &c. Ex. gr. in problemate artic. I, quia unum circum possumus dato triangulo circumscribere, una est diametri magnitudo, id est, x habere nequit duos valores inæquales; & quia una ex legibus æquatione expressa est, quod hæc diameter ad datam chordam normalis est, hæc diameter ad triangulum relata unam habet positionem, sed cum idem triangulum ad contrarias partes verti possit, ut *Bcd*, & nullo pacto liceat æquatione determinare utrum priorem, vel secundum situm obtineat, idcirco x duos valores habere debet, sed æquales, quorum alter negativus, alter positivus; & hoc revera indicat æquatio

$$xx = \frac{4b^4}{4bb - aa}, \text{ nam extracta radice habetur } x = \frac{\pm 2bb}{\sqrt{4bb - aa}}.$$

Si vero quæraturs basis (art. III. hujus); accurate loquendo, basis dimidiata quæritur; nam,

ea data, datur tota, tunc autem $\frac{x}{2}$ (EC) habet duos valores æquales; sed alterum positivum, alterum negativum, quod innuitur ab æquatione $\frac{xx}{4} = \frac{bbcc - b^4}{cc}$; nam $\frac{x}{2} = \pm \frac{b}{c} \sqrt{cc - bb}$.

Si demum petatur latus, eodem pacto quæritur CB, ac BD, quare jam duos valores æquales habere debet, sed & (juncta AD) est etiam CAD triangulum Ifocele eidem circulo ACBD inscriptum, quare x debet habere quatuor valores, quorum bini sunt æquales, quod reipsa docet æquatio inventa pro hac hypothesisi.

Ita pariter in hoc problemate de circuli diametro, & tribus rectis inscriptis; si inscriptæ sint ut in figura, habebitur unus valor diametri, alter si CB sit ubi nunc est BA, & hæc ubi illa, alter si BC veniat in CD, & hæc in BC, quare x habebit tres saltem valores.

5. Cum vero plures habentur quantitates, quales describuntur in N^o. 2. hujus, valores inæquales arte aliqua revocandi sunt ad æqualitatem: aut nova quæsita introducenda in problemate, ita ut ha inventa dent reliquas.

Hujus regulæ explicatio, exempla, & usus infra non raro occurrent, & jam supra occurrerunt in prob. I. XIII. &c.

VIII. Ceterum ubi terminos quæstionis sic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares istos nexus sive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videbantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice designare volumus, circuitum plerumque quoad constructiones schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam exigunt, quemadmodum de BC ex AD, AB, & CD colligendo constare potest. Per ejusmodi enim propositiones vel enunciationes solummodo gradiendum est quæ aptæ sunt ut terminis algebraicis designentur, quales præsertim ab Axiom. 19, Prop. 4. lib. 6, & Prop. 47. lib. 1. Elem. proveniunt.

IX. *Imprimis* itaque promovetur calculus per additionem vel subtractionem linearum, eo ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

X. *Secundo* promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut supra) factum a mediis terminis divisum per alterutrum extremorum esse valorem alterius. Vel, quod perinde est, si valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum similitudine maxime se prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignoscatur, in iis comparandis Analysta debet esse perspicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 16, 29, & 32, lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8, lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri potest Prop. 3. lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præstant. Prop. 35, & 36. lib. 3.

XI. *Tertio* promovetur per additionem vel subtractionem quadratorum. In triangulis namque rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximi, vel a quadrato maximi lateris subducimus quadratum unius e minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

XII. Atque his paucis fundamentis (si adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem, cum de superficiebus agitur, ut & aliquæ propositiones ex lib. 11. & 12. desumptæ cum agitur de solidis,) tota ars analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quin etiam ad solas linearum ex partibus compositiones & similitudines triangulorum possunt omnes problematum difficultates reduci; adeo ut non opus sit alia theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo resolvi possunt, & proinde solutiones etiam quæ ex istis depromuntur. Inque hujus rei instantiam subjunxi problema de perpendicularo in basem obliquanguli trianguli demittendo sine adjumento Prop. 47. lib. 1. solutum. Etsi vero juvet simplicissima principia a quibus problematum solutiones dependent non ignorasse, & istis solis adhibitis posse quæ-

quælibet solvere : expeditionis tamen gratia convenit ut non solum Prop. 47. lib. 1. Elem., cujus usus est frequentissimus; sed & alia etiam *theoremata* nonnunquam adbeantur.

XIII. Quemadmodum si, perpendicularo in basem obliquanguli trianguli demisso, de segmentis basis ad calculum promovendum agatur; ex usu erit scire, quod differentia quadratorum e lateribus æquetur duplo rectangulo sub basi & distantia perpendiculari a medio basis. (1)

XIV. Si trianguli alicujus verticalis angulus bisecetur, computationi non solum inserviet quod basis secetur in ratione laterum (*m*), sed etiam quod differentia factorum a lateribus & a segmentis basis æquetur quadrato lineæ bisecantis angulum. (*n*)

XV.

(1) Hanc propositionem demonstrat PAPPUS *Coll. Math. lib. IV. Prop. 120.* Et COMMANDINUS in suo commentario ad PAPPUS *Collect. Mathem. lib. IV. Prop. 7.* Tamen cum non ubique proster, eam addere libet.

TAB. A. Fig. 7. Sit Triangulum quodvis ABC; perpendicularis demissa a vertice B anguli ABC in subjectam basim AC sit AD; & basis AC bisecta sit in E. Centro B, radio BA, laterum minimo describatur circulus occurrens basi AC in F, & lateri BC in G. Quoniam major pars CD æquat semisummam una cum semidifferentia totius, & est CE semisumma; erit ED semidifferentia. Sed CF est differentia inter partes CD, majorem & DA, vel DF minorem; ergo CF est dupla ipsius DE; & rectangulum sub AC; DE æquale bis rectangulo ACF.

Nunc producat latus CB donec rursus circulo occurrat in H. Rectangulum HCG æquale est rectangulo ACF (36. III. Elem.) & est rectangulum HCG differentia quadratorum CB & BG vel BA (6. II. Elem.) Ergo &c.

(*m*) EUCLIDES 3. VI. hanc propositionem demonstrat quando interior est angulus bisectus. Vera tamen est etiam quando externus angulus bisecatur, & eodem pacto ostenditur.

TAB. A. Fig. 8. Fig. 9. (*n*) 12. Si trianguli cujusvis ABC angulus quilibet (vel interior ACE, vel exterior BCE) bisecetur recta CD occurrente basi AB in D, erit differentia inter rectangulum contentum a lateribus AC, CB angulum bisectum comprehendentibus, & illud quod continetur a baseos segmentis AD, DB æqualis quadrato ex CD, recta angulum bipartiente.

Fiat super AD in puncto D angulus ADH æqualis angulo ACD, & producat DH donec

nec lateri AC (producto quatenus opus est) occurrat in H. Angulus AHD æquat angulum ADC (Eucl. 32. I.); adeoque similia sunt triangula ADC, AHD, (Eucl. 4. VI.).

Si nunc bifariam dividitur angulus interior; anguli AHD, DHC, simul sumpti æquantur duobus rectis æqualibus ipsis ADC, CDB simul sumptis (Eucl. 13. I.); demptis ergo æqualibus AHD, ADC, restat DHC angulo CDB par; sed & angulus HCD ipsi DCB est par, ergo angulus HDC æqualis est angulo DBC (Eucl. 32. I.), & similia sunt triangula DHC, CBD; quocirca BC est ad CD ut CD ad CH (Eucl. 4. VI.), & rectangulum sub BC; CH æquale quadrato ex CD (Eucl. 16. VI.). Atqui propter similia triangula CDA, DHA, est CA ad AD, ut AD ad AH, verum ut CA ad AD, ita CB ad BD (Eucl. 3. VI.), est ideo AD ad AH, ut CB ad BD, atque rectangulum sub AD; BD æquale rectangulo sub AH; CB (Eucl. 16. VI.); quapropter addendo æqualibus æqualia, rectangula sub BC; AH, & sub BC; CH utraque simul (id est rectangulum sub BC; CA (Eucl. 1. II.)) æqualia quadrato ex CD una cum rectangulo sub AD; DB; atque utrinque demto rectangulo sub AD; DB, differentia rectangulorum &c.

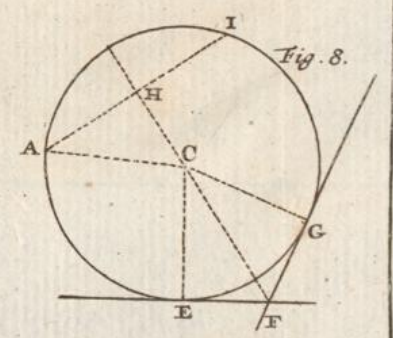
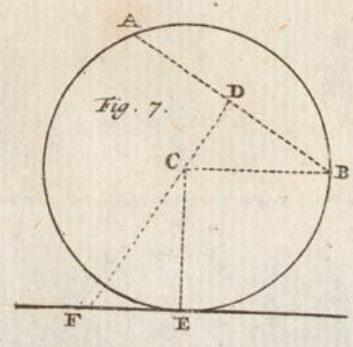
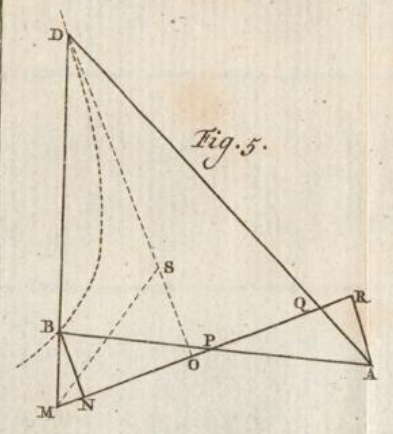
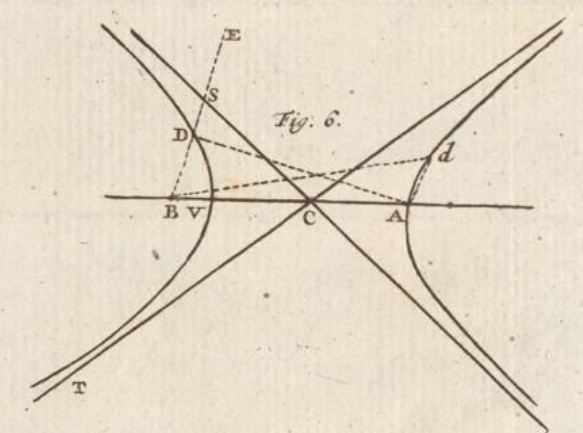
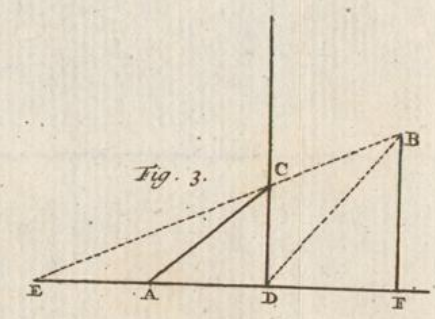
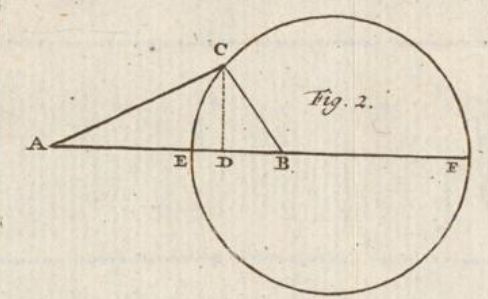
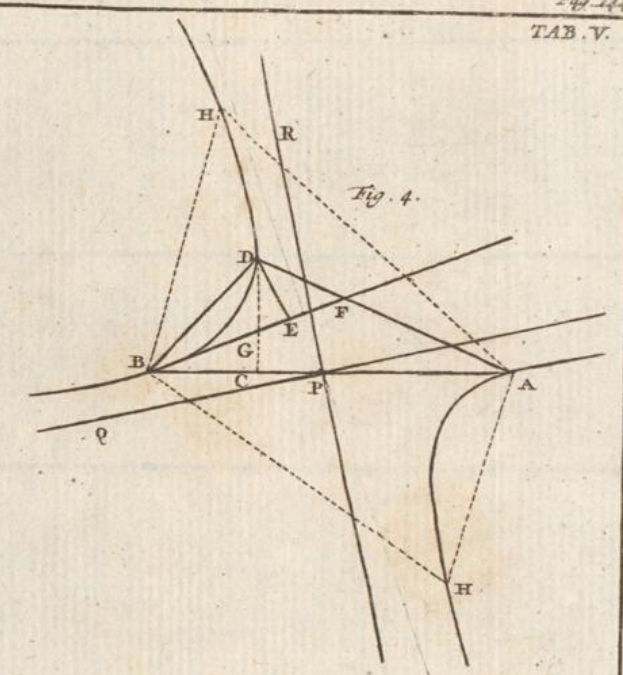
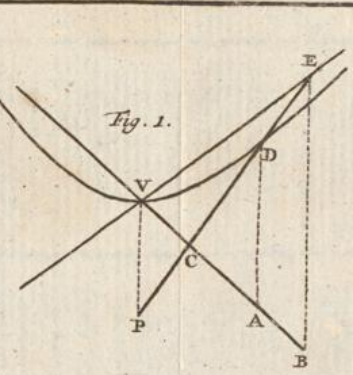
Si autem bisecetur angulus exterior; angulus AHD æquat angulum ADC, & ex hypothesis angulus HCD æquat angulum DCB; quam ob rem angulus CDH æquat angulum CBD, & similia sunt triangula BDC, DHC; est itaque HC ad CD, ut CD ad CB, aut rectangulum sub BC; CH æquale est quadrato ex CD. Atqui ob similia triangula ADC, AHD, est AC ad AD, ut AD ad AH; est etiam AC ad AD ut CB ad BD, (vide supra), ergo AD ad AH est ut BC ad BD, & rectan-

eris reducere conetur. VIX

Tab.
Fig. 8

AC; CB & quadratum ex CD simul, æquantur rectangulo sub AD; DB & ablato hinc inde rectangulo sub AC; CE, quadratum rectæ bifecantis angulum &c.

(a) Cujus Theorematis obvia est demonstratio.



propter similia triangula ABD & CEB) dant BE & CE. BD, BE (propter triangulum BED rectangulum) dant ED; & ED — EC dat CD. Unde obtinebitur æquatio inter valorem de CD sic inventum & literam pro ea suffectam. Possumus etiam (& maximam partem satius est quam opus in serie continuata nimis prosequi), a diversis principiis computationem incipere, aut saltem diversis modis ad eandem quamlibet conclusionem promovere, ut duo tandem obtineantur ejusdem cujusvis quantitatis valores qui æquales ponantur. Sic AD, AB, & BC dant BD, BE, & CE ut prius; deinde CD + CE dat ED; ac denique BD & ED (propter triangulum rectangulum BED) dant BE. Potest etiam computatio hac lege optime institui ut valores quantitatum investigentur quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit; & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cum relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12. lib. 2. Elem. constet; nempe quod sit $BDq - BCq - CDq = 2CD.CE$: quæro BDq ex assumptis AD & AB; ac CE ex assumptis AD, AB, & BC. Et assumendo denique CD facio $BDq - BCq - CDq = 2CD.CE$. Ad hos modos & hujusmodi consiliis ductus, de serie analyseos deque schemate propter eam construendo semper debes una prospicere.

XVIII. Ex his, credo, manifestum est quid sibi velint Geometræ cum jubent putes factum esse quod quæris. Nullo enim inter cognitæ & incognitæ quantitates habito discrimine, quaslibet ad ineundum calculum assumere potes quasi omnes ex prævia solutione fuissent notæ, & non amplius de solutione problematis, sed de probatione solutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam descriptis computandi modis, etsi forte AD revera quæratur, fingo tamen CD quærendum esse, quasi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadraret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus posterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem e relationibus linearum utcunque eruendam: & in ejus rei gratiam assumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac si (quæstione prius soluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæc probe satisfaciunt, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hac ratione & consiliis prima fronte aggressus sum, sed cum ad æquationem deventum est, sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitæ sæpenumero assumimus quam in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55^o sequentium problematum instantiam videre est, ubi $a, b, \& c$ in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis conicæ assumpsi, ut & alias lineas r, s, t, v de quibus problema, prout proponitur, nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire; hoc solum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri possint quot assumptæ sunt quantitates revera incognitæ.

TAB. I.
Fig. 8.

XIX. Postquam de computandi methodo constat & ornatur schema, quantitativis quæ computationem ingredientur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes condiciones involvunt, & operi præ ceteris accommodatæ videntur, & conclusionem (quantum possis conjicere) simpliciore reddent, sed non plures tamen quam proposito sufficiunt. Itaque pro quantitativis, quæ ex aliarum vocabulis facile deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod, minimum, sine nomine permittere solemus, eo quod valor ejus e reliquorum nominibus facile derivari possit. Quem admodum in exemplo jam allato, si dicam $AD = x$ & $AB = a$, ipsum BD nulla litera designo, quod sit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{xx - aa}$. Dein, si dicam $BC = b$, cum triangula DAB & BCE sint similia, & inde lineæ $AD : AB :: BC : CE$ proportionales, quarum tribus AD , AB , & BC imposita sunt nomina; ea propter quartam CE sine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum usurpo. Atque ita si DC vocetur c , ipsi DE nomen non assigno, quod ex partibus ejus DC & CE , five c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat.

XX. Ceterum dum de his moneo, problema ad æquationem pene reductum est. Nam, postquam literæ pro speciebus principalium linearum præscriptæ sunt, nihil aliud agendum restat quam ut ex istis speciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviso in æquationem coeant. Et in hoc casu nihil restare video nisi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE . Nempe est

$$BCq - CEq \text{ (five } bb - \frac{aabb}{xx}) = BEq$$

ut &

$$BDq - DEq \text{ (five } xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}) = BEq.$$

Et hinc (utrobique deleta $\frac{aabb}{xx}$) æquationem habeo

$$bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}$$

Quæ reducta fit

$$x^3 = + aa + bbx + 2abc + cc$$

XXI.

XXI. Cum vero de solutione problematis hujus plures modos, et si non multum dissimiles, in præcedentibus recensuerim, quorum iste de Prop. 12. Lib. 2. Elem. desumptus sit ceteris quodammodo concinnior; eundem placeat etiam subungere. Sit itaque $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, & $CD = c$, eritque $BDq = xx - aa$, & $CE = \frac{ab}{x}$ ut prius. Hisce dein speciebus in theorema $BDq - BCq - CDq = 2CD.CE$ substitutis orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & facta reductione

$$x^3 = +aa + bbx + 2abc. \text{ Ut ante.}$$

Sed ut pateat quanta sit in solutionum inventionem varietas, & proinde quod in eas incidere prudenti Geometrae non sit admodum difficile, visum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque quidem ducto diagonio BD si vice perpendiculari BE a puncto B in latus DC supra demissi, demittatur perpendicularum a puncto D in latus BC vel a puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcumque resolvatur, iisdem ferme, quas jam descripsi methodis, ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes.

XXII. Quemadmodum si diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur TAB. I. Fig. 9. BD ex assumptis AD & AB; ut & AC ex assumptis AD & CD, deinde per notum theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe quod sit $AD.BC + AB.CD = AC.BD$ obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c ; erit $BD = \sqrt{xx - aa}$ & $AC = \sqrt{xx - cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in theorema jam recensitum substitutis, exhibit

$$xb + ac = \sqrt{xx - cc} . \sqrt{xx - aa}.$$

Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum

$$x^3 = +aa + bbx + 2abc.$$

XXIII. Ceterum ut pateat etiam quo pacto solutiones ex isto theoremate petita possint inde ad solas triangulorum similitudines redigi; erigatur BH ipsi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula BCD, BHA similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH a duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque quod

quod ex proportionalitate $BD.AD::BC.HC$ detur HC ; ut & AH ex proportionalitate $BD.CD::AB.AH$. * Unde cum sit $AH+HC=AC$, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c , nec non ipsarum AC & BD valoribus $\sqrt{xx-cc}$ & $\sqrt{xx-aa}$;

prima proportionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx-aa}}$, & secunda dabit $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx-aa}}$. Unde propter $AH+HC=AC$ erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}} = \sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ (multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus sæpius descriptam.

TAB. I.
Fig. 10.

XXIV. Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F , & fient triangula ABF & CDF similia, quippe quorum angulus ad F communis est, & anguli ABF & CDF (dum complent angulum CDA ad duos rectos per 13. 1. & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem si præter quatuor terminos de quibus instituitur quæstio, daretur AF , proportio $AB.AF::CD.CF$ daret CF . Item $AF-AD$ daret DF , & proportio $CD.DF::AB.BF$ daret BF ; unde (cum sit $BF-CF=BC$) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ AD ac DF tanquam datæ assumantur, restat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio $AD:AB::AB.AG$ dabit AG ; quo habito, theorema e 13. 2. Elem. petitur, nempe quod sit $BFg+2FAG=ABg+AFg$, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto $AF=y$: erit (insistendo vestigiis theoriæ jam excogitatæ) $\frac{cy}{a}=CF$. $y-x=DF$. $\frac{(y-x)a}{c}=BF$.

Indeque $\frac{(y-x)a}{c} - \frac{yc}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x}=AG$,

adeoque $\frac{aayy-2aaxy+aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa+yy$, æquatio secunda.

Quæ duæ per reductionem dabunt æquationem desideratam. Nempe valor ipsius y per æquationem priorem inventus est $\frac{abc+aax}{aa-cc}$, qui in secundam substitutus, dabit æquationem ex qua recte disposita fiet

$$x^3 = \frac{+aa}{+cc} + bbx + 2abc, \text{ ut ante } (p).$$

* Fac æquales angulos ABC ; HBC ; ex his proportionibus elice rectangula æqualia, & habebis demonstratum ipsum theorema de quadrilateris &c.

(p) Nam æquatio $\frac{aayy-2aaxy+aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa+yy$ multiplicata per cc , &

per x , dat $aayyx-2aaxxy+aax^3+2aaccy = aaccx+ccyyx$; & omnibus membris in eandem partem collatis, ut, summa fiat $=0$; ac dispositis juxta dimensionem y , habemus $yyaax-yyccx-2aaxxy+2aaccy+aax^3-aaccx=0$, id est $yy(aax-ccx)-y(2aaxx-2aacc)+aax^3-aaccx=0$; & substituendo pro yy , & $-y$ valores

XXV.

aabcc

XXV. Atque ita si AB ac DC producantur donec sibi mutuo occurrant, solutio haud aliter se habebit, nisi forte futura sit paulo facilior. Quare aliud hujus rei specimen e fonte multum dissimili petitum potius subjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propositi, idque dupliciter. Ducco igitur diagonium BD ut in duo triangula quadrilaterum resolvatur. Dein usurpatis linearum vocabulis x, a, b, c , ut ante, invenio $BD = \sqrt{xx - aa}$ indeque $\frac{1}{2} a\sqrt{xx - aa}$ ($= \frac{1}{2} AB \cdot BD$) aream trianguli ABD. Porro demisso BE perpendiculariter in CD, erit (propter similia triangula ABD, BCE) $AD \cdot BD :: BC, BE$, & proinde $BE = \frac{b}{x} \sqrt{xx - aa}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x} \sqrt{xx - aa}$ ($= \frac{1}{2} CD \cdot BE$) erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo oriatur $(\frac{ax + bc}{2x}) \sqrt{xx - aa}$ area totius quadrilateri. Non secus dicendo diagonium AC & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $(\frac{cx + ba}{2x}) \sqrt{xx - cc}$. Quare ponendo hasce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $(ax + bc) \sqrt{xx - aa} = (cx + ba) \sqrt{xx - cc}$, æquatio, quæ quadrando ac dividendo per $axx - ccx$, redigetur ad formam sæpius inventam

$$x^3 = \frac{+aa}{+bbx + 2abc.} + cc$$

XXVI. Ex his constare potest quanta sit solvendi copia & obiter quod alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendæ sunt donec modum, quam poteris, idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam, quæ leviori curæ se offerunt, laborem satis molestum plerumque parient si ad opus adhibeantur. Sic in problemate de quo agitur, nil difficilius foret in sequentem modum, quam in aliquem e præcedentibus incidere. Demissis nempe BP & CS ad AD normalibus, ut & CT ad BP, figura resolvatur in triangula rectangula. Et videre est quod AD & AB dant AP: AD & CD dant SD: AD — AP — SD dat PS. vel TC, & BP — TP dat

TAB. I.
Fig. 11.

$$\frac{aabbcc + 2a^2bcx + a^4xx}{(aa - cc)(aa - cc)}, \& \frac{abc - aax}{aa - cc},$$

$$\text{erit } \frac{aabbccx + 2a^2bcxx + a^4x^3 - 2a^2bcxx}{aa - cc} =$$

$$\frac{-2a^4x^3 + 2a^2bc^3 + 2a^4ccx}{aa - cc} + aax^3 - aaccx = 0;$$

& deletis delendis, ac sublata fractione,
 $aabbccx - a^4x^3 + 2a^2bc^3 + 2a^4ccx + a^4x^3 - aaccx^3 - a^4ccx + aacc^4x = 0$; rursum deletis delendis, cunctis per $aacc$ divisus, ac transposito $-x^3$, erit Auctoris æquatio:

dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur æquatio. Si quis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos algebraicos profusiores quam sunt ulli præcedentium incidet & ad finalem æquationem ægrius reducibiles. (q)

Et

(q) Rationes libet subducere ob singularem observationem, cui viam faciunt. Sit, ut prius, AD = x; AB = a; BC = b; CD = c.

$$\text{Erit, DA (x) . AB (a) :: AB (a) . AP} = \frac{aa}{x};$$

$$\& \text{AD (x) . DC (c) . DC (c) . DS} = \frac{cc}{x}$$

per EUCL. 8. VI. si enim jungerentur BD, & CA, triangula ABD, ACD essent rectangula.

Igitur

$$\text{PS} = \text{DA} - \text{AP} - \text{SD} = x - \frac{aa - cc}{x}$$

$$= \frac{xx - aa - cc}{x} = \text{TC.}$$

Nunc

$$\text{BP} = \sqrt{\text{BA}^2 - \text{AP}^2} = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$$

Et

$$\text{CS} = \sqrt{\text{CD}^2 - \text{DS}^2} = \sqrt{cc - \frac{c^4}{xx}} = \text{TP.}$$

Quare

$$\text{BT} = \text{BP} - \text{PT} = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} - \sqrt{cc - \frac{c^4}{xx}}$$

Est autem

$$\text{BC}^2 = \text{CT}^2 + \text{TB}^2$$

Ergo

$$bb = \frac{x^4 - 2aaxx - 2ccxx + a^4 + 2aacc + c^4}{xx}$$

$$+ aa - \frac{a^4}{xx}$$

$$- 2\sqrt{aacc - \frac{aac^4 - ccc^4}{xx} + \frac{a^4c^4}{x^4}} + cc - \frac{c^4}{xx}$$

atque, omnibus ductis in xx ac deletis delendis, & quadrando

$$4aaccx^4 - 4aac^4 - 4a^4cc - 4a^4c^4 =$$

$$+ 6aacc$$

$$- 2aa + 2aabb - 4a^4cc$$

$$- 2ccx^6 + a^4x^4 - 4aac^4x^2 + 4a^4c^4$$

$$+ 2bb$$

$$+ 2bbcc$$

$$+ b^4$$

ac, deletis delendis & cunctis per xx divis, ac,

$$+ a^4$$

$$+ b^4$$

$$x^6 - 2aa - 2bbx^4 + c^4 - 2aabbx^2 - 4aabbcc = 0$$

$$- 2cc$$

$$+ 2aacc$$

$$+ 2bbcc$$

quæ æquatio divisa per

$$x^3 - b^2x + 2abc = 0, \text{ dat } x^3 - b^2x - 2abc = 0$$

ut ante

Sed, cur hæc analysis dat æquationem sex dimensionum, & quid sibi vult ille divisor trium dimensionum? Dicam

Super diametro AD quæsitæ potest ex tribus datis rectis describi aliud quadrilateri genus ADCBA, in quo si tentetur æquatio Art. XX. hujus, omnia, quæ ibi invenimus, se huic quadrilatero aptare comperimus præter perpendicularem BE, quæ in Fig. 8. Tab. 1. extra quadrilaterum cadere debet, quia angulus BCD, insitens arcui semicirculorum superanti arcui AB, est obtusus, & perpendicularis cadere debet intra crura anguli acuti. Sed in hac nostra Figura, anguli BCD, BDC, insistentes arcui minori quam semicirculus est, sunt acuti, & perpendicularis BE intra quadrilaterum cadere debet. Hinc sequitur quod recta DE, quæ

apud Auctorem æquat $c + \frac{ab}{x}$, apud nos sit

$c - \frac{ab}{x}$, & rectangulum ab habere debeat

apud Auctorem & apud nos contraria signa. Hoc rectangulum invenitur in ultimo termino, & est negativum apud NEWTONUM, ergo nobis debet esse positivum, ut in divisore est.

Idem accidit in solutione Art. XXI. hujus. Ibi repetit Auctor $\text{DB}^2 - \text{BC}^2 - \text{CD}^2 = 2\text{DC} \cdot \text{CE}$, quia scilicet angulus DCB illi obtusus est; nos autem reperiemus $\text{DB}^2 - \text{BC}^2 - \text{CD}^2 = -2\text{DC} \cdot \text{CE}$, quia nobis angulus DCB est acutus.

Pariter in solutione Art. XXII; quia rectæ AB, CD, sunt Auctori latera quadrilateri; in Fig. 9. ve-

Tab. B.
Fig. 1.

Tab. I.
Fig. 9.

QUOMODO QUÆSTIONES GEOMET. AD ÆQUAT. REDIG. 151

Et hæc de solutione problematum in rectilinea Geometria; nisi forte operæ pretium fuerit annotasse præterea quod, cum anguli, siue positiones linearum per angulos expressæ, statum quæstiones ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportionēs, tales nempe quæ

TAB. B.
Fig. 2.

venit ille $bx + ac = \sqrt{(xx - cc)} \sqrt{(xx - aa)}$; & quia rectæ AB, CD sunt nobis diagonales, habebimus, non, AD.BC + AB.CD = AC.BD, ut NEWTONUS, sed AD.BC + AC.BD = AB.CD, aut $bx + \sqrt{(xx - cc)} \sqrt{(xx - aa)} = ac$ vel $\sqrt{(xx - aa)} = ac - bx$, quas quantitates si quadres, in hac postrema invenies $zabex$, quod rectangulum NEWTONO erat + $zabex$, & hinc eadem conficiuntur quæ supra.

TAB. I.
Fig. 9.

Eodem pacto, solutio Art. XXIII. nostro quadrilatero accommodata, habebit perpendicularem BH occurrentem ipsi AC extra quadrilaterum, qui occurfus intra quadrilaterum fieri debet in hypothefi Auctoris. Cum enim in ejus figura, sit angulus ACB acutus, & rectæ AB, AC convenient, debent anguli ABC, BCA esse minores duobus rectis, (EUCL. 32. I.) Ergo, fortius, angulus rectus HBC, & idem acutus BCA duobus rectis erunt minores, & ideo rectæ BH, CA intra quadrilaterum concurrent, (EUCL. Ax. 11.) At in nostra figura, angulus ACB est obtusus, qui cum recto, (quem faceres ducendo ad CB perpendiculari ad punctum B) superaret duos rectos. Quapropter rectæ concurrent extra quadrilaterum. Idcirco erit AH — HC = AC

TAB. B.
Fig. 2.

$\frac{ac - bx}{\sqrt{(xx - aa)}}$ recta quæ NEWTONO erat

$AH + HC = AC = \frac{ac + bx}{\sqrt{(xx - aa)}}$; unde constat quod, si æquationem formes & partes quadres, invenies $zabex$ rectangulum, quod Auctor invenit + $zabex$. Sunt autem, nobis etiam, similia Triangula CBH, DBA; Nam quia angulus HCD est rectus, & anguli HCB, BHC æquant rectum, dempto communi HCB, erit BCD (vel æqualis BAD) æqualis CHB, & præterea anguli CBH, ABD sunt recti, ergo &c. Similia quoque sunt Triangula ABH, BCD; nam, præter angulos HAB, CBD æquales, æquales habent etiam angulos ABH, CBD, quorum quisque constat ex recto & ex communi CBA.

TAB. B.
Fig. 3.

Sed in solutione Art. XXIV; rectæ BC, AD possunt convenire ad partes punctorum B, D.

Tunc BC = CF — FB = $\frac{cy}{a} - \frac{ay + ax}{c}$

= b unde fit $\frac{a^2x - abc}{a^2 - c^2} = y$; cujus valor

erat in hypothefi Newtoniana $\frac{aax + abc}{aa - cc}$; unde signum ipsius abc debet esse nobis contrarium signo, quod habet in æquatione Auctoris.

Si vero rectæ BC, AD convenient ad partes punctorum A, C; valor ipsius y idem nobis erit ac NEWTONO, sed rectangulum FAG nobis erit negativum, quia angulus FAB est obtusus, & ideo (EUCL. 12. II.) $BF^2 = FA^2 + AB^2 + 2FAG$; aut $BF^2 - 2FAG = FA^2 + AB^2$; sed $2FAG = \frac{2a^2y}{x}$

TAB. B.
Fig. 4.

$= \frac{2aa(abc + aax)}{x \frac{aa - cc}{x}}$, & rursus signum ipsius abc in una hypothefi contrarium erit signo ejusdem quantitatis in altera.

Demum solutio Art. XXV. paulo difficilior, ut videtur, potest aptari nostræ hypothefi, idcirco libet eam diligentius prosequi.

Et primo quidem, cum in figura Auctoris, anguli BCD, CBA sint obtusi, perpendiculares a verticibus B, C actæ in opposita latera DC, AB, debent cadere extra quadrilaterum. Sed in figura nostra, quia iidem anguli BGD, CBA sunt acuti, ut & oppositi BDC, BAC, perpendiculares actæ a verticibus B & C in opposita latera CD, BA debent cadere intra quadrilaterum.

TAB. I.
Fig. 10.

TAB. B.
Fig. 5.

Præterea, in Auctoris figura, triangula ABD, DCB simul sumpta quadrilaterum conficiunt, ut & triangula ACD, CBA. In nostra vero eadem triangula ABD, DCB simul sumpta quadrilaterum AIBCDIA superant bis triangulo BID; & triangula CAD, CBA simul sumpta quadrilaterum superant bis triangulo CIA, & ideo illorum summa non æquat summam horum. Si autem ex triangulo ABD auferas triangulum CBD, supererit differentia triangulorum AID, CIB; & si ex triangulo ACD auferas triangulum CBA, supererit differentia eorundem triangulorum AID, CIB, quæ differentia sunt æquales. Igitur poni debet

$$(ax - bc) \sqrt{(xx - aa)} = (cx - ab) \sqrt{(xx - cc)}$$

unde, (quadrando, delendo contraria, & dividendo per x,) fiet.

$$\frac{a^2}{c^2} x^4 + \frac{c^4}{a^2} - \frac{a^2 b^2}{c^2} x^2 + \frac{2a^3 b c}{c^2} = 0$$

quæ

quæ ab angulis datis possunt per calculum trigonometricum derivari, aut a quibus inventis anguli quæriti per eundem calculum prodeunt; hoc est quæ se mutuo determinant: cujus rei plures instantias videre est in sequentibus.

TAB. I.
Fig. 12.

XXVII. Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ designari solent vel describendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certa aliqua lege dispositarum & ad curvas desinentium. Idem fecerunt Veteres per sectiones solidorum, sed minus commode. Computationes vero, quæ curvas primo modo descriptas respiciunt, haud secus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum si AKC sit curva linea descripta per K verticale punctum normæ AKΦ, cujus unum crus AK per punctum A positione datum libere dilabitur, dum alterum KΦ datæ longitudinis super rectam AD positione datam promovetur, & quærat punctum C in quo recta quævis CD positione data hanc curvam secabit, duco rectas ACF, quæ normam in positione quæsitâ referant, & relatione linearum (sine aliquo dati & quæsitâ discrimine aut respectu ad curvam) considerata, percipio dependentiam ceterarum a CF & quamlibet harum quatuor BC, BF, AF & AC syntheticam esse, quarum duas itaque, ut $CF = a$ & $CB = x$, assumo, & inde computum ordiendo statim lucratus sum $BF = \sqrt{aa - xx}$

& $AB = \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$ propter angulum rectum CBF, lineasque BF. BC ::

BC. AB continue proportionales. Porro, ex data positione CD, datur AD, quam itaque dico b ; datur etiam ratio BC ad BD, quam pono d ad e , & fit $BD = \frac{ex}{d}$ & $AB = b - \frac{ex}{d}$. Est ergo $b - \frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$, æquatio quæ (quadrando partes & multiplicando per $aa - xx$ &c.) reducetur ad hanc formam.

$x^4 =$

quæ divisa per $a^2 - c^2$ dat

$$\begin{array}{r} - a^2 \\ x^4 - c^2 x + 2abc = 0. \\ - b^2 \end{array}$$

in qua rursus signum facti $2abc$ nobis contrarium illo est, quod NEWTONUS invenit. Constat igitur, quod harum solutionum nulla potest nostræ hypothese aptari, quin mutationem subeat, ex qua signum ipsius $2abc$ ex negativo fit positivum.

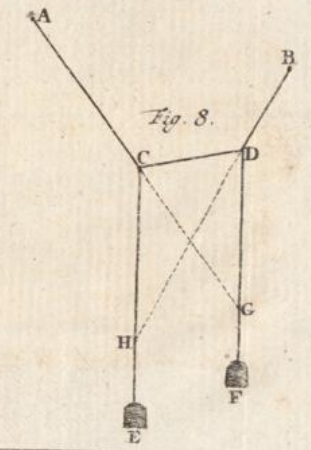
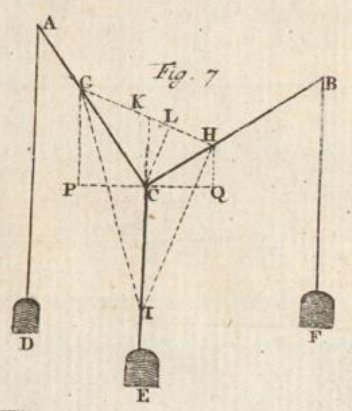
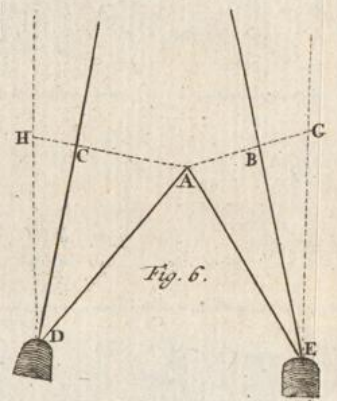
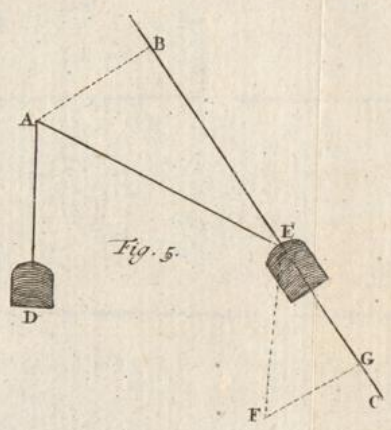
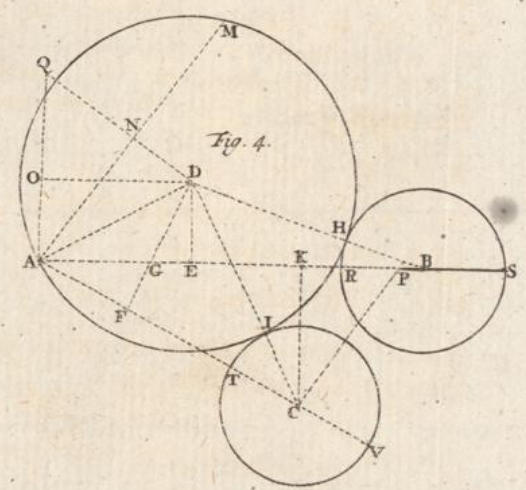
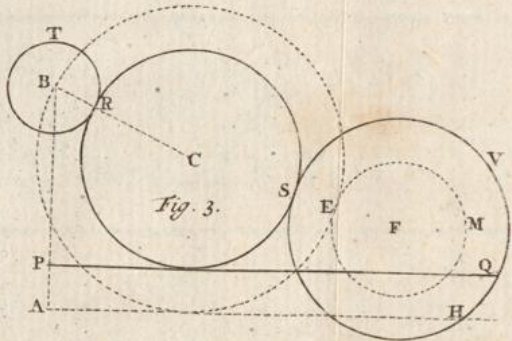
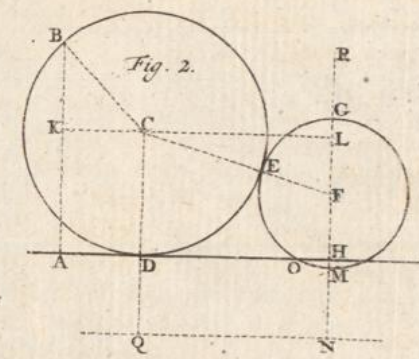
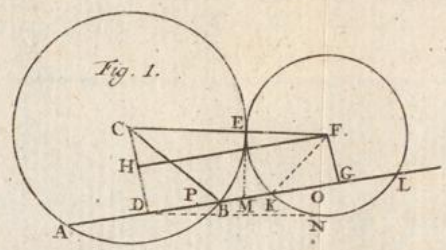
TAB. B.
Fig. 6.

Sed ultima hæc solutio Art. XXVI. utrique hypothese aptatur hac unica mutatione quod SP æquat non, ut in Auctore, AD — AP — SD, sed AP + SD — AD. Nam AP + DS = AS + 2SP + PD, & AD = AS + SP + PD, ergo, auferendo hanc ex illa, AP + DS — AD = SP = $\frac{a^2 + c^2 - x^2}{x}$, quæ

si quadretur dabit quadratum superius, nam quantitatum oppositarum eadem sunt quadrata.

Cum igitur reliqua restent, & hæc mutatio quadratum a quantitate mutata oriundum idem relinquat, patet eandem prorsus futuram æquationem hinc exsurgentem, quæ ideo ambas hypotheses debet complecti.

15. Ceterum, hæc ultima æquatio, cum ad unam hypothesim non sit coarctata, perfectior est censenda: & quando docetur æquationum idem problema solventium perfectissimam esse simplicissimam, intelligendum est hoc præceptum de iis, quæ omnes hypotheses, seu, ut vocant, *casus* problematis complectuntur.



$$x^4 = \frac{2bdex^3 - bddxx - 2aabdex + aabdd}{dd + ee}$$

unde demum e datis a, b, d & e erui debet x per regulas post tradendas, & intervallo isto x five BC acta ipsi AD parallela recta secabit CD in quæsito puncto C.

XXVIII. Quod si, non descriptiones geometricæ, sed æquationes pro curvis lineis designandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejusmodi æquationes ipsis lucro cedunt. Quemadmodum, si datæ ellipseos ACE intersectio C cum recta CD po-
TAB. I. Fig. 13.

sitione data quærat; pro ellipsi designanda sumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$, ubi x indefinite ponitur pro quolibet axis parte Ab vel AB & y pro perpendicularo bc vel BC ad curvam terminato; r vero & q dantur ex data specie ellipsis. Cum itaque CD positione detur, dabitur & AD, quam dic a ; & erit BD $a - x$: dabitur etiam angulus ADC, & inde ratio BD ad BC, quam dic 1 ad e , & erit BC (y) $= ea - ex$, cujus quadratum

$$eeaa - 2eeax + eexx \text{ æquabitur } rx - \frac{r}{q}xx.$$

indeque per reductionem orietur,

$$xx = \frac{2aeex + rx - aace}{ee + \frac{r}{q}}, \text{ seu } x = \frac{ace + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}$$

Quin etiam, etsi curva per descriptionem geometricam vel per sectionem solidi designetur, potest tamen inde æquatio obtineri quæ naturam curvæ definiet, adeoque huc omnes problematum, quæ circa eam proponuntur, difficultates reduci.

Sic in exemplo priori si AB dicatur x & BC y , tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato BC æquatur CFq, hoc

est $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; five $y^4 + xxyy = aaxx$. Estque hæc æquatio qua curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique basis longitudini AB congruens (adeoque ipsa curva) definitur, & e qua proinde solutiones problematum, quæ de hac curva proponuntur, petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur specie sed determinanda
Tom. I. V pro-

proponitur, possis pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea designanda, tanquam si daretur, assumere ut ex ejus assumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinentur: cujus rei exempla habes in nonnullis sequentium problematum, quæ in pleniorum illustrationem hujus doctrinæ & exercitium discipulorum congesti, quæque jam pergo tradere. (r)

CAPUT

(r) Hactenus quidem de problematis ad æquationem revocandis. Nunc pauca dicenda sunt de æquationum constructionibus.

16. Probe observandum est dari aliqua problemata, in quibus de lineis & figuris quidem agitur; sed algebraica unius expressio respectu alterius quaeritur; & aliqua in quibus ratio aliquid geometricè efficiendi investigatur.

17. Prioribus omnino satisfactum est inventa expressione quæ poscebatur.

18. In aliis autem etiam requiritur effectio geometrica, seu constructio.

19. Per problematis constructionem intelligitur inventio puncti, aut lineæ quæsitæ, problemati respondentis, aut illud solvens.

20. Quod sic fit in problematis unius aut duarum dimensionum. Invento quæsitæ valore, inveniendæ sunt rectæ, quæ respondent datis quantitibus simplicibus, quarum aggregatum, aut differentia æquivalent quæsitæ. Hæ rectæ, per additionem aut subtractionem, quæque per proprium signum, omnes jungendæ sunt, & sic problema est constructum.

21. Omnis fractio ($\frac{ac}{b}$) indicat inventionem quartæ proportionalis post tres datas, quarum prima est denominator, secunda unus ex factoribus numeratoris, tertia vero alter, quod fit per EUCL. 11. VI.

22. Cum vero numerator habet plus quam duas dimensiones, & denominator plus quam unam, hæc operatio repetenda est; sic recta $\frac{abcef}{ghlm}$ invenitur per has analogias $g. a :: b, n = \frac{a}{g}$ (EUCL. 15. VI.), quare $\frac{abcef}{ghlm}$ fit $\frac{cefn}{blm}$; & deinde $b. c :: e, p = \frac{ce}{b}$ unde habetur $\frac{cefn}{blm} = \frac{fnp}{lm}$, & rursus $l. f :: n, q = \frac{fn}{l}$, ac $\frac{fnp}{lm} = \frac{pq}{m}$, & de-

nique $m. p :: q, r = \frac{pq}{m}$ = datæ fractioni $\frac{abcef}{ghlm}$.

23. Omnis radix quadrata indicat lineam quæsitam esse mediam proportionalem inter duos factores quantitatis sub signo positæ, & hæc media reperitur per EUCL. 12. VI. Sic $\sqrt{3aa}$ invenitur quaerendo mediam inter $3a$, & a , ac $\sqrt{\frac{3bc}{4}}$ est media inter $\frac{3b}{2}$ & $\frac{c}{2}$ aut $3b$, & $\frac{c}{4}$, aut $\frac{3b}{4}$, & c , aut b , & $\frac{3c}{4}$ & c .

24. Si vero quantitas sub signo sit complexa, hæc in lineis exhiberi potest per similem mediæ inventionem, quando quantitas sub signo tota per eandem dividitur, aut semper per hypotenusam, aut latus trianguli rectanguli. Per hypotenusam inquam, ubi quantitas complexa est aggregatum ex simplicibus, ubi vero est differentia, per latus. Hoc pacto $\sqrt{a(a+b)}$ exhiberi potest, aut quaerendo mediam inter a , & $b+a$, nam hujus mediæ quadratum æquabit rectangulum ex illis (EUCL. 16. VI.), aut inveniendi mediam inter a ; b & a ; c , & his lineis efficiendo angulum rectum, nam hujus trianguli hypotenusam erit radix quæsitæ, ut facile deducitur ex EUCL. 47. I.

Haud aliter $\sqrt{a(a-b)}$ invenitur quaerendo mediam inter $a+b$, & $a-b$, aut latus trianguli rectanguli, cujus hypotenusam a sit radix quadrati positivi aa , & latus unum sit b radix quadrati negativi $-bb$, quod efficitur descripto semi-circulo ACB super diame- TAB. B.
metrum AB = a , & ei inscripta recta BC = b Fig. 7.
(EUCL. 1. IV.) ab altera diametri extremitate B, & juncta AC, quæ est radix quæsitæ, (EUCL. 47. I.) & sic de ceteris.

25. His recte intellectis. Quantitates ex his compositæ facile reperientur: sic $\frac{a}{b} \sqrt{ff-gg}$ obtinebitur inventa recta = $\sqrt{ff-gg}$ (No. 24. hujus) quam dico u , & postea recta = $\frac{au}{b}$.

Et hæc quidem sunt regulæ generales; at non
raro

C A P U T S E C U N D U M.

P R O B. I.

Data recta terminata BC, a cujus extremitatibus duæ rectæ BA, CA, ducuntur in datis angulis ABC, ACB: invenire AD altitudinem concursus A supra datam BC. (a)

XXVIII. Sit $BC = a$, & $AD = y$; & cum angulus ABD detur, dabitur (ex tabula sinuum & tangentium) ratio inter lineas AD & BD quam pone ut d ad e . Est ergo $d : e :: AD (y) : BD$. Quare $BD = \frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angulum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam pone ut d ad f & erit $DC = \frac{fy}{d}$. At $BD + DC = BC$, hoc est $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta multiplicando utramque æquationis per d , ac dividendo per $e + f$ evadit $y = \frac{ad}{e+f}$.

P R O B.

raro peculiaris quædam ratio ministrat simpliciores rectarum inventiones & problematum constructiones, cui rei experientia magis & ingenium, quam regulæ, conducunt.

Nam vires omnes in id intendendæ sunt, ut propositum, quam simplicius fieri possit, obtineatur.

Sic, ubi expressio algebraica solum queritur, quò simplicior illa est, eo melior: ubi vero ad constructionem progrediendum est, æquatio pluris faciendæ non est illa, quæ simplicioribus & paucioribus terminis constat, sed illa, quæ faciliorem constructionem habet; atque hæc longe est illi præferenda, ubi simul & æquationis simplicitatem & constructionis facilitatem nancisci non possumus.

(a) In hoc problemate queritur ratio exprimendi quæsitam per literas aut per numeros, nam punctum concursus geometricè datur. Summa enim angulorum trianguli datur; & dantur anguli ABC, ACB seorsim; ergo & eorum summa (3. dat.) quare & angulus BAC (4. dat.); igitur singuli anguli dantur in triangulo ABC,

& ideo triangulum specie datur (40. dat.); sed recta BC datur magnitudine, triangulum ABC datur etiam magnitudine (52. dat.); quapropter & ejus latera AB, AC magnitudine dantur, atque ideo punctum A (25. dat.). &c. Hoc problema sic potest trigonometricè enunciari.

Dato latere trianguli, & angulis supra illud constitutis, queritur distantia puncti A a recta BC.

Si centro A, radio AD describatur circulus; erit BC tangens; quare BD tangens anguli BAD, qui datur, quia est dati complementum ad rectum. Item DC est tangens anguli dati: & BC summa tangentium eorum angulorum ad radium DA; & tabulæ, datis angulis, dant tangentes; ergo, si ambo anguli dati sunt acuti, ut summa cotangentium angulorum datorum, ad radium, ita data recta ad distantiam quæsitam.

Si vero alter est obtusus; ut excessus, quæ cotangens minoris ex his angulis superat cotangentem majoris, ad radium, ita data recta ad distantiam quæsitam.

PROB. II.

Cujuslibet trianguli ABC datis lateribus AB , AC , & basi BC , quam perpendicularum AD ab angulo verticali secat in D : invenire segmenta BD ac DC . (a)

TAB. I.
Fig. 15.

XXIX. Sit $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, & $BD = x$, eritque $DC = c - x$. Jam cum $ABq - BDq (aa - xx) = ADq$;

&

$$ACq - DCq (bb - cc + 2cx - xx) = ADq;$$

Erit $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$; quæ per reductionem fit

$$\frac{aa - bb + cc}{2c} = x.$$

Ceterum ut pateat omnes omnium problematum difficultates per solam linearum proportionalitatem sine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non absque circuitu, enodari posse; placuit sequentem hujus solutionem ex abundanti subungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, & stantibus jam positis linearum nominibus, erit $AB \cdot BD :: BD \cdot BE$.

$a \cdot x :: x \cdot \frac{xx}{a}$. Et $BA - BE (a - \frac{xx}{a}) = EA$. Nec non $EA \cdot AD :: AD \cdot AB$ adeoque $EA \cdot AB (aa - xx) = ADq$. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD invenietur iterum $ADq = bb - cc + 2cx$. (b) Unde obtinebitur ut ante $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

PROB.

(a) Hic rursus potius expressio algebraica, quam res ipsa quæri videtur.

Nam segmenta BD , & DC dantur: siquidem ob data tria latera, datur specie triangulum ABC (39. datorum); dantur igitur anguli ad B , & C (dat. def.); item anguli ad D , utpote recti dantur; ergo & anguli DAB in triangulo BAD , & DAC in triangulo CAD ; dantur itaque specie hæc tria (40. dat.). Datur etiam illius latus BA ; hujus latus AC , ideo quoque magnitudine illa eadem triangula (52. dat.). Dantur ergo latera BD , DC (dat. 55.).

(b) Ducta siquidem normali DF , erit (Eucl. TAB. B. 8. VI.) $AC (b) \cdot CD (c - x) :: CD (c - x) \cdot CF$. Fig. 8.

$$CF = \frac{cc - 2cx + xx}{b}; \text{ Itaque } AC - CF$$

$$= b - \frac{cc + 2cx - xx}{b} = AF. \text{ Est autem}$$

$$AP \cdot AD :: AD \cdot AC; \text{ unde colligitur, ductis invicem mediis & extremis, } AD^2 = AF \cdot AC \\ = bb - cc + 2cx - xx = aa - xx. \text{ & deletis æqualibus, ac transponendo, } 2cx \\ = aa - bb + cc.$$

Ceterum hoc problema solutum pro quovis Triangulo rectilineo vide infra Prob. XII.

P R O B. I I I

*Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire
hypothensam BC.*

XXX. **E**sto perimetro a ; area bb , $BC = x$, & $AC = y$; Eritque AB TAB. II. Fig. I.
 $\sqrt{(xx - yy)}$; unde rursus perimetro $(BC + AC + AB)$ est $x + y + \sqrt{(xx - yy)}$, & area $(\frac{1}{2} AC \cdot AB)$ est $\frac{1}{2} y \sqrt{(xx - yy)}$. Adeo-
que $x + y + \sqrt{(xx - yy)} = a$, & $\frac{1}{2} y \sqrt{(xx - yy)} = bb$.

Harum æquationum posterior dat. $\sqrt{(xx - yy)} = \frac{2bb}{y}$ quare scribo $\frac{2bb}{y}$
pro $\sqrt{(xx - yy)}$ in æquatione priori, ut asymmetria tollatur; & prodit
 $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, sive multiplicando per y & ordinando, $yy = ay - xy - 2bb$.
Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x + y$ & restat $\sqrt{(xx - yy)}$
 $= a - x - y$, cujus partes quadrando, ut asymmetria rursus tollatur,
prodit

$$xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy,$$

quæ in ordinem redacta & per 2 divisa fit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$.

Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipsius yy , habeo

$$ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa,$$

quæ reducta fit $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

Idem aliter.

Esto $\frac{1}{2}$ perimetro $= a$, area $= bb$, & $BC = x$ eritque $AC + AB$
 $= 2a - x$, Jam cum sit $xx (BCq) = ACq + ABq$, & $4bb = 2AC \cdot AB$
 $=$ erit $xx + 4bb = ACq + ABq + 2AC \cdot AB =$ quadrato ex $AC + AB$
 $=$ quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. (c) Hoc est $xx + 4bb$
 $= 4aa$

(c) Sit $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$. Erit $x + y + z = 2a$ perimetro; & $z + y = 2a - x$. Est, $xx = yy + zz$ (Eucl. 47. I.), & $\frac{zy}{2} = bb$ areæ, aut
 $xy = 2bb$, vel $2zy = 4bb$ scd $z + y$; $= 2a - x$, & quadrando $xx + 2zy + yy = 4aa - 4ax + xx$; ponendo nunc pro $2zy$,
& $xx + yy$, respectivos valores $4bb$, & xx ,
emergit $4bb + xx = 4aa - 4ax + xx$; &
demum $x = a - \frac{bb}{a}$.

$$= 4aa - 4ax + xx; \text{ quæ reducta fit } a - \frac{bb}{a} = x. (e)$$

PROB.

(e) Cetera investigaturus pono $\frac{aa - bb}{a}$
 $= 2f$; observo, quod ex hypothesi, est $2a$
 $= z + y + 2f$, atque ideo $2a - 2f = z + y$;
 hanc quantitatem facio $= 2c$. Nunc fingo
 $z - y = 2u$; erit itaque $z = c + u$, & y
 $= c - u$. Verum quia $xy = 2bb = cc$
 $- uu$, est $uu = cc - 2bb$, unde $u =$
 $\sqrt{cc - 2bb}$; hinc $z = c + \sqrt{cc - 2bb}$, adeo-
 que $y = c - \sqrt{cc - 2bb}$.

CONSTRUCTIO.

TAB. B. Sit DE data perimeter. Hanc biseca in F,
 Fig. 9. & erit DF = FE = a. Sit quadratum LMNO
 10. areæ datæ æquale; & quia basis $x = a$

$-\frac{bb}{a}$, aut $a - x = \frac{bb}{a}$; ipsum $\frac{bb}{a}$, quod
 si ex a dematur, dabit basim, determino, ele-
 vando ex F normalem FK = LM = b, jun-
 gendo DK, & ex K ducendo KG ipsi KD
 normalem. Erit enim (Eucl. 8. VI.) DF(a).
 FK(b) :: FK(b).FG = $\frac{bb}{a}$: hinc patet GE
 esse basem quæsitam.

Veniamus ad latera. Basim jam inventam
 diximus = 2f, & $2c = 2a - 2f$; erit ideo
 DG = 2c, hanc biseca in I, & duc quadrati
 diagonalem LN = $\sqrt{2bb}$ (Eucl. 47. I.). Si
 hæc minor non est quam IG patet problema
 esse impossibile; nam $\sqrt{cc - 2bb}$ est latus
 trianguli rectanguli, cujus hypotenusa = c;
 latus alterum = $\sqrt{2bb} = LN$; hypotenusa
 vero est maximum trianguli rectanguli latus
 (Eucl. 19. I.). Sit igitur LN minor quam
 IG, & super IG diametrum describatur semi-
 circulus IYG, & ex puncto G ei inscribatur
 chorda GY ipsi LN par, & junctæ IY æqua-
 lis in DG abscindatur IQ. Erit DQ majus
 latus; QG vero, minus.

Nam, ex his tribus lineis fac triangulum
 BCA, ita ut GE (Fig. 10.) = BC (Fig. 9.)
 $= a - \frac{bb}{a}$, DQ (Fig. 10.) = AC (Fig. 9.)
 $= c + \sqrt{cc - 2bb}$, & QG (Fig. 10.)
 $= AB$ (Fig. 9.) = $c - \sqrt{cc - 2bb}$.
 Quapropter perimeter æquat $a - \frac{bb}{a} + 2c$
 $=$ (ob $2c = 2a - 2f$ & $2f = a - \frac{bb}{a}$)

$a - \frac{bb}{a} + a + \frac{bb}{a} = 2a$ rectæ datæ. Di-
 co nunc hoc triangulum esse rectangulum, &
 ejus aream æqualem bb.

Est enim AC² = $2cc + 2c\sqrt{cc - 2bb}$
 $- 2bb$, & AB² = $2cc - 2c\sqrt{cc - 2bb}$
 $- 2bb$, quare AC² + AB² = $4cc - 4bb$
 $=$ (quia $2c = a + \frac{bb}{a}$) $aa + 2bb + \frac{bb^2}{aa}$
 $- 4bb = aa - 2bb + \frac{bb^2}{aa} = BC^2$. Est

igitur triangulum ABC rectangulum in A, &
 est BC ejus hypotenusa (Eucl. 48. I.). Quod
 erat unum.

Jam quia angulus ad A est rectus, erit dupla
 area trianguli æqualis rectangulo ex AB in AC
 (Eucl. 41. I.) = $(c - \sqrt{cc - 2bb})(c + \sqrt{cc - 2bb})$
 $= cc - cc + 2bb = 2bb$,
 & ejus area = bb. Quod erat alterum.

Data basi facile perpendicularum determinatur.
 Est enim rectangulum sub basi & perpendicu-
 lo æquale quadrato ex LN; aut data basis
 ad datam LN, ut eadem ad perpendicularum
 quod, per Eucl. 11. VI. invenitur.

Datis autem basi & perpendiculo, descri-
 betur triangulum, ut videbis infra No. 14. hu-
 jus.

Sed posterior solutio brevius exponi potest
 analysi geometrica.

Sit AB data perimeter, & quadratum CDEF TAB. C.
 data area. Puta factum, & triangulum AGH Fig. 1.
 sit illud quod petitur. Jam datur, per hyp.,
 rectangulum sub AG; GH, æquale bis dato
 quadrato CDEF (41. I. Eucl.). Sed quadra-
 tum ex AH æquale est quadrato ex HG &
 quadrato ex GA simul (47. I. Eucl.); ergo
 addendo utrinque bis rectangulum sub AG; GH,
 quadratum ex AH una cum bis rectangulo sub
 AG; GH, æquat quadratum ex HG, una
 cum quadrato ex GA, & bis rectangulo sub
 AG; GH, id est quadratum ex HB (41. II. Eucl.),
 quia ponitur HB æqualis HG & GA simul.
 Quare bis datum rectangulum sub AG; GH
 æquat excessum quadrati ex HB supra quadra-
 tum ex HA; id est (ponendo HI æqualem HA)
 rectangulum sub AB & BI, (6. II. Eucl.)
 quod ideo datur (Eucl. def. 1. Dat.). Datur
 autem AB per hypothesi; ergo & BI (Eucl. 47.
 Dat.). Et datur punctum B; quare & pun-
 ctum I (Eucl. 27. Dat.). Ergo datur AI
 (Eucl. 4. Dat.); igitur & AH. (Eucl. 7. Dat.)

P R O B . I V .

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendicularo, invenire triangulum. (f)

XXXI. **T**rianguli ABC sit C rectus angulus & CD perpendicularum in-
de ad basem AB demissum. Detur $AB + BC + AC = a$, TAB. II.
Fig. 10.
& $CD = b$. Pone basem $AB = x$, & erit laterum summa $a - x$. Pone
laterum differentiam y , & erit majus latus $AC = \frac{a - x + y}{2}$; minus BC
 $= \frac{a - x - y}{2}$. (g)

Jam ex natura trianguli (b) rectanguli est $AC^2 + BC^2 = AB^2$, hoc est
 $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Est & AB. AC :: BC. DC, adeoque AB.

DC,

atque HB. Datur autem rectangulum sub
AG; GH (per hyp.), & utraque simul AG;
GH, vel HB: quare datur tum AG, tum GH
(Eucl. 85. Dat.).

Componetur autem sic. Recta CD produ-
catur in K donec sit DK æqualis DC, & qua-
drato ex CK æquale rectangulum applicetur
ipsi AB (ex 43. I. Eucl.), & sit BI altitudo
applicationis. Bisecetur AI in H (per 10. I.
Eucl.). Producta FE donec ipsi KL occur-
rat in N, spatio CKNF rectangulum æquale
& deficiens quadrato applicetur ad datam HB;
(per 28. VI. Eucl.), & sit BO altitudo ap-
plicationis; erit AH hypotenusæ, HO latus
unum, & OB alterum petiti trianguli; e quibus
describatur triangulum AHG per Eucl. 22. I.

Jam illius perimeter æquat datam rectam;
& cum rectangulum sub AB, BI æquet qua-
dratum CKLM per constr. & excessum qua-
drati ex HB supra quadratum ex AH, vel HI
(6. II. Eucl.), erit quadratum CKLM, id est
bis rectangulum sub HO; OB (per constr.) u-
na cum quadrato ex AH æquale quadrato ex
HB, id est quadratis ex HO; OB; & bis re-
ctangulo sub HO; OB, (4. II. Eucl.), ma-
nebit ergo quadratum ex AH æquale quadra-
tis ex HO; & ex OB; id est ex HG, & ex
GA; quare triangulum AGH est rectangulum
in G (48. I. Eucl.); & quia rectangulum sub
AG & GH est duplum quadrati CDEF (per
constr.) & areæ trianguli AGH (41. I. Eucl.);
area trianguli æquat datum quadratum.

Determinatio deducitur ex 27. VI. Eucl.

Hoc autem problema generalius & facilius
solutum vide infra Probl. VIII.

(f) Hoc problema sic generale reddi potest.
Datis Trianguli cujusvis perimetro, angulo uno
ACB, & perpendicularo CD demisso ab angulo da-

to, investigare triangulum.

(g) Positis quæ hætenus scripsit NEWTON-
us, ab altero ignotorum angulorum A de-
mitte in oppositum latus CB perpendicularem
AE. Ad extremum datæ perimetri FG punctum
F constitue angulum GFH parem dato ACB,
& ex altero puncto G demitte in indefinitam
FH ad rectos angulos rectam GI.

Triangulum GFI datum erit specie & ma-
gnitudine, ut jam ostendimus.

Sit $FI = g$, & $IG = f$.

Quoniam Triangulum ACE simile est ipsi
GFI; erit GF (a). FI (g) :: AC ($\frac{a - x + y}{2}$).

$$CE = \frac{ag - gx + gy}{2a}.$$

(h) Jam ex natura Trianguli oxygenii est
 $BA^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC \cdot CE$; hoc est
 $xx = \frac{aa - 2ax + 2ay + xx - 2xy + yy}{2}$

$$+ \frac{aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy}{4}$$

$$\frac{aa + agx - agy + agx - gxx + gxy}{2a}$$

$$+ \frac{agy - gxy + gyy}{2a}$$

nempe, demtis fractionibus,

$$4axx = 2a^3 - 4aax + 2axx + 2aay -$$

$$2aag + 4agx - 2gxx + 2gyy;$$

feu, æquatione ordinata.

$$\frac{+ a \quad xx \quad + 2aa \quad x \quad + aag}{+ g \quad - 2ag \quad - a^3} = yy$$

$$a + g$$

(d)

DC, (i) hoc est $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem est $yy = xx + 2ax - aa$. Per posteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque (k) $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, five $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geome-

(i) Triangula CDB, AEB, habentia angulum B communem, similia sunt. Igitur BC

$(\frac{a - x - y}{2})$. CD (b) :: BA (x). AE

$= \frac{2bx}{a - x - y}$. Sed, quia FG (a). GI (f) :: CA $(\frac{a - x + y}{2})$. AE; est AE $= \frac{af - fx + fy}{2a}$;

igitur $\frac{af - fx + fy}{2a} = \frac{2bx}{a - x - y}$; quapropter, sublatis fractionibus, $aa - afx + afy - afx + fxx - fxy - afy + fxy - fyy = 4abx$;

&

$$xx - \frac{4abx}{2af} + aaf = yy.$$

(k) Adeoque $\frac{axx + gxx + 2ax - 2agx}{a + g} + \frac{aag - a^3}{a + g} = \frac{fxx - 2afx - abx + aaf}{f}$;

& , sublatis fractionibus $afxx + gfax + 2aafx - 2afgx + aafg - a^3 = afxx + gfax - 2aafx - 2afgx - 4abx - 4abgx + a^3 + aafg$; seu, deletis delendis & ordinata æquatione, $4aafx + 4abx + 4abgx = 2a^3$ & $x = \frac{aaf}{2af + 2ab + 2bg}$.

Si vero angulus ABC fieret obtusus, g evaderet quantitas negativa, & foret

$$x = \frac{aaf}{2af + 2ab - 2bg}.$$

Si denique angulus C esset rectus, fieret

$$g = 0, \text{ \& } f = a; \text{ unde } x = \frac{aa}{2a + 2b}.$$

CONSTRUCTIO GEOMETRICA.

Ex GF abscinde FK = b; & ex K duc KL ipsi GI parallelam. Cum sit GF (a). FI (g) :: KF (b). FL, erit FL = $\frac{bg}{a}$. Produc

GI in M, ita ut IM æquet FK; & erit GM = f + b.

Nunc, quando angulus datus est acutus, iterum producat GM in N, ita ut MN æquet FL. Habebis GN = f + b + $\frac{bg}{a}$. Bifecta GF in O junge NO cui per I duc parallelam IP; erit GP basis quæsitæ. Est enim NG (f + b + $\frac{bg}{a}$). GO $(\frac{a}{2})$:: IG (f). GP

$$= \frac{aaf}{2af + 2ab + 2bg} = x.$$

Sed quando datus angulus est obtusus, ex GM deme MN, & cetera fac ut supra.

Demum, quando rectus est angulus datus, quare quartam post a + b; $\frac{a}{2}$; a.

Inventa basi facile describitur triangulum; cujus perpendicularum datur cum angulo basi opposito.

Super basi AB describe per EUCL. 33. III. arcum dati anguli capacem ABCD; ad alteram baseos extremitatem A educ ad rectos angulos dato trianguli perpendicularo parem AE, & per E age basi parallelam ED circulo occurrentem in punctis D & d, & junge AD, CB: dico factum.

Triangulum hoc habet angulum petitum & perpendicularum datum, ex constructione; illud vero habere etiam datam perimetrum facile probabis retro legens vestigia analyseos.

DETERMINATIO.

Quoniam vero oportet ut parallela ED circulo occurrat: occurrere autem potest vel in duobus punctis, vel in uno, vel nusquam; atque quando in uno occurrit, tangens est; sit ea tangens in C. Æquales erunt anguli alterni TAB. C. GCA, CAB; sed æquales quoque sunt anguli TAB. C. GCA, ABC (EUCL. 32. III.) Ergo æquales

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculari ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem.

Aufer $2x$ de a , & restabit $\frac{ab}{a+b}$ excessus laterum super basem. Unde rursus.

Ut

les sunt anguli CAB, ABC, & triangulum ACB est isosceles.

Nunc produc BC donec perpendiculari AG occurrat in F. Angulus LCB æqualis est angulo CAB; & angulus GCA æqualis angulo ABC (Eucl. 32. III.), æquales autem sunt anguli ABC; CBA ex ostensis, & anguli LCB; GCF (Eucl. 15. I.) ergo & anguli ACG; GCF ut & rectæ AC, CF, quare recta BF æquat rectas BC, CA. Igitur circulus centro C, radio CF descriptus transibit per puncta A, & B.

Jam produc BD donec circulo FEAB occurrat in E; & junge EA. Angulus AEB æquat angulum AFB (Eucl. 21. III.) & angulus exterior ADB æquat angulum exteriorem ACB eadem de causa. Ergo angulus EAD æquat angulum AED, recta ED rectam DA, & recta BE inflexam BDA. Sed est BF major quam BE (Eucl. 25. III.) ergo rectæ BC; CA majores sunt ipsi BD; DA.

Igitur, si dimidiata summa laterum superet latus trianguli isosceles super datam basim in dato segmento inscripti, problema est impossibile; si æquet, problema est constructum; si ab eo superetur, problema est possibile, & construetur ut supra.

TAB C.
Fig. 5.

Brevius *analsi geometrica*. Sit AB data perimenter; C datus angulus; DE datum perpendicularum. Puta factum; & trianguli AGF angulus F æquet datum C; perpendicularis FH datam rectam DE, & perimenter AGFA, rectam datam AB. Ergo GB æquabit latera GF; FA, simul; & quadratum ex GB erit æquale quadrato ex GF & FA (lateribus angulum datum constituentibus) tanquam ex una recta. Quare, si ponatur IG æqualis GA, rectangulum ABI erit excessus quadrati ex GB (vel ex GF; FA tanquam ex una recta) supra quadratum ex AG (Eucl. 6. II.); datur ergo ratio rectanguli ABI ad triangulum AFG (67. Dat.); id est ad dimidiatum rectangulum sub AG; FH (Eucl. 47. I.); & ratio dimidiati rectanguli

sub AG; FH ad rectangulum sub AI; FH (duplum rectanguli sub AG; FH (Eucl. 1. VI.) atque ideo quadruplum rectanguli dimidiati sub AG; FH). Ergo datur ratio rectanguli ABI ad rectangulum sub AI; FH (8. Dat.). Datur autem datarum AB; FH ratio (1. Dat.); datur igitur & BI ad IA ratio (68. Dat.). Sed harum summa AB datur; quare & utraque (7. Dat.). Ergo & AG. (7. Dat.)

Inventa autem AG, cum detur ratio rectanguli sub AF; FG ad datum rectangulum sub AG; FH (66. Dat.); dabitur rectangulum sub AF; FG (2. Dat.) Datur autem illarum summa GB; quare & utraque (7. Dat.)

Componetur autem sic. Produc anguli dati C crus alterum CK ad arbitrium in K, ut fiat angulus dato deinceps; pone CL æqualem, CK; junge KL; post CK; KL quære per Eucl. 11. VI. tertiam proportionalem LM. A puncto L in subjectam KC age per Eucl. 12. I. perpendicularem LN. Post datas DE; AB; LN quære per Eucl. 12. VI. quartam LO, cujus duplam pone LP, & per 10. VI. Eucl. a puncto B seca rectam BA in I ut MP secta est in L. Biseca AI in G, erit AG basis trianguli quaesiti. Post datas NL; LC; AG quære quartam proportionalem GQ. Tandem ad datam GB applica per 28. VI. Eucl., datum rectangulum sub GQ; DE, deficiens quadrato, & sit BR altitudo applicationis; erit BR latus unum; RG latus alterum trianguli quaesiti; quod describes per 22. I. Eucl.

Produc enim trianguli descripti latus alterum AF in S donec FS æquet FG; & a puncto A in FG demitte perpendicularem AT, & FH ex F perpendicularem in AG

Jam per constructionem perimenter trianguli AGF æquat datam rectam AB. Nunc autem fecimus AB ad DE ut LO ad LN; & BI ad IA ut ML ad bis OL, vel BI ad AG ut ML ad OL; ergo, per compositionem rationum, rectangulum ABI (excessus quadrati ex AF; FG tanquam ex una recta vel ex GB supra

supra

Tom. I.

X

In omni triangulo rectangulo, ut summa perimetri & perpendiculari ad perimetrum, ita perpendicularum ad excessum laterum super basem.

PROB. V. (I)

Datis trianguli rectanguli basi AB, & summa perpendiculari & laterum CA + CB + CD, invenire triangulum.

TAB. II. XXXII. **E**sto $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, & erit
Fig. 10. $AC + CB = a - x$. Ponc $AC - CB = y$, & erit
 $AC =$

supra quadratum ex GA) ad rectangulum sub DE; AG, ut ML ad LN; est autem rectangulum sub DE; AG ad rectangulum sub GQ; DE, vel ad æquale rectangulum sub AF; FG, ut NL ad LC (per constr.) ergo ex æquo ordinate, rectangulum ABI ad rectangulum sub AF; FG, ut ML ad LC, ut quadratum ex KL ad quadratum ex LC (Eucl. cor. 2. prop. 20. VI.); & est ABI rectangulum ad rectangulum sub AF; FG ut quadratum ex GS ad quadratum ex FS (ex 67. Dat.). Est ergo quadratum ex KL ad quadratum ex LC ut quadratum ex GS ad quadratum ex SF, & ipsæ rectæ KL; LC; GS; SF proportionales sunt (Eucl. 22. VI.); & triangula isocelia LCK; GFS similia sunt (Eucl. 5. VI.); angulus LCK est æqualis angulo GFS; ideo reliquus GFA æqualis est dato angulo C. Quod erit unum.

Nunc ob similia triangula rectangula FAT; CLN, est TA ad AF ut NL ad LC ut rectangulum sub TA; FG ad rectangulum sub AF; FG (1. VI. Eucl.) ut AG ad GQ (per constr.) ut rectangulum sub AG; DE ad rectangulum sub GQ; DE, vel ad ei æquale rectangulum sub AF; FG; ergo rectangulum sub TA; GF (duplum triangulum AFG (Eucl. 41. I.) & ideo æquale rectangulo sub AG; FH) æquat rectangulum sub AG; DE, & ipsa FH ipsam DE. Quod erat alterum.

Determinatio pro lateribus deducitur ex. 27. VI. Eucl.

Ubi vero triangulum AFG est rectangulum, ABI rectangulum æquale est bis rectangulo sub AF; FG, id est bis rectangulo sub AG; FH, vel rectangulo sub AI; FH; datur autem ratio AB ad FH, ergo & ratio BI ad IA &c. Compositio est manifesta, AB est ad FH ut AI ad IB (Eucl. 16. VI.)

Cum sit perimeter ad perpendicularum, ut dupla basis ad reliquam perimetrum, erit summa perimetri & perpendiculari ad perimetrum ut perimeter ad duplam basem; & bisecando duos ultimos terminos, inveniemus primum theorema Newtonianum.

Quoniam summa perpendiculari & perimetri ad perimetrum ut est perimeter ad duplam basem; erit per 19. V. Eucl. summa perpendiculari & perimetri ad perimetrum ut perpendicularum ad perimetrum dupla basi multatam. Sed perimeter æquat basim & latera simul sumpta, ergo perimeter multata duplo baseos est æqualis excessui laterum supra basim. Quod est secundum NEWTONI theorema.

(I) Sequens problema, cum sit quadraticum, admonet, ut jam tradam horum problematum constructionem.

34. Horum problematum æquationes, ut dictum est, his continentur formulis (Art. IX. & X. Sect. II.)

$$\begin{array}{l} 1^o. \quad xx - ax - bc = 0. \\ 2^o. \quad xx + ax - bc = 0. \\ 3^o. \quad xx - ax + bc = 0. \\ 4^o. \quad xx + ax + bc = 0. \end{array}$$

Jam 1^o, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{4} + bc\right)}$; ubi

$\sqrt{\left(\frac{aa}{4} + bc\right)}$ est major quam $\frac{a}{2}$, quia $\frac{aa}{4} + bc$

est major $\frac{aa}{4}$: ergo si radix sit positiva, positivus erit valor x , sin vero, negativus; quod etiam liquet in secunda formula, $x = -\frac{a}{2}$

$= \sqrt{\left(\frac{aa}{4} + bc\right)}$, sed tertia dat $x = \frac{a}{2} \pm$

$\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - bc\right)}$, hic $\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - bc\right)}$ minor est quam $\frac{a}{2}$; habebit ergo x duos valores positivos.

Quarta autem est $x = -\frac{a}{2} \pm$

$\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - bc\right)}$, & x habet duos valores negativos.

Hæ formulæ construi possunt per 28 & 29. VI. EUCL. Sed has construtiones addere libet.

35. In duabus primis formulis semper possibilis est valor ipsius x : in duabus ultimis autem is esse potest impossibilis, quod accidit ubi bc major $\frac{aa}{4}$, nam tunc $\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - bc\right)}$ est imaginaria.

Prima & secunda resolvuntur in hanc $xx \pm ax = bc$, unde sequens analogia $b : x :: x \pm a : c$ quo posito.

TAB. D.
Fig. 1.

Describatur quivis circulus, cujus diameter non minor sit quam a , nec quam $b - c$ (posito b majore quam c), ex cujus puncto quovis A inscribantur chordæ $AD = b - c$, $AB = a$, & producta AD in F , ut $DF = c$, describatur per F circulus priori concentricus, cui donec occurrant in punctis E, H, G ; producantur chordæ AB, AD .

Jam si ex communi centro C demittatur CL perpendicularis in AD , erit $EL = LF$, & $AL = LD$ (EUCL. 3. III.) quare $AE = FD = c$, & eadem de causa $AG = BH$.

Sed $AF = FD + AD = c + b - c = b$, & $AH = AB + BH = AB + AG = a + AG$, & (EUCL. 34. III.) est $AF \cdot AE = AG \cdot AH$, id est $bc = (a + AG) \cdot AG = (a + x) \cdot x$, (in formula $xx + ax = bc$); ergo $a + AG : x :: a + x : AG$, & componendo $a + AG + x : x :: a + x + AG : AG$, & alternando $a + AG + x : a + x + AG :: x : AG$; sed duo primi termini sunt æquales, ergo & $x = AG$.

36. Ast ubi $bc = xx - ax$, est $(a + AG) \cdot AG = (x - a) \cdot x$, & $a + AG : x - a :: x : AG$, & componendo $AG + x : x - a :: x + AG : AG$, vel alternando $AG + x : x + AG :: x - a : AG$, quare $x - a = AG$, & $x = a + AG = AH$.

37. Si $b = c$, aut ultimus formulæ terminus, quadratum, tunc $AD = 0$, & duobus punctis A, D , coincidentibus, describi deberet circulus rectam EF , in A tangens radio non minori quam $\frac{a}{2}$, & cetera ut supra.

Sed tunc est etiam alia constructio simplicior.

Nam sit circuli ABA radius $= \frac{a}{2}$, tangens TAB. D. Fig. 2.

$AE = b$ & ex E ducatur $EMCN$ per centrum, erit $NM = a$, & (EUCL. 36. III. 13. VI.) $NE (a + ME) \cdot AE :: AE \cdot EM$; quare $AE^2 (bb) = (a + ME) \cdot ME = xx + ax$; unde $a + ME : x :: a + x : ME$; & insitendo superioris rationis vicinii vestigiis, invenitur $ME = x$, & ubi $xx - ax = bb$, $x = NE$ valor positivus.

38. Nunc dico in prima formula negativum esse $AH = -x$.

Tunc enim $xx + ax$ fieret $= -x(-a - x)$, unde oriretur analogia $a + AG : -x :: -a - x : AG$; sed $a + AG = AH$ & $AG = HE - a$ ergo $AH : -x :: -a - x : AH - a$, & alternando $AH : a - x :: -x : AH - a$, & componendo $AH : a - x :: a - x : -x + AH - a$. $AH - a$, & rursus alternando $AH - a : -x + AH - a :: a - x : -x : AH - a$; sed duo primi termini sunt æquales; ergo $-a - x = AH - a$, & $-x = AH$, quæ recta est ideo valor negativus ipsius ignotæ.

39. Sed in secunda formula $xx - ax = -x(-x + a)$; tunc ergo $a + AG : -x + a :: -x : AG$, & alternando $a + AG : -x :: -x + a : AG$; & componendo $a + AG - x : -x :: -x + a + AG : AG$; ergo tunc $AG = -x$.

40. Veniamus ad duas ultimas formulas $xx - ax + bc = 0$, & $xx + ax + bc = 0$, ergo $bc = -xx \pm ax$, unde nascitur analogia $b : x :: x : c$.

Describatur circulus ABD cujus diameter TAB. D. non superetur nec ab a , neque a $b + c$, & ex Fig. 3. quovis peripheriæ puncto A inscribantur chordæ $AB = a$, $AD = b + c$, tunc sumta $DF = c$, eodem centro C , & radio CF describatur circulus $FEGH$. Hic aut secabit chordam AB in duobus punctis, aut in uno, aut nusquam.

Secet eam in duobus punctis G, H ; dico $AG, & AH$ esse duos valores positivos ipsius x . Nam, ut supra monstratum est, $AE = FD$, unde $AF = AD - DF = b$, & $AG = HB$, quare $AH = AB - BH = a - BH$. Sed $AF \cdot AE (bc) = AH \cdot AG = (a - BH) \cdot BH = -xx \pm ax$, ergo (si sumatur $ax - xx$) $a - BH : x :: a - x : BH$, & dividendo $a - BH : x :: a - x : BH$, atque ideo $x = BH = AG$.

41. Rursus quia $BH = AG = AB - AH = a - AH$, est $AH : x :: a - x : a - AH$, & alternando $AH : a - x :: x : a - AH$, & X 2 di-

$AC = \frac{a - x + y}{2}$, & $CB = \frac{a - x - y}{2}$. (m) Est autem $ACq + CBq = ABq$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Est & $AC \cdot CB = AB \cdot CD$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx - yy}{4} = bx$. (n) Quibus comparatis fit (o) $2bb$

dividendo $AH = a + x$, $a - x$; $x - a$
 $+ AH = a - x$; ergo $a - x = a - AH$,
 & $-x = -AH$, ac $x = AH$.

42. Si vero fit $-ax - xx$, dico esse AH ,
 & AG duos valores negativos ipsius x . Nam
 erit $a - BH = x$; $x = a - BH$, & al-
 ternando $a - BH + a + x = x$, BH ,
 & dividendo $BH = x$, $a + x = x$,
 $-BH = BH$; ergo $a + x = BH$, &
 $-x = -BH + a = AH$. Item $BH = AG$
 $= a - AH$, ergo $+AH = x$; $x = a - x$,
 $a - AH$, & dividendo $+x + AH = x$,
 $AH + x = AH$, quam ob rem $-x = a$
 $-AH = AB - AH = BH = AG$.

43. Si circulus $EFHG$ fecit rectam AB in
 uno puncto æquales fient duo valores ipsius x .

44. Si vero nusquam eam fecat, problema
 est impossibile.

TAB. C.
 Fig. 2.

(m) Si vero angulus ACB esset non rectus,
 sed datus, a vertice alterius angulorum non
 datorum CAB demitte in latus oppositum CB
 ad rectos angulos rectam AE . Triangulum
 ACE datum erit specie, & dabitur ratio la-
 terum AC , CE , EA ; ut jam demonstravi-
 mus.

Sit igitur $a : g :: AC : \frac{a - x + y}{2}$. CE , &
 $CE = \frac{ag - gx + gy}{2a}$. Est autem $AC^2 + BC^2$
 $= AB^2 + 2BC \cdot CE$; hoc est

$$\frac{aa - 2ax + 2ay + xx - 2xy + yy + aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy}{4} = bb + \frac{aag - agx + agy + gxx - gxy - agx - agy + gxy - gyy}{2a}$$

nempe deletis delendis,

$$\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2}$$

$$= bb + \frac{aag - 2agx + gxx - gyy}{2a}$$

& sublati fractionibus

$$a^2 - 2aax + axx + ayy = 2abb + aag - 2agx + gxx - gyy;$$

unde eruitur

$$yy = \frac{axx + gxx + 2aax - 2agx}{a + g} = \frac{a^2 + 2ab^2 + a^2g}{a + g}$$

(n) Est & Triangulum BCD simile Trian-
 gulo BAE , quapropter $BC : \frac{a - x - y}{2} ::$
 $CD (x) :: BA (b) : AE$; quocirca $AE =$
 $\frac{2bx}{a - x - y}$; sed ob datam rationem CA
 ad AE , fit $a : f :: CA : \frac{a - x + y}{2}$. AE ,

$$\text{et erit } AE = \frac{af - fx + fy}{2a}$$

$$\text{Igitur } \frac{2bx}{a - x - y} = \frac{af - fx + fy}{2a}$$

aut sublati fractionibus,

$$4abx = aaf - afx + afy - afx + fxx - fxy - afy + fxy - fyy;$$

seu, deletis delendis,

$$4abx = aaf - 2afx + fxx - fyy; \text{ aut}$$

$$yy = \frac{fxx - 2afx - 4abx + aaf}{f}$$

(o) Quibus comparatis fit

$$\frac{axx + gxx + 2aax - 2agx}{a + g} =$$

$$\frac{a^2 + 2abb + aag}{a + g} =$$

$$\frac{fxx - 2afx - 4abx + aaf}{f}$$

seu sublati fractionibus, deletis delendis, or-
 dinando, & cuncta dividendo per $2af$,

$$xx = 2ax + \frac{2abx + 2bgx}{f} - aa + bb;$$

$$\text{hinc } x = a + \frac{ab + bg}{f} - V(aa + \frac{2aa' + 2abg}{f} + \frac{aabb + 2abbg + bbgg}{ff} - aa + bb)$$

quæ quantitas radicalis, deletis contrariis, & cuncta redigendo ad eandem denominationem, fit

$$V(\frac{2aabf + 2abgf + aabf + 2abg}{ff} + \frac{bbzg + bbgf}{ff})$$

sed $gg + ff = aa$; ergo ea evadit

$$V(\frac{2aabf + 2abgf + 2aabb + 2abg}{ff})$$

Si angulus ACB esset obtusus, mutando signum ipsius g , haberemus

$$x = a + \frac{ab - bg}{f} + V(\frac{2aabf - 2abgf + 2aabb - 2abg}{ff})$$

Si vero angulus ACB esset rectus, tunc $g = 0$, & $f = a$; quapropter $x = a + b = V(2ab + 2bb)$. Prorsus ut NEWTONUS.

Sed, antequam ad constructionem transimus, cur hic perpendicularis duos habet valores, & quis eligendus est?

Responsum ad quæstionem secundam facile est. Perpendicularis minor est uno latere, fortius tota perimetro aucta ipsa perpendiculari $(a + b)$ quare ab ipsa $a + b$ demi debet $V(2ab + 2bb)$ ut habeatur petita perpendicularis; cujus valor erit positivus, ut esse debet, quia $a + b > V(2ab + 2bb) :: V(2ab + 2bb) : 2b$; sed, cum a major sit quam b , est $a + b$ major quam $2b$, ergo etiam quam $V(2ab + 2bb)$; ob naturam proportionis continuæ. Hoc verum esse in æquatione nostra, quanquam magis composita, sponte pater, quoniam quantitas radicalis est radix ex quadrato quantitatis extra signum, minuto quantitate positiva $aa - bb$.

Difficilius videtur respondere quæstioni primæ, præsertim cum x , exprimens hic perpendiculum, duos valores diversos habere non possit, & ejusdem valor secundus major sit quam tota perimetro aucta perpendiculo, nempe solo perpendiculo.

Sed, animadvertendum est, quod si data-

rum alterutra a aut b , ita posset exponere aliquid aliud quam quod exponere posuimus, ut salva maneret relatio inter x perpendiculum, b basim, & a indicantem aliquid a summa laterum & perpendiculi diversum, valor ipsius x unicus duobus diversis modis posset exprimi.

Hoc ajo nunc accidere. Et revera, sit non $CD + CA + CB = a$, sed $CD - CA - CB = a$; erit $CD - a = x - a = CD + CB$; quapropter $AC = \frac{x - a + y}{2}$; $CB =$

$\frac{x - a - y}{2}$. His positis lege vestigia rationum superius expositi, & invenies eandem æquationem finalem.

Tunc autem a est quantitas negativa, siquidem $DC + CA$ certe superat CD ; pro ea pone $-c$ & æquatio pro angulo recto fiet $x = -c + b = V(-2bc + 2bb)$; ubi patet quod perpendiculum debet esse $-c + b = V(-2bc + 2bb)$, & quod problema esset impossibile si c esset major quam b .

CONSTRUCTIO GEOMETRICA.

Sit $GF = a$; $FI = g$; $IG = f$; produc GF in K ita ut sit $FK = IF$, eritque $GK = a + g$. Ex IG abscinde $GL = b$; biseca IG in N & junge NK , cui parallelam per L duc

LM ; eritque $NG = \frac{f}{2}$. $GK (a + g) :: LG$

$$(b). GM = \frac{2al + 2bg}{f}$$

Item produc GF in O , ut sit $OF = FG$, & in P ut sit $PG = GM$, & erit $OP = 2a + \frac{2ab + 2bg}{f}$. Quovis centro describe

quemvis circumulum transeuntem per P & O , cui a puncto P inscribe chordam $PQ = 2a = GO$; hanc biseca in R , & abscinde $RS = b$, demum priore centro describe circumulum transeuntem per S , qui occurret rectæ PO in T & V , & rectæ PQ iterum in Z . Dico rectam $PT = x$.

Nam est $PS = a - b$; & $PZ = a + b$. Sed $TP \cdot PV = ZP \cdot PS$; ergo $PT (2a + \frac{2ab + 2bg}{f} - PT) = aa - bb$; sed erat $x (2a + \frac{2ab + 2bg}{f} - x) = aa - bb$ ergo &c.

Hæc quidem pro angulo acuto, sed pro obtuso ex GF abscinde $Fk = g$ ut sit $Gk = g - b$, & cetera perage ut supra.

Quando angulus est rectus, brevior & facilius est constructio. Sit $AD = 2a + 2b$. Quovis centro C describe circumulum transeuntem per A & D , & in eo inscribe rectam $AB = 2a$.

— $aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx - 4bx$. Et per reductionem $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, & $x = a + b - \sqrt{(2ab + 2bb)}$.

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo de summa perimetri & perpendiculari aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendicularum. (p)

Idem aliter.

Sit $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, & $AC = x$, & erit $BC = \sqrt{(bb - xx)}$, $CD = \frac{x\sqrt{(bb - xx)}}{b}$. (q) Et $x + CB + CD = a$, five $CB + CD = a - x$, atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{(bb - xx)} = a - x$. (r) Et quadratis partibus atque multiplicatis per bb , fiet

$$-x^4 - 2bx^3 + 2b^2x + b^4 = aabb - 2abbx + bbxx.$$

Qua æquatione per transpositionem partium ad hunc modum ordinata

$$x^4 + 2bx^3 + 3bbxx + 2b^2x + \frac{b^4}{aabb} =$$

2bb

$= 2a$, eam biseca in R, & abscinde $RG = b$, deinde eodem centro C, radio CG describe circulum occurrentem AD in E & F & AB rursus in H; erit AE = x quæsitæ. Quod demonstrabis ut supra.

& data erit summa laterum FH: sed datur tota EF ex hypothesi, ergo & reliqua EH, id est perpendicularum.

Componetur autem sic.

Quære mediam inter aggregatum ex perimetro, & perpendicularo; ac duplam basim; erit hæc perimetro, quam deme ex aggregato perimetri & perpendiculari, restabit perpendicularum, data autem basi, & normali facile describitur triangulum rectangulum.

Ex hac solutione fuit *Newtonianum* theorema.

(q) Est enim $AB(b)$, $AC(x) :: BC(\sqrt{(bb - xx)}) : CD$ (Eucl. 8. VI.).

(r) Item quia $AB(b)$, $AC(x) :: BC(\sqrt{(bb - xx)}) : CD$, erit *invertendo & componendo* $x + b.b :: DC + CB, \sqrt{(bb - xx)}$; ergo $DC + CB(a - x) = \frac{(x + b)(\sqrt{(bb - xx)})}{b}$.

TAB. D.
Fig. 5.

(p) Sit quæsitum triangulum rectangulum ACB, ejus basis data AB, recta EF æqualis summæ laterum AC, CB, & perpendiculari CD, huic adde in directum FG æqualem basi, erit EG summa perimetri & perpendiculari, pone EH æqualem perpendicularo, & GH erit erit perimetro, sed EG est ad GH, ut dimidia GH ad GF (*supra* Prob. IV.) five *invertendo & alternando* GF ad GH, ut dimidia GH ad EG, ergo (Eucl. 3. V.) dupla GF ad GH, ut GH ad EG; atqui data est datarum extremarum ratio, (1. dator.) ergo datur ratio primæ ad secundam, (2. dator.) quare secunda, (id est perimetro) magnitudine datur (2. dator.); ex qua deme datam basim GF,

§ X

$$+ \frac{2bb}{2ab} xx + \frac{4b^3}{4abb} x + \frac{2b^4}{2ab^3} (s),$$

& extracta radice, orietur

$$xx + bx + bb + ab = (x + b) \sqrt{2ab + 2bb}.$$

Et extracta iterum radice (t)

$$x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab\right) \pm \sqrt{b\left(\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab\right) - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab}}.$$

Constructio Geometrica.

Cape igitur $AB = \frac{1}{2}b$, $BC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$, AE mediam proportionalem inter b & AC , & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE , & erunt BF , BF duo latera trianguli. (u)

TAB. II.
Fig. 2.

PROB.

(s) Etenim hæc dat

$$x^4 + 2bx^3 + bbxx - aabb = \frac{2b^3}{2abb} x;$$

& (utrinque additis

$$+ \frac{2bb}{2ab} xx + \frac{2b^3}{2abb} x + \frac{2ab^3}{2b^4})$$

$$x^4 + 2bx^3 + \frac{3bb}{2ab} xx + \frac{2b^3}{2abb} x + \frac{2ab^3}{2b^4}$$

$$= \frac{2bb}{2ab} xx + \frac{4b^3}{4abb} x + \frac{2b^4}{2ab^3}.$$

Regulæ, quibus inveniri possint quantitates in similibus casibus addendæ, tradentur infra.

(t) Licet hæc possint iisdem symbolis servatis explicare, tamen præstat simpliciores litteras adhibere. Fac ergo $2ab + 2bb = cc$, aut $ab + bb = \frac{cc}{2}$, & $\sqrt{2ab + 2bb} = c$; unde

superior æquatio fiet $xx + bx + \frac{cc}{2} = cx + bc$, sive $xx = cx - bx + bc - \frac{cc}{2}$, &

$$x = \frac{c-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{cc-2bc+bb}{4} + bc - \frac{cc}{4}\right)}$$

$$= \frac{c-b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{bb + 2bc - cc}, \text{ \& resubstitutis}$$

$$\text{prioribus notis } x = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \sqrt{2ab}$$

$$+ 2bb) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-2ab + 2b \sqrt{2ab + 2bb})}$$

$$- bb) = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab\right) \pm}$$

$$\sqrt{b\left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb\right) - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab}).$$

Ubi nota quod, quia duo latera trianguli semper tertio majora sunt, erunt a fortiori duo latera & normalis simul tertio majora, id est, a major quam b ; quare rectangulum ab majus quam bb ; & $2ab + 2bb$, quam $4bb$ ($= 2bb + 2bb$), & idcirco cc majus quam $4bb$; aut $\frac{cc}{2}$ quam b ; vel $\frac{cc}{2}$, quam bc ; est ergo

$bc - \frac{cc}{2}$ quantitas negativa; hanc pone $=$

$-ff$; at est positiva $c - b$, quam fac $= 2g$, & fiet $xx = 2gx - ff$, vel $xx - 2gx + ff = 0$; tertia formula No. 34, hujus, in qua x duos habet valores positivos.

(u) Quamvis hoc problema jam construxerimus, tamen explicanda est Auctoris constructio. $AB = \frac{b}{2}$, $BC = \frac{a}{2}$; ergo $AC = \frac{a+b}{2}$;

AE (cum sit media inter b , & $AC = \frac{a+b}{2}$)

erit $\sqrt{\left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb\right)}$, & $BD (= BC - CD)$

$$= \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b, \text{ ac } AD (= AC - CD)$$

PROB. VI.

Datiis in triangulo rectangulo ABC summa laterum AC + BC, & perpendicularo CD invenire triangulum.

TAB. II.
Fig. 10.

XXXIII. Sit AC + BC = a, CD = b, AC = x, & erit BC = a - x, (x) AB = $\sqrt{aa - 2ax + 2xx}$. Est & CD.AC :: BC.AB.(y) Ergo rursus AB = $\frac{ax - xx}{b}$. Quare ax - xx

= $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}a$: sed quia b est minor quam a, erit (additis utrobique æqualibus) 2b minor, quam a + b; & b, quam $\frac{a+b}{2}$; AE est igitur major quam b,

& minor quam $\frac{a+b}{2}$; cadet ideo punctum B inter A, & C. Verum, aut cadet inter A & D, aut inter D & C. Primo, cadat inter A & D; erit hoc casu AE minor quam AD, id est, $\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb}$ minor quam $\frac{1}{2}a +$

$\frac{1}{4}b$, vel $b\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb}$ minor quam $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$; adeoque $b\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb} - \frac{1}{2}$

$ab - \frac{1}{4}bb$ est quantitas negativa, cujus radix imaginaria, & problema impossibile. Cadat ergo punctum E inter D & C: erit tunc DE (= AE - AD) = $\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb}$

$- \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$; quocirca EF (media inter

b & DE) = $\pm \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb} - \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb$); BF (= AE ± EF - AB)

erit ideo = $\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb} = (b\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb} - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb) - \frac{1}{2}b$.

DETERMINATIO.

Quia vero, ut problema sit possibile, oportet ut $\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb}$ minor non sit quam $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$; videamus quo casu sint æquales.

Si igitur $\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$;

erit $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}bb$;

vel (auferendo fractiones, & delendo æqualia)

$4ab + 7bb = 4aa$; & $b + \frac{7bb}{4a} = a$, vel

$\frac{7bb}{4a} = a - b$. Summa laterum & perpen-

diculi (a) secetur in septem partes pares, & quæratut tertia post quatuor ex his septimis, & hypothenusam; si hæc minor non est quam excessus summæ laterum, & perpendiculi supra basim, problema est possibile, & constructur ut supra.

Sed in hac ultima hypothesi triangulum quæsitum est isoscele, ut patet.

(x) Sed si angulus ACB rectus non esset, TAB. C. pone d. g :: AC (x). CE = $\frac{gx}{d}$ & d. f :: Fig. 2.

CA (x). AE = $\frac{fx}{d}$.

Eritque AB² = AC² + CB² - 2BCE = $2xx + aa - 2ax - \frac{2agx + 2gxx}{d}$.

(y) Item DC (b). CB (a - x) :: EA ($\frac{fx}{d}$).

AB = $\frac{afx - fxx}{bd}$

cujus valoris quadratum æquatur primo, id est

$\frac{aaffxx - 2affx^3 + ffx^4}{b^2d^2}$

= $2xx + aa - 2ax - \frac{2agx + 2gxx}{d}$

igitur (sublatis fractionibus atque ordinatis terminis)

$$= bV(aa - 2ax + 2xx,) \text{ \& partibus quadratis \& ordinatis, } x^4 - 2ax^3 + aa - 2bbxx + 2abbx - aabb = 0. \text{ Adde ad utramque partem } aabb + b^4,$$

\& fiet

$$x^4 - 2ax^3 + \frac{a^2}{2bb}xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4.$$

Et extracta utrobique radice $xx - ax - bb = -bV(aa + bb)$

\& radice iterum extracta

$$x = \frac{1}{4}a \pm V(\frac{1}{2}aa + bb - bV(aa + bb)) (z).$$

Con-

$$\begin{array}{l} \frac{2b^2d^2}{ff} + \frac{2abdd}{ff} \\ x^4 - 2ax^3 - \frac{2b^2dg}{ff}x^2 + \frac{2abddg}{ff}x - \frac{aabbdd}{ff} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{adde hinc inde} \\ \frac{aabbdd}{ff} + \frac{4d^4}{f^4} + \frac{2b^4dg}{f^4} + \frac{4ddgg}{f^4} \end{array}$$

\& invenies

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 - \frac{2b^2d^2}{ff}xx + \frac{2ab^2d^2}{ff}x + \frac{4d^4}{f^4} + \frac{4ddgg}{f^4} \\ - \frac{2b^2dg}{ff} + \frac{2ab^2dg}{f^2} + \frac{b^4dg}{f^4} + \frac{2b^4d^2g}{f^4} + \frac{4dd^2g}{f^4} + \frac{a^2b^2d^2}{ff} \end{array} =$$

\& extracta radice

$$xx - ax - \frac{b^2d^2 - b^2dg}{ff} = \pm \frac{bd}{ff} \text{ in}$$

$V(aaff + bbdd + 2bbdg + bbgg)$
aut, posito $b = f$, vel si triangulum simile ipfi
AEC, quod specie datur, fiat super datum per-
pendiculum b tamquam dato angulo oppositum,

$$xx - ax - d^2 - dg = \pm \frac{d}{b}V(aabb + bb(d+g)^2).$$

Sed $xx - ax - dd - dg$ est quanti-
tas negativa; nam x est latus alterum; \& a ag-
gregatum amborum, quare a major est quam
 x , \& ax quam xx , \& fortius $ax + dd + dg$
superat xx . Ergo radix negative sumenda est;
\& transponendo fiet.

$$dV(aa + (d+g)^2) - d(d+g) = x(a-x).$$

Tom. I.

C O N S T R U C T I O.

(z) Sume $GI = b$; ei ad perpendiculum eri-
ge $IF = g$; erit juncta $FG = d$. Produc IF Fig. 6.
quidem in K , ut FK æquet FG , \& fit IK
 $= d+g$, atque IG in L , ut fit $IL = a$;
erit juncta $KL = V(aa + (d+g)^2)$. Nunc
per F age super LK ad rectos angulos FM .
Triangula LKI , FKM habentia angulos ad M
\& I . rectos, \& ad K communem, similia erunt.
(Eucl. 4. VI.) Quare $LK(V(aa + (d+g)^2))$,
 $KI(d+g) :: FK(d).KM$, \& $KM.V(aa +$
 $(d+g)^2) = d(d+g)$. Fiet igitur ultima
æquatio, positis lineis pro symbolis, LK
 $(FK - KM) = ax - xx$. Produc igitur
 MK in N ut fit $MN = FK$, \& fiet $LK.KN =$
 $ax - xx$. Per tria puncta N , I , L descri-

be

Constructio Geometrica.

TAB. II.
Fig. 3.

Cape $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum $CD = b$. Produce DC ad E ut sit $DE = DA$. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC descriptus circulus GH secet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem aliter.

TAB. II.
Fig. 10.

Sit $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$, ac $DC = b$.

& erit

be circulum (Eucl. 4. IV.) & per K concentricum KPQ, rectae LI concurrentem in P, & Q, erunt LQ, LP duo valores positivi incognita x (No. 34. hujus).

DETERMINATIO.

Quoniam autem ad constructionem requiritur ut recta LI circulo KPQR occurrat, & ultima rectarum occurrentium est tangens, quae a circulo concentrico biseclatur, patet triangulum isosceles esse ultimum possibile in hypothefi proposita. Nunc dico quod

Rectangulum sub PL, LQ minus est quadrato ex dimidiata IL.

Bisecetur IL in A; erit rectangulum sub PL; LQ una cum quadrato AQ æquale quadrato ex AL (Eucl. 6. II.); atque ideo rectangulum sub PL; QL minus quadrato ex AL.

Si ergo ab L ad circulum RQPK ducatur tangens LS, ea erit minor quam LA; & est media inter KL; LR (Eucl. 36. III. & 17. VI.)

Est autem $KL \cdot LR = dV(aa + (d+g)^2) - dd - dg$, quod debet esse minus $\frac{aa}{4}$; ergo

$dV(aa + (d+g)^2) \text{ minus } \frac{a^2}{4} + dd + dg$; &

$aadd + d^4 + 2d^2g + ddg \text{ minus } \frac{a^4}{16} +$

$\frac{aadd + aadg}{2} + d^4 + 2d^2g + ddg$; & $16aadd$

minus $a^4 + 8aadd + 8aadg$, vel $8dd$ minus

$aa + 8dg$ aut $2dd - 2dg$ minus $\frac{aa}{4}$.

Igitur, proposito problemate, describe triangulum GIF ut supra, e GF abscinde FT æqualem FI; quære mediam inter GT & bis GF; si hæc minor est quam LA, problema construes ut supra; si æqualis, triangulum quæsitum est isosceles; si major, problema est impossibile.

OBSERVATIO.

Hæc ita se habent ubi datus angulus est acutus, neque aliter ubi est obtusus, nam in nulla æquationum supra inventarum habetur aliqua potestas impar ipsius f aut b , qui dati anguli sinus est; ideo nullius termini signum mutari debet; & in ultima

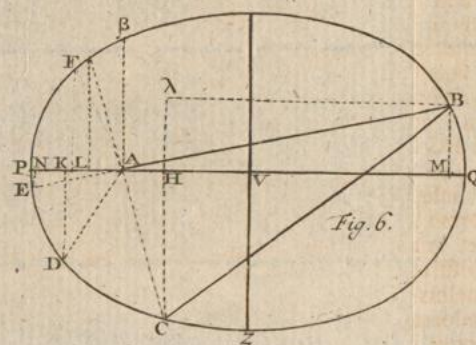
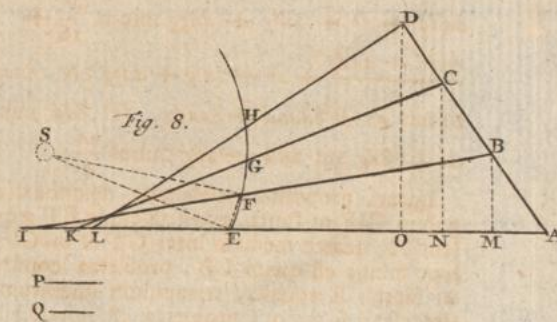
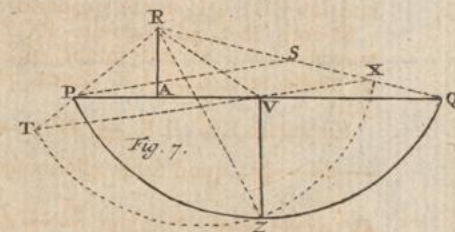
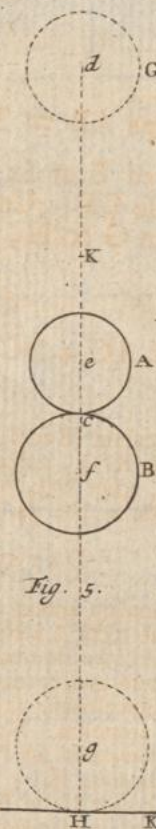
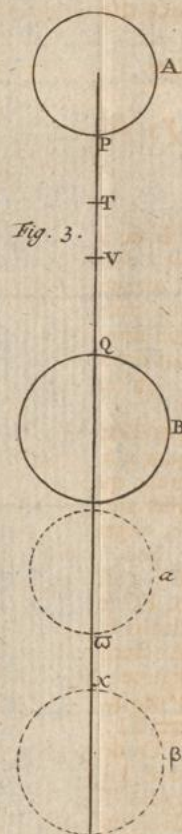
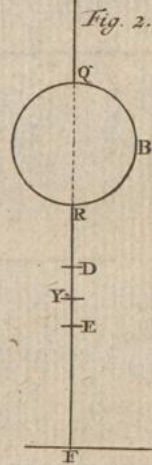
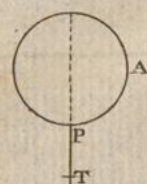
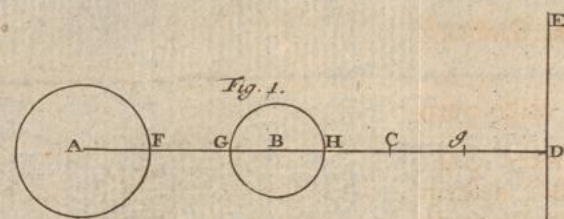
$$dV(aa + (d+g)^2) - d(d+g) = x(a-x)$$

quantitas radicalis debet necessario esse positiva, quia $x(a-x)$ est quantitas positiva, ut vidimus; quare & ejus valor debet esse positivus: esset autem negativus, si quantitas radicalis esset negativa.

Sed, quando datus angulus rectus est, tunc GF cadit in GI, quapropter $IF = g = 0$; & $FG = GI$, aut $d = b$; atque ideo æquatio finalis fit $dV(aa + bb) - bb = x(a-x)$ ut Auctor invenit. Tunc etiam triangulum LKI figuræ 6. fit LIK figuræ 7. & $LK = V(aa + bb)$; tunc igitur sufficit sumere $KO = KI$, & LK biseclata in T, centro T radio TO describere semicirculum occurrentem rectae LI in P & Q. Nam circulus centro T radio TK descriptus transfret per I (Eucl. 3. III.) unde probaretur, ut No. 34. hujus, $LQ = PI$ &c.

Sed, cum x indicare non possit nisi duo trianguli latera, jure quæri potest cur prodeat æquatio quatuor dimensionum? Id accidit quia a potest exprimere tum laterum summam, ut hæcenus supposuimus; tum eorum differentiam; ut patet ponendo AC latus majus $= x$, & BC latus minus $= x - a$; unde eadem prodibit æquatio. Nos eam determinavimus ut esset laterum summa, dum posuimus a majorem quam x . Esset autem differentia si foret minor quam x ; & tunc $xx - ax$ foret positiva, & radix positive sumenda esset. Hinc melius quæsitæ esset basis quæ quadruplicem valorem habere non potest; quod facit Newtonus in secunda solutione.

TAB. D.
Fig. 7.



& erit

$$\frac{a+y}{2} = AC, \frac{a-y}{2} = BC, \frac{aa+yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx.$$

$$\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \cdot BC}{DC} = AB = x. \text{ Ergo}$$

$2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice
 $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Unde in superiori constructione est CE hypote-
 nusa trianguli quæsitæ. Data autem basi & perpendicularo tam in hoc quam
 in superiore problemate, triangulum sic expedite construitur. Fac paral-
 lelogrammum CG cujus latus CE erit basis trianguli, latus alterum CF per-
 pendiculum. Et super CE describe semicirculum secantem latus oppositum
 FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæsitum.

TAB. II.
Fig. 4.

P R O B. V I I.

*In triangulo rectangulo, datis summa laterum, & summa
 perpendiculari & basis invenire triangulum.*

XXXIV. Sit laterum AC & BC summa a , basis AB & perpendiculari
 CD summa b , latus AC $= x$, basis AB $= y$, & erit BC $=$
 $a - x$, CD $= b - y$, $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$,
 $ax - xx = AC \cdot CD = by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa$
 $- ax + xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, po-
 ne æquale yy in bb , hoc est æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$.

TAB. II.
Fig. 10.

Et ordinata æquatione fiet

$$x^4 - 2ax^3 + 3aa - 2bbxx - 2a^3x + a^4 = 0.$$

Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet

$$x^4 - 2ax^3 + 3aa - 2bbxx - 2a^3x + a^4 = b^4 - aabb.$$

Et extracta utrobique radice

$$xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa.}$$

& radice iterum extracta

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}} \quad (a)$$

(a) Si vero datus angulus rectus non esset, CB $= a - y$. Pariter sit AB + CD $= 2b$;
 sic problema solvi potest.

Pone summam AC + BC $= 2a$; differen-
 tiam AC - BC $= 2y$; erit AC $= a + y$;

Item

Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$, & S mediam

Item fac

$$d, g :: AC (a + y). CE = \frac{ag + gy}{d}.$$

&

$$d, b :: CA (a + y). AE = \frac{ab + by}{d}.$$

His positis, quoniam est (Eucl. 13. II.)

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC.CE$$

erit

$$bb + 2bz + zz = 2aa + 2yy - \frac{2aag + 2egy}{d}$$

est autem quoque

$$CD.AB = CB.AE = \text{bis triangulo } ABC,$$

$$\text{aut } bb - zz = \frac{a^2b - by^2}{d}$$

ergo, addendo æqualia æqualibus,

$$2bb + 2bz = 2aa + 2yy -$$

$$\frac{2aag + 2egy + aab - byy}{d}$$

ergo, reducendo ad eundem denominato-
rem &c.

$$z = \frac{yy(2d + 2g - b) + aa}{2bd} \\ (2d - 2g + b) - 2bbd \\ 2bd$$

& ex æquatione superiore invenitur

$$zz = b \left(\frac{bd - aa + yy}{d} \right).$$

Ergo, ponendo $2d + 2g - b = m$; $2d - 2g + b = n$; erit, his valoribus substitutis, & transponendo

$$z = \frac{nym + aan - 2bbd}{2bd},$$

aut

$$\frac{2bdz - aan + 2bbd}{m} = yy$$

&

$$\frac{dzz - bbd + aab}{b} = yy \text{ quare}$$

$$\frac{dzz - bbd + aab}{b} = \frac{2bdz - aan + 2bbd}{m} \text{ pro-} \\ \text{aut} \\ zz = \frac{2bbdz - aabm + 2b^2d^2 + bbdm - aabm}{dm}$$

CONSTRUCTIO.

Cape GI = b; ei ad I erige perpendiculari-Tab. E.
rem IF = g; juncta FG erit = d. Eam pro-Fig. 1.
duc in K ut sit GK = 4GF = 4d; qua bise-
cta in L, fac LM = 2g - b; quæ cadet in-
ter L & G si b superat 2g; secus autem in-
ter L & K. Eritque GM = 2d + 2g - b
= m; & KM = 2d - 2g + b = n. Age
nunc per M. perpendicularare MO = GI = b;
& super junctam GO ad rectos angulos educ
OP; Quoniam est GM. MO :: OM. MP.
(Eucl. 4. & 8. VI.) erit MP = $\frac{b^2}{m}$. Fiet er-
go æquatio proposita.

$$zz = 2MP. z + bb = \frac{aab}{dm}(m + n) + 2MP.d$$

Et autem $m + n = 4d$; quare terminus
 $-\frac{aab}{dm}(m + n) = -\frac{4aab}{m}$. Produc MO
in Q ut sit MQ = 2a. Junge GQ, & ei ad
rectos angulos educ QR, erit MR = $\frac{4aa}{m}$, &
æquatio proposita evadet

$$zz - 2MP.z = bb - b.MR + d.2MP.$$

Unde eruitur $b.z :: z - 2MP.b - MR$
 $+ 2MP.$ $\frac{d}{b}$, si 2MP superat MR, quod acci-
dit ubi b superat 2a, vel MO ipsam MQ.

Si vero, ut in figura nostra, MO superatur
ab MQ; æquationis signa mutanda sunt, &
fiet

$$b.MR - d.2MP - bb = 2MP.z - zz.$$

Tunc cape PS = PM $\frac{d}{b}$, eritque SR = MR -
2MP. $\frac{d}{b}$; & cetera fac ut in No. 34. hujus.

DETERMINATIO pro angulo recto.

Patet quod problema tunc fit possibile, cum
bb minor est quam $\frac{3aa + b}{4} \sqrt{(bb - aa)}$;
ubi vero hæ duæ quantitates æquantur, trian-
gulum petitum fit isosceles. Æquantur autem,
ubi

proportionalem inter R & $b - R$, & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + S$ & $\frac{1}{2}a - S$, & erunt $\frac{1}{2}a + T$ & $\frac{1}{2}a - T$, latera trianguli. (b)

P R O B. VIII.

*Trianguli cujuscunque ABC, datis area, perimetro, & uno
angulorum A, cetera determinare.*

TAB. II.
Fig. 5.

XXXV. **E** Sto perimenter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppositum AB demitte perpendicularum CD; (c) & propter angulum A datum, erit AC ad CD in data ratione, puta d ad e . Dic ergo $AC = x$ & erit $CD = \frac{ex}{d}$, per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} = AB$. Adde AD (nempe $\sqrt{AC^2 - CD^2}$) five $\frac{x}{d} \sqrt{dd - ee}$ (d) & emerget $BD = \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d} \sqrt{dd - ee}$; cujus quadrato adde CD^2 & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e} \sqrt{dd - ee} = BC^2$. Adhæc a perimetro aufer AC & AB, & restabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} = BC$, cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone x quale quadrato prius invento; & neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e} \sqrt{dd}$

ubi $4bb - 3aa = 4b \sqrt{bb - aa}$; id est, quadrando, ubi $16b^4 - 24aabb + 9a^4 = 16b^4 - 16aabb$, vel cum $\frac{aa}{4} = \frac{2bb}{9}$: Igitur, proposito problemate, quære mediam inter duos, & unum trientem baseos & perpendiculari simul; & si hæc media major est quam dimidium datæ summæ laterum, problema est impossibile; si æqualis, biseca summam laterum, triangulum erit isosceles; si minor, construe ut supra.

(b) Tamen brevius sic res expediri poterat

EFGH, erunt BG, BF latera quæsitæ.

(c) Cum angulus BAC (quem hic ponimus obtusum) detur ex hypothesi, datur etiam angulus ei deinceps CAD, sed & angulus ad D rectus datur; datur igitur etiam angulus ACD; ergo si in figura nostra super quavis recta data EF, fiat ad E quidem angulus FEG ipsi DAC æqualis, & ad F angulus rectus (quod fieri potest per primam datorum def.), & compleatur triangulum EFG, erunt æquiangula triangula EFG, & ADC similia (Eucl. 4. VI.), & specie data (40. dat.); quin & latera ipsius EFG dantur, datur ergo ratio laterum ipsius ADC.

(d) Dic enim $EG = d$, $GF = e$, & habebis $EF = \sqrt{dd - ee}$; ac AC ad CD ut EG ad GF.

Y 3

TAB. E.
Fig. 2. Sit AB = b, describe semicirculum ADB, cui ex B inscribe BD = a, erit juncta AD = $\sqrt{bb - aa}$. Fiat AE = AD, centro C, radio CE describatur semicirculus

TAB. E.
Fig. 3.

$V(dd - ee) = aa - 2ax - \frac{4abb}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, assumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e} V(dd - ee)$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, five $x = f \pm V(ff - \frac{2bbd}{e})$.

Eadem æquatio prodiisset etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC similiter se habent ad omnes conditiones problematis. Quare si AC ponatur $f - V(ff - \frac{2bbd}{e})$ erit $AB = f + V(ff - \frac{2bbd}{e})$, & vicissim; atque horum summa $2f$ subducta de perimetro relinquit tertium latus $BC = a - 2f$. (e)

PROB.

CONSTRUCTIO.

(c) Hanc satis perplexam constructionem sic perago.

Priorem æquationem $4\frac{bb}{e}V(dd - ee) = aa - 2ax - 4\frac{abb}{ex} + 4\frac{bbd}{e}$, duco in ex , & habeo $4bbxV(dd - ee) = aaex - 2aexx - 4bbd + 4bbdx$; ut xx liberetur a multiplicandis, omnia divido per $2ae$ inventurus $2\frac{bbx}{ae}V(dd - ee) = \frac{ax}{2} - 2\frac{bbd}{e} + 2\frac{bbdx}{ae} - xx$, & transponendo $\frac{2bbd}{e} = \frac{ax}{2} + 2\frac{bbdx}{ae} - 2\frac{bbx}{ae}V(dd - ee) - xx$, unde oritur hæc analogia $2\frac{bb}{e} \cdot x :: \frac{a}{2} + 2\frac{bbd}{ae} - 2\frac{bb}{ae}V(dd - ee)$

TAB. E.
Fig. 3.

Jam linea quæ per $V(dd - ee)$ designatur, inventa est, ea enim est ipsa EF, ergo $EF = V(dd - ee)$ dico $= e$, & perplexa quantitas $2\frac{bbd}{ae} - 2\frac{bb}{ae}V(dd - ee)$, fit $\frac{2bbd - 2bbec}{ae}$, quæ rursus resolvitur in hanc analogiam $\frac{a}{2} \cdot \frac{bb}{e} :: d - e$ ad quartam, quæ est ipsissima quantitas $\frac{2bbd - 2bbec}{ae}$, ut patet invicem ducendo media, & ea dividendo per extremum $\frac{a}{2}$. Igitur centro E. radio EF, describo arcum FH, occurrentem EG in H puncto; est GH $= d - e$. In GF, & in GH (productis si opus est) sumo ex G, hinc inde GL $= GM = b$,

jungo FM, cui parallelam duco LN, tum est (EUCL. 4. VI.) FG (e). GM (b):: LG (b). GN $= \frac{bb}{e}$, cui æqualem capio NP.

Nunc fit GK $= \frac{a}{2}$, jungatur HK, & transeat per puncta K, H, N. circulus ipsi GL occurrens in Q & erit KG ($\frac{a}{2}$). GH ($d - e$):: GN ($\frac{bb}{e}$). GQ $= \frac{2bbd - 2bbec}{ae}$, est ergo KQ $= \frac{a}{2} + \frac{2bbd - 2bbec}{ae}$.

Cetera ut in No. 34. hujus.

DETERMINATIO.

Fit autem impossibile hoc problema, ubi $2\frac{bbd}{e}$ est major quam ff ; & si $2\frac{bbd}{e} = ff$, triangulum petitum est isosceles.

Si angulus datus esset rectus, tunc d fieret $= e$, & $dd - ee = 0$; atque ideo superior æquatio fieret $xx = \frac{ax}{2} + 2\frac{bbx}{a} - 2bb$.

Sin acutus, normalis cadet inter puncta A & B; quare BD tunc esset ($= BA - AD$) $= 2\frac{bld}{ex} - \frac{x}{d}V(dd - ee)$, & in æquatione mutandum esset signum ipsius $4\frac{bb}{e}V(dd - ee)$.

Sed problema VIII. multo facilius solvitur TAB. E. *analyfi geometrica*. Data perimeter fit AB; da-
tus

PROB. IX.

Datis altitudine, basi, & summa laterum invenire triangulum.

XXXVI. **S**it altitudo $CD = a$, basis AB dimidium $= b$, laterum scilicet $AC = c$, & semidifferentia $= z$; eritque majus la-
tus,

tus angulus C , & data area $DEFG$. Puta factum, & triangulum AHI sit quod petitur, & ejus angulus H æqualis dato C . Pone IK æqualem basi AI ; rectangulum ABK erit excessus quadrati ex lateribus AH ; HI tanquam ex una recta, vel ex IB , supra quadratum ex AI vel ex IK (Eucl. 6. II.). Datur ergo ratio ABK rectanguli ad triangulum AHI (67. Dat.); id est ad quadratum $DEFG$ datum per hyp. Ergo datur rectangulum ABK (2. Dat.). Sed datur AB ; quare & BK , ad datam rectam AB applicando spatium æquale dato rectangulo ABK . Igitur datur KA (4. Dat.) & AI (5. Dat.).

Jam datur ratio rectanguli sub AH ; HI ad triangulum AHI ; id est ad datum quadratum $DEFG$; quare datur rectangulum sub AH ; HI (2. Dat.). Sed datur summa AH ; HI ; æqualis IB ; ergo, applicando ad datam IB spatium æquale dato rectangulo sub AH ; HI , & deficiens quadrato, dabitur BL , altitudo applicationis, & LI . (48. Dat.).

Componetur autem sic. Ex anguli, qui dato deinceps est, cruribus absconde æquales partes MC ; CN ; junge NM ; centro N intervallo NM descriptum concipe circumulum ipsi MC productæ occurrens in O ; & ex M in subjectam NC duc perpendicularem MP . Dati quadrati $DEFG$ age diagonalem DF ; & pone ut PM ad MO sic DF quadratum ad QR quadratum. Ad datam AB applica spatium æquale quadrato ex QR , & sit BK altitudo applicationis. Biseca AK in I , erit AI basis trianguli quæsitæ.

Iterum pone ut PM ad MC sic DF quadratum ad ST quadratum, ad datam IB applica spatium æquale quadrato ex ST & deficiens quadrato, & sit BL altitudo applicationis; erit BL latus unum, LI latus alterum quæsitæ trianguli.

Sit illud AHI , & AH sit æqualis IL ; HI æqualis LB . Jam hujus trianguli perimenter æquat datam rectam AB . Produca AH in U ut HU æquet HI , & junge IU .

Ductam intellige NO . Triangula isoscelia NCM per constr.; & MNO , ob radios MN ;

NO æquales, communem habent angulum CMN , æqualem tum angulo MNC tum angulo MON : quare angulus ONM æqualis est angulo NCM : & est OM ad MN ut MN ad MC vel NC atque OM ad MC ut quadratum ex MN ad quadratum ex NC .

Jam est rectangulum ABK , vel æquale quadratum ex QR , ad rectangulum sub AH ; HI , vel ad æquale quadratum ex ST , ut quadratum ex IU ad quadratum ex UH (ex 67. Dat.); &, per constr., est quadratum ex QR ad quadratum ex DF ut OM ad MP , & quadratum ex DF ad quadratum ST ut PM ad MC ; ergo ex æquo ordinate, quadratum ex QR ad quadratum ex ST ut OM ad MC , ut quadratum ex NM ad quadratum ex NC , ut quadratum ex IU ad quadratum ex UH ; quare & ipsæ rectæ NM ; NC ; IU ; UH , proportionales sunt; triangula isoscelia NCM ; IHU similia; angulus IHU æqualis angulo NCM , & reliquis IHA æqualis reliquo MCP . Quod erat unum.

Nunc ex A ductam puta in HI perpendicularem AX ; triangula CMP ; HAX similia sunt, & HA ad AX (vel rectangulum sub HA ; HI ad rectangulum sub AX ; HI , id est ad duplum rectangulum AHI) ut CM ad MP , ut quadratum ex ST ad quadratum ex DF per constr.; sed, per constr., quadratum ex ST æquale est rectangulo sub HA ; HI ; ergo duplum triangulum AHI æquale est quadrato ex DF ; & triangulum illud quadrato ex DE . Quod erat alterum.

Determinatio pro basi & pro lateribus deducitur ex 27. VI. Eucl.

45. Diximus ponendum ut recta ad rectam ita quadratum ad quadratum, quod fieri potest quærendo mediam proportionalem inter datas rectas, & deinde quartam proportionalem post primam datarum, mediam, & latus dati quadrati: vel etiam sic.

Sint duæ datæ rectæ AB ; BC ; ex AC diametro describe semicirculum, cui in D occurrat perpendicularis excitata a puncto B super AC ; junge AD ; DC , erit angulus ADC rectus (31. III. Eucl.). Ex DA absconde DE æqua-

Tab. II.
Fig. 5.

Tab. E.
Fig. 5.

tus, puta $BC = c + z$, & minus $AC = c - z$. Subduc CDq de BCq & ACq , & exibat hinc $BD = \sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, & inde $AD = \sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subduc etiam AB de BD & exibat iterum $AD = \sqrt{cc + 2cz + zz - aa} - zb$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = bb\sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$. Unde dantur latera (f).

PROB. X.

Datis basi AB, summa laterum AC + BC, & angulo verticali C, determinare latera.

Tab. 2.
Fig. 6.

XXXVII. **S**It basis $= a$, semisumma laterum $= b$, & semidifferentia $= x$, eritque majus latus $BC = b + x$ & minus $AC = b - x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendicularum AD; & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e , & proinde erit $CD = \frac{eb - ex}{d}$. Est etiam per 13. II. Elementorum $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$ hoc est $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x} = CD$; ideoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{daa + 2ebb - 2dbb}{2d + 2e}}$. Unde dantur latera. (g).

Si

æqualem lateri quadrati dati, per E age EF ipsi AC parallelam & perpendiculari BD occurrentem in G, erit ut AB ad BC sic quadratum ex ED ad quadratum ex DF.

Est enim CA ad AD ut DA ad AB (cor. 8. VI. EUCL.) & rectangulum sub CA; AB æquale quadrato ex AD (17. VI. EUCL.). Eodem pacto demonstrabitur rectangulum sub CA; CB æquale quadrato ex CD; ergo rectangulum sub CA; AB; ad rectangulum sub CA; CB, id est AB ad BC (1. VI. EUCL.), ut quadratum ex AD ad quadratum ex DC, ut quadratum ex EF ad quadratum ex DF.

CONSTRUCTIO.

(f) Æquatio $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$ — $aabb$ resolvitur in hanc analogiam $cc - bb :: bb - aa :: bb.zx$, aut $\sqrt{cc - bb} :: \sqrt{cc - bb - aa} :: b.z$. (EUCL. 21. VI.). Ipsas autem $\sqrt{cc - bb}$ & $\sqrt{cc - bb - aa}$ determinare docuimus (No. 23. &c. hujus);

quibus inventis z reperietur per (EUCL. 17. VI.) Ceterum geometricam hujus analysim videbis infra Prob. XXI.

DETERMINATIO.

Fit autem impossibile problema cum cc superatur ab $aa + bb$; & cum $aa + bb = cc$, tunc $z = 0$, & triangulum fit isosceles. Sed, quando $cc = aa + bb$, etiam $cc - bb = aa$, & $c + b.a :: a.c - b$. Quærat ergo, problemate proposito, media inter aggregatum ex laterum semisumma, & dimidiata basi, atque eorum differentiam. Si hæc æquat datum perpendicularum, summa laterum est bisecanda & triangulum isosceles construendum, si major est, latus differentia, ut supra, detegenda est, si minor, problema est impossibile.

(g) Hæc æquatio resolvitur in analogiam $d + e :: \frac{aad}{2bb} - d + e :: bb.xx$, & $\frac{aad}{2bb}$ dat $bb.aa ::$

TAB. E.
Fig. 5. $\frac{d}{2}$ ad quartam $= \frac{aad}{2bb}$. Fac ergo ex AD

$= b$, & DC $= a$ angulum rectum ADC, junge AC, super quam ex D demitte normalem DB; tunc AD². DC² :: AB. BC, ergo post AB, BC, & $\frac{d}{2}$ inveniatur quarta $= \frac{aad}{2bb}$,

quam dic $= f$, & erit $d + e . e - d + f :: bb . xx$; super basim MO $= 2e + f$, describe semicirculum MKO, sume MN $= d + e$, erit NO $= 2e + f - e - d = e - d + f$, quare junctarum MK, KO, quadrata erunt ut MN ad NO, ut bb ad xx , igitur superest ut facias, MK.KO :: b ad quartam $= x$.

TAB. E.
Fig. 6.

ANALYSIS GEOMETRICA.

Quia summa laterum, & basis dantur, earum ratio datur (t. dat.); sed & angulus verticalis datur, ergo triangulum est datum specie (45. dat.); & ob datam basim, etiam magnitudine (52. dat.); quare ejus latera AC, & BC, data erunt (55. dat.).

Componetur autem sic

TAB. E.
Fig. 7.

Sit FG data recta æqualis duobus lateribus trianguli quæsti, ad alteram ejus extremitatem G fac angulum FGH æqualem dati dimidio, deinde centro F, & data basi, tanquam radio describe arcum circuli qui occurrat ipsi GH in duobus punctis H, h , fac in H, aut h angulum GHL, aut Ghl æqualem dato FGH, occurratque recta HL, sive hl ipsi FG in L, aut l ; dico triangulum FHL, aut Fhl satisfacere problemati. Nam quia triangulum HLG, est isosceles (Eucl. 6. l.) erit angulus FLH, duplex anguli FGH, (Eucl. 32. l.) aut dato æqualis, quod erat unum.

Item FL, LH simul æquales FG rectæ datæ, quod erat alterum.

DETERMINATIO.

Quia vero ad compositionem requiritur, ut circulus, centro F, & data basi tanquam radio descriptus, occurrat ipsi GH positione datæ, & quia si bis occurrat, duo sunt triangula satisfaciencia; si semel, unum; lustrandum est utrum angulus verticalis in hoc secundo casu, sit omnium minimus, an maximus.

Ergo ex puncto G demittatur tangens GM ad arcum circuli Hb, tunc unum erit triangulum FMN problemati satisfaciens; sed angulus FGM est angulo FGH major, ergo & FNM est major ipsis FLH, aut Plb. Tunc

vero triangulum FMN, est isosceles; nam ob triangulum FMG rectangulum, anguli MFG, & FGM, aut NMG, æquantur angulo FGM (32. l.) quapropter residuus MFG æquat residuum FMN; quare determinatur utrum possibile sit problema, nec ne, biseca rectam datam, & ex ea fac super datam basim triangulum isosceles, si trianguli hujus angulus verticalis datum æquat, jam problema solutum est; si dato major est, problema est possibile, & construes ut supra; si vero minor; problema est impossibile.

Alia Compositio.

Super data basi AB describatur segmentum circuli capax dimidii anguli dati; cui circulo ab altera baseos extremitate A inscribatur chorda AE par datorum laterum summæ, jungatur BE, & fiat angulus EBC ipsi AEB æqualis; dico peractum, ut patet.

Quia vero ad compositionem requiritur, ut data laterum summa dato circulo possit inscribi, & hoc fieri nequit, ubi ea major est dati circuli diametro; si par, una inscriptio fieri potest; ceteroquin, duæ: videndum est quid accadat cum data laterum summa datam diametrum æquat; ea sit ergo AGF, rectus igitur est angulus B; & eum æquant anguli FAB, & AFB, vel (per constructionem) FBG, simul; æquales igitur sunt anguli GAB, GBA; & est triangulum AGB isosceles, & G circuli centrum. Cum autem data summa (AE) diametro minor est, angulus ABE major est recto ABE; quare, demptis æqualibus, angulus CBA major est angulo (GBA vel) GAB, & fortius, angulo CAB; est ergo latus CA majus latere CB; & ideo, si recta AE bifecetur in H; punctum H cadere debet inter puncta A, & C; quapropter angulus AHB exterior, major est interiore ACB.

Sed ubi problema est impossibile, quia data recta AM diametro major est, statim apparet quod angulus AFB dati dimidius, exterior, major est angulo interiore AMB; quare datus AGB major est duplo ipsius AMB, id est, ejus qui fieret supra datam basim a recta AM bisecta; unde redit superior determinatio.

Ceterum patet, quod summa laterum debet esse basi major.

Si, reliquis stantibus, daretur laterum differentia, problema construeretur ut hoc, nisi quod angulus AEB deberet esse major angulo EBA, quia laterum differentia minor est quam basis; quare linea BC faciens angulum EBC æqualem ipsi AEB, caderet infra basim, &c.

PROB.

Tom. I.

Z

TAB. E.
Fig. 8.

Si anguli ad basin quærentur, conclusio foret concinnior; utpote datur EC datum angulum bisecans & basi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (:: AE. AC) :: sinus anguli ACE. sinum anguli AEC. Et ab angulo AEC ejusque complemento BEC si subducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB. XI.

Datis trianguli lateribus invenire angulos. (b)

TAB. II.
Fig. 7.

XXXVIII. **D**entur latera AB = a. AC = b. BC = c, quæratu angulus A. Demisso ad AB perpendicularo CD quod angulo isti opponitur, erit imprimis

$$\begin{aligned} bb - cc &= ACq - BCq = ADq - BDq \quad (i) = \\ &= (AD + BD)(AD - BD) = \\ &= AB(2AD - AB) \quad (k) = 2AD \cdot a - aa. \end{aligned}$$

Adeoquæ $\frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = AD$. (l) Unde prodit hocce primum Theorema.

I.

Ut AB, ad AC + BC, ita AC — BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB + N}{2} = AD$. Ut AC ad AD, ita radius ad cosinum anguli A.

Adhæc

$$\begin{aligned} DCq = ACq - ADq &= \frac{2aabb + 2aac + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa} = \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \end{aligned}$$

Ubi

(b) Hoc problema Geometram practicam spectat. Theoreticus enim illud jam solutum habet, siquidem, datis trianguli lateribus dantur anguli (39. & def. 3. datorum). Sed cum tabula tangentium, &c. tantum dato sinu alicujus anguli indicent arcum, qui angulum illum metitur, sinus vero cum ceteris trianguli lateribus efficiat triangulum rectangulum, & fieri possit ut aliquis, terra aut maris tractum dimetiens, cognoscat tria latera trianguli obliquanguli; ideo clarissimus Auctor docet qua ratione triangulum obliquangulum, cujus dantur latera, ad triangula rectangula revocemus. Hoc ipsum appellatur triangulorum obliquangulorum resolutio.

(i) Nam $AC^2 = CD^2 + DA^2$, & $BC^2 = BD^2 + DC^2$, ergo $AC^2 - BC^2 = DA^2 - BD^2$.

$$CD^2 - BD^2 - DC^2 = DA^2 - BD^2.$$

(k) Siquidem $AD + DB = AB$, Quod est unum.

Hinc fuit quod $AD = AB - BD$, & $AD - DB = AB - 2BD$, quæ quantitas (ubi $2BD$ superat AB) est negativa & æqualis $2BD - AB$ nam earundem quantitatum semper eadem est differentia. Quod est alterum.

(l) Sed $AB = a$, ergo $bb - cc = a(2AD - a) = 2AD \cdot a - aa$, & $aa + bb - cc = 2AD \cdot a$, & $AD = \frac{a}{2} + \frac{bb - cc}{2a}$.

Vide problema II. hujus, ubi jam segmenta baseos invenimus.

Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b , conflatur hocce *Theorema secundum*.

I I.

Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $(a+b+c)$ $(a+b-c)$ & $(a-b+c)$ $(-a+b+c)$ ita radius ad sinum anguli A. (m)

Insuper in AB Cape AE = AC, & age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. (n)

Aufer AD de AE, & restabit DE =

$$b - \frac{1}{2}a - \frac{bb+cc}{2a} = \frac{cc-aa+2ab-bb}{2a} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}$$

Unde

$$DE^2 = \frac{(c+a-b)(c+a-b)(c-a+b)(c-a+b)}{4aa}$$

Et hinc confit *Theorema tertium quartumque, videlicet*.

I I I.

Ut $2ab$ ad $(c+a-b)(c-a+b)$ (ita AC ad DE) ita radius ad sinum versum anguli A. (o)

I V.

Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotagens ad radium. (p)

Præ-

(m) Quia DC =
$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2a}}$$

=
$$\frac{(c+a-b)(c-a+b)b}{2ab}$$
 quapropter $2ab \cdot (c+a-b)(c-a+b) :: b \cdot DE$.

& R medium proportionale inter $(a+b+c)$ $(a+b-c)$, & $(a-b+c)$ $(-a+b+c)$ =
$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2a}}$$

(p) Etenim DC =
$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4aa}$$

$(-a+b+c)$, ergo DC =
$$\frac{R}{2a} = \frac{bR}{2ab}$$
; sed (posita AC = radio) DC est finus anguli A; ergo $2ab \cdot R :: b$ (radius). DC (sinus).

&

DE =
$$\frac{(a-b+c)(a-b-c)}{4aa}$$

$$\frac{(-a+b+c)(-a+b-c)}{4aa}$$

ergo

(o) Nam DE =
$$\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}$$

CD · DE ::
$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4aa}$$

Z 2

(c—

Præterea est $CEq = CDq + DEq =$
 $\frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a} = \frac{b}{a} (c + a - b) (c - a + b).$

Unde Theorema quintum & sextum.

V.

* Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c + a - b$, & $c - a + b$, vel ut 1 ad medium proportionale inter $\frac{c + a - b}{2a}$ & $\frac{c - a + b}{2b}$, (q) (ita AC ad $\frac{1}{2}CE$, vel CE ad DE) (r) ita radius ad sinum dimidii anguli A.

V I.

Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a + b + c$, & $a + b - c$ (ita CE ad CD) (s) ita radius ad cosinum dimidii anguli A.

Si præter angulos desideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{2}ABq$, & radix, videlicet

IV.

$$\frac{(a - b + c)(-a + b + c)}{4aa} \text{ ad } \frac{(a - b + c)(a - b + c)(-a + b + c)}{4aa}$$

$$\frac{(-a + b + c)}{4aa} ::$$

(cunctis divis per $\frac{(a - b + c)(-a + b + c)}{4aa}$)

$$\frac{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)}{(-a + b + c)};$$

igitur

$$CD. DE :: \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)}.$$

$$\sqrt{(a - b + c)(-a + b + c)}.$$

(q) Est enim $AC^2. CE^2 :: bb. \frac{b}{a}(c + a - b)$
 $(-a + b + c) ::$

(cunctis divis per $\frac{b}{a}ab$.

$$(a - b + c)(-a + b + c);$$

&

$$AC. CE :: \sqrt{ab}. \sqrt{(a - b + c)}$$

$$(-a + b + c) :: 2\sqrt{ab}. 2\sqrt{(a - b + c)}$$

$$(-a + b + c),$$

& alternando, AC. $2\sqrt{ab}(\sqrt{4ab}) :: CE.$

$$2\sqrt{(a - b + c)}(-a + b + c) :: \frac{CE}{2}.$$

$$\sqrt{(a - b + c)(-a + b + c)}.$$

(r) Nam ob angulos, rectos, ad D, & EAC;
 CED æquales. AC. $\frac{CE}{2} :: CE. ED.$

(s) Siquidem $EC^2. CD^2 :: \frac{b}{a}(c + a - b)$
 $(c - a + b).$

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b - a + c) ::$$

(cunctis divis per $\frac{4aa}{(c + a - b)(c - a + b)}b$.

$$(a + b + c)(a + b - c) :: 4ab.(a + b + c)$$

$$(a + b - c), \& EC. CD :: \sqrt{4ab}.$$

$$\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)}.$$

$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$, erit area illa quaesita.

P R O B . X I I .

Trianguli cujusvis rectilinei datis lateribus & basi, invenire segmenta basis, perpendicularum, aream, & angulos. (t)

XXXIX. **T**rianguli ABC dentur latera AC, BC, & basis AB. Biseca TAB. II. AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æqua- Fig. 8. les AC, atque BG & BH æquales BC. Junge CE, CF; & a C ad basem demitte perpendicularum CD. Et erit

$$ACq - BCq = ADq + CDq - CDq - BDq = ADq - BDq = (AD + BD)(AD - BD) = AB \cdot 2DI. (u)$$

Ergo

$$\frac{ACq - BCq}{2AB} = DI. \text{ Et } 2AB \cdot AC + BC :: AC - BC \cdot DI.$$

Quod est Theorema pro determinandis segmentis basis. (w)

De IE, hoc est de $AC - \frac{1}{2}AB$ aufer DI, & restabit

$$DE = \frac{BCq - ACq + 2AC \cdot AB - ABq}{2AB} \quad (y)$$

hoc est

$$\frac{(BC + AC - AB)(BC - AC + AB)}{2AB}, \text{ five } = \frac{HE \cdot EG}{2AB}. (z)$$

Aufer

(t) Segmenta basis inventa sunt Probl II. & XI. Perpendicularum Probl. XI. ante Theor. II. Area Probl. XI. post Theor. VI., & anguli per totum Probl. XI.: uno verbo hoc problema idem est ac superius diversimode solutum.

denominatorem reducendo,

$$DE = \frac{AC \cdot 2AB - \frac{1}{2}AB \cdot 2AB - AC^2 + BC^2}{2AB}$$

= BC². &c.

Idem repertum fuit Probl. XI. ante Theor. III.

(u) Nam AD = AI + ID = BI + ID = BD + ID + ID, ergo AD - DB = 2ID.

Hoc autem est theorema, quod Auctor noster attulit Art. XIII., & quod nos ibi demonstravimus.

(z) Nam BC + CA = BH + AE = BE + EH + AH + HE;

sed

$$BE + EH + HA = BA,$$

$$\text{ergo } BC + CA = BA + HE;$$

&

$$BC + CA - AB = HE.$$

Rur-

(x) Idemque, ac I. superioris problematis.

(y) Nam $DE = AC - \frac{1}{2}AB - (DI \text{ vel } -)$

$$\left(\frac{AC^2 - BC^2}{2AB} \right), \text{ omnesque terminos ad eundem}$$

Aufer DE de FE five 2AC, & restabit

$$FD = \frac{CAq + 2AC \cdot AB + ABq - BCq}{2AB},$$

hoc est

$$\frac{(AC + AB + BC)(AC + AB - BC)}{2AB}, \text{ five } = \frac{FG \cdot FH}{2AB}.$$

Et, cum sit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: (a) erit

$$CD = \sqrt{\frac{FG \cdot EH \cdot HE \cdot EG}{2AB}}, (b) CE = \sqrt{\frac{AC \cdot HE \cdot EG}{AB}}, (c)$$

&

$$CF = \sqrt{\frac{AC \cdot FG \cdot FH}{AB}},$$

Duc CD in $\frac{1}{2} AB$ & habebitur area $= \frac{1}{4} \sqrt{FG \cdot FH \cdot HE \cdot EG}$. (d) Pro angulo vero A determinando produnt Theoremata multiplicia, videlicet.

1. $2AB \cdot AC : HE \cdot EG (:: AC, DE) ::$ radius ad sinum versum anguli A.
2. $2AB \cdot AC \text{ ad } FG \cdot FH (:: AC \text{ ad } FD) ::$ radius ad cosinum versum A.
3. $2AB \cdot AC \text{ ad } \sqrt{FG \cdot FH \cdot HE \cdot EG} (:: AC \text{ ad } CD) ::$ radius ad sinum A.
4. $\sqrt{FG \cdot FH} \text{ ad } \sqrt{HE \cdot EG} (:: CF \text{ ad } CE) ::$ radius ad tangentem $\frac{1}{2} A$.
5. $\sqrt{HE \cdot EG} \text{ ad } \sqrt{FG \cdot FH} (:: CE \text{ ad } FC) ::$ radius ad cotangentem $\frac{1}{2} A$.

6.

Rursus

$$BC - CA = BG - AE, \& AB = AE + EB;$$

ergo

$$BC - CA + AB = BG - AE + AE + EB = EG.$$

(a) Ob æquales rectas EA; AC; AF; semicirculus centro A radio AF descriptus transibit per C, & E; unde angulus FCE rectus est (Eucl. 31. III.)

(b) Jam idem invenimus Probl. XI. ante

Theor. III.

(c) Ut Probl. XI. ante Theor. V.

(d) Eodem prorsus pacto Probl. XI. post Theor. VI.

Ceterum sequentia Theoremata coincidunt.

hujus	I.	cum	III.	Probl. XI.
	III.		II.	
	IV. & V.		IV.	
	VI.		V.	
	VII.		VI.	

6. $2\sqrt{(AB.AC)}$ ad $\sqrt{(FG.FH)}$ ($:: FE$ ad FC) $::$ radius ad sinum
 $\frac{1}{2} A$.

7. $2\sqrt{(AB.AC)}$ ad $\sqrt{(FG.FH)}$ ($:: FE$ ad FC) $::$ radius ad cosinum
 $\frac{1}{2} A$.

P R O B. X I I I.

Datum angulum CBD recta data CD subtendere; ita ut si a termino istius rectae D ad punctum A in recta CB producta datum agatur AD, fuerit angulus ADC equalis angulo ABD. (e)

XL. **D**icatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit $BD.BA :: (f)$ TAB. II. Fig. 9.
 $CD.DA = \frac{ab}{x}$.

Demitte perpendiculum DE, erit

$$BE = \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA} (g) = \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$$

Ob datum angulum DBA pone $BD.BE :: b.e$, & habebitur iterum

$$BE = \frac{ex}{b}, \text{ ergo } xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex. \text{ Et } x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0. (h)$$

P R O B.

(e) Hoc problema tres habet casus, aut enim angulus CBD est rectus, aut acutus, aut obtusus. Cum vero ex unius casus solutione facile deducantur alii, animadverto, quod si angulus CBD esset obtusus, normalis DE demissa ex D caderet extra angulum, si acutus, intra, quare, si primo casu valor ipsius BE positivus fuisset assumptus, in secundo negativus esset; & vice versa. Si vero angulus CBD positus esset rectus, valor BE nullus esset; quia DE caderet super ipsam DB; sed posito aliquo valore ipsius DE facile regredi possumus ad casum, in quo ea nihilo æqualis est; at ea posita nihilo æqualis nullo modo præbet valorem ejusdem, ubi fit quanta; præstat ergo fingere angulum CBD obtusum, aut acutum. Sit obtusus.

(f) Quia, scilicet, triangula BAD, DAC habent angulum communem ad A, & angulos DBA, ADC æquales, ex problematis lege.

(g) Nam, ex hypothesi, angulus CBD est obtusus; igitur $AE = EB - BA$, & $AE^2 =$

$EB^2 - 2AB.BE + BA^2 = AD^2 - DE^2$, ob triangulum rectangulum DAE; sed triangulum rectangulum DBE dat $DE^2 = DB^2 - BE^2$, ergo $EB^2 - 2AB.BE + BA^2 = AD^2 - DB^2 + BE^2$, & deletis delendis, ac transponendo $BE = \&c$.

(h) Si vero esset rectus, patet quod punctum E caderet in B, &

$$BE = 0 = \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b} = \frac{x^4 - aabb + bbxx}{2b}$$

quam ob rem

$$x^4 = \frac{bbxx + aabb}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^4}{4} + aabb\right)}$$

unde

$$\sqrt{\left(\frac{bb}{4} + aa\right)} - \frac{b}{2}.x :: x.b.$$

Quod etiam sic inveniri poterat.

Jam

PROB. XIV.

Invenire triangulum ABC, cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum DC, sunt in arithmetica progressione.

TAB. II.
Fig. 10.

XLI. **D**ic $AC = a$, $BC = x$; & erunt $DC = 2x - a$, & $AB = 2a - x$. (i) Erunt etiam

$$AD (= \sqrt{AB^2 - DC^2}) = \sqrt{(2a - x)^2 - (2x - a)^2}$$

&

$$BD (= \sqrt{BC^2 - DC^2}) = \sqrt{x^2 - (2x - a)^2}$$

Atque adeo rursus

$$AB = \sqrt{(2a - x)^2 - (2x - a)^2} + \sqrt{x^2 - (2x - a)^2}$$

Quare

$$2a - x = \sqrt{(2a - x)^2 - (2x - a)^2} + \sqrt{x^2 - (2x - a)^2},$$

five

$$2a - x - \sqrt{(2a - x)^2 - (2x - a)^2} = \sqrt{x^2 - (2x - a)^2}.$$

Et partibus quadratis

Jam $DA = \frac{ab}{x}$, sed $AB = (b)$, $BD = (x)$::
 $BD(x) \cdot BC = \frac{xx}{b}$; atque ideo $CA = \frac{xx + bb}{b}$, & $CA^2 = \frac{x^4 + 2bbxx + b^4}{b^2} =$
 $CD^2 + DA^2 = aa + \frac{aabb}{xx}$, & sublati fra-
 ctionibus, $x^6 + 2bbx^4 + b^4xx = aabbxx$
 $+ aab^4$, & cunctis divis per $xx + bb$,
 $x^4 + bbxx = aabb$.

CONSTRUCTIO.

TAB. F.
Fig. I.

Quæsitæ vero sic facile determinatur. Sit
 $AB = a$, BC ipsi normalis $= \frac{b}{2}$, & erit

$AC = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + aa\right)}$. Sumatur $EC = CF = CB$,
 & diametro AF describatur semicirculus AGF ,
 ex E elevetur normalis EG , erit hæc quanti-
 tas quæsitæ, ut patet. Jungantur nunc AG ,
 GF , erit triangulum AGF rectangulum, &

angulus ad G æqualis angulo dato ad E , dico
 rectam AG æquare datam AB .

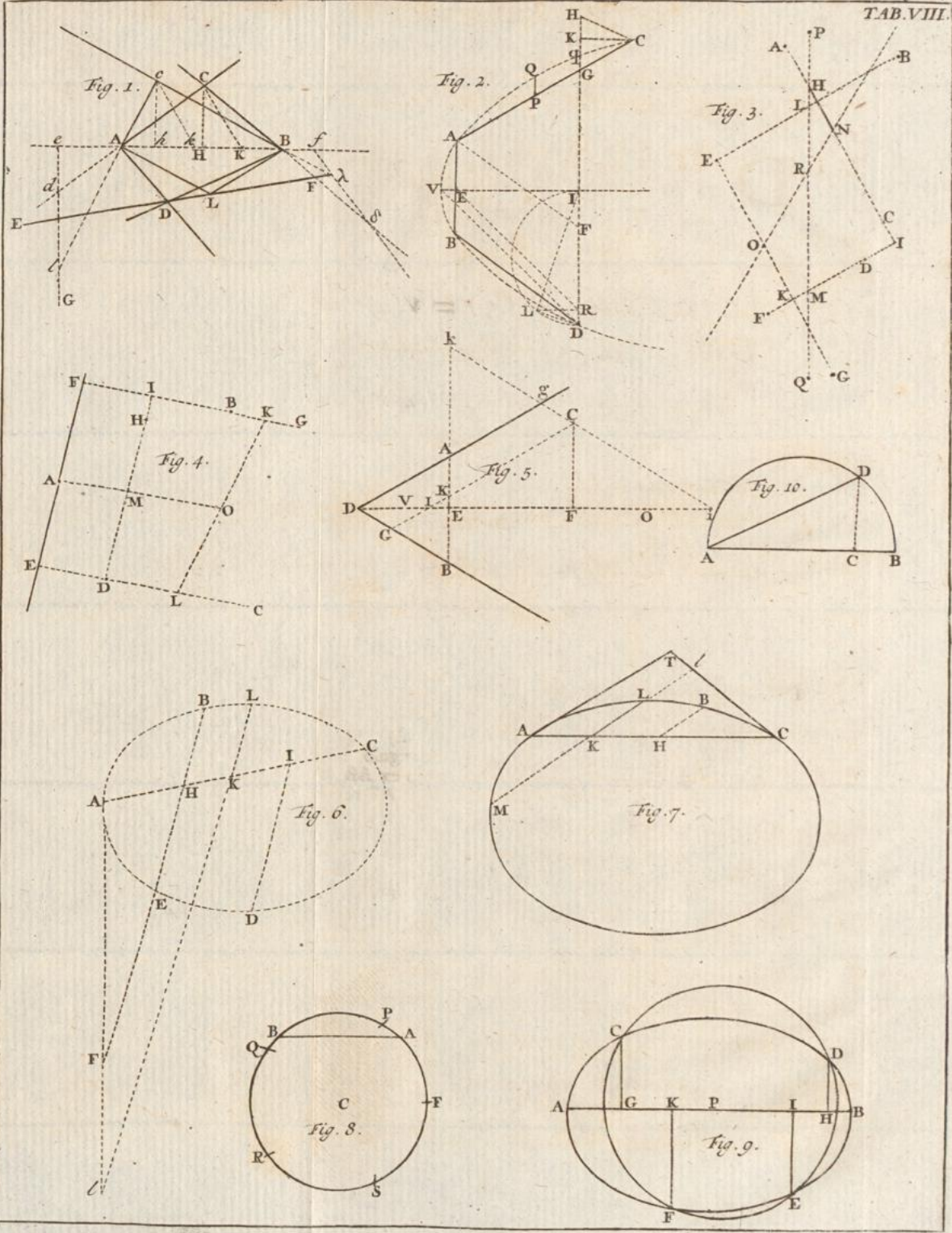
Nam FA ad AG est ut GA ad AE (Eucl. 8. VI.). Quadratum igitur ex AG æquatur
 rectangulo FAE (Eucl. 16. VI.) id est qua-
 drato ex AB (Eucl. 36. III.) igitur AG æqua-
 lis est AB rectæ datæ.

Si vero angulus datus esset acutus, tunc AE
 $= EB + BA$, $AE^2 = EB^2 + 2EB \cdot BA + BA^2$
 $= DA^2 - DE^2$, & $DE^2 = DB^2 - BE^2$;
 quare $EB^2 + 2EB \cdot BA + BA^2 = DA^2 -$
 $DB^2 + BE^2$, & $2EB \cdot BA = DA^2 - DB^2 -$
 BA^2 , ac $EB = \frac{DA^2 - DB^2 - BA^2}{2AB}$

$$= \frac{aabb}{xx} - \frac{xx - bb}{2b}.$$

Reliqua vero ut supra.

(i) Sit AB terminus maximus, & primus;
 AC secundus, tertius BC ; quartus vero DC ,
 tunc si $AC (a)$ est arithmetice ad $CB (x)$, ut
 $BC (x)$ ad CD , erit $CD = 2x - a$, & si
 $BC (x)$ est arithmetice ad $AC (a)$, ut $AC (a)$
 AB , erit $AB = 2a - x$.



$$4aa - 3xx - (4a + 2x) \sqrt{4ax - 4xx} = 4ax - 3xx - aa,$$

five

$5aa - 4ax = (4a + 2x) \sqrt{4ax - 4xx}$
Et partibus iterum quadratis ac terminis rite dispositis

$$16x^4 - 80ax^3 + 144a^2xx - 104a^3x + 25a^4 = 0$$

Hanc æquationem divide per $2x - a$, & orietur

$$8x^3 - 36axx + 54a^2x - 25a^3 = 0,$$

æquatio cujus resolutione dabitur x ex assumpto utcunque a . Habitis a & x constitue triangulum cujus latera erunt $2a - x$, a , & x ; & perpendiculum in latus $2a - x$ demissum erit $2x - a$.

Si posuissẽ differentiam laterum trianguli esse d , & perpendiculum esse x ; opus evassisset aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $a^3 = 24ddx + 48d^3$. (k)

P R O B. X V.

Invenire triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum CD, sunt in geometrica progressionẽ.

TAB. II.
Fig. 19.

XLII. Dic AC = x , & BC = a ; & erit AB = $\frac{xx}{a}$. Et CD = $\frac{aa}{x}$.

Est &

$$AD (= \sqrt{AC^2 - CD^2}) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$$

&

$$BD (= \sqrt{BC^2 - DC^2}) = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$$

adeoque

$$\frac{xx}{a} (= AB) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}},$$

five

(k) En calculum. Cum CD primus progressionis arithmeticæ terminus sit $= x$; terminorum autem differentia d ; erit BC $= x + d$, CA $= x + 2d$; AB $= x + 3d$; sed propter angulum ADC rectum; AD $= \sqrt{AC^2 - CD^2}$ $= \sqrt{4dx + 4dd}$, & BD $= \sqrt{BC^2 - DC^2}$ $= \sqrt{2dx + dd}$,

ergo AD + DB, five tota AB, vel

$x + 3d = \sqrt{4dx + 4dd} + \sqrt{2dx + dd}$; nempe $x + 3d - \sqrt{4dx + 4dd} = \sqrt{2dx + dd}$, & partibus quadratis, æquatione ad simpliciores terminos reducta, $2dx + dd$, ac $-(2x - 6d) \sqrt{4dx + 4dd}$ in contra-

Tom. I.

rias respective partes translatis

$$xx + 8dx + 12dd = (2x + 6d) \sqrt{4dx + 4dd}$$

& rursus quadratis partibus

$$x^4 + 16dx^3 + 88ddx^2 + 192d^2x + 144d^4 = 240d^2x + 112ddxx + 16dx^4 + 144d^4,$$

cunctisque terminis primi membri præter x^4 in secundum coniectis, & deletis delendis $x^4 = 24ddxx + 48d^2x$, & tota æquatione per x divisa $x^3 = 24ddx + 48d^2$.

Constructio problematum, quorum æquationes secundum gradum superant, invenitur ad hujus operis finem.

A a

five

$$\frac{xx}{a} - V(aa - \frac{a^4}{xx}) = V(xx - \frac{a^4}{xx}).$$

Et partibus æquationis quadratis,

$$\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} V(aa - \frac{a^4}{xx}) + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx},$$

hoc est

$$x^4 - aaxx + a^4 = 2aax V(xx - aa). \quad (l)$$

Et partibus iterum quadratis

$$x^8 - 2aax^6 + 3a^2x^4 - 2a^6xx + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx.$$

Hoc est

$$x^8 - 2aax^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0.$$

Divide hanc æquationem per $x^4 - aaxx - a^4$, & oriatur $x^4 - aaxx - a^4$. Quare est $x^4 = aaxx + a^4$. Et extracta radice $xx = \frac{1}{2}aa + V\frac{5}{4}a^4$,

sive $x = aV(\frac{1}{2} + V\frac{5}{4})$ (m). Cape ergo a , sive BC, cujusvis longitudinis, & fac BC.AC :: AC.AB :: 1: $V(\frac{1}{2} + V\frac{5}{4})$; trianguli ABC ex his lateribus constituti perpendicularum DC erit ad latus BC in eadem ratione. (n)

Idem

(l) Nam $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} V(aa - \frac{a^4}{xx}) + aa - \frac{a^4}{xx} = aa V\frac{5}{4}$, ergo $xx = \frac{aa}{2} + aa V\frac{5}{4}$, scilicet $\frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}$, deleto hinc inde $\frac{a^4}{xx}$, & $x = V(\frac{aa}{2} + aa V\frac{5}{4})$, & denuo quantitibus sub signo per aa divisus, & divisoris hujus radice extra signum posita $x = aV(\frac{1}{2} + V\frac{5}{4})$. in contrariam respective partem translatis fit $x^4 - aaxx + a^4 = 2aax V(aa - \frac{a^4}{xx})$. Si vero xx sub signo ponatur, habebimus $2a V(aaxx - a^4xx)$, & quantitas radicalis divisa per $aaxx$ dat $xx - aa$, unde (divisoris $aaxx$ radice extracta, & ante signum posita, & multiplicata cum $2a$ quæ jam erat extra signum, quotiente vero $xx - aa$ sub signo posito) educitur $2aax V(xx - aa)$.

(n) Aut sic, sit $AB = a$, BC ei normalis $= \frac{a}{2}$, erit $AC = V(aa + \frac{aa}{4}) = V\frac{5aa}{4}$, in Fig. 2₂ qua utrinque producta sumatur $DA = AB$, $EC = CB$, diametro DE describatur semicirculus DGE, & in A elevetur normalis AG, ea erit x quaesita.

TAB. F

$$\text{Nam } EA (\frac{a}{2} + V\frac{5aa}{4}). AG :: GA. AD$$

(m) Jam enim $xx = \frac{aa}{2} + V\frac{5aa}{4}$; sed (a) & $\frac{aa}{2} + aV\frac{5aa}{4} = AG^2 = xx$. Sunt ergo DA, AG, AE tria latera trianguli.

Idem aliter.

Cum fit $AB.AC :: BC.DC$ dico angulum ACB rectum esse. Nam, si CE negas, age CE constituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE , DBC similia per 8. VI. Elem., adeoque $EB.EC :: BC.DC$, hoc est $EB.EC :: AB.AC$. Age AF perpendicularem CE & propter parallelas AF , BC , erit $EB.EC :: AE.FE :: AB.FC$. (o) Ergo per 9 V. Elem. est $AC = FC$, hoc est hypotenusa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non est ergo angulus ECB rectus, & proinde ipsum ACB rectum esse oportet. (p) Est itaque $ACq + BCq = ABq$. Sed est $ACq = AB.BC$, ergo $AB.BC + BCq = ABq$, & extracta radice $AB = \frac{1}{2}BC + \sqrt{\frac{1}{4}BCq}$. Quamobrem cape $BC.AB :: 1. \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB , & triangulo ex his lateribus constituto, erunt $AB.AC.BC.DC$ continue proportionales.

P R O B. X V I.

Super data basi AB triangulum ABC constituere, cujus vertex C erit ad rectam EC positione datam; basis autem medium existet arithmeticum inter latera.

XLIII. **B**asis AB bifecetur in F , & producatu- TAB. II.
donec rectæ EC positione datæ occurrat in E , & ad ipsam demittatur perpendi- Fig. 12.
cularis CD ; dictisque $AB = a$, $FE = b$, & $BC - AB = x$, erit
 $BC = a + x$, $AC = a - x$. Et per 13. II. Elem.

$$BD \left(= \frac{BCq - ACq + ABq}{2AB} \right) = 2x + \frac{1}{2}a.$$

Adco-

(o) Nam per (Eucl. 12. V.) $EB.EC :: BE.EA$, $CE + EF$, id est $BA.CF :: BA.AC$ per superius ostensa.

(p) Quod etiam sic, & fortasse brevius demonstrari potest.

TAB. F.
Fig. 3. Quia BA est ad AC , ut BC ad CD ex lege problematis, erit rectangulum ACB æquale rectangulo ex BA , in DC , id est duplæ areæ trianguli, quod si AC non est normalis, sit AG , ergo dupla trianguli area æquatur rectangulo ex CB in AG , id est, ACB , ergo AC hypotenusa erit æqualis lateri AG , quod est absurdum.

His positis facillime nullo calculo problema solvitur.

Nam est ex lege problematis BA ad AC , ut AC est ad CB , & BA ad AC ut CA ad AD .

(Eucl. cor. 8. VI.), ergo AD æquat CB (Eucl. 9. V.); rursus AB ad BC ut CB ad BD , ergo AB ad AD , ut AD ad DB . Quare, cum hic nihil detur, sed tantum petatur continua laterum proportio; sume AB ad libitum, cam seca in mediam & extremam rationem in D , ubi erige normalem indefinitam DC , describe semicirculum ACB , jungæ AC , CB erit ABC triangulum quæsitum.

Jam autem est rectangulum, & per constructionem AB ad AD ut AD ad DB . Sed AB ad BC ut CB ad DB (Eucl. cor. 8. VI.); ergo BC æquat AD . Rursus BA ad AC ut CA ad AD , (Eucl. cor. 8. VI.) vel ad æqualem CB ; & ob similia triangula CAD , BCD est CA ad AD vel ad æqualem BC , ut BC ad CD ; ergo BA ad AC , ut AC ad CB ut BC ad CD .

Adeoque $FD = 2x$, (q) $DE = b + 2x$, & $CD (= \sqrt{CBq - BDq}) = \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Sed propter datas positiones rectarum CE & AB , datur angulus CED ; adeoque & ratio DE ad CD ; quæ si ponatur d ad e dabit analogiam $d.e :: b + 2x . \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in se, oritur æquatio $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$, cum

jus partibus quadratis & rite dispositis, fit $xx = \frac{\frac{3}{4}ddaa - eebb - 4eebx}{4ee + 3dd}$

Et radice extracta $x = \frac{-eeb + d\sqrt{3eeaa - 3eebb + \frac{9}{4}ddaa}}{4ee + 3dd}$.

Dato autem x , datur $BC = a + x$ & $AC = a - x$. (r)

PROB.

(q) Scilicet, quia BD (majus segmentum) æquat aggregatum ex summæ ac differentię dimidio; ponatur ergo differentię dimidium $= z$, & erit $\frac{1}{2}a + z = \frac{1}{2}a + 2x$; ac $z = 2x$. Sed $BD = BF + FD$ & est $BF = \frac{1}{2}a$; ergo $BD = 2x$.

CONSTRUCTIO.

TAB. F.
Fig. 4.

(r) Si ponas $e = b$; æquatio Auctoris, transponendo $-4eebx$, fiet

$$xx + \frac{4b^2x}{4bb + 3dd} = \frac{3aadd - 4b^4}{4(4bb + 3dd)}$$

TAB. II.

Quare, cape $GI = b$; ad I fac angulum rectum, & ad G angulum æqualem ipsi ECD (Fig. 12.); erit $IH = d$. Nam ut CD ad DE , vel ut b ad d ita GI ad IH ; & est $GI = b$; ergo $IH = d$. Quapropter $GH^2 = bb + dd$; aut $3GH^2 = 3bb + 3dd$. Igitur superior æquatio abit in

$$xx + \frac{4b^2x}{bb + 3GH^2} = \frac{3aadd - 4b^4}{4(bb + 3GH^2)}$$

Super GH ad rectos angulos eleva HK ipsi GI productæ occurrentem in K ; eritque GI ,

vel b . $GK = GH^2$. Pariter cape $IL = a$, & age LM parallelam ipsi GH ; quoniam est $GI (b) . IL (a) :: HI (d) . IM$, erit $b . IM = ad$, & $bb . IM^2 = aadd$, quæ posita in præcedentem æquationem, & fractionibus reductis ad simpliciores terminos, illam mutant in

$$xx + \frac{4bbx}{b + 3KG} = \frac{b(3IM^2 - 4bb)}{4(b + 3GK)}$$

Jam, per (Eucl. II. VI.) quære tertiam N post $b + 3KG$, & b ; erit $N = \frac{bb}{b + 3GK}$; quare fiet æquatio construenda

$$xx + 4Nx = \frac{3MI^2 . N}{4b} - bN.$$

Rursus quære quartam post $4b$; MI ; & $3MI$ per (Eucl. 17. VI.); quæ sit O ; denique habebis

$$xx + 4Nx = N(O - b)$$

quam facile construes per Lemma (Nº. 36. hujus).

Duas has ultimas proportionales in figura non determinavi, ne illa nimis se existeret.

P R O B. X V I I.

Datis parallelogrammi cujuscunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD.

XLIV. Sit E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF (s), & per 13. II. Elementorum, erit TAB. II.
Fig. 13.

$$\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF,$$

atque etiam

$$\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF.$$

Quare cum sit $EC = \frac{1}{2}BC$, (t) & $AE = \frac{1}{2}AD$, erit

$$\frac{ACq - ABq + BCq}{2CB} = \frac{ACq - \frac{1}{4}ADq + \frac{1}{4}BCq}{BC}$$

& facta reductione,

$$AD = \sqrt{2ACq + 2ABq - BCq}. (u)$$

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, summa quadratorum laterum æquatur summæ quadratorum diagonalium. (x)

PBOB.

(t) Aut angulus ABC est acutus, aut obtusus.
1º Sit acutus. Perpendicularis AF cadet intra triangulum, & locus erit ratiocinio Auris.

(t) 46. In omni parallelogrammo ABDC, diagonales AD, CB se mutuo bisecant.

Triangula CED, AEB. habentia angulos ad verticem CED, AEB, & alternos CDA, DAB, æquales, sunt æquiangula. Sed & bases CD, AB habent æquales; (Eucl. 34. I.) ergo sunt æqualia, & æquantur latera CE; EB ac DE; EA (Eucl. 26. I.) Quare &c.

(u) Si vero angulus ACB esset obtusus, perpendicularis AF caderet extra parallelogrammum, & per (Eucl. 12. II.) foret

$$\frac{BA^2 - AC^2 - BC^2}{2BC} = CF = \frac{AE^2 - FC^2 - CA^2}{2EC}$$

aut, ponendo $\frac{BC}{2}$ pro CE, & $\frac{AD}{2}$ pro AE;

$$\frac{BA^2 - AC^2 - BC^2}{2} = \frac{1}{4}AD^2 - \frac{1}{4}BC^2 - CA^2;$$

&, sublati fractionibus, deletis delendis, ac radice extracta

$$\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2} = AD.$$

(x) 47. In parallelogrammo ABDC, summa quadratorum ex lateribus AB, BD, DC, CA, æquat summam quadratorum ex diagonalibus AD, BC.

Ubi parallelogrammum est rectangulum, res nimis est facilis. Sit ergo obliquangulum.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera.

TAB. II.
Fig. 14.

XLV. **L**atera duo quælibet (y) AB ac DC produc donec concurrant in E, sitque AB = x & BC = y & propter angulos omnes datos dantur rationes BC ad CE & BE; quas pone d ad e & f (x), & erit CE = $\frac{ey}{d}$, & BE = $\frac{fy}{d}$, adeoque AE = $x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d (a); & erit AD = $\frac{dx + fy}{g}$ & ED = $\frac{dx + fy}{h}$, adeoque CD = $\frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & summa omnium laterum $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cum detur, esto a , & abbrevientur etiam termini scribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h} - \frac{e}{d}$, (b) & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$ (c), habebitur x .

TAB. F.
Fig. 5. 6. 7.

Anguli BAC, ACD simul æquant duos rectos (Eucl. 27. I.). Si ergo alter est acutus, alter erit obtusus. Obtusus sit angulus ACD; quare perpendicularis ducta ex A in oppositam rectam DC cadet extra parallelogrammum, & erit quadratum DA par quadratis AC, CD una cum bis rectangulo DCH (Eucl. 12. II.). Nunc ex C duc in subjectam AB, (si opus est, productam) perpendicularem CG. Erit quadratum BC una cum bis rectangulo BAG æquale quadratis CA, AB; (Eucl. 13. II. sed æquales sunt rectæ AB, CD; & AG, CH (Eucl. 34. I.)), quare & rectangula BAG, DCH; igitur, addendo æqualia æqualibus, quadrata ex DA, BC una cum bis rectangulo BAG æquant quadrata BA, AC bis, una cum bis rectangulo DCH, quibus rectangulis hinc inde demptis. &c.

(y) Non parallela.

(z) Sume quamvis FG super quam construe triangulum FGH simile ipsi CEB, quod erit datam specie, & magnitudine, ut jam probavimus, dic FH = d , FG = e , GH = f , & habebis CE = $\frac{ey}{d}$ &c.

(a) Fac angulum HFK æqualem angulo

FGH, aut DEA, & angulum FHK patem ipsi EAD, eritque triangulum FHK simile EDA, & datum specie, ac magnitudine &c. & dic FK = g , & KH = h .

(b) Quære quartam proportionalem post KH (h), HF (d) & FK (g) quam dic a & habebis $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h} = \frac{gh + dh + dg}{gh}$ (reducendo ad eundem denominatorem) quod esse debet = $\frac{p}{r}$; ergo $gh \cdot gh + dh + dg :: r \cdot p :: g \cdot g + d + \frac{dg}{h} = g + d + a$; dic ergo $g = r$, & erit aggregatum ipsarum $g + d + a = p$.

(c) Reduc ad eandem denominationem

$1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$,
erit $\frac{d \cdot h + d \cdot f + d \cdot f - e \cdot g}{d \cdot g \cdot h} = \frac{q}{r}$;
quare $r \cdot q :: d \cdot g \cdot h \cdot d \cdot g \cdot h + d \cdot f \cdot h + d \cdot f \cdot g - e \cdot g \cdot h :: g \cdot g + f + \frac{fg}{h} - \frac{eg}{d}$. Quære igitur quartas post h, f, g , & d, e, g , dic illam = β , hanc = γ ; & erit $r \cdot q :: g \cdot g + f + \beta - \gamma$.

quatio $\frac{px + qy}{r} = a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio BCq ad triangulum BCE (d), quam pone m ad n (e) & erit triangulum BCE = $\frac{n}{m} yy$ (f). Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d (g); & erit triangulum ADE = $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cum area AC, quæ est horum triangulorum differentia, detur, esto bb & erit

$$\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm} - \frac{n}{m} yy = bb. \text{ Atque ita habentur duæ æqua-}$$

tiones ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe superior æqua-

tio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$; scribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x in inferiori, prove-

nit $\frac{drara - 2dgray + dqgy + 2afry - 2/qyy + ffyy - dnyy}{ppm} = bb$

(b). Et abbreviatis terminis scribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2/q}{p} + \frac{ff}{d} = n$,

& st pro dato $+\frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{p}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drara}{pp}$, oritur

$yy = 2ty + tv$ seu $y = t + \sqrt{t^2 + tv}$.

PROB.

(d) Jam enim triangulum GHF, specie & magnitudine datum, simile est triangulo EBC, quare HF quadratum, est ad triangulum GHF, ut BC quadratum, est ad triangulum EBC (Eucl. 18. VI.); Atqui datur prima ratio (49. dat.) ergo &c.

(e) Hanc autem lineis exprimes ducendo ex G in HF normalem GL; est enim GHF triangulum æquale dimidiato rectangulo ex GL in FH; ergo quadratum ex FH, est ad (triangulum GFH id est) dimidium rectangulum ex GL in FH, ut FH ad dimidiam GL (Eucl. 1. VI.).

Dic igitur GL = 2λ , & esse debet $d. \lambda :: m. n$. quod facile reperies.

(f) Nobis autem est triangulum BCE = $\frac{nyy}{d}$.

(g) Item ex H demitte in KF normalem

HM, & invenies quadratum ex AE ad triangulum ADE, ut KF ad dimidiam HM; dic HM = $2x$, eritque juxta nos triangulum ADE = $\frac{xxx}{d} + 2\frac{xfxy}{dd} + \frac{xfyy}{d}$, & eorum differentia = $\frac{ddxx + 2xdfxy + xfyy - ddyy}{d} = bb$.

Si vero vis invenire Auctoris expressionem, esse debet $m. d :: d. x$; quare ex data x , & d facile invenies tertiam, item $d. \lambda :: m. n$, & ex datis d, λ, m , dabitur n .

(b) Nostra æquatio (substituendo pro x , $\frac{ra - qy}{p}$; & pro xx , $\frac{rraa - 2aqry + qqyy}{pp}$) fit

$$\frac{aarx - 2agrxy + qqxy}{dpp} + \frac{2afxyr - 2fqxyy}{dpp} + \frac{ffxyy}{d^2} - \frac{nyy}{d} = bb;$$

Piscinam ABCD perambulatorio ABCDEFGH data area, & ejusdem ubique latitudinis circumdare.

TAB. II.
Fig. 15.

XLVI. **E**sto perambulatorii latitudo x & ejus area aa . Et a punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demissis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia IK, LM, NO, PQ & in quatuor parallelogramma AL, BN, CP, DI, latitudinis x , & ejusdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo summa laterum $(AB + BC + CD + DA) = b$, & erit summa parallelogrammorum $= bx$.

Porro ductis AE, BF, CG, DH; cum sit AI = AK erit angulus AEI = angulo AEK = $\frac{1}{2}$ IEK five $\frac{1}{2}$ DAB. (i) Datur ergo angulus

AEI & proinde ratio ipsius AI ad IE, quam pone d ad e ; & erit $IE = \frac{ex}{d}$.

Hanc duc in $\frac{1}{2}$ AI five $\frac{1}{2}x$ & fiet area trianguli AEI = $\frac{exx}{2d}$. Sed, propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK sunt æqualia, adeoque trapezium IK (= 2 triangulo AEI) = $\frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo

BL. LF :: $d.f$, & CN. NG :: $d.g$, & DP. PH :: $d.h$, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium LM = $\frac{fxx}{d}$, NO = $\frac{gxx}{d}$, & PQ = $\frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d} + \frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{hxx}{d}$

(five $\frac{pxx}{d}$, scribendo p pro $e + f + g + h$), erit æquale trapeziis quatuor

IK + LM + NO + PQ, (k) & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa . Quæ æquatio dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitudine perambulatorii sic inventa facile est ipsum describere. (l)

PROB.

(i) Nam concipiatur circulus descriptus diametro AE, hic transibit per I & K (Eucl. 31. III. & 21. I.) & quia rectæ KA, AI sunt æquales per hypothesein arcus, quorum chordæ sunt KA, AI, sunt æquales (Eucl. 28. III.) igitur & anguli AEK AEI. (Eucl. 27. III.)

(k) Et, si piscina esset poligona, eodem

facto invenirentur tot trapezia, quot debent, & p exprimeret aggregatum ex omnibus, quot quod sunt, datis quantitatibus, per quas xx multiplicatur; & b omnes illas, in quibus x ducitur.

(l) Constructionem omitto, quia nihil habet observatione dignum, quod deinceps faciam.

No-

PROB. XX.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus positione datis rectis AE & AF triangulum datæ magnitudinis AEF comprehendet.

XLVII. **A**ge CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, TAB. III. Fig. I.
 fitque AD = a, CB = b, AF = x, & trianguli AEF area cc, & propter proportionales DF . AF (:: DC . AE) :: CB, EG, hoc est
 $a + x . x :: b . \frac{bx}{a + x}$, erit $\frac{bx}{a + x} = EG$. Hanc duc in $\frac{1}{2}AF$, & emerget $\frac{bxx}{2a + 2x}$ quantitas areae AEF quæ proinde æquatur cc. Atque adeo, æquatione ordinata, est $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$ seu $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$. (m)

Nihil secus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum, (n) vel tra-

Notabo tamen ponendum esse $x = \frac{db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$ non $x = \frac{2bce, \& xx + \frac{2ccx - 2bce}{a}}{a}$ TAB. F. Fig. 10.
 $db - \sqrt{bbdd + 4aapd}$, quia perambulatorium debet piscinam circumdare, non ab ea circumdari. Patet autem, quod, si in prima hypothesi, x habeat valorem positivum, ut supponit problematis solutio, in secunda negativum debet habere, quia tendit ad contrarias partes. Præterea, in prima hypothesi deambulatorii ambitus major est, quam in secunda, & ideo minor debet esse ipsius x longitudo quod mire congruit cum æquatione; nam in prima hypothesi, quantitas $\frac{db}{2p}$, quæ est negativa, minuit quantitatem radicalem positivam; in secunda auget eandem negativam.

TAB. F. Fig. 9.

(m) Ex A ducatur AH ipsi BC parallela & æqualis c, fit $AL = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$; junctæ LH ducatur normalis HM; erit $cc = \frac{b}{2} . AM$, quam pono = f; quare $2cc = bf$, & æquatio vertetur in hanc $xx - fx = af$.

TAB. III. Fig. I.

Ceterum si posuissim $GE = x$, idem fuisset processus; nam $x . AF = 2cc$, & $AF = 2\frac{cc}{x}$, unde $DF (a + 2\frac{cc}{x}) . FA (2\frac{cc}{x}) :: CB (b) . GE (x)$, & $ax + 2cc = 2\frac{bcc}{x}$, vel $axx + 2ccx =$

Tom. I.

Bb

Tandem si punctum C esset in ipso crure AE, tunc EG data = b, & $\frac{bxx}{2} = cc$, ac $2\frac{cc}{b} = x$. TAB. F. Fig. 11.
 (n) Nam sit datum triangulum AEF, & esse debeat data dati trianguli area ad aream quæsiti trianguli ut m ad n, ergo area quæsiti trianguli debet æquare factum ex dato triangulo in $\frac{n}{m}$, quare area trianguli quæsiti dabitur, & problema recidet in præcedens.

Notandum tamen fieri posse ut recta CG, efficiens cum datis EA, AF triangulum datæ magnitudinis, secet rectam AF productam in G, & tunc quidem esset triangulum LAG ad datum EAF in imperata ratione, ipsum autem triangulum EAF non secuissemus, ut juhebamur, siquidem trapezium AFHL non habet ad triangulum EAF rationem petitam; tunc quærenda est ratio ipsius EAF ad residuum EAF—LEH, sic EAF . LAFH :: m . n, & divid. EAF—LAFH . EAF :: m—n . m, & quærenda recta efficiens cum datis AE, EF triangulum habens ad datum datam rationem $\frac{m}{n} . \frac{n}{m}$.

trapezium quodvis in data ratione secabit. (a)

PROB. XXI.

*Punctum C in data recta linea DF determinare, a quo ad alia
duo positione data puncta A & B ductæ rectæ AC & BC
datam habeant differentiam. (p)*

TAB. III. XLVIII.
Fig. 2.

A datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$, & erit $AC = \sqrt{aa + xx}$, $FC = x - c$, & $BC = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Si jam data harum differentia d , existente AC majori quam BC erit

$$\sqrt{aa + xx} - d = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}.$$

& quadratis partibus

$$aa + xx + dd - 2d\sqrt{aa + xx} = bb + xx - 2cx + cc.$$

Fa-

TAB. G.
Fig. 2.

(a) Sit datum trapezium ABCD, & datum punctum E, per quod transiens recta secare debeat trapezium, ita, ut totum sit ad partem ut recta RS ad ST. Duo quævis trapezii latera, quæ parallela non sint, DA; CB, producantur, donec in H coeant, & recta EGF putetur secare trapezium in data ratione.

Quia datur trapezium specie, & magnitudine, dantur anguli DAB, & CBA, ideoque etiam anguli HAB, ABH, BHA, & triangulum ABH specie datur (40. dat.) ut & magnitudine ob datam rectam AB (52. dat.), datur ergo ratio trapezii ABCD ad triangulum ABH; At datur ratio trapezii ABCD ad trapezium ABFG, datur itaque ratio trianguli ABH ad trapezium ABFG (8. dator.), & ipsius AHB ad GFH. (3. dator.)

Ita autem componetur.

Sit datum triangulum AHB ad datum trapezium ABCD, ut recta VS ad SR; erit igitur triangulum DHC ad triangulum AHB, ut RV ad VS, & recta ducta per E secetur triangulum DHC, ita ut totum sit ad triangulum GFH, ut RV ad VT. Dico trapezium ABCD esse ad trapezium ABFG in imperata ratione RS ad ST.

Est enim ex constructione triangulum GHF ad triangulum DHC ut TV ad VR; sed DHC est ad AHB ut RV ad VS, ergo ex æquo GHF ad AHB ut TV ad VS; & divid. ABFG

ad AHB, ut TS ad SV; atqui AHB ad ABCD, ut VS ad SR; igitur ex æquo ABFG, ad ABCD ut TS ad SR. &c. Q. E. F.

Quin & rectilineum quodcumque ABCEFGH TAB. G. Fig. 3. dividi potest in data ratione, recta transeunte per datum punctum L per methodum superiori simillimam.

Secundum enim sit datum rectilineum, ut totum sit ad partem ut recta RS ad ST.

Per L ducatur quævis recta LMG a dato rectilineo abscindens trapezium AHGM, & quia rectæ LG, AM, HG positione dantur, dantur puncta M, G, ac rectæ AM, MG & MH datæ sunt magnitudine, dantur ideo magnitudine triangula MAH, HGM, five trapezium AHGM (39. 47. & 52. dat.) datur ergo ratio ipsius AHGM ad totum ABCEFGH, sit hæc ut VS ad SR; sed totum ad partem debet esse ut RS ad ST, ergo AHGM debet esse ad partem quæsitam ut VS ad ST, & problema recidit in præcedens.

Quod si trianguli AGF pars GRT caderet TAB. G. Fig. 4. extra rectilineum, notandum est quod dantur areæ AGF, ARTF, atque ideo residua GRT; dividendum ergo restat per punctum E in latere TH rectilineum TDCH, vel ARTHB in data ratione sui ipsius ad triangulum GRT.

(p) Forte scribendum in huius Probl. XXI. enunciatione, *Punctum C in recta linea positione data DF determinare, a quo ad alia duo data puncta &c.*

Factaque reductione & abbreviandi causâ pro datis

$aa + dd - bb - cc$ scripto $2ee$, emerget $ee + cx = d \sqrt{aa + xx}$.

Iterumque quadratis partibus $e^2 + 2ceex + cexx = ddaa + ddxx$.

Et æquatione reducta $xx = \frac{2ceex + e^2 - aadd}{dd - cc}$, seu

$$x = \frac{cec + \sqrt{e^2 dd - aad^2 + aaddcc}}{dd - cc} . (q)$$

Haud secus problema resolvitur si linearum AC & BC summa, (r) vel quadratorum summa (s) aut differentia, (t) vel proportio, (u) vel rectangulum, (x) vel angulus ab ipsis comprehensus, (y) detur; vel etiam si vice rectæ DC,

(q) Proponetur infra (Probl. XLV.) investiganda ratio describendi per duo data puncta circulum; qui circulum alium positione, & magnitudine datum contingat. Problema noster cum illo idem esse dico.

TAB. G.
Fig. 5.

Sint enim data puncta A, B; recta, qua debent differre, M; & recta positione data sit ND.

Puta factum & rectæ AC, CB sint ex quæ requiruntur.

Centro A radio AL æquali datæ M describe circulum LPQ, qui datur magnitudine & positione (def. 6. dat.) Centro C radio CB describe alterum circulum BEL qui priorem tanget in L, quia ex hypothesi BC & CL æquantur. Ex B demitte in subjectam ND; normalem BD, quæ positione ac magnitudine quoque datur (30, 25, & 26. dat.) hanc producere donec circulo BLE occurrat in E, & erit ED æqualis ipsi DB ac data positione atque magnitudine, itaque datur punctum E. Restat igitur describendus circulus per data duo puncta, B, E, qui circulum PLQ tangat, quod perficietur problemate XLV.

TAB. G.
Fig. 6.

Si vero iuncta AB ipsi DC parallela esset, tunc data perpendicularis AD foret altitudo trianguli ACB, cuius datur basis AB ob data puncta A, B; igitur si proponeretur describendum triangulum, datis ejus altitudine, basi, & laterum differentia, hoc problema (quod fere idem est, ac IX. hujus) esset casus hujus problematis XXI.

TAB. G.
Fig. 7.

(r) Hic etiam problematis casus recidit in problema XLV.

Sint enim rursus data puncta A, & B summa rectarum quæsitur data M.

Putâ factum, & quæsitæ rectæ sint AC, CB.

Ex alterutro ex datis punctis A, radio AL æquali datæ M describe circulum PLQ qui positione, ac magnitudine datur. Centro autem C, radio CB describe circulum BEL qui

priorem contingat in L, ex B demitte in subjectam ND, normalem BD, quam producere donec occurrat circulo BEL in E, erit datum punctum E, quare describendus est circulus per duo data puncta B, E qui alium positione, & magnitudine datum contingat.

Si iuncta AB esset ipsi CD parallela, tunc data normalis BD esset altitudo trianguli ACB cuius datur basis, igitur problema IX. hujus casus est.

TAB. G.
Fig. 6.

(s) Si daretur quadratorum summa, (ceteris, ut supra, stantibus) ea sit $= aa$; ac erit $2xx - 2cx = aa - aa - bb - cc$; fac $aa - aa - bb - cc = 2\beta\beta$, & habebis $xx - cx = \beta\beta$.

(t) Sit quadratorum differentia $= aa$; & ceteris, ut supra, stantibus, erit $2cx = aa - aa + bb + cc$, pone $aa - aa + bb + cc = 2ee$, & invenies $cx = ee$.

(u) Detur 1^o. Rectarum AC, CB ratio, & sit AC $\sqrt{aa + xx}$. CB $\sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$:: g. h., igitur h $\sqrt{aa + xx} = g \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$, & quadrando $aabb + bhxx = bbgg + ggxx - 2cggx + ccgg$.

2^o. Quadratorum ex AC, CB ratio, & sit AC² $(aa + xx)$. CB² $(bb + xx - 2cx + cc)$:: gg. hh., invenietur, ductis invicem mediis & extremis, æquatio superior.

(x) Si daretur rectangulum AC. CB $= dd$, exurgeret æquatio quatuor dimensionum nempe (ceteris, ut supra).

$$\begin{array}{rcl} & + aa & + aabb \\ x^4 - 2cx^3 + bbxx - 2aaxx & - aacx & = 0, \\ & + cc & + d^4 \end{array}$$

(y) Rectæ AC, CB ductæ ex datis punctis A, B in rectam positione datam NC conti-

Fig. 8.

B b 2

DC, circumferentia circuli, (z) aut alia quævis curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ultimo præsertim casu) referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB.

neant angulum ACB æqualem dato QRS, & per puncta A, B, C transeat circulus ABCN, jungatur AB quæ magnitudine ac positione datur, & fiat ad datum punctum B angulus ABD æqualis dato QRS, aut ACB, recta DB positione datur (29. dat.) & tangit circum-
lum in B (per convers. Eucl. 32. III). Excitetur BE indefinita ipsi BD ad rectos angulos, quæ positione datur. Bisecetur AB in F, & per F ducatur FE perpendicularis ipsi AB, producat FE donec ipsi in E occurrat, E punctum datur, estque circuli centrum.

Constructur autem sic. Juncta AB bisecetur in F, unde elevetur normalis indefinita FE. Fiat angulus ABD æqualis dato QRS & ducatur BE indefinita normalis ipsi BD. centro E, ubi rectæ FE, EB, conveniunt describatur per A aut B circulus, datæ rectæ NC occurrens in duobus punctis N, C. Jungantur AC, CB, aut AN, NB. Dico factum: res liquido patet.

D E T E R M I N A T I O .

Quia vero ad compositionem requiritur ut circulus rectæ positione datæ occurrat, id fiet in unico puncto, quando recta positione data est circuli tangens. Quærendum quando hoc evenit.

Producat BD donec ipsi NC occurrat in G, & ex G ducatur GH circum ABCN tangens in H. Erit igitur HG æqualis GB quæ major est quam CG, & minor quam GN (Eucl. 8. III.) Sumatur ergo GL ipsi GH æqualis, cadet punctum L intra circum: quo circa angulus ALB major est angulo ACB. Nam producta BM donec circulo occurrat in M & juncta AM, erit angulus exterior ALB major interiore & opposito AMB aut ACB.

Sic ergo determinabitur problema.

Fiat angulus ABD dato par, & BD producat donec ipsi NC occurrat in G. Sumatur GL æqualis GB, & jungantur AL, LB, si angulus ALB dato par est, problema jam est solutum; si dato major, problema est possibile, si vero minor impossibile.

jus peripheriam ducendæ sint ex datis punctis A, B, rectæ AC, CB quarum data sit differentia d. jungantur A, B & ex G centro circuli demittatur in AB normalis GM, & per G ducatur diameter EF ipsi MB parallela & per C agatur LCH ipsi MG parallela.

$$\text{Fiant } AM = a, ML = x, MB = e,$$

$$MG = b, EG = r.$$

$$\text{Jam ex natura circuli } CH = EH, HF = rr - xx.$$

$$\text{Erit ergo } LC = b - \sqrt{rr - xx},$$

$$\& CA = \sqrt{aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr}$$

&

$$CB = \sqrt{cc - 2cx + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr}$$

Posita CA majore quam CB,

$$\sqrt{aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr} - d = \sqrt{cc - 2cx + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr};$$

quadratisque partibus

$$aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr - 2d\sqrt{aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr} + dd = cc - 2cx + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr;$$

& transponendo

$$aa + dd - cc + 2cx - 2ax = 2d\sqrt{aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr}.$$

Fiat, brevitatæ causa,

$$aa + dd - cc = 2ff, \& 2c - 2a = 2e;$$

exit demum

$$ex - ff = d\sqrt{aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{rr - xx} + rr};$$

dennoque quadrando

$$eexx + 2effx + f^4 = aadd - 2addx + bdd - 2bdd\sqrt{rr - xx} + ddr (\& \text{ rursus transponendo, } \& \text{ pro } aadd + bdd + ddr - f^4 \text{ scribendo } 2eeg, \& 2ebh \text{ pro } 2eff + 2add) bdd\sqrt{rr - xx} = eeg - ebh - eexx;$$

& quadrando

$$bbd^4rr - bbd^4xx = e^4g^4 - 2ebghx - 2e^4g^2xx + eb^4xx + 2ebhx^3 + e^4x^4.$$

Ad hujus autem exemplum facile invenitur æquatio pro similibus problematis.

P R O B . X X I I .

Datis positione tribus rectis AD, AE, BF quartam DF ducere, Tab. III. Fig. 3.
cujus partes DE, EF prioribus interceptæ, datarum erunt
longitudinum.

XLIX. **A**d BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus positione datis concurrentibus in A, B, & H, dic AB = a, BH = b, AH = c, ED = d, EF = e, HE = x. Jam propter similia triangula ABH, ECH, est AH. AB :: HE. EC = $\frac{ax}{c}$, & AH. HB :: HE. CH = $\frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit CB = $\frac{bx+bc}{c}$. Insuper propter similia triangula FEC, FDB, est

ED. CB :: EF. CF = $\frac{ebx+ebc}{dc}$. Denique per 12 & 13. II. Elem. est (a)
 $\frac{ECq - EFq}{2FC} + \frac{1}{2}FC (= CG) = \frac{HEq - ECq}{2CH} - \frac{1}{2}CH$, hoc est

$$\frac{\frac{aaxx}{cc} - \frac{ee}{cc}}{\frac{2ebx+2ebc}{dc}} + \frac{ebx+ebc}{2dc} = \frac{\frac{xx}{2bx} - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}$$

Sive

$$\frac{aadxx - eedcc}{ebx+ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{cex - aax - bbx}{b}$$

Hic, abbreviandi causa, pro $\frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d}$, scribe m; & erit

$$\frac{aadxx - eedcc}{ebx+ebc} + \frac{ebc}{d} = mx, \text{ ac terminis multiplicatis per } x+c, \text{ fiet}$$

aadxx

(a) Nam propter 13 propos. Lib. II. Eucl. EF² = EC² + FC² - 2FC. CG; Idcirco 2FC. CG = EC² - EF² + FC², nempe CG = $\frac{EC^2 - EF^2 + FC^2}{2FC}$; sed FC² = 2FC. $\frac{1}{2}FC$, igitur CG = $\frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC$. At per 12 prop. Lib. II. Eucl. EH² = CE²

+ CH² + 2CG. CH, scilicet EH² = CE² + CH² + 2CG. CH, id est (cum CH² = 2CH. $\frac{1}{2}CH$) $\frac{EH^2 - CE^2}{2CH} = \frac{1}{2}CH = CG$; ergo $\frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = \frac{EH^2 - CE^2}{2CH}$. &c.

$\frac{aadxx}{eb} - \frac{eedcc}{d} + \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx$. Iterum pro $\frac{aad}{eb} = m$,
 scribe p , pro $mc = \frac{ebc}{d}$ scribe $2pq$, & pro $-\frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ scribe pr , &
 evadet $xx = 2qx + rr$, & $x = q \pm \sqrt{qq + rr}$. Invento x five HE,
 age EC parallelam AB, & cape FC. BC :: e.d, & acta FED conditio-
 nibus quæstionis satisfaciet.

P R O B . X X I I I .

TAB. III. *Punctum Z determinare a quo ad quatuor positione datas rectas li-
 neas FA, EB, FC, GD, si alie quatuor lineæ ZA, ZB, ZC,
 & ZD in datis angulis ducantur, duarum e ductis ZA & ZB
 rectangulum & aliarum duarum ZC & ZD summa detur.*

L. **E** Lineis elige aliquam positione datam FA ut & positione non datam
 ZA quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z
 determinetur, & cæteras positione datas lineas produc donec his, si opus
 est etiam productis, occurrant, ut vides. Dictisque EA = x , & AZ = y ,
 propter angulos trianguli AEH datos dabitur ratio AE ad AH quam po-
 pone p ad q , & erit AH = $\frac{qx}{p}$. Adde AZ, fitque ZH = $y + \frac{qx}{p}$. Et
 inde cum propter datos angulos trianguli HZB, detur ratio HZ ad BZ si
 ea ponatur n ad p habebitur ZB = $\frac{py + qx}{n}$.

Præterea si data EF dicatur a , erit AF = $a - x$, indeque, si pro-
 pter datos angulos trianguli AFI, statuatur AF ad AI in ratione p ad r ,
 evadet AI = $\frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ & restabit IZ = $y - \frac{ra - rx}{p}$.
 $\frac{ra + rx}{p}$. Et propter datos angulos trianguli ICZ, si ponatur IZ ad ZC
 in ratione m ad p , evadet ZC = $\frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum si ponatur EG = b ; AG . AK :: $l:s$ & ZK . ZD ::
 $p:l$. obtinebitur ZD = $\frac{sb - sx - ly}{p}$.

Jam ex statu quæstionis si duarum ZC & ZD summa $\frac{py - ra + rx}{m} +$
 $\frac{sb - sx - ly}{p}$ ponatur æqualis dato alicui f ; & aliarum duarum rectan-

gulum $\frac{p y y + q x y}{n}$ æquale $g g$, habebuntur duæ æquationes pro determi-
nandis x & y . Per posteriorem sit $x = \frac{n g g - p y y}{q y}$, & hunc ipsius x va-
lorem scribendo pro eo in priori æquatione, evadet

$$\frac{p y - r a}{m} + \frac{r n g g - r p y y}{m q y} + \frac{s b - l y}{p} - \frac{s n g g + s p y y}{p q y} = f.$$

Et reducendo

$$y y = \frac{a p q r y - b m q s y + f m p q y + g g m n s - g g n p r}{p p q - p p r - m l q + m p s}. \quad (b)$$

Et abbreviandi causa scripto $z h$ pro $\frac{a p q r - b m q s + f m p q}{p p q - p p r - m l q + m p s}$, & $k k$ pro $\frac{g g m n s - g g n p r}{p p q - p p r - m l q + m p s}$ fiet $y y = z h y + k k$, five $y = h \pm \sqrt{h h + k k}$.

Cujus æquationis ope cum y innotescit, æquatio $\frac{n g g - p y y}{q y} = x$, dabit x .

Quod sufficit ad determinandum punctum z .

Ad eundem fere modum punctum determinatur a quo ad plures vel pau-
ciores positione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur ea lege ut aliqua-
rum summa vel differentia vel contentum detur, aut æquetur ceterarum
summæ vel differentiæ vel contento, vel ut alias quaslibet habeant assignatas
conditiones.

P R O B. X X I V.

Angulum rectum $E A F$ data recta $E F$ subtendere, quæ transibit TAB III.
Fig. 5.
per datum punctum C , a lineis rectum angulum compre-
hensibus æquidistans.

LI. Q UADRATUM $A B C D$ compleatur, & linea $E F$ bifecetur in G .
Tum dic $C B$ vel $C D$ esse a , $E G$ vel $F G$ esse b , & $C G$ esse

(b) Est enim (omnibus terminis, in quibus
 y non apparet, in contrariam partem transla-
tis, & æquatione ad simpliciorum expressio-
nem reducta, delendo quicquid denomina-
toribus, ac numeratoribus commune est) $\frac{p y}{m} -$
 $\frac{r p y}{m q} - \frac{l y}{p} + \frac{s y}{q} = \frac{a r}{m} - \frac{b s}{p} + f + \frac{g g n s}{p q y} -$
 $\frac{g g n r}{m q y}$, cunctisque per $m q y$ multiplicatis, $p y y -$
 $p r y y - \frac{m q l y y}{p} + m s y y = a r q y - \frac{b m s q y}{p} +$
 $f m q y + \frac{m g g n s}{p} - g g n r$, rursusque omnibus
in p ductis $p p q y y - p p r y y - m q l y y + p m s y y =$
 $a p q r y - b m s q y + p f m q y + m g g n s - g g n p r$;
& omnibus per $p p q - p p r - m l q + m p s$ divi-
sis emerget $y y =$ &c.

esse x ; eritque $CE = x - b$, & $CF = x + b$. Dein cum

$$CFq - BCq = BFq, \text{ erit } BF = \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}.$$

Denique propter similia triangula CDE, FBC, est $CE \cdot CD :: CF \cdot BF$,
sive $x - b, a :: x + b \cdot \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$.

Unde

$$ax + ab = (x - b) \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}.$$

Cujus æquationis utraque parte quadrata, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit

$$x^4 = + 2aa \, xx + 2aabb - 2bb \, xx - b^4.$$

Et extracta radice sicut fit in æquationibus quadraticis, prodit

$$xx = aa + bb + \sqrt{(a^4 + 4aabb)}.$$

Adeoquæ

$$x = \sqrt{(aa + bb + \sqrt{(a^4 + 4aabb)})}.$$

CG sic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati satisfacit. (c)

Idem aliter.

Sit $CE = x$, $CD = a$, & $EF = b$, eritque $CF = x + b$ & $BF = \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$. Et proinde cum sit $CE \cdot CD :: CF \cdot BF$, sive $x : a :: x + b \cdot \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$, erit $ax + ab = x \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis prodibit

$$x^4 + 2bx^3 + \frac{bb}{-2aa} xx - 2aabb - aabb = 0,$$

æquatio biquadratica, cujus radices investigatio difficilior est quam in priori casu. Sic autem investigari potest. Pone

TAB. I.
Fig. I.

(c) Sit $CL = b$, erit ducta $LD = \sqrt{(aa + bb)}$.
Fiat $CM = 2b$. Erit $DM = \sqrt{(aa + 4bb)}$,
cui par sumatur DN , & CN diametro descri-
batur semicirculus secans rectam DO in O .
Erit $DO^2 = a \sqrt{(aa + 4bb)} = \sqrt{(a^4 + 4aabb)}$.
Ad LD erigatur in D normalis $DP = DO$.

Recta $LP = \sqrt{(LD^2 + DP^2)} = \sqrt{(aa + bb + a^4 + 4aabb)}$, cui æqualis capiatur LQ .
Centro C radio CQ describatur arcus secans
rectam BA in F , ducaturque recta CF . Erit
 $EF = 2b = 2CL$.

$$x^4 + 2bx^3 + \frac{bb}{2aa}xx - 2aabbx + a^4 = aabb + a^4,$$

& extracta utrobique radice

$$xx + bx - aa = + a \sqrt{aa + bb}. (d)$$

Ex his occasionem nactus sum tradendi regulam de electione terminorum ad incundum calculum.

Scilicet, cum duorum terminorum talis obvenit affinitas sive similitudo relationis ad ceteros terminos quæstionis, ut oporteret æquationes per omnia similes ex utrovis adhibito produci, aut ambos, si simul adhiberentur, easdem in æquatione finali dimensiones & eandem omnino formam [signis forte + & — exceptis] habituros esse; [id quod facile prospicitur;] tunc neutrum adhibere convenit, sed eorum vice tertium quemvis eligere qui similem utrique relationem gerit, puta semisummam vel semidifferentiam, vel medium proportionale forsan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & sine compare relatum.

Sic in præcedente problemate cum viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri [quod patebit si ducas itidem EF in angulo BAH,] atque adeo nulla ratione suaderi possem cur ED potius quam BF, vel AE potius, quam AF vel CE potius quam CF pro quærenda quantitate adhiberentur; vice punctorum E & F unde hæc ambiguitas proficiscitur, sumpsi [in solutione priori] intermedium G quod parem relationem ad utramque linearum AE & AD observat. Deinde ab hoc G non demisi perpendiculum ad AF pro quærenda quantitate, quia potui eadem ratione demisisse ad AD. Et eapropter in neutrum CB vel CD demisi, sed institui CG quærendum esse, quod nullum admittit compar; & sic æquationem biquadraticam obtinui sine terminis imparibus.

Potui etiam [animadverso quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio EG descripti] demisisse GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæsisisse AK vel CK, (quippe quæ similem etiam utrinque AB & AD relationem gerunt;) atque ita in æquationem quadraticam $yy = \frac{1}{2}cy + \frac{1}{2}bb$ incidissem posito $AK = y$, $AC = c$, & $EG = b$. (e) Et

AK

Constructio secunda solutionis.

(d) Radicis investigatio quidem difficilior, ac constructio multo simplicior.

Tab. I. Fig. 2. Sit $CL = b$; erit $DL = \sqrt{aa + bb}$; LD bisecetur in M. Circulus centro M, radio ML, descriptus transibit per C. Sumatur $DN = DC = a$; & centro M, radio MN describatur circulus NOPQ. Erit $PL = DN = a$, $LQ = CO$, quæ, ut patet, ipsius x verus est valor.

Quod exemplum docet, non semper id quod algebraice simplicius est, esse quoque

Tom. I.

geometricè simplicius. Algebraica simplicitas constat facilitate inveniendæ æquationis, & terminorum paucitate: geometrica vero paucitate linearum ducendarum, earum simplicitate, ac facilitate exsurgit.

(e) Quod sic acutissimus s'GRAVESANDE reperit.

Ceteris, ut supra, pone $CE = z$, $ED = x$. Tab. I. Fig. 3. Erit $AE = a - x$. Habes, ob triangulum rectangulum ADC, $ee = 2aa$; ob triangulum rectangulum CDE, $zz = aa + xx$, ob similia triacula FEA, CDE, $az - xz = 2bx$,
Cc

AK sic invento erigendum fuisset perpendicularum KG præfato circulo occurrens in G, per quod CF transiret.

Ad

$az = 2bx + xz$, $\frac{az}{2b+x} = x$; ob triangulum obtusiangulum CAG, $GC^2 (bb + 2bz + zz) = AG^2 + AC^2 + 2AC \cdot AK (bb + ee + 2ey)$, vel $2bz + zz = ee + 2ey$. Pone in $zz = aa + xx$ valorem ipsius $xx = \frac{aaz}{4bb + 4bz + zz}$ desumptum ex secunda æquatione, & habebis (sublati fractionibus)

$$z^4 + 4bz^3 + 4bbz^2 = 2aaz + 4abz + 4abb.$$

$$\text{At } z^4 + 4bz^3 + 4bbz^2 = (2bz + zz)^2 = (ee + 2ey)^2, \text{ ergo (pro } 2aa \text{ posito } ee)$$

$$eez + 2eebz + 2eebb = e^4 + 4e^3y + 4e^2yy;$$

& dividendo per ee , $zz + 2bz + 2bb = ee + 4ey + 4yy$; sed $zz + 2bz = ee + 2ey$, igitur $2bb + ee + 2ey = ee + 4ey + 4yy$; deletis delendis, omnibusque per 4 divisib. $\frac{bb}{2} = \frac{ey}{2} + yy$,

ac $y = -\frac{e}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{ee}{16} + \frac{bb}{2}\right)}$, quæ ita construi potest.

CONSTRUCTIO.

Centro A, radio b describatur circulus LGPRQ. Sumatur arcus QR = RP. Ducatur AQ. Jungatur LR secans AQ in M. Triangulum LMA erit rectangulum in M & isosceles, siquidem angulus PAR aut RAQ est semirectus, atque ideo QAL, ut & angulus ALM ad peripheriam, qui insitit quadranti; LM est ideo = MA, $LM^2 + AM^2 = 2AM^2 = bb$, & $AM^2 = \frac{bb}{2}$. Abscindatur

$$\text{nunc AS} = \frac{AC}{4}. \text{ Erit MS} = \sqrt{\left(\frac{ee}{16} + \frac{bb}{2}\right)}.$$

Centro S, radio SM, describatur arcus secans CP in K, ex quo ducatur KG ipsi MA parallela donec occurrat circulo LPRQ in G, ducatur CG, & erit EF = $2b$.

Tab. I. Fig. 4. Brevius autem, analysi geometrica.

Sit M recta magnitudine data, & ABCD datum quadratum.

Putafactum; sitque EF datæ M par. Ex F demitte ipsi FC ad angulos rectos FL occurrentem CD productæ in L. Ex eodem F eleva normalem FH. Angulus HFL est ideo

FCL par (Eucl. 8. VI.), atque FH æqualis CD, quapropter CE, & FL æquantur. Fac AK æqualem datæ M, aut EF. Duc EL, DK, hæc positione ac magnitudine datur (26. dat.). Sunt autem quadrata ex ED, DL, simul, æqualia (quadrato ex EL, aut quadratis ex EF, FL, simul, seu) quadratis ex FE, EC, aut ex FE, CD, DE. Quadratum ergo ex DL æquat quadrata ex FE, CD, id est ex AD, AK, quæ quadrato ex DK æquantur. Datur igitur DL positione, ac magnitudine; quare & CL, & ejus dimidia PL. Si nunc a dato puncto P in rectam positione datam AB agatur PF æqualis ipsi PL, dabitur etiam PF positione (31. dat.), datur ergo punctum F (27. dat.).

Componitur autem sic

In BA producta fac AK datæ M æqualem. Junge DK, qua, tanquam radio, & centro D describe arcum secantem CD productam, in L. Biseca CL in P, quo centro, & radio PL describe semicirculum secantem rectam BK in F. Age CF. Dico FE æqualem AK.

Sunt enim quadrata ex KA, AD simul, æqualia quadrato (ex KD, seu per constructionem) ex DL. Adde hinc inde quadratum ex DE; & quadrata ex KA, AD, DE simul æquabunt quadrata (ex LD, & ex DE, id est ex EL, seu) ex EF, FL; sed ob angulum HFL æqualem angulo FCL, & latus FH æquale lateri CD, est FL ipsi EC par. Quadrata igitur ex KA, AD, DE simul æquant quadrata (ex FE, EC, sive) ex FE, ED, DC simul. Aufer utrumque quadratum ex DE, & æqualia quadrata ex AD, DC, & restabit quadratum ex KA æquale quadrato ex FE, aut, quod idem est, AK æqualis FE. Q. E. F.

Tab. I. Fig. 5. Alia solutio qua locum habet etiam ubi datus angulus rectus non est, aut ubi quadrilaterum ABCD est rhombus.

Sit quadrilaterum æquilaterum ABCD datum specie, positione, & magnitudine; & ab unius anguli vertice C ducenda sit recta CF lateri BA occurrens in F, ita ut pars EF æquet rectam magnitudine datam M.

Putafactum; & quia quadrilaterum ABCD datur specie, dantur ejus anguli (dat. def. 3.), quapropter datur etiam angulus DAF (4. dat.); Duc diagonalem CA, & erit quadrilaterum divisum in triacula specie data (47. dat.), datur ideo angulus CAD, ergo etiam angulus CAF;

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9. & 10. ubi trianguli latera germana BC & AC determinanda erant, quæfivi potius femidifferentiam quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas ex vigesimo octavo problemate magis elucescet.

P R O B. X X V.

*Ad circulum centro C radio CD descriptum ducere tangentem DB, TAB. III.
cujus pars PB, inter rectas positione datas AP, AB sita, Fig. 6.
sit datæ longitudinis.*

LII. **A** Centro C ad alterutram rectarum positione datarum puta AB demitte normalem CE, eamque produc donec tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG; & dictis $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, & $PG = x$, propter similia triangula PGB, CDH erit $GB = \sqrt{(dd - xx)}$. $PB :: CD . CH = \frac{cd}{\sqrt{(dd - xx)}}$. Adde EC; & fiet $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{(dd - xx)}}$. Porro est $PG . GB :: EH . EB = \frac{b}{x} \sqrt{(dd - xx)} + \frac{cd}{x}$. Adhæc propter angulum

CAF; huic parem fac angulum CEK. Jam triangula CAF, CEK communem habent angulum CAF, & æquales angulos CAF, CEK; sunt itaque similia, & angulus AFC æquat angulum CKE; unde ut FC ad CA sic KC ad CE, adeoque est rectangulum FCE æquale rectangulo KAC; quam ob rem circulus transiens per puncta E, A, K transibit etiam per F; (quod facile probatur per Eucl. 36. & 37. III.) æquales igitur sunt anguli FEK, & (FAK, vel BAC: Junge FK, & rursus æquantur anguli FKE, & (FAE, vel, ob parallelas AD, BC) ABC; ergo similia sunt triangula ABC, FEK, & est AC ad AB, ut FE ad EK; sed magnitudine dantur BA, EF per hypothesin, & AC ob data puncta A & C, datur ergo magnitudine EK (20. dat.). Item, quia æquilaterum est quadrilaterum ABCD est angulus (BAC, vel) KAF æqualis angulo (ACB, vel) CAD; addito igitur communi EAF, est angulus KAE æqualis (FAC, aut) KEC; sed angulus CKE communis est triangulis CKE, EKA, sunt itaque similia: inde CK ad KE ut KE ad KA, & rectangulum CKA æquatur quadrato ex KE; sed datur hoc quadratum, & recta CA, ergo etiam AK (59. dat.); quocirca datur punctum K, & (ob KE magnitudine, & AD positione, datas) etiam punctum E (31. & 27. dat.).

C O M P O S I T I O.

Cape R quartam proportionalem post datas AC, AB, M; hujus quartæ quadrato æquale rectangulum applica datæ CA ut excedat quadrato (Eucl. 29. VI.): sitque applicationis altitudo AK: centro A, radio R describe arcum ipsi AD occurrentem in E: junge CE, quam produc donec BA productæ occurrat in F. Dico EF datæ M esse parem.

Nam, quia ex constructione rectangulum CKA æquat quadratum ex KE, erit CK ad KE ut KE ad KA, & lineæ proportionales sunt circa eundem angulum CKE; igitur similia sunt triangula CKE, EKA (Eucl. 6. VI.); est igitur angulus CEK æqualis angulo (KAE, aut propter KAF æqualem BAG, vel CAD, & FAE communem) FAC, ergo triangula CKE, CFA habentia angulum communem KCF, sunt similia, & angulus CKE æquat angulum CFA, quapropter FC ad CA est ut CK ad CE, & rectangulum FCE æquat rectangulum KCA, igitur circulus transiens per puncta E, A, K transibit etiam per F; sunt ergo æquales anguli FEK, & (KAF, vel) BAC, ut & (ducta FK) FKE ac (EAF, vel) CBA; quocirca CA ad AB est ut FE ad EK; sed ut CA ad AB ita est (per constructionem) M ad EK, æquantur itaque M & FE. Q. E. F.

lum PAG datum, datur ratio PG ad AG, qua posita e ad f , erit $AG = \frac{fx}{e}$.

Adde EA & BG, & habebitur denuo $EB = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$.

Est itaque

$$\frac{cd}{x} + \frac{b}{x} \sqrt{dd - xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx},$$

& per transpositionem terminorum

$$a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x} \sqrt{dd - xx}.$$

Et partibus æquationis quadratis,

$$aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} =$$

$$\frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx.$$

Et per debitam reductionem

$$\begin{array}{r} + aace \\ + 2aef \ x^1 + bbee \ xx + 2bddee \ x + ccddde \\ - 2bee \ x^1 - ddee \ xx - 2acdee \ x - bbddde \\ - 2cdef \\ \hline x^4 \qquad \qquad \qquad ee + ff \ (f). \qquad \qquad \qquad = 0 \end{array}$$

PROB.

(f) Plenior hujus æquationis constructionem invenies infra; sed docenda videtur ratio inveniendi casus, in quibus æquatio biquadratica descendit ad quadraticam; ut hoc fiat, secundus, & quartus terminus simul abesse debent: secundus autem abesset in hac hypothese si $af = be$, & tunc æquatio in hanc mutaretur

$$\begin{array}{r} + aace \\ + bbee \ xx + 2bddee \ x + ccddde \\ - ddee \ xx - 2acdee \ x - bbddde \\ - 2cdef \\ \hline ee + ff \end{array} = 0;$$

quartus vero evanesceret si $bd = ae$, & tunc

$$\begin{array}{r} + aace \\ + bbee \ xx + ccddde \\ - ddee \ xx - bbddde \\ - 2cdef \\ \hline ee + ff \end{array} = 0;$$

Tunc autem GP . PA :: AE . EC :: CD . PB;
aut $a . b :: e . f :: d . e$.

P R O B. X X V I.

Invenire punctum *D* a quo tres rectæ *DA*, *DB*, *DC* ad totidem TAB. III.
alias positione datas rectas *AE*, *BF*, *CF* perpendiculariter Fig. 7.
demissæ, datam inter se rationem obtineant.

LIII. **E** rectis positione datis producat una, puta *BF*, ut & ejus perpendicularis *BD* donec reliquis *AE* & *CF* occurrant, *BF* quidem in *E* & *F*; *BD* autem in *H* & *G*. Jam sit $EB = x$ & $EF = a$; eritque $BF = a - x$. (g) Cum autem propter datam positionem rectarum *EF*, *EA*, & *FC*, anguli *E* & *F*, adeoque rationes laterum triangulorum *EBH* & *FBG* dentur; sit *EB* ad *BH* ut *d* ad *e*; & erit

$$BH = \frac{ex}{d} \text{ (b) \& } EH (= \sqrt{EBq + BHq}) =$$

$\sqrt{xx + \frac{eeex}{d}}$, hoc est $= \frac{x}{d} \sqrt{dd + ee}$. (i) Sit etiam *BF* ad *BG* ut

d ad *f*; & erit $BG = \frac{fa - fx}{d}$ (k) & $FG (= \sqrt{BFq + BGq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffx}{d}}$, hoc est $= \frac{a - x}{d} \sqrt{dd + ff}$. (l)

Præterea dicatur *BD* = *y*, & erit $HD = \frac{ex}{d} - y$, & $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$, adeoque cum sit *AD*.*HD* (:: *EB*.*EH*) :: *d*. $\sqrt{dd + ee}$, & *DC*.*GD* (:: *BF*.*FG*) :: *d*. $\sqrt{dd + ff}$, erit $AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{dd + ee}}$, & $DC =$

$\frac{fa - fx - dy}{\sqrt{dd + ff}}$. (m) Denique ob datas rationes linearum *BD*, *AD*, *DC*, sit *BD*.

AD

TAB. I. (g) Problema hoc simul explicare, & viam
Fig. 6. constructioni sternere conabimur.

Positis, quæ in Auctore; erige *FM*, *EL* normales ad *EF*. Produca *EH*, *FG*, donec normalibus occurrant in *M* & *L*. Dic *FM* = *b*, *EL* = *e*, *EM* = $\sqrt{aa + bb}$ = *m*, *FL* = $\sqrt{aa + ee}$ = *n*.

(b) Est *EB* ad *BH*, ut *EF* ad *FM*; sed quia Auctor facit *EB* ad *BH*, ut *d* ad *e*, erit $a.b :: d.e$, & $BH = \frac{ex}{d} = \frac{bx}{a}$. Quia vero *d*, & *e* arbitrarie longitudinis sumi possunt, (dummodo sint inter se ut *EF* ad *FM*) pone *d* = *a*; erit $e = b$, & $\sqrt{dd + ee} = \sqrt{aa + bb} = m$.

(i) Id est $EH = \frac{mx}{a}$.

(k) Rursus *FB* ad *BG* est, ut *FE* ad *EL*; ut *d* ad *f*. Quia vero posuimus *d* = *a*; erit $f = e$, & $BG = \frac{af - fx}{d} = \frac{ae - ex}{a} = e - \frac{ex}{a}$; $\sqrt{dd + ff} = \sqrt{aa + ee} = n$.

(l) Scilicet $FG = \frac{an - nx}{a} = n - \frac{nx}{a}$.

(m) Id est $AD = \frac{bx - ay}{m}$, & $DC = \frac{ae - ex - ay}{n}$.

AD :: $V(dd+ee)$. $b-d$, (n) & erit $\frac{by-dy}{V(dd+ee)} (= AD) = \frac{ex-dy}{V(dd+ee)}$,
 five $by = ex$. (o) Sit etiam BD . DC :: $V(dd+ff)$. $k-d$ (p) & erit
 $\frac{ky-dy}{V(dd+ff)} (= DC) = \frac{fa-fx-dy}{V(dd+ff)}$, five $ky = fa-fx$. (q) Est ita-
 que $\frac{ex}{b} (= y) = \frac{fa-fx}{k}$; & per reductionem $\frac{fba}{ek+fb} = x$. (r) Qua-
 re cape EB . EF :: $b \cdot \frac{ek}{f} + b$, dein BD . EB :: $e \cdot b$, & habebitur pun-
 ctum quæsitum D.

PROB. XXVII.

TAB. III.
Fig. 8. *Invenire punctum D, a quo tres rectæ DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C, ductæ, datam inter se rationem obtineant.*

LIV. **E** Datis tribus punctis junge duo quævis, puta A & C; & a ter-
 tio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendicularum
 BE, ut & perpendicularum DF a puncto quæsito D; dictisque AE = a , AC
 = b , EB = c , AF = x , & FD = y , erit ADq = $xx+yy$. FC = $b-x$.
 CDq (= FCq + FDq) = $bb-2bx+xx+yy$. EF = $x-a$, ac
 BDq (= EFq + (EB+FD) quadratum) (s) = $xx-2ax+aa+cc+2cy+yy$.
 Jam cum sit AD ac CD in data ratione, sit ista ratio d ad e ; &
 erit CD = $\frac{e}{d} V(xx+yy)$. Cum etiam sit AD ad BD in data ratione,
 sit ista ratio d ad f , & erit BD = $\frac{f}{d} V(xx+yy)$. Adeoque est $\frac{eexx+eeyy}{dd}$
 (= CDq) = $bb-2bx+xx+yy$, & $\frac{ffxx+ffyy}{dd}$ (= BDq) = $xx-2ax$

(n) Sit ME ad FN ut esse debet BD ad DA,
 & dic EN = b , erit EN = $b-a$, vel
 $b-d$.

(o) Nempe $by = bx$.

(p) Sit rursus LE ad FO, ut esse debet BD
 ad DC. Dic EO = k , & FO erit $k-a$,
 vel $k-d$.

(q) Seu juxta nos $ky = ac-ex$.

(r) Nostri symbolis $x = \frac{ach}{bk+cb}$. Restat

igitur faciendum EB . EF :: $b \cdot \frac{bk}{c} + b$, seu

EB . EF — EB (BF) :: $b \cdot \frac{bk}{c}$, id est quære
 quantam NP post LE, EO, MF, & secā da-
 tam EF in B ut secā est EP in N, erit EB = x .
 Cetera facile inveniuntur.

(s) Nam si DF producat, & per B ducatur
 BH ipsi EF parallela; patet FH = EB, TAB. I.
 & BH = EF, atque BD² = BH² (five EF²) Fig. 7.
 + DH² (five (DE+EB)²).

$2ax + aa + cc + 2cy + yy$. (t) In quibus si abbreviandi causa, pro $\frac{dd - ee}{d}$ scribatur p , & q pro $\frac{dd - ff}{d}$, (v) emerget

$$bb - 2bx + \frac{p}{d} xx + \frac{p}{d} yy = 0,$$

&

$$aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d} xx + \frac{q}{d} yy = 0.$$

Per priorem est $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d} xx + \frac{q}{d} yy$. (x) Quare in posteriori pro $\frac{q}{d} xx + \frac{q}{d} yy$ scribe $\frac{2bqx - bbq}{p}$ & orietur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi causa, scribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p} - aa - cc$, & erit $2mx + 2cn = 2cy$; terminisque per $2c$ divis $\frac{mx}{c} + n = y$. Quamobrem in æquatione $bb - 2bx + \frac{b}{d} xx + \frac{p}{d} yy = 0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c} + n$, & habebitur

$$bb - 2bx + \frac{p}{d} xx + \frac{pmm}{dcc} xx + \frac{2pmm}{dc} x + \frac{pnn}{d} = 0.$$

Ubi denuo si, abbreviandi causa $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc}$, (y) $\frac{sb}{r}$ pro $\frac{2pmm}{dc}$, & $\frac{pnn}{d}$ scribatur pro $\frac{pnn}{d}$.

(t) In prima æquatione duc omnia in dd , & habebis

$eeex + eeyy = bbdd - 2bddx + ddxx + ddyy$, & transponendo, ac rursus dividendo per dd , erit

$$bb - 2bx + \left(\frac{dd - ee}{dd}\right) xx + \left(\frac{dd - ee}{dd}\right) yy = 0.$$

Idem fac in secunda.

(v) Sume ad libitum aliquam rectam, quam dic $= d$, hanc fac ad aliam ut debet esse AD ad DC, hanc secundam dic $= e$. Rursus fit d ad aliam ut esse debet AD ad DB, hancque tertiam dic $= f$. Fac nunc $d : d + e :: d - e$ ad quartam $= p$; & $d : d + f :: d - f$ ad quartam $= q$.

(x) Transpone $bb - 2bx$ in priori æquatione, sic inventurus $\frac{p}{d} xx + \frac{p}{d} yy = 2bx - bb$.

Duc omnia in q , & divide per p , & obtinebis $\frac{q}{d} xx + \frac{q}{d} yy = \frac{2bqx - bbq}{p}$.

(y) Ceteris, ut supra, stantibus, fit $EG = m$; $GB^2 = cc + mm$; sed ducta EK normali. $GB^2 : BE^2 (= SB.BK) :: GB.BK$. Fiat ergo $p.b :: d$. (e), & $GB.BK :: e$. (r), ea æquabit $\frac{ecc}{cc + mm} = \frac{bdcc}{pcc + pmm}$, quare $r(pcc + pmm) = bdcc$, & $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc} = \frac{b}{r}$.

$$b - \frac{pmn}{dc}, (z)$$

&

$$\frac{bb}{r} \text{ pro } bb + \frac{pmn}{d}, (a) \text{ habebitur } xx = 2sx - tb.$$

Et extracta radice $x = s \pm \sqrt{ss - tb}$. Invenio x æquatio $\frac{mx}{c} + n = y$, dabit y ; & ex datis x & y , hoc est AF & FD determinatur punctum quaesitum D.

(z) Rursus quia $\frac{sb}{r}$ debet æquare $\frac{bdc - pmn}{dc}$,
 & $\frac{sb}{r} = \frac{sb(pcc + pmn)}{bdcc}$, erit $s = \frac{pcc + pmn}{c}$
 $= \frac{bdc - pmn}{c} = \frac{epc - pmn}{c}$, & $s(cc + mm)$
 $= ecc - mnc$. Faciendum est ergo $cc + mm$
 (BG²). $cc - mn :: c. (s)$.

(a) Item quia $\frac{bb}{r} = bb + \frac{pmn}{d}$, erit $t = r +$
 $\frac{pmn}{bbd} = r + \frac{rnn}{eb} = \frac{ecnn}{b(cc + mm)} + r$. Fac
 itaque $cc + mm :: \frac{nn}{b}. (u)$, cui adjice r .

De lois Geometricis.

1. Natura lineæ rectæ optime percipitur ex prorsus eadem omnium partium positione, quomodocunque partes illæ considerentur. Natura curvarum luculentissime intelligeretur ex diversa partium positione, & una curva ab aliis distingueretur varietatibus occurrentibus in hac diversa partium positione. Sic linea circularis ea est quæ habet partes eodem modo positas, si a centro spectentur; quod non accidit in aliis curvis: & hæc ipsa diversitas in partium positione, dicitur curveto. Cum autem difficilior sit curveto determinatio, aliam viam inveniunt Geometræ, & linearum naturam definierunt per relationem rectarum certo modo ductarum.

TAB. K.
Fig. 1.

2. Rectæ, quarum ratio exponit lineæ aliqujus ABC naturam, sic determinari solent. Sumuntur duæ rectæ BD; DE, concurrentes in puncto D, quarum altera BD rectæ FG positione datæ parallela est, altera DE rectæ GH

pariter positione datæ parallela est. Hæ rectæ hinc terminantur a puncto D ubi concurrunt, inde vel utraque a linea cuius naturam exponunt, vel altera DB a linea in B; altera ED a puncto quodam determinato E. Et hæ rectæ ED; dicuntur *coordinate*.

3. Plerumque ea recta, quæ incipit a dato puncto E, datur positione; & tunc illius partes ED; Ed &c, dicuntur *abscissæ*; & rectæ parallelæ BD; bd &c, vocantur *ordinate*, vel *applicata*.

4. Sed arbitraria est hæc distinctio. Agatur enim per datum punctum E recta indefinita EI ipsi FG parallela, & per aliquod lineæ definientis punctum B recta BK ipsi ED parallela, & rectæ EI occurrentes in K; cum æquales sint BD; KE, ut & ED; KB (Eucl. 34. 1.) lineæ ABC natura æque definitur rectis EK; KB, ac rectis ED; DB. Si lineæ ABC natura definitur rectis EK; KB, erit EK abscissa, KB ordinata; contra ED abscissa & DB ordinata, si linea determinetur rectis ED; DB.

5. Semper autem datum punctum E dicitur *vertex* vel *origo*. Hæc non omittenda censui, quanquam ponam cognitæ præcipuas lineæ rectæ & sectionum conicarum proprietates.

6. Relatio inter coordinatas definitur vel ex problematis legibus, vel ex cognita lineæ natura. Exempla primi generis attulit Newtonus Sect. IV. Nis. XXVII. & XXVIII; & multa afferet infra. Secundi generis hæc sunt.

7. Si ABC est linea recta positione data, TAB. K.
recta abscissarum AE pariter positione data, Fig. 2.
& cum ea datum angulum constituent ordinatæ

tæ

tæ BD, datur ratio AD ad DB. (Eucl. Dat. 40., & def. 3; & 2. VI.) Et si data sit ratio AD ad DB, recta AE positione data, & datum punctum A, tanget punctum B rectam positione datam. Si enim assumatur AF datæ magnitudinis, ab F sub dato angulo ducatur FG, ponatur AF ad FG in data ratione, & agatur AG recta, ea transibit per B. Compleantur parallelogramma AFGH; ADBI; hæc sunt æquiangula ob æquales angulos AFG; ADB; & habent proportionalia latera AF; FG; AB; BD, ergo sunt circa eandem diagonalem (Eucl. 26. VI.)

TAB. K.
Fig. 3.

8. Iisdem positis sit ABC parabola, AE diameter ordinarum BD, & A vertex, erit rectangulum sub parametro & abscissa AD æquale quadrato ordinatæ DB; & si vertice A, diametro AE, & parametro pertinente ad diametrum AE describatur parabola, & sit rectangulum sub parametro & abscissa æquale quadrato ordinatæ, alterum extremum B ordinatæ tanget hanc parabolam.

9. Hæc facile accommodantur ad ellipsum, & ad hyperbolam tum circa diametros, tum intra asymptotos.

10. Lineæ quæ transeunt per extrema ordinarum, appellantur loci. Veteres dixerunt *locos planos* quicunque sunt lineæ rectæ & circuli; *locos solidos* sectiones conicas, & *locos lineares* alias curvas superiores. De locis planis scripsit APOLLONIUS libros duos, quos deperditos optime restituit ROBERTUS SIMSON.

11. Ex mente recentiorum algebra utentium, abscissæ AD dicantur x ; ordinatæ DB y ;

TAB. K.
Fig. 2.

12. Ubi linea ABC est recta, data ratio sit δ, π ; erit $\delta, \pi :: x, y$; & $x = \frac{\delta y}{\pi}$, vel $x - \frac{\delta y}{\pi} = 0$, æquatio ad rectam.

TAB. K.
Fig. 3.

13. Quando linea ABC est parabola, & π est parameter pertinens ad diametrum AE, erit $\pi x = yy$, vel $\pi x - yy = 0$, æquatio ad parabolam.

TAB. K.
Fig. 4.

14. Si linea ABC est ellipsis, ejus diameter $Pp = \delta$, & parameter pertinens ad diametrum $Pp = \pi$, erit $Dp = \delta - x$; & $\delta x - xx$. $yy :: \delta, \pi$; atque $\delta x - xx = \frac{\delta yy}{\pi}$, vel $xx - \frac{\delta yy}{\pi} = 0$, æquatio ad ellipsum.

Tom. I.

15. Si linea ABC est hyperbola circa diametrum $Pp = \delta$, parameter ad eam pertinens $= \pi$, erit $pD = \delta + x$, & æquatio ad hyperbolam hanc invenietur $xx + \delta x - \frac{\delta yy}{\pi} = 0$.

TAB. K.
Fig. 5.

16. Si linea ABC est hyperbola inter asymptotos, quarum alteri parallela est ordinata DB, Fig. 6. ejus diameter secunda $= x$, erit $xy - \pi x = 0$, æquatio ad hanc hyperbolam.

TAB. K.
Fig. 6.

17. Recentiores distinguunt *locos ex æquationum dimensionibus*, & vocant locum primi gradus, eum cujus æquatio est unius dimensionis, id est *locum* ad rectam; *locum* secundi gradus cujus æquatio est duarum dimensionum, id est ad sectiones conicas, quibus circulus est annumerandus; *locum* tertii gradus, cujus æquatio est trium dimensionum, & sic de reliquis, quorum exempla nonnulla occurrunt infra.

18. Æquationem autem vocant unius dimensionis, cum neque indeterminatarum aut coordinatarum potestates, neque facta ex illis continet. Hujusmodi est æquatio ad rectam. Æquationem dicunt duarum dimensionum cum habet aut alterius saltem coordinate quadratum, ut æquatio ad parabolam, aut utriusque coordinate quadratum, ut æquatio ad ellipsum & ad hyperbolam circa diametros, aut factum ex coordinatis, ut æquatio ad hyperbolam intra asymptotos. Uno verbo numerus dimensionum definitur a maximo aggregato indicum indeterminatarum, quæ constituunt unum terminum simplicem æquationis.

19. Quivis locus complectitur puncta numero infinita; e singulis punctis loci duci possunt ordinatæ, quæ determinant totidem abscissas; ergo quilibet locus complectitur infinitum coordinatarum numerum; quæ cum exponantur æquatione indeterminata, intelligimus mirum in modum consentire naturam locorum cum natura æquationum indeterminatarum.

20. Ubi vero lineæ natura definita est, ea referri potest ad ordinatas a prioribus diversas. Mutari enim potest I. verticis positio. II. positio ordinarum. III. positio verticis & ordinarum simul. IV. positio abscissæ. V. positio verticis & abscissæ. VI. positio tum ordinarum tum abscissarum. VII. positio tum ordinarum, tum abscissarum, tum verticis.

31. Ia.

Dd

TAB. K.
Fig. 7.

21. In sequentibus ponam lineæ ABC naturam primo, ut in numeris 11—16, definitam esse rectis PD; DB, quarum altera PD incipit a dato puncto P, altera DB rectæ ST positione datæ & transeunt per P, parallela est; ita ut ex recta RPQ defumantur abscissæ x , quæ positivæ sunt a P versus Q, & negativæ a P versus R; & ordinatæ DB vel PG ex ST, quæ positivæ procedunt a P versus S, & negativæ a P versus T.

22. I. Mutetur vertex, qui ponatur in O vel N, & fingatur NP = PO = a .
Statim dicatur ND = u = NP + PD = $a + x$; & $u - a = x$.
Jam dicatur OD = u = DP - PO = $x - a$; & $u + a = x$.

Quare in omni æquatione locali, in qua mutatur vertex, poni debet $u \mp a$ pro x , reliquis manentibus; quæ substitutio si fiat in æquationibus supra inventis fiet

$$23. u \mp a - \frac{dy}{\pi} = 0, \text{ æquatio ad rectam.}$$

$$24. \pi u \mp a\pi - yy = 0, \text{ æquatio ad parabolam.}$$

$$25. \frac{uu}{\pi} \mp \frac{2au + aa}{\pi} + \frac{dy}{\pi} = 0, \text{ æquatio ad ellipsum.}$$

$$26. \frac{uu}{\pi} \mp \frac{2au + aa}{\pi} - \frac{dy}{\pi} = 0, \text{ æquatio ad hyperbolam circa diametros.}$$

$$27. uy \mp ay - xx = 0, \text{ æquatio ad hyperbolam inter asymptotos.}$$

Sed quoniam tum ellipsis tum hyperbola circa diametros, habent centrum, quod bisecat diametrum, si origo abscissarum transferatur in ipso centro, erit $a = \frac{d}{2} = PO = Op$.

TAB. K.
Fig. 4.

28. Erit igitur in ellipsi PD = PO - OD = $a - u$, & DP = PO + OD = $a + u$, & ideo $aa - uu : yy :: 2a : \pi$; & $aa - uu = \frac{2ayy}{\pi}$, aut $uu - aa + \frac{2ayy}{\pi} = 0$ æquatio ad ellipsum, quando origo abscissarum est in ipso centro.

TAB. K.
Fig. 5.

29. In hyperbola erit PD = DO - OP = $u - a$ & DP = DO + Op = $u + a$; & $uu - aa : yy :: 2a : \pi$; $uu - aa = \frac{2ayy}{\pi}$,

aut $uu - aa - \frac{2ayy}{\pi} = 0$, æquatio ad hyperbolam circa diametros, quando origo abscissarum est in centro.

30. Æquationes Ni. 28. & 29, quia carent secundo termino, censendæ sunt simpliciores æquationibus Ni. 25 & 26.

31. II. Mutetur positio ordinarum, & curva quæ referebatur ad coordinatas PD; DB, referatur ad coordinatas PE; EB, quarum altera PE = u , abscinditur ab eadem recta RQ, & originem ducit ab eodem puncto P, ac prior PD; altera BE quam ponet = z , constituit cum ea datum angulum. Age per P rectam indefinitam LM quæ faciat angulum LPR dato æqualem, & quæ ideo positione dabitur. Dantur ergo omnes anguli circa punctum P. Dantur quoque omnes anguli in triangulo BDE; quare & ratio laterum DB; BE; ED. Quam determinaturus, abscinde a PT datam PI, quam dic = β ; per I age IK parallelam ipsi RQ, & dic IK = γ ; & KP = s .

Ob parallelas IK; RP, æquales sunt anguli IKP; RPL ad easdem partes partes oppositi; sed RPL angulus factus est æqualis angulo BED; ergo æquales sunt anguli IKP; DEB. Eodem pacto demonstrabuntur æquales anguli KIP; EDB. Quare æquiangula sunt triangula IPK; DEB: & IP (s). PK (s) :: DB (y).

$$BE (z), \text{ \& } y = \frac{\beta z}{s}.$$

Item IP (s). IK (γ) :: BD ($y = \frac{\beta z}{s}$). DE; est ergo DE = $\frac{\gamma z}{s}$, & PE = $u = PD + DE = x + \frac{\gamma z}{s}$, & $u - \frac{\gamma z}{s} = x$, ubi punctum E cadit extra puncta P & D, ut in figura; sed $u + \frac{\gamma z}{s} = x$, ubi punctum E cadit intra puncta P; D. Ergo in æquationibus Nm. 12. 13. 14. 15. 16.

$$\text{pro } y \text{ ponamus } \frac{\beta z}{s}$$

& pro x ambigue $u \mp \frac{\gamma z}{s}$, fiet

$$32. u \pm \frac{\gamma z}{s} - \frac{\beta dz}{\pi} = 0, \text{ æquatio ad rectam.}$$

33. $\pi u \pm \frac{\pi y z}{s} - \frac{\beta \beta z z}{s} = 0$, æquatio ad parabolam.

34. $u u \pm \frac{2 y u z}{s} + \frac{\gamma y z z}{s} - \frac{\delta \beta \beta z z}{\pi s} - \delta u \pm \frac{\delta y z}{s} = 0$, æquatio ad ellipsum.

35. $u u \pm \frac{2 y u z}{s} - \frac{\delta \beta \beta z z}{\pi s} + \delta u \pm \frac{\delta y z}{s} = 0$, æquatio ad hyperbolam circa diametros.

36. $\frac{\beta u z}{s} \pm \frac{\beta y z z}{s} - x x = 0$, æquatio ad hyperbolam intra asymptotos.

37. III. Si præterea origo transferretur in O aut N.

pro y poni deberet $\frac{\beta z}{s}$

& pro x $u \pm \frac{y z}{s} \pm a$.

in æquationibus primo inventis, unde evaderet

38. $u \pm \frac{y z}{s} - \frac{\beta \delta z}{\pi} \pm u = 0$, æquatio ad rectam.

39. $\pi u \pm \frac{\pi y z}{s} \pm \pi - \frac{\beta \beta z z}{s} = 0$, æquatio ad parabolam.

40. $u u \pm \frac{2 y u z}{s} + \frac{\gamma y z z}{s} \pm 2 a u + \frac{2 a y z}{s} + a u - \frac{\delta \beta \beta z z}{\pi s} - \delta u \pm \frac{\delta y z}{s} - a \delta = 0$, æquatio ad ellipsum.

41. $u u \pm \frac{2 y u z}{s} - \frac{\delta \beta \beta z z}{\pi s} + \delta u \pm \frac{\delta y z}{s} - a \delta = 0$, æquatio ad hyperbolam circa diametros.

42. $\frac{\beta u z}{s} \pm \frac{\beta y z z}{s} \pm \frac{a \beta z}{s} - x x = 0$,

æquatio ad hyperbolam intra asymptotos.

43. IV. Mutetur positio abscissæ, & curva TAB. K. quæ referebatur ad PD (x); DB (y), referatur ad PH (u); BH (z). Quia dantur anguli DPH; PHD, per hypothefim, datur ratio PD ad DH, & PH ad HD. Sit $\beta \cdot \zeta :: PD(x)$.

DH = $\frac{\zeta x}{\beta}$; & $\gamma \cdot \zeta :: PH(u)$. HD = $\frac{\zeta u}{\beta}$; erit $\zeta u = \frac{\zeta y x}{\beta}$; & $\frac{\beta u}{\gamma} = x$. Est autem BH =

BD + DH = $y + \frac{\zeta u}{\gamma}$, ubi recta XPY cadit intra angulum QPT, & ubi ea cadit intra angulum QPS est BH = $y - \frac{\zeta u}{\gamma}$. Quare $z =$

$y \pm \frac{\zeta u}{\gamma}$. Igitur in æquationibus N^m. 12. 13. 14. 15. 16.

pro x ponamus $\frac{\beta u}{\gamma}$

& pro y $z \pm \frac{\zeta u}{\gamma}$

& fiet

44. $\frac{\beta u}{\gamma} - \frac{\delta z}{\pi} \pm \frac{\delta \zeta u}{\pi \gamma} = 0$, æquatio ad rectam.

45. $\frac{\pi \beta u}{\gamma} - x x \pm \frac{2 \zeta u z}{\gamma} - \frac{\zeta^2 u u}{\gamma \gamma} = 0$,

vel, liberando uu a coefficiente, & transponendo.

$u u \pm \frac{2 y u z}{s} + \frac{\gamma y z z}{s} - \frac{\pi \beta \gamma u}{\zeta s} = 0$,

æquatio ad parabolam.

46. $\frac{\beta \beta u u}{\gamma \gamma} - \frac{\delta \beta u}{\gamma} + \frac{\delta z z}{\pi} \pm \frac{2 \delta \zeta u z}{\pi \gamma} + \frac{\delta^2 \zeta u u}{\pi \gamma \gamma} = 0$,

vel, liberando uu a coefficientibus,

$u u \pm \frac{2 \delta \gamma \zeta u z}{\pi \beta \beta + \delta \zeta^2} + \frac{\delta \gamma y z z}{\pi \beta \beta + \delta \zeta^2} - \frac{\delta \gamma \beta \pi u}{\pi \beta \beta + \delta \zeta^2} = 0$,

æquatio ad ellipsum.

47. $\frac{\beta \beta u u}{\gamma \gamma} + \frac{\delta \beta u}{\gamma} - \frac{\delta z z}{\pi} \pm \frac{2 \delta \zeta u z}{\pi \gamma} - \frac{\delta^2 \zeta u u}{\pi \gamma \gamma} = 0$

vel, liberando uu a coefficientibus,

$u u \pm \frac{2 \delta \gamma \zeta u z}{\pi \beta \beta - \delta \zeta^2} - \frac{\delta \gamma y z z}{\pi \beta \beta - \delta \zeta^2} + \frac{\delta \gamma \beta \pi u}{\pi \beta \beta - \delta \zeta^2} = 0$,

D d 2

æqua-

æquatio ad hyperbolam circa diametros.

$$48. \frac{\beta u z}{\gamma} \pm \frac{\beta^2 u u}{\gamma \gamma} - x x = 0,$$

æquatio ad hyperbolam intra asymptotos.

49. V. Mutetur præterea positio originis, quæ transferatur in O, aut N.

pro x ponere debemus $\frac{\beta u}{\gamma} \pm a$

& pro y $z \pm \frac{\zeta u}{\gamma}$

in æquationibus Nm. 12. 13. 14. 15. 16. & fiet

$$50. \frac{\beta u}{\gamma} - \frac{\delta z}{\pi} \pm \frac{\delta \zeta u}{\pi \gamma} \mp a = 0, \text{ æquatio ad rectam.}$$

$$51. \frac{\pi \beta u}{\gamma} \mp a \pi - z z \pm \frac{2 \zeta u z}{\gamma} - \frac{\zeta^2 u u}{\gamma \gamma} = 0,$$

vel liberando $u u$ a coefficiente, & transponendo,

$$u u \mp \frac{2 \gamma u z}{\zeta} + \frac{\gamma \gamma z z - \pi \gamma \beta u \pm a \pi \gamma \gamma}{\zeta^2} = 0,$$

æquatio ad parabolam.

$$52. \frac{\beta \beta u u}{\gamma \gamma} - \frac{\beta \delta u}{\gamma} \mp a \delta + \frac{\delta z z}{\pi} \mp \frac{2 \delta \zeta u z}{\pi \gamma} +$$

$$\frac{\delta \zeta^2 u u}{\pi \gamma \gamma} = 0,$$

vel, liberando $u u$ a coefficientibus,

$$u u \mp \frac{2 \delta \gamma \zeta^2 z + \delta \gamma \gamma z z}{\pi \beta \beta + \delta \zeta^2} \mp \frac{2 a \beta \pi \gamma \pm \beta \delta \pi \gamma}{\pi \beta \beta + \delta \zeta^2} + \pi \gamma \gamma (a a \mp a \delta) = 0,$$

æquatio ad ellipsum.

$$53. u u \mp \frac{2 \delta \gamma \zeta^2 z - \delta \gamma \gamma z z}{\pi \beta \beta - \delta \zeta^2} \mp \frac{2 a \beta \pi \gamma \mp \beta \delta \pi \gamma}{\pi \beta \beta - \delta \zeta^2} + \pi \gamma \gamma (a a \mp a \delta) = 0,$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros, facile inveniendi ad modum superioris.

$$54. \frac{\beta u z}{\gamma} \mp a z \mp \frac{\beta \zeta u u}{\gamma \gamma} + \frac{a \beta u}{\gamma} - x x = 0,$$

æquatio ad hyperbolam intra asymptotos.

55. VI. Nunc mutetur positio utriusque coordinatæ, & linea ABC, quæ referebatur ad coordinatas PD (x); DB (y), referatur ad PE (u); EB (z), quarum altera PE abscinditur a recta XZ, positione data, altera BE rectæ LPM positione datæ parallela est. TAB. L.
Fig. 1. 2.
34.

Abscindatur, ut No. 31, PI = β , agatur IK parallela ipsi RQ & occurrat rectæ LM in K, & rectæ XZ in Y; & ponatur IK = γ ; KP = ϵ ; KY = ζ ; YP = λ .

Triangula IPK; DBU ostenduntur similia ut No. 31, & hinc inveniatur BU = $\frac{\epsilon \gamma}{\beta}$, &

$$DU = \frac{\gamma \gamma}{\beta}; \text{ \& } PU = PD \pm DU = x \pm$$

$$\frac{\gamma \gamma}{\beta}.$$

Sed, ob parallelas MP; EB, anguli alterni KPY; PEB sunt æquales, ut & anguli KYP; EPU alterni inter parallelas KI; PQ; ergo est KY (ζ).YP (λ) :: UP ($\frac{\beta x \pm \gamma \gamma}{\beta}$).PE (u); & $\beta \zeta u = \beta \lambda x \pm \gamma \lambda \gamma$.

$$\text{Item } YK (\zeta).KP (\epsilon) :: PU (\frac{\beta x \pm \gamma \gamma}{\beta}).UE =$$

$$\frac{\beta \epsilon x \pm \gamma \epsilon \gamma}{\beta^2}; \text{ \& } BE = BU \pm UE =$$

$$\frac{\zeta \epsilon \gamma \pm \beta \epsilon x \mp \gamma \epsilon \gamma}{\beta^2} = x.$$

Æquatio $\beta \zeta u = \beta \lambda x \pm \gamma \lambda \gamma$, dat

$$\frac{\beta \zeta u \mp \gamma \lambda \gamma}{\beta \lambda} = x.$$

$$\text{Æquatio } \pm \beta \epsilon x \mp \gamma \epsilon \gamma + \zeta \epsilon \gamma = \beta \zeta z, \text{ dat } x = \pm \frac{\beta \zeta z \pm \gamma \epsilon \gamma \mp \zeta \epsilon \gamma}{\beta \epsilon}; \text{ quare } \frac{\beta \zeta u \mp \gamma \lambda \gamma}{\lambda} =$$

$$\frac{\beta \zeta z \pm \gamma \gamma \pm \zeta \epsilon \gamma}{\epsilon}; \text{ unde } \beta \epsilon \zeta u \mp \gamma \epsilon \lambda \gamma =$$

$$\beta \lambda \zeta z \mp \gamma \epsilon \lambda \gamma \pm \zeta \epsilon \lambda \gamma; \text{ \& } \text{deleto commune } \gamma \epsilon \lambda \gamma, \text{ manet } \beta \epsilon \zeta u = \beta \lambda \zeta z \pm \zeta \epsilon \lambda \gamma, \text{ unde } \gamma =$$

$$\frac{\beta \lambda \zeta z \pm \beta \epsilon \zeta u}{\zeta \epsilon \lambda} = \frac{\beta \lambda z \pm \beta u u}{\epsilon \lambda}.$$

$$\text{Hic valor positus in } x = \frac{\zeta u}{\lambda} \mp \frac{\gamma \gamma}{\beta}, \text{ dat } x =$$

$$\frac{\zeta u}{\lambda} \pm \frac{\beta \gamma \lambda z \pm \beta \epsilon \gamma u}{\beta \epsilon \lambda} = \frac{\zeta u}{\lambda} \mp \frac{\gamma \lambda z \pm \gamma u u}{\epsilon \lambda} =$$

$$u \left(\frac{\xi \pm \gamma}{\lambda} \right) \pm \frac{\gamma z}{\epsilon}, \text{ \& ponendo } KY \pm IK$$

$$= IY = \zeta \pm \gamma = \eta, \text{ fiet } \frac{\eta u}{\lambda} \pm \frac{\gamma z}{\epsilon} = x.$$

Quapropter in æquationibus sæpius citatis

$$\text{pro } x \text{ poni debet } \frac{\eta u}{\lambda} \pm \frac{\gamma z}{\epsilon}$$

$$\text{\& pro } y \quad \frac{\beta z}{\epsilon} \pm \frac{\beta u}{\lambda}$$

Hinc fiet

$$56. u \left(\frac{\pi \eta + \beta \delta}{\pi \lambda} \right) - z \left(\frac{\pi \gamma + \beta \delta}{\pi \epsilon} \right) = 0,$$

æquatio ad rectam

$$57. u u \pm 2 u z \frac{\lambda}{\epsilon} + z z \frac{\lambda \lambda}{\epsilon \epsilon} - u \frac{\pi \lambda \eta}{\beta \beta} =$$

$$z \frac{\pi \lambda \gamma}{\epsilon \beta \beta} = 0,$$

æquatio ad parabolam ope solitæ reductionis.

$$58. u u \frac{2 u z (\pi \lambda \gamma \eta \pm \delta \beta \epsilon \lambda) +}{\pi \epsilon \eta \eta + \delta \beta \epsilon \epsilon}$$

$$\frac{z z (\pi \lambda \gamma \gamma + \delta \beta \epsilon \lambda \lambda) - u \pi \delta \epsilon \lambda \eta + z \pi \delta \epsilon \lambda \gamma}{\pi \epsilon \eta \eta + \delta \beta \epsilon \epsilon} = 0,$$

æquatio ad ellipsum.

$$59. u u \frac{2 u z (\pi \lambda \gamma \eta \pm \delta \beta \epsilon \lambda) +}{\pi \epsilon \eta \eta - \delta \beta \epsilon \epsilon}$$

$$\frac{z z (\pi \lambda \gamma \gamma - \delta \beta \epsilon \lambda \lambda) + u \pi \delta \epsilon \lambda \eta - \pi \delta \epsilon \lambda \gamma z}{\pi \epsilon \eta \eta - \delta \beta \epsilon \epsilon} = 0,$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros.

$$60. u u \frac{-u z (\pi \lambda \gamma \eta \pm \delta \beta \epsilon \lambda) \pm z z \lambda \gamma \gamma}{\epsilon \epsilon \eta}$$

$$\frac{\pm \kappa \lambda \lambda}{\beta \eta} = 0,$$

æquatio ad hyperbolam inter asymptotos.

61. VII. Tandem etiam origo mutetur, & ea transferatur in O vel N.

$$\text{pro } x \quad \text{ponendum erit } \frac{\eta u}{\lambda} \pm \frac{z \gamma}{\epsilon} = x$$

$$\text{manente } y \quad \text{valore } \frac{\beta z}{\epsilon} \pm \frac{\beta u}{\lambda}$$

Unde evadet

$$62. u \left(\frac{\pi \eta + \beta \delta}{\pi \lambda} \right) - z \left(\frac{\pi \gamma + \beta \delta}{\pi \epsilon} \right) = a = 0$$

æquatio ad rectam

$$63. u u \pm 2 u z \frac{\lambda}{\epsilon} + z z \frac{\lambda \lambda}{\epsilon \epsilon} - u \frac{\pi \lambda \eta}{\beta \beta} \pm$$

$$z \frac{\pi \lambda \gamma}{\epsilon \beta \beta} \pm \frac{\kappa \lambda \lambda}{\beta \beta} = 0$$

æquatio ad parabolam per solitam reductionem

$$64. u u \frac{2 u z (\pi \lambda \gamma \eta \pm \delta \beta \epsilon \lambda) +}{\pi \epsilon \eta \eta + \delta \beta \epsilon \epsilon}$$

$$\frac{z z (\pi \lambda \gamma \gamma + \delta \beta \epsilon \lambda \lambda) - u (\pi \delta \epsilon \lambda \eta + \delta \epsilon \lambda \gamma \pi) +}{\pi \epsilon \eta \eta + \delta \beta \epsilon \epsilon}$$

$$z (\pi \delta \epsilon \lambda \gamma \pi \pm \delta \epsilon \lambda \gamma \pi) +$$

$$\frac{\kappa \pi \lambda (\kappa \pm \delta)}{\eta \pi + \beta \beta \delta} = 0$$

æquatio ad ellipsum.

$$65. u u \frac{2 u z (\pi \lambda \gamma \eta \pm \delta \beta \epsilon \lambda) +}{\pi \epsilon \eta \eta - \delta \beta \epsilon \epsilon}$$

$$\frac{z z (\pi \lambda \gamma \gamma - \delta \beta \epsilon \lambda \lambda) - u (\pi \delta \epsilon \lambda \eta - \delta \epsilon \lambda \gamma \pi) +}{\pi \epsilon \eta \eta - \delta \beta \epsilon \epsilon}$$

$$z (\pi \delta \epsilon \lambda \gamma \pi \pm \delta \epsilon \lambda \gamma \pi) +$$

$$\frac{\kappa \pi \lambda (\kappa \pm \delta)}{\eta \pi + \beta \beta \delta} = 0$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros.

$$66. u u \frac{-u z (\pi \lambda \gamma \eta \pm \delta \beta \epsilon \lambda) \pm z z \lambda \gamma \gamma}{\epsilon \epsilon \eta}$$

$$\pm \frac{\kappa \lambda \lambda}{\eta} \pm \frac{\kappa \lambda \lambda}{\epsilon \eta} \pm \frac{\kappa \lambda \lambda}{\beta \eta} = 0$$

æquatio ad hyperbolam intra asymptotos.

67. Hinc patet æquationem ad rectam semper esse unius dimensionis.

68. Unius pariter dimensionis esse quantitates, quæ in coordinatarum permutatione ponuntur pro primis coordinatis in æquationibus primariis ad lineam quamvis; atque ideo coordinatarum permutationem gradum æquationis ad lineam non mutare.

69.

Dd 3

69. Aequationes ad sectiones conicas semper esse duarum dimensionum.

70. In omni aequatione ad parabolam terminus altissimus constat duobus factoribus reallibus & equalibus. Nam terminus altissimus in Nis. 13. & 24. est $yy = \pm y. \pm y.$

In Nis. 33. & 39. est $\frac{\beta\beta z z}{11} = \pm \frac{\beta z}{1} \pm \frac{\beta z}{1}.$

In Nis. 45. & 51. est $uu = \frac{2\gamma\eta z}{\zeta} + \frac{\gamma\gamma z z}{\zeta\zeta} = (u \pm \frac{\gamma z}{\zeta})(u \pm \frac{\gamma z}{\zeta}).$

In Nis. 57 & 63 est $uu \pm 2uz \frac{\lambda}{\xi} + zz \frac{\lambda\lambda}{\xi\xi} = (u \pm \frac{\lambda z}{\xi})(u \pm \frac{\lambda z}{\xi}).$

71. In omni aequatione ad ellipsim terminus altissimus constat duobus factoribus imaginariis & inaequalibus. Nam terminus altissimus in No. 14 est $xx + \frac{\delta\gamma\gamma}{\pi} = (x + \sqrt{-\frac{\delta\gamma\gamma}{\pi}})(x - \sqrt{-\frac{\delta\gamma\gamma}{\pi}}) = (x + y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})(x - y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}}).$

In Nis. 25. & 28. est $uu + \frac{\delta\gamma\gamma}{\pi} = (u + y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})(u - y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}}).$

In Nis. 34. & 40. est $uu \pm \frac{2\gamma\eta z}{\xi} + zz \frac{(\pi\gamma\gamma + \delta\beta\beta)}{\pi\xi\xi} = (u \pm \frac{\gamma z}{\xi} + \frac{\beta z}{\xi} \sqrt{-\frac{\delta}{\pi}}) \& (u \pm \frac{\gamma z}{\xi} - \frac{\beta z}{\xi} \sqrt{-\frac{\delta}{\pi}}).$

Quandoquidem multiplicatio factorum huc usque allatorum restituit ipsos terminos.

In Nis. 46. & 52. est $uu = \frac{2\delta\gamma\zeta\eta z + \delta\gamma\gamma z z}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta}.$

cujus factores

$u + \frac{z(\pm\delta\gamma\zeta + \beta\gamma\sqrt{-\delta\pi})}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta},$
 & $u + \frac{z(\mp\delta\gamma\zeta - \beta\gamma\sqrt{-\delta\pi})}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta}$

Facta enim multiplicatione horum factorum, & deletis delendis, inuenimus

$$uu = \frac{2\delta\gamma\zeta\eta z}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta} + \frac{\delta\pi\beta\beta\gamma\gamma z z + \delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta z z}{(\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)^2}.$$

Est autem

$$\frac{\delta\pi\beta\beta\gamma\gamma z z + \delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta z z}{(\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)^2} = \frac{\delta\gamma\gamma z z (\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)}{(\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)^2}$$

hoc est

$$\frac{\delta\gamma\gamma z z}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta}.$$

In Nis. 58. & 64. terminus altissimus est

$$uu = \frac{-2uz(\pm\pi\lambda\gamma\eta + \delta\beta\beta\lambda) + z z(\pi\lambda\gamma\gamma + \delta\beta\beta\lambda\lambda)}{\pi\pi\eta\eta + \delta\beta\beta\pi\pi}$$

qui resolvitur in factores

$$u = \frac{-z(\pm\pi\lambda\gamma\eta + \delta\beta\beta\lambda + \beta\lambda\sqrt{(-\pi\delta\eta\eta + 2\pi\delta\eta\gamma - \pi\delta\gamma\gamma)})}{\pi\pi\eta\eta + \delta\beta\beta\pi\pi}$$

&

$$u = \frac{-z(\mp\pi\lambda\gamma\eta + \delta\beta\beta\lambda - \beta\lambda\sqrt{(-\pi\delta\eta\eta + 2\pi\delta\eta\gamma - \pi\delta\gamma\gamma)})}{\pi\pi\eta\eta + \delta\beta\beta\pi\pi}$$

Facta enim multiplicatione & deletis delendis, manebit

$$uu = \frac{-2uz(\pm\pi\lambda\gamma\eta + \delta\beta\beta\lambda) + z z(\pi\pi\eta\eta\lambda\gamma\gamma + \delta\delta\beta\beta\lambda\lambda\lambda\lambda + \pi\delta\eta\eta\beta\beta\lambda\lambda + \pi\delta\beta\beta\eta\eta\lambda\gamma\gamma)}{(\pi\pi\eta\eta + \delta\beta\beta\pi\pi)^2}$$

Est autem

$$\frac{\pi\pi\eta\eta\lambda\gamma\gamma + \delta\delta\beta\beta\lambda\lambda\lambda\lambda + \pi\delta\eta\eta\beta\beta\lambda\lambda + \pi\delta\beta\beta\eta\eta\lambda\gamma\gamma}{\pi\pi\eta\eta + \delta\beta\beta\pi\pi}$$

Factum ex

$$\pi\lambda\gamma\gamma + \delta\beta\beta\lambda\lambda \text{ in } \pi\pi\eta\eta + \delta\beta\beta\pi\pi.$$

Quare

Quare dividendo numeratorem & denominatorem coefficientis zx , inveniemus ipsum terminum altissimum ellipticos.

72. In omni æquatione ad hyperbolam terminus altissimus constat duobus factoribus reallibus & inæqualibus. Nam terminus altissimus in

$$\text{No. 15. est } xx - \frac{\delta y y}{\pi} = (x + y \sqrt{\frac{\delta}{\pi}})(x - y \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}).$$

In No. 16 est $xy = x \cdot y$.

$$\text{In Nis. 26. \& 29. est } uu - \frac{\delta y y}{\pi} = (u + y \sqrt{\frac{\delta}{\pi}})(u - y \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}).$$

In No. 27. est $uy = u \cdot y$.

In Nis. 35. & 41. est $uu \pm \frac{2\gamma u x}{s} +$

$$\frac{zx(\pi\gamma\gamma - \delta\beta\beta)}{\pi\pi}$$

qui resolvitur in factores

$$u \pm \frac{\gamma z}{s} + \frac{\beta z}{s} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}, \& u \pm \frac{\gamma z}{s} - \frac{\beta z}{s} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \text{ vel } \\ u \frac{(\pm \gamma + \beta \sqrt{\frac{\delta}{\pi}})}{s} \& u \frac{(\pm \gamma - \beta \sqrt{\frac{\delta}{\pi}})}{s}$$

In Nis. 36. & 42. est $\frac{\beta u x}{s} \pm \frac{\beta \gamma x x}{ss} =$

$$(u \pm \frac{\gamma z}{s}) \cdot \frac{\beta z}{s}$$

In Nis. 47. & 53 est $uu \frac{\pm 2\delta\gamma\zeta u x - \delta\gamma\gamma z x}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta}$

cujus factores

$$u \frac{\pm z(\pm \delta\gamma\zeta + \beta\gamma\sqrt{\delta\pi})}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta} \& \\ u \frac{\pm z(\pm \delta\gamma\zeta - \beta\gamma\sqrt{\delta\pi})}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta}$$

Siquidem facta multiplicatione, & deletis delendis, superest

$$uu \frac{\pm 2\delta\gamma\zeta u x}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta} + \frac{zx(\delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta - \pi\delta\beta\beta\gamma\gamma)}{(\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta)^2}$$

& est

$$\delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta - \pi\delta\beta\beta\gamma\gamma = -\delta\gamma\gamma(-\delta\zeta\zeta + \pi\beta\beta)$$

unde redit factum Num. 47. & 53.

In No. 48.

$$\text{est } \frac{\beta u x}{\gamma} \mp \frac{\beta\zeta u u}{\gamma\gamma}$$

cujus factores

$$\frac{\beta u}{\gamma}, \& z \mp \frac{\beta u}{\gamma}.$$

In No. 54. est $\frac{\beta u x}{\gamma} \mp \frac{\beta\zeta u u}{\gamma\gamma}$ pariter

cujus factores

$$\frac{\beta u}{\gamma}, \& z \mp \frac{\beta u}{\gamma}$$

In Nis. 59. & 65. est

$$uu - \frac{2ux(\mp \pi\epsilon\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\epsilon\lambda) + zx(\pi\lambda\gamma\gamma - \delta\beta\beta\lambda\lambda)}{\pi\epsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\epsilon\epsilon}$$

cujus factores sunt

$$u - \frac{z(\mp \pi\epsilon\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\epsilon\lambda + \beta\epsilon\lambda(\eta - \gamma)\sqrt{\pi\delta})}{\pi\epsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\epsilon\epsilon}$$

atque

$$u - \frac{z(\pi\epsilon\lambda\gamma\eta - \delta\beta\beta\epsilon\lambda - \beta\epsilon\lambda(\eta - \gamma)\sqrt{\pi\delta})}{\pi\epsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\epsilon\epsilon}$$

Quod probabitur ut supra, facta multiplicatione, deletis delendis, & reducendo coefficientem fractum ipsius zx , cujus fractionis denominator erit $(\pi\epsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\epsilon\epsilon)^2$.

In No. 60. & 66. est

$$uu - \frac{ux(\pm \epsilon\lambda\eta \pm \beta\epsilon\lambda\gamma) + zx\beta\lambda\gamma}{\beta\epsilon\epsilon\eta}$$

vel

$$uu - \frac{ux(\mp \lambda\eta \pm \lambda\gamma)}{\epsilon\eta} + \frac{zx\lambda\lambda\gamma}{\epsilon\eta}$$

cujus factores sunt

$$u - \frac{\lambda\gamma x}{\epsilon\eta} \& u - \frac{\lambda\pi}{s}$$

73. Aequatio gradus m , in qua indeterminatae sunt x & y , est completa, quando in ea sunt potestates m ; $m-1$; $m-2$; ... 1, tum ipsius x , tum ipsius y ; omnia facta $x^{m-1}y$; $x^{m-1}y^2$; &c; $x^m y^{m-1}$; $x^2 y^{m-2}$ &c; & factum ex puris determinatis, ut sponte patet.

74. Ideo aequationes ad rectam & ad sectiones conicas, quas invenimus Nis. 62. 63. 64. 65. & 66. sunt completæ.

75. Datis lineis inveniuntur aequationes; hoc est, si rectæ, parabolæ, ellipseos, & hyperbolæ natura exprimatæ aequatione, hæc aequatio erit aliqua ex iis quas assignavimus pro quaque linea. Nunc dico aequationes assignatas pertinere ad lineas quibus eas tribuimus; id est, si hæ aequationes construuntur lineis, singulas construui lineis quas assignavimus. Nam

Aequatio unius dimensionis, reducendo quantitates determinatas ad simpliciores expressionem, revocatur ad formam.

$$\frac{mx}{n} - \frac{py}{q} \pm r = 0.$$

quæ auferendo fractiones, & transponendo, fit

$$mqx \pm nqr = npy.$$

unde educitur analogia $np : mq :: x \pm \frac{nr}{m} : y$.

Datur autem datarum np & mq ratio; ergo & indeterminatarum $x \pm \frac{nr}{m}$ & y ; prior enim quantitas complexa variabilis est ob variabilem x . Sed hæ indeterminatae sunt unius dimensionis, atque ideo linea recta terminantur: ergo illarum locus est recta.

76. Aequationes indeterminatae duarum dimensionum revocantur ad formulam completam

$$yy + \frac{2mxy}{n} + 2ry + \frac{pxx}{q} + 2sx + tt = 0$$

unde deducitur analogia

$$p.q :: 2ry + 2sx + tt : \frac{qyy}{p} + \frac{2mqxy}{np} + xx$$

Signorum enim rationem nunc non habemus.

Posteriores termini hujus proportionis constant singuli duobus factoribus, & datur productorum ratio. Ergo hæc aequatio pertinet ad aliquam e sectionibus conicis.

77. In hac demonstratione subsumimus posse describi lineam rectam & sectiones conicas propositis aequationibus convenientes. Si enim lineæ descriptæ essent, demonstrandæ manerent conversæ præcipuarum propositionem ad has lineas pertinentium. Nempe

Si recta linea AE positione detur, & in ea puncta A & D; atque ad rectam AE datur punctum D sub dato angulo ducatur DB recta magnitudine data, & per A & B indefinita AC, & per quodvis punctum F in AE agatur FG ipsi DB parallela, & fit ut AD ad DB sic AF ad FG, tanget punctum G rectam AC. TAB. K. Fig. 2.

Si recta RQ; ST positione datæ sibi occurrant in P, & recta RP magnitudine detur, describatur autem diametro PQ, perametro RP, & vertice P parabola PAB rectam ST tangens in P, & agatur quavis recta DB ipsi PS parallela, & fuerit quadratum ex BD æquale rectangulo sub parametro RP & abscissa PD, erit punctum B in descripta parabola. TAB. K. Fig. 7.

Similia dicantur de reliquis sectionibus conicis.

Hæ autem propositiones facile demonstrantur per deductionem ad absurdum; quo pacto etiam facile demonstratur hæc propositio generalis.

78. Si data sit relatio inter abscissas & ordinatas, & linea transeat per extrema omnium ordinatarum, alia linea per eadem extrema transire nequit. Aut enim duæ lineæ prorsus congruent, & tunc duæ non erunt; aut alicubi different, & tunc eidem abscissæ respondent duæ ordinatæ inæquales; quod aut fieri non potest, aut si fieri potest per leges, quibus determinatur relatio inter abscissas & ordinatas, prior linea transibit per extrema ordinatarum inæqualium, & sic duæ lineæ congruent.

Non semper quidem ex datis legibus & abscissa, potest determinari ordinata; sed intelligitur semper futurum esse ut hæc detur illis datis. Recte veteres notarunt discrimen inter ea quæ intelliguntur, & quæ dicebant *gnorima*, & ea quæ effici possunt, quæ dicebant *porima*, ut & inter ea quæ per se possibile, sed in potestate nostra non sunt, quæ vocabantur *porista*, & ea quæ fieri non possunt, quæ vocabantur *apora*. Vide *Marini præfationem ad Euclidis DATA*. Hæc observatio mihi viam aperuit ad restituenda *Euclidis PORISMATA*.

Superest igitur ut ostendamus quomodo lineæ datis aequationibus convenientes describi possint. Ubi observandum.

79. Has lineas transire debere per extrema ordinarum tum positivarum tum negativarum, respondentium abscissis tum positivis tum negativis, ubi rerum natura id patitur: quod melius exempla explicabunt.

80. Signa esse negligenda ubi tantum queritur rectarum ratio, nam signa indicant positionem, quæ rationem non mutat; sed signorum rationem esse habendam, quando præter rationem queritur positio.

TAB. L.
Fig. 5.

81. Positis quæ No. 21. abscissa x evanescit quando ordinata cadit in ipsa recta ST; nam positio ordinatæ definit magnitudinem abscissæ incipientis a puncto P, & in hac hypothesi ea magnitudo nulla est.

82. Pariter ordinata y evanescit ubi locus æquationis fecat rectam RQ; nam magnitudo ordinatæ definit intervallum puncti in loco a puncto respondente in linea abscissarum QR; quod intervallum nullum est quando locus occurrit rectæ QR; tunc ergo magnitudo ordinatæ pariter nulla est.

De locis ad rectam

83. Æquatio generalis unius dimensionis inventa No. 75., recipit quatuor signorum diversitates.

$$1^o. x + \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = 0$$

$$2^o. x - \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = 0$$

$$3^o. x + \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = 0$$

$$4^o. x - \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = 0$$

Nam harum, quæ addi possent,

$$\frac{nr}{m} - x + \frac{ny}{m}, \text{ \& } \frac{nr}{m} - x - \frac{ny}{m} = 0,$$

prima est ipsa secunda mutata per translationem primi membri in secundum, & altera est quarta similem mutationem passa. Hæ formulæ construuntur eodem pacto, aliquantisper mutata rectarum positione, pro signorum diversitate, & facile præbent simpliciores formulas.

84. Pro prima $x + \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = 0$, pone $x = 0$, manet $\frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = 0$, vel $r = y$,

Tom. I.

quare locus occurrit rectæ ST in K, ubi TAB. L. PK = r & punctum K sumi debet versus S, Fig. 5.

quia valor y est positivus. Nunc pone $y = 0$, manet $x + \frac{nr}{m} = 0$, vel $x = -\frac{nr}{m}$; ergo locus hujus æquationis occurrit rectæ QR in F,

ubi PF = $\frac{nr}{m}$ & quidem ab P versus R, quia valor ipsius x negativus est. Invenietur autem punctum F, sumendo PG = m ex TS a puncto P versus S, & PH = n ex RQ ab P versus R, jungendo HG, & ei per K ducendo parallelam KF; est enim PK = r .

Producta igitur indefinite recta KF, ea recta erit locus æquationis propositæ. Nam age BD ipsi ST parallelam; quia est GP (m) ad PH (n) ut PK (r) ad PF, est PF = $\frac{nr}{m}$;

$$\text{quare FD} = \frac{nr}{m} + x.$$

Est autem HP (n) ad PG (m), ut FD ($\frac{nr}{m} + x$) ad BD (y); ergo $ny = nr + mx$;

$$\text{\& } x + \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = 0.$$

Hic pars indefinita KC est locus pro ordinatis positivis quæ respondent abscissis positivis; pars finita KF est locus pro ordinatis positivis quæ respondent abscissis negativis, & pars indefinita FA pro ordinatis negativis quæ respondent abscissis pariter negativis.

$$85. \text{ Si æquatio esset } x + \frac{nr}{m} - y = 0;$$

posito $y = 0$, maneret $x + \frac{nr}{m} = 0$, ut in No. 84, & eadem rediret constructio, qua inveniretur punctum F.

Sed posito $x = 0$, maneret $\frac{nr}{m} - y = 0$, unde punctum K determinaretur querendo quartam proportionalem post m ; n ; & r .

86. Sed proposita æquatione $x + r - y = 0$, puncta F & K invenirentur ponendo PF = PK = r .

$$87. \text{ Secunda formula erat } x - \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = 0;$$

in qua si ponatur $x = 0$, manebit $-\frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = 0$, TAB. L. quare sumi debet PK = r versus T quia va- Fig. 6. lor y est negativus. Sed si ponatur $y = 0$,

manet $x = \frac{nr}{m}$, quare punctum F determinabitur abscindendo PG = m ; PH = n ; &

Ec

qui-

quidem a P versus Q, quia valor ipsius x positivus est, & iunctæ GH ducendo parallelam KF.

Acta igitur per F & K recta indefinita AC; hæc erit locus æquationis propositæ, quod demonstratur ut supra.

Hic pars indefinita FC pertinet ad ordinatas & abscissas positivas; pars finita FK ad ordinatas negativas & ad abscissas positivas; pars indefinita KA ad ordinatas & ad abscissas negativas.

88. Si æquatio esset $x - r - y = 0$, puncta F & K invenirentur ponendo PF ab P versus Q, quia valor ipsius x est positivus, & PK ab P versus T, quia valor ipsius y est negativus, singulas $= r$.

TAB. L. Fig. 7. 89. Si ea esset $x - y = 0$, angulus SPQ bifecandus esset recta AC quia tunc $x = y$.

TAB. L. Fig. 8. 90. Si tandem $x - \frac{ny}{m} = 0$, abscindatur ex P in Q, pars PH $= n$, per H agatur HK parallela ipsi ST & $= m$, & per P & K agatur indefinita AC, ea erit locus æquationis; quia PH (n) ad HK (m), ut PD (x) ad DB (y) & $x = \frac{ny}{m}$; & pars indefinita PC respondet ordinatis & abscissis positivis, PA ordinatis & abscissis negativis.
Æquationes Num. 89 & 90. oriuntur tum ex prima tum ex secunda formula:

91. Veniamus ad tertiam $x + \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = 0$:

TAB. L. Fig. 9. posito $y = 0$ rursus erit $x + \frac{nr}{m} = 0$, & PF invenietur ut No. 84.

Sed posito $x = 0$, manet $r = -y$, quare PK $= r$ sumi debet ex P in T.

Indefinita AC erit locus æquationis, & pars indefinita KC spectabit ad abscissas positivas & ordinatas negativas; pars finita KF ad ordinatas & abscissas negativas; & pars indefinita FA ad ordinatas positivas & abscissas negativas.

92. Si æquatio esset $x + r + y$, tunc PF $=$ PK $= r$ sumendæ essent versus R & T, ob negativo valores tum x , tum y .

TAB. L. Fig. 10. 93. Quarta & ultima formula est $x - \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = 0$, in qua si ponatur $y = 0$, erit $x = \frac{nr}{m}$, & invenietur ut in No. 87; si vero po-

natur $x = 0$, erit $y = r$, & PK $= r$ sumi debet ex P versus S.

Indeterminata AC acta per F & K puncta, erit locus quæsitus; pars indefinita FC serviet abscissis positivis & ordinatis negativis; pars terminata FK ordinatis & abscissis positivis; pars indefinita KA ordinatis positivis & abscissis negativis.

94. Si æquatio esset $x - \frac{nr}{m} + y$; determinaretur punctum F ut No. 93; & punctum K ab P versus S, ob valorem ipsius y positivum, quærendo quantum post m ; n ; & r .

95. Si ea esset $x - r + y = 0$: sumendæ essent PF $=$ PK $= r$, ad partes Q & S, ob valores ipsarum x & y positivos.

96. Si tandem haberetur $x + \frac{ny}{m} = 0$, sumi deberet vel PH $= +n$; & per F agenda HK $= -m$: vel Ph $= -n$, & per h agenda hK $= +m$, indefinita AC acta per P; K esset locus petitus. TAB. L. Fig. 11.

De locis ad sectiones conicas.

97. Æquatio indeterminata Ni. 76. habebat hanc formam

$$yy \dots \frac{2kxy}{l} \dots 2my \dots \frac{xxx}{p} \dots 2qx \dots rr = 0$$

Ubi puncta sunt pro signis, quæ possunt esse positiva vel negativa in singulis terminis. Ad hanc æquationem pervenimus permutatione ordinarum, ex æquationibus simplicissimis ad sectiones conicas. Rursus ex æquatione maxime composita pervenimus ad simplicem apta coordinatarum permutatione. Quænam vero sit hæc apta permutatio, duobus præcipue modis detegitur; quorum primus perficitur per extractionem radicis ut fit in æquationibus quadraticis affectis, tanquam si una esset incognita x vel y , si utriusque quadratum ad sit in æquatione componenda, (quod accidit in nostra maxime composita), vel ejus incognitæ cujus adest quadratum in æquatione proposita, si unicum sit, quod accidere potest in æquationibus peculiaribus. Nos quæremus valorem ipsius y . Erit ergo

$$y = \dots \frac{kx}{l} \dots m + \sqrt{xx \left(+ \frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p} \right) \dots}$$

$$+ \left(\frac{2km}{l} \dots 2q \right) + mmm \dots rr)$$

Pone

$y =$

$$y = u + z$$

& quidem

$$u = \dots \frac{kx}{l} \dots m$$

atque

$$z = \sqrt{xx \left(+ \frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p} \right) \dots x \left(2 \frac{km}{l} \dots 2q \right) + mm \dots rr}$$

Ut autem penitus intelligantur ea, quæ dicenda sunt, ad mentem revocemus sequentia desumpta e conicorum doctrina.

98. Diameter & ordinata comprehendere possunt quemvis angulum vel acutum, vel rectum, vel obtusum.

99. Quapropter, si y exponat ordinatas, quæcunque linea dicta fuerit y , ea erit vera curvæ ordinata; supererit quærenda diameter ad eam pertinens.

100. Diameter ordinatas bisecat, & quævis alia recta eas dividit in duas partes inæquales.

TAB. M.
Fig. I.

101. Si ergo sit QR curvæ diameter ad quam spectant ordinatæ parallelæ ad rectam ST, quarum una est BE, erit BD = DE; harum valores ex æquatione depropti, erunt æquales, sed alter positivus alter negativus.

102. Si vero eidem ordinatæ BE in H occurrat alia recta XZ diametrum RQ secans in F, inæquales erunt BH; & HE, & earum differentia erit HD.

103. Quare, si curva relata fuerit in æquatione ad coordinatas PH, HB, valor tum rectæ HB, tum rectæ HE continebit partem BD aut DE, cujus valor debet esse duplex, & DH cujus valor est simplex & continetur æquatione ad rectam.

104. Abscindantur ergo more solito x ab XZ, incipiant a puncto P, & positive tendant in Z; sed indeterminatæ y abscondantur ab ST, inciant a puncto P & positive tendant in S. Æquatio ad rectam

$$u = \dots \frac{kx}{l} \dots m$$

indicabit positionem diametri RQ, & constructur per Num. 84. si sit $u = \frac{kx}{l} + m$; per

Num. 87. si sit $u = \frac{kx}{l} - m$; per Num. 91.

si sit $u = -\frac{kx}{l} - m$; & per Num. 93, si

fit $u = -\frac{kx}{l} + m$. His numeris addenda

sunt corollaria contenta in aliis numeris pertinentibus ad æquationes ad rectam. Hic autem diximus u quod ibi y .

105. Ponamus ergo locum æquationis $u = \dots \frac{kx}{l} \dots m$ esse rectam QR; id est in nostra Figura esse PG = k ; PK = l ; PI = m ; erit BD = DE = z , quæ incipient a puncto I & positive tendent in S.

Sed ubi curva occurrit diametro, ibi ordinata nulla est. Igitur, ut invenias verticem, pone $z = 0$; habebis

$$\sqrt{xx \left(+ \frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p} \right) \dots 2x \left(\frac{km}{l} \dots q \right) + mm \dots rr} = 0$$

quæ, quadrando, & liberando xx a coefficiente, fiet æquatio quadratica determinata

$$+xx \dots \frac{2klmpx \dots 2llpqx + llmmp \dots llpr}{+pkk \dots llr} = 0$$

cujus radix, extracta & constructa ut solet, dabit unum punctum, in quo curva concurrat cum diametro, si in hac radice quantitas radicalis nulla est; aut duo, si adest quantitas radicalis possibilis; aut nullum, si quantitas radicalis est imaginaria.

Sola parabola diametro occurrit in uno puncto, reliquæ in duobus punctis; & præterea hyperbola diametro secundæ non occurrit: quæ recte congruunt cum æquationibus ad has curvas supra inventis No. 97.

106. Nunc tres casus distinguendi sunt.

Primo, ipsius xx coefficientis $+ \frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p}$

evanescit.

Secundo, is est negativus.

Tertio, is est positivus.

Coefficiens $+ \frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p} = 0$, dat $+ \frac{kk}{ll} = \frac{n}{p}$;

Tunc ergo æquatio generalis evadit.

$$yy \dots \frac{2kxy}{l} \dots 2my + \frac{kkxx}{ll} \dots 2qx \dots rr = 0$$

Ecce

Hu-

Hujus æquationis altissimus terminus $yy = \frac{2kxy}{l} + \frac{kxx}{l}$ habet duos divisores reales & æquales $y = \pm \frac{kx}{l}$; & $y = \pm \frac{kx}{l}$; quare ea est ad parabolam.

107. Tunc autem, delendo in quantitate sub signo ipsam $+\frac{kxx}{l} - \frac{nxx}{p}$, quæ nihilo est æqualis, manet

$$z = \sqrt{2x \left(\frac{km}{l} \dots q \right) + mm \dots rr}$$

& ubi hæc est nihilo æqualis, id est ubi curva occurrit diametro QR, invenitur

$$x = \frac{lmm \dots lrr}{2km \dots 2ql}$$

quam abscindes ex recta XZ a puncto P versus Z, si valor ipsius x positivus est, & versus X, si is est negativus. Sit ex. gr. positivus, & æqualis rectæ Pp; age per punctum p indefinitam pA ipsi ST parallelam, & diametro QR occurrentem in A; erit A vertex parabolæ, quam ideo tanget in A recta pA.

108. Sed una coordinatarum est $z = BD$; altera est $x = PH$, quæ non concurrunt, contra hypothesim. Oportet igitur ut in æquatione ponamus ID (quam dicemus $= t$) pro $PH = x$; quod semper est faciendum, & quod semper sic perficietur.

Quoniam datur triangulum PGK, dic GK $= f$; erit PK (l) ad KG (f) ut PH (x) ad DI (t); quare $x = \frac{lt}{f}$; quo valore ipsius x posito in valore ipsius z , quadrato, fiet

$$zz = 2t \left(\frac{km \dots ql}{f} \right) + mm \dots rr$$

& est

$$2t \left(\frac{km \dots ql}{f} \right) + mm \dots rr =$$

$$\left(t + \frac{fmm \dots frr}{2km \dots 2ql} \right) \left(\frac{2km \dots 2ql}{f} \right)$$

& quia PK (l) ad KG (f) ut Pp ($\frac{lmm \dots lrr}{2km \dots 2ql}$)

ad IA; erit IA $= \frac{fmm \dots frr}{2km \dots 2ql}$; & $zz = AD$

$\left(\frac{2km \dots 2ql}{f} \right)$ quapropter erit $\frac{2km \dots 2ql}{f}$ valor parametri.

Igitur hac parametro, vertice A, diametro AQ describe parabolam, ea erit locus æquationis propositæ, quod facile demonstrabis retro legendo analyticos vestigia ex primaria parabolæ proprietate, *rectangulum sub parametro & abscissa est æquale quadrato ordinatæ*. Nam; servatis nominibus, erit

$$zz = \left(t + \frac{fmm \dots frr}{2km \dots 2ql} \right) \left(\frac{2km \dots 2ql}{f} \right) = 2t \left(\frac{km \dots ql}{f} \right) + mm \dots rr$$

Est autem GK (f) ad KP (l) ut ID (t) ad PH (x); quare $\frac{fx}{l} = t$

ergo

$$zz = 2x \left(\frac{km \dots ql}{l} \right) + mm \dots rr$$

Pariter est GP (k) ad PK (l) ut IP (m) ad PF $= \frac{lm}{k}$, & FH $= \frac{lm}{k} + x$; atque KP

(l) ad PG (k) ut FH ($\frac{lm}{k} + x$) ad HD $= m +$

$\frac{kx}{l}$; & HB $= y = z + m + \frac{kx}{l}$; atque ideo

$$y - m - \frac{kx}{l} = z$$

&

$$yy - 2my - 2 \frac{kxy}{l} + mm + 2 \frac{kmx}{l} + \frac{kxx}{l} = zz$$

Unde, substituendo pro zz valorem inventum, & delendo æqualia, restituetur æquatio proposita. Nihil enim morari debet signorum diversitas, quæ oritur a positione rectarum Pp, IA &c.

109. Si valor parametri est negativus, tum curva se extendit ad partes contrarias; nam mutato valore ipsius t parameter fiet positiva.

Idem etiam detegi potest, querendo an curva occurrat rectæ TS, id est ponendo in æquatione $x = 0$; manet enim

$$yy - 2my - 2 \frac{kxy}{l} + mm + 2 \frac{kmx}{l} + \frac{kxx}{l} = 0$$

id

id est

$$y = \dots m \pm \sqrt{+mm \dots rr}$$

si hæc quantitas radicalis est possibilis, sume $IL = IM = \sqrt{mm \dots rr}$, curva occurret rectæ TS in L & M; atque ideo, si ejus vertex est ultra punctum I versus R, ea se extendet versus Q, & versus R si vertex est ultra punctum I versus Q.

Ubi vero quantitas radicalis est impossibilis, tum curva nusquam occurret rectæ TS, & se extendet versus Q, si vertex est ultra punctum I versus Q; secus autem versus R.

110. Secundo Quando coefficientis $\frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p}$,

est negativus, hoc fit quia $\frac{n}{p}$ est quantitas negativa & major ipsa $\frac{kk}{ll}$. Sed in extractione radicis quadraticæ ex æquatione proposita, terminus $\frac{xxx}{p}$ translatus fuit in contrarias partes, & sic translatus est negativus; erat ergo positivus æquatione proposita, quæ idcirco erat

$$yy \dots \frac{2kxy}{l} \dots 2my + \frac{xxx}{p} \dots 2qx \dots rr = 0$$

Hujus terminus altissimus $yy \pm \frac{2kxy}{l} + \frac{xxx}{p}$ duos habet factores inæquales

$$y \pm \frac{kx}{l} + x\sqrt{\left(\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p}\right)}$$

&

$$y \pm \frac{kx}{l} - x\sqrt{\left(\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p}\right)}$$

qui sunt imaginarii, quia ponitur $\frac{kk}{ll}$ minor

quam $\frac{n}{p}$. Ergo hæc æquatio pertinet ad ellipticam. Igitur, determinata positione diametri RQ per æquationem $u = \frac{kx}{l} \dots m$, ut N^o. 105., pone $z = 0$, id est

$$xx\left(+\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p}\right) \dots 2x\left(\frac{km}{l} \dots q\right) + mm \dots rr = 0$$

aut, ponendo quantitatem positivam

$$n - \frac{kkp}{ll} = d; \text{ atque ideo } \frac{kk}{ll} - \frac{n}{p} = -\frac{d}{p};$$

$$\dots m \dots \frac{lq}{k} = g \text{ \& } \dots km \dots lq = gk \text{ atque}$$

$$\dots \frac{km}{l} \dots q = \frac{gk}{l}, \text{ \& } +mm \dots rr = hh, \text{ erit}$$

$$-\frac{dxx}{p} \dots \frac{2gkx}{l} \dots hh = 0$$

id est

$$xx = \dots \frac{2gkpx}{dl} \dots \frac{bbp}{d}$$

&

$$x = \dots \frac{gkp}{dl} \pm \sqrt{\left(\frac{ggkpp}{d^2ll} \dots \frac{bbp}{d}\right)}$$

Quare abscinde a recta XZ partem Po = $\frac{gkp}{dl}$ ab P versus Z, si hic valor est positivus, ut fecimus in figura, secus vero ab P versus X; & hinc inde a puncto o sume $op = on = \sqrt{\left(\frac{ggkpp}{d^2ll} \dots \frac{bbp}{d}\right)}$, & per puncta o; p; n; age ipsi ST parallelas oO; pA; nN diametro QR occurrentes in O; A; N; erit O centrum ellipseos, ejus vertexes A & N; atque ideo AN diameter.

Jam fit, ut in N^o. 108., $ID = t$; erit $x = \frac{lt}{f}$, quo valore substituto in

$$xx = -\frac{dxx}{p} \dots \frac{2gkx}{l} \dots hh$$

fiet

$$xx = -\frac{dllt}{fp} \dots \frac{2gkt}{f} \dots hh$$

aut

$$\frac{ffpzz}{dll} = \frac{ffbbp}{dll} \dots \frac{2fgkpt}{dll} - tt$$

est autem

$$\frac{ffbbp}{dll} \dots \frac{2fgkpt}{dll} - tt$$

factum ex

E c 3

$\frac{f}{l}$

$$\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right) - \frac{fgkp}{dl}} + t$$

in

$$\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right) + \frac{fgkp}{dl}} - t$$

id est rectangulum sub AD; DN; quia invenimus, ut supra $IO = \frac{fgkp}{dl}$; AO = ON =

$$\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right)}; \text{ atque ideo } AI =$$

$$\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right) - \frac{fgkp}{dl}}; \text{ \& } AI + ID =$$

$$\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right) - \frac{fgkp}{dl}} + t, \text{ \& } ND =$$

$$NO + OI - ID = \frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right) + \frac{fgkp}{dl}} - t.$$

Est autem ex æquatione rectangulum sub AD; DN, ad quadratum DB (zz) ut $\frac{ffp}{ddl}$ ad $\frac{ddl}{ddl}$, & ex ellipseos natura debet esse ut quadratum semi-diametri AO ad ad quadratum semi-diametri Oa; ergo $\frac{ff}{ll} \left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right)$ ad quadratum Oa ut $\frac{ffp}{ddl}$ ad $\frac{ddl}{ddl}$, & quadratum Oa = $\frac{d}{p} \left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right)$

Idem potest reperiri considerando semi-diametrum Oa esse valorem ipsius x in ipso centro, id est quando $t = IO = \frac{fgkp}{dl}$, quo valore posito in

$$zz = -\frac{dllt}{ffp} \dots \frac{2gkt}{f} \dots bb$$

invenitur

$$zz = -\frac{dllffggkkpp}{ddiffp} \dots \frac{2gkfgkp}{dff} \dots bb =$$

$$-\frac{ggkkp}{dl} \dots \frac{2ggkkp}{dl} \dots bb = \frac{ggkkp}{dl} \dots bb,$$

nam si æquatio est

$$zz = -\frac{dllt}{ffp} + \frac{2gkt}{f} \dots kb$$

est

$$IO = + \frac{fgkp}{dl}$$

&

$$+ \frac{2gkt}{f} = + \frac{2ggkkp}{dl}$$

si vero æquatio est

$$zz = -\frac{dllt}{ffp} - \frac{2gkt}{f} + bb$$

ultimus enim terminus debet esse positivus, ne valor ordinatæ z sit imaginarius; tunc est

$$IO = -\frac{fgkp}{dl}$$

& rursus

$$- \frac{2gkt}{f} = + \frac{2ggkkp}{dl}$$

Est autem

$$\frac{ggkkp}{dl} \dots bb = \frac{d}{p} \left(\frac{ggkkpp}{ddl} \dots \frac{bbp}{d}\right)$$

Conveniunt ergo duo valores inventi pro quadrato semi-diametri secundæ.

Sed ubi habetur $-\frac{2gkt}{f}$, est etiam

$$zz = -\frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} + bb$$

atque ideo, dum ponitur $z = 0$,

$$x = -\frac{gkp}{dl} \pm \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} + \frac{bbp}{d}\right)}$$

& est

$$\sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} + \frac{bbp}{d}\right)} \text{ major quam } \frac{gkp}{dl}$$

quia, ut inveniatur quantitas radicalis, ipsius $\frac{gkp}{dl}$ quadrato alia quantitas est addenda, & aggregati cuerenda radix; ergo op major quam oP , & OA major quam Oa. Tunc autem est

$$\frac{ffbbp}{ddl} - \frac{2fgkpt}{f} - t$$

fa-

factum ex

$$\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{g g k k p p}{d d l l} + \frac{h h p p}{d} \right)} - \frac{f g k p}{d l l} = z$$

$$\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{g g k k p p}{d d l l} + \frac{h h p p}{d} \right)} + \frac{f g k p}{d l l} = z$$

111. Si quantitas radicalis quæ determinat diametrum, esset imaginaria, problema involveret aliquid absurdi; nam ellipsis diametris omnibus occurrit in duobus punctis.

112. Si esset $ffp = d l l$, & angulus PIF obliquus, diametri ellipsos fierent æquales, & æquatio evaderet

$$z z = h h \dots \frac{2 g^2 t}{f} - z z.$$

113. Si præterea angulus PIF esset rectus, ellipsis degeneraret in circulum, & esset $l = f + k k$.

114. Tercio coëfficiens $\frac{k k}{l l} \dots \frac{n}{p}$ est positivus, quia vel $\frac{n}{p}$ est quantitas positiva, vel negativa quidem sed minor quam $\frac{k k}{l l}$. Tunc factores inventi No. 110. pro altissimo termino æquationis generalis, sunt inæquales & reales, cum $\sqrt{\left(\frac{k k}{l l} + \frac{n}{p} \right)}$ sit realis. Igitur æquatio pertinet ad hyperbolam. Rursus $z = \dots \frac{k x}{l} \dots m$ construetur ut No. 105; & facta substitutione quam fecimus pro ellipsi in valore ipsius z , (observando nunc esse $\frac{h h p p}{l l} - n = d$, & quantitatem positivam,) fiet

$$z = \frac{+ d x x}{p} \dots \frac{2 g k x}{l} \dots h h.$$

ex qua, ubi $z = 0$, inveniatur valor idem quem invenimus in ellipsi pro x , qui idcirco construetur ut supra; & reperto $x = \frac{l t}{f}$, incidemus in

$$\frac{f f p z z}{d l l} = \frac{f f h h p p}{d l l} \dots \frac{2 f g k p t}{d l l} + z z$$

& est

$$z z = \frac{2 f g k p t \dots f f h h p p}{d l l}$$

factum ex

$$z = \frac{f g k p}{d l l} + \frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{g g k k p p}{d d l l} \dots \frac{h h p p}{d} \right)}$$

in

$$z = \frac{f g k p}{d l l} - \frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{g g k k p p}{d d l l} \dots \frac{h h p p}{d} \right)}$$

id est rectangulum sub AD; DN, ut in ellipsi, mutato tantum loco ipsius ordinatæ BD, Fig. 3. quæ cadit extra diametrum AN; unde invenitur diameter secunda ut pro ellipsi.

115. Si quantitas radicalis quæ determinat diametrum, esset imaginaria, non ideo problema est reputandum absurdum, quia ea diameter potest esse secunda, cui hyperbola nusquam occurrit; sed æquationis generalis ordinatæ secundum litteram x in hunc modum

$$x x \dots \frac{2 k^2 x y}{l n} \dots \frac{2 p q x}{n} \dots \frac{p y y}{n} \dots \frac{2 m p y}{n} + \dots \frac{p r r}{n} = 0$$

extrahenda esset radix quadratica

$$x = \dots \frac{k p y}{l n} \dots \frac{p q}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{+ k k p p y y}{l l n n} \dots \frac{p y y}{n} \dots \frac{2 k^2 p q y}{l n n} \dots \frac{2 m p y}{n} + \frac{p p a q}{n n} \dots \frac{p r r}{n} \right)}$$

& facta substitutione brevitatis causâ, cetera perficientur ut supra. Sed si & radix determinans diametrum hoc pacto, esset imaginaria, tunc problema contineret aliquid absurdi.

Seu potius, si $\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{g g k k p p}{d d l l} \dots \frac{h h p p}{d} \right)}$ est imaginaria; id est si terminus $\frac{h h p p}{d}$ est negativus &

major termino $\frac{g g k k p p}{d d l l}$, sume $\frac{f}{l} \sqrt{\left(\frac{- g g k k p p}{d d l l} + \frac{h h p p}{d} \right)}$ prioris oppositam, & habebis semi-diametrum secundam. Nam ubi AN est diameter transversa est

OD⁻² ON⁻² ad DB ut ON⁻² ad Os⁻²; id est, si

TAB. M.
Fig. 3.

semi-diameter ON = $\frac{f}{l} \sqrt{(-\frac{ggkkpp}{ddl} + \frac{hhp}{d})}$,

$$\begin{aligned} OD - ON &= OD + \\ \frac{ffggkkpp}{ddl^4} &= \frac{ffhhp}{dll}; \end{aligned}$$

unde habebis, si ON est transversa, — ON
factum ex

$$+ \frac{f}{l} \sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddl} - \frac{hhp}{d})}$$

in

$$- \frac{f}{l} \sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddl} - \frac{hhp}{d})}$$

Sed ubi ON est semi diameter secunda, est
Od + ON ad db ut ON ad Oa; & post
to valore semidiametri ON ut supra, erit

$$\begin{aligned} OD + ON &= OD - \\ \frac{ffggkkpp}{ddl^4} &+ \frac{ffhhp}{dll}; \text{ unde} \end{aligned}$$

$$ON = \frac{f}{l} \sqrt{(-\frac{ggkkpp}{ddl} + \frac{hhp}{d})}.$$

116. Si $ffpp = dll$, hyperbola efficit æqui-
latera.

117. In omni æquatione si quantitatis sub
signo positæ radix extrahi potest, æquatio
pertinet ad rectas.

Exempla pertinentia ad parabolam, ellip-
sim, circulum, & hyperbolam circa diame-
tros infra inveniuntur. Paulo fufius explican-
da videtur constructio hyperbolæ intra asym-
ptotos.

118. Ubi æquatio nullum continet quadra-
tum indeterminatarum, æquatio ad hyperbo-
lam referri non potest ad diametros; sed ubi
est saltem alterum quadratum indeterminatæ,
æquatio construi potest tum per diametros
tum per asymptotos.

119. Datis positione asymptotis, & dato
puncto describi potest hyperbola.

TAB. M.
Fig. 4.

120. Ubi æquatio ad hyperbolam intra asym-
ptotos est simplicissima $xy - xx = 0$
facile hyperbola describitur, datis positione re-
cta XZ, unde abscinduntur x, & QR, cui

parallelæ sumuntur y. Sumatur enim KP = x;
per P agatur PA parallela ipsi RQ, & æqua-
lis ipsi PK; & per A intra asymptotos QKZ
describatur hyperbola.

121. Si pro quadrato datæ x haberetur re-
ctangulum ab , media proportionalis quæri
posset inter a & b; sed brevius est abscindere
KP = a vel b, & per P agere parallelam
ipsi QR & æqualem ipsi b vel a.

122. Ad hanc formulam simplicissimam re-
vocandæ sunt æquationes ad hyperbolam, &
quidem per divisionem indeterminatarum, quia
in hyperbola ad asymptotos relata, ordinatæ
inter se multiplicantur, dum conficitur illarum
rectangulum, quod est datæ magnitudinis. Igi-
tur quære valorem alterius indeterminatæ di-
visionem continuando quantum fieri potest:
hinc habebis æquationes duas, alteram ad re-
ctam, ut in aliis sectionibus, No. 106, alte-
ram ad hyperbolam intra asymptotos, quæ erit
proposita simplicior.

123. Petitur locus æquationis $xy + ay = bc = 0$; quia hic nullum est incognitarum qua-
dratum, utraque est vel asymptotus, vel
asymptoto parallela.

Quæramus per divisionem valorem y; erit TAB. M.
 $y = \frac{bc}{x+a}$; & quando $x = 0$, $y = \frac{bc}{a}$, Fig. 4.

cui parem abscinde PA; hyperbola transibit
per A.

Sit nunc $y = 0$; erit $bc = 0$, quod est ab-
surdum, nunquam enim quantitas finita eva-
nescit, nisi quando cum infinita comparatur.
Ergo hyperbola numquam occurrit recte XZ,
quæ ideo est asymptotus, nam si esset asym-
ptoto parallela, secaretur ab hyperbola oppo-
sita, quod ab æquatione hac detegeretur, ea
enim pertinet ad ambas hyperbolas. Sit igitur
y infinita & erit tum xy, tum ay, re-
ctangulum infinitum; ergo $bc = 0$, quan-
doquidem nulla datur proportio inter finitum
& infinitum. Igitur $xy = -ay$, & $x = -a$;
huic parem sume PK, per K age RQ paral-
lelam TS, & intra asymptotos QKZ describe
hyperbolam transeuntem per A, & ejus op-
positam; erit utraque locus æquationis pro-
positæ. Nempe arcus indefinitus AB locus
verus x & y; AC verus y, falsus x, & hy-
perbola opposita falsus utriusque.

Age enim quamvis BD; erit $BD = y$;
 $KD = x + a$; & KDB rectangulum = xy
+ ay; = bc = KPA rectangulo ($\frac{bc}{a}$ in a).

Facere etiam potuissim $x + a = u$, unde
æqua-

æquatio fieret simplicissima $xy = bc$, quæ dat eandem constructionem.

124. Construenda sit æquatio

$$xy + cx + by - ff = 0,$$

erit transponendo

$$xy + by = ff - cx$$

vel

$$y = \frac{ff - cx}{x + b}$$

Ea autem, reipsa dividendo,

$$\frac{-cx}{x+b} = -c + \frac{bc}{x+b}.$$

Fit ergo æquatio proposita

$$y = \frac{ff + bc}{x + b} - c$$

TAB. M.
Fig. 5.

Pone $y = u + z$, & $u = -c$, quæ est æquatio ad rectam facile construenda ponendo $PF = c$ versus T, quia valor ipsius u est negativus, & per F agendo indefinitam LM ipsi XZ parallelam; manebit $z = \frac{bc + ff}{x + b}$, æquatio ad hyperbolam describendam ex N° 123; ad cuius æquationem refertur, quia potest facile inveniri rectangulum $= bc + ff$.

Sed eadem æquatio facilius construi poterat. Ubi curva occurrit rectæ ST, ibi $x = 0$. Pone in æquatione proposita $x = 0$, manet $by = ff$, & $y = \frac{ff}{b}$, cui parem abscinde PA; curva transibit per A. Pone y infinitam, id est hyperbolæ nunquam occurrere, aut cadere in ipsa asymptoto, reliqui æquationis termini, cx & $-ff$, evanescent, & manebit $xy = -by$, aut $x = -b$. Sume $PK = -b$, per K age indefinitam QR ipsi ST parallelam, erit QR altera asymptotus. Tandem pone x infinitam, erit $xy = -cx$; & $y = -c$; sume $PF = -c$ & per F age LM ipsi XZ parallelam & ipsi RQ occurrentem in I; & per A, asymptotis QI; IM describe hyperbolam.

125. Proponatur æquatio

$$xy + ax - \frac{bxx}{c} + dy - gg = 0$$

Tom. I.

Transfer in alterum membrum omnes terminos, e quibus abest indeterminata y , cuius quadratum non est in æquatione, habebis

$$xy + dy = \frac{bxx}{c} - ax + gg$$

& dividendo,

$$y = \frac{bxx - acx + cgg}{c(x + d)}$$

unde, peragendo divisionem quanti $\frac{bxx - acx + cgg}{c}$ per $x + d$, obtinebis

$$y = \frac{bx - bd}{c} - a + \frac{bdd + cgg + acd}{c(x + d)}$$

Pone $y = u + z$, more solito, &

$$u = \frac{bx - bd}{c} - a,$$

quæ æquatio est ad rectam facile determinandam, atque

$$z = \frac{bdd + cgg + acd}{c(x + d)}$$

quæ æquatio est ad hyperbolam describendam ut N° 123.

Tamen placet ad pleniorum argumenti illustrationem, æquationem construere a primis principiis.

Erat

$$u = \frac{bx - bd}{c} - a$$

ideo, ubi $u = 0$, manet

$$x = \frac{ac + bd}{b}$$

Cape PI $= \frac{ac + bd}{b}$, ex P versus Z ob va- TAB. M.
lorem positivum ipsius x . Sed ubi $x = 0$, est Fig. 6.

$$u = -\frac{ac - bd}{c}$$

cui æqualem capies PF versus T ob negativum valorem ipsius u . Age per I & F indefinitam QR, hæc erit locus indeterminatarum u : quandoquidem ducta quavis DE parallela rectæ ST, erit IP ad PF, ut c ad b , sic IE $=$ EP $-$ PI $=$

Ff

x—

$$x - \frac{ac - bd}{b} \text{ ad ED} = \frac{bx}{c} - a - \frac{bd}{c} = u.$$

Eminebunt ergo z , id est BD, supra rectam RQ, quæ erit altera asymptotus hyperbolæ, quia si esse posset $z = 0$, etiam $xz + dz = \frac{bdd}{c} + gg + ad = 0$, quod est absurdum. Sed ubi z est infinita, evanescentibus quantitibus finitis præ infinitis, manet $x = -d$. Abscinde igitur PK $= d$ versus X, ob negativum ejus valorem, & per K age indefinitam LM parallelam rectæ SI, ea erit altera asymptotus, & parallela est, ut jam observavimus, indeterminatæ ad secundam dimensionem non affurgentis in æquatione. Cocant rectæ LM; QR in G, erit G centrum.

Sed altera indeterminata z est BD; altera vero, $x + d = KE$, incipit a puncto K & positive procedit versus Z, oportet ergo revo-care æquationem ad coordinatas LG; GQ, vel BD; DG. Dic DG $= t$ & pone PI ad IF ut e ad f , ut EK ($x + d$) ad DG (t), erit $x + d = \frac{et}{f}$; & æquatio constituenda fiet

$$tz = \frac{(bdd + cgg + acd)f}{cc}$$

& est PI ad IF, ut e ad f , ut PK (d) ad GF $= \frac{df}{e}$, & FP $= a + \frac{bd}{e}$; fume igitur PA $= \frac{gg}{d}$; erit

$$FA = a + \frac{bd}{e} + \frac{gg}{d}$$

&

$$\text{GF in FA} = \frac{adf}{e} + \frac{bddf}{cc} + \frac{fgg}{e} = \frac{(bdd + cgg + acd)f}{cc}$$

Transibit ergo hyperbola per punctum A.

126. Tandem habeatur æquatio

$$xx - \frac{2axy}{b} - \frac{cyy}{d} + fy + gx - bb = 0$$

Quia hic sunt duo indeterminatarum quadrata, quære divisores altissimi termini

$$xx - \frac{2axy}{b} - \frac{cyy}{d},$$

qui esse debent reales & inæquales. Hos invenies

$$x - y \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{bd} \sqrt{(a^2 d^2 + b^2 dc)} \right)$$

&

$$x - y \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{bd} \sqrt{(a^2 d^2 + b^2 dc)} \right)$$

vel, ponendo $\sqrt{(aadd + bbdc)} = dm$

$$x - y \left(\frac{a+m}{b} \right)$$

&

$$x - y \left(\frac{a-m}{b} \right)$$

Finge nunc alterum divisorem, puta,

$$x - \frac{ay + my}{b} = u$$

erit

$$x - \frac{ay - my}{b} = u - \frac{2my}{b}$$

&

$$x = u + \frac{ay - my}{b}$$

& æquatio proposita, quæ dividendo per divisores termini altissimi, erat

$$x - \frac{ay - my}{b} + \frac{bfy + bgx - bbb}{bx - ay - my} = 0$$

fiet

$$u + \frac{bfy + bgx - bbb}{bu - 2my} = 0$$

vel, substituendo pro x valorem inventum

$$u + \frac{ay - my}{b},$$

$$u + \frac{bfy + bgu + agy - gmy - bbb}{bu - 2my} = 0,$$

aut, sublata divisione

$$buu - 2muy + bfy + bgu + agy - gmy - bbb = 0$$

quæ statim est immutanda ut observavimus TAB. M. No. 108. Nam fume PF $= b$; age per F Fig. 7. rectam FI parallelam rectæ XZ & $= m - a$; & per P & I indefinitam RQ, indeterminatæ u eminebunt ultra rectam RQ versus

fus Z. Duc enim quamlibet ED paralle-
lam ipsi XZ; est PF (b) ad FI (m—a) ut
PE (y) ad ED = $\frac{my - ay}{b}$. Ponitur autem

$$EB = Pb = x; \text{ ergo } BD = x - \frac{ay}{b} + \frac{my}{b} = u.$$

Hic fecimus m—a quantitatem positivam,
quia m est major quam a: nam add+bbdc
= ddm est major quam add;

Sunt igitur in æquatione indeterminatæ
BD (u) & PE (y), & eam revocemus oportet
ad coordinatas BD (u) & DP (s). Sit er-
go PI = k; est FP (b) ad PI (k) ut EP (y)
ad PD (s); quare $y = \frac{bs}{k}$, quo valore sub-
stituto in æquatione ultimo inventa, ea fiet,
dividendo per b,

$$uu - \frac{2msu + bfs + ags - gms}{k} + gu - hb = 0$$

ideo

$$2msu - bfs - ags + gms = k(uu + gu - hb)$$

aut, ponendo $\frac{bf + ag - gm}{2m} = n$, si ea po-
sitiva est, ut fingimus,

$$su - sn = \frac{k}{2m} (uu + gu - hb)$$

quæ æquatio constructur per Num. 125. Quan-
doquidem est

$$s = \frac{k}{2m} \left(\frac{uu + gu - hb}{u - n} \right) =$$

$$\frac{k}{2m} \left(u + g + n + \frac{nn + gn - hb}{u - n} \right)$$

divisionem perficiendo.

$$\text{Sit nunc } s = t + z, \text{ \& quidem } t = \frac{k}{2m}$$

$$(u + g + n), \text{ \& } z = \frac{nn + gn - hb}{u - n}.$$

Est autem u = 0 ubi locus occurrit rectæ
RQ: & tunc $t = \frac{kz + kn}{2m}$, cui æqualem ca-
pe PO versus Q ob valorem t positivum. Cum
autem sit t pars rectæ PQ, erit t = 0 in ipso
puncto P, & tunc $u = -g - n$, cui æqua-
lem fume PK versus X ob negativum valo-
rem u. Age per K & O indefinitam LM,
ea erit locus ipsarum t.

Quoniam enim fecimus DB = u, age per B
rectam Bd ipsi QR parallelam erit KP (g + n)

$$\text{ad PO } \left(\frac{kz + kn}{2m} \right) \text{ ut } 2m \text{ ad } k \text{ ut } Kd = KP + Pd$$

$$= KP + DB = g + n + u \text{ ad } ds = \frac{k}{2m}$$

(u + g + n) = t.
Eminebunt ergo z ultra rectam LM versus
Q, & erit eB = z, si curva ponatur transire
per B.

Sume nunc PN = n, & per N age rectam
ml parallelam rectæ RQ, & occurrentem re-
ctæ BE in n, & rectæ LM in G, erit
 $Bn = u - n$. Curva referetur ad inde-
terminatas Be; Bn; & revocari debet ad inde-
terminatas Be; eG = r (hic pono r symbolum
indeterminatæ), quod fiet ponendo datam PK
ad KO ut 2m ad 2p erit enim PK ad KO ut
 $Bn (u - n)$ ad Ge (r); & $u - n = \frac{nr}{p}$. Hac
substitutione facta, manebit

$$2r = \frac{p}{m} (nn + gn - hb). \text{ Est autem PK ad KO}$$

$$\text{ut } 2m \text{ ad } 2p \text{ ut PN (n) ad OG} = \frac{pn}{m}.$$

Sume
igitur $Oa = n + g - \frac{hb}{n}$, & intra asymp-
tos MGM describe hyperbolam per a & ejus
oppositam ABC; habebis locum petitum.

Ad modum harum constructionum perficien-
tur reliquæ pro signis & quantitatibus datis.

Duas ultimas constructiones asymptotorum
adjeci, ut pateret quomodo illas daret divisio.
Sed est alia methodus, descripta ab HUGENIO
in variis geometricis suis, quæ extant in ope-
rum volumine primo, tomo secundo. Hæc
autem methodus est hujusmodi.

127. Æquatio generalis ad hyperbolam,
per extractionem radices, fit

$$y = u \pm \sqrt{+ \frac{dxx}{p} \dots \frac{2gkx}{l} \dots hb}$$

ut patet ex No. 114. posita reductione Ni. 110;
ut eam posuimus in No. 114. Reperta igitur,
ut No. 105. positione rectæ RQ, & determina-
tis Po = $\frac{gkp}{dl}$; & op = on = $\sqrt{\left(\frac{gkpp}{ddl} \dots \frac{hb}{d} \right)}$;

occurrat altera asymptotus rectæ ST in M, &
rectæ pA productæ in L, erit AL æqualis semi-
diametro secundæ Oa = $\frac{d}{p} \sqrt{\left(\frac{gkpp}{ddl} \dots \frac{hb}{d} \right)}$;

quæ est ad po ut d ad p. Est autem LA ad
IM ut AO ad OI, ut po ad op; quare LA ad
IM ut po ad op; & alternando LA ad po (id
est d ad p) ut IM ad op = $\frac{gkp}{dl}$; est ergo IM =

$Im = \frac{gk}{l}$; dimidiato coefficienti ipsius x in quantitate radicali: quibus sumptis, erunt ductæ OM; Om asymptoti.

Si vero altera indeterminata x est parallela asymptoto uni, quod cognoscitur ex æquatione proposita, in qua non est quadratum ipsius x , sumi unica IM potest pro altera asymptoto.

Nunc si habetur

$$z = \sqrt{\left(+\frac{dxx}{p} \dots \frac{2gkx}{l} + hh\right)}$$

pone $x = 0$; manebit $z = h$, cui æqualem fumo II, hyperbola transibit per I; & si II

TAB. N.
Fig. 2.

(b) est minor quam IM ($\frac{gk}{p}$), ea cadet in angulo MOM; & in angulo ei deinceps, si II (b) est major quam IM ($\frac{gk}{p}$).

Quando autem est $+hh$ in valore ipsius z est op minor quam oP; nam utramque invenimus ponendo

$$x = 0 = \sqrt{\left(+\frac{dxx}{p} \dots \frac{2gkx}{l} + hh\right)}$$

unde

$$x = \dots \frac{gkp}{dl} + \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} - \frac{hhp}{d}\right)}$$

& quantitas sub signo minor est quantitate extra signum. Quare si est $+\frac{gkp}{dl}$, hyperbola

A occurret bis rectæ ST; & hyperbola BNE,

TAB. N.
Fig. 3.

si est $-\frac{gkp}{dl}$; ponendo nempe II minorem quam IM; & quando II est major quam IM, utraque hyperbola opposita occurret rectæ ST.

Sed si $z = \sqrt{-hh}$, posito $x = 0$ tunc est

TAB. N.
Fig. 1.

op = $\sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddl} + \frac{hhp}{d}\right)}$ major quam oP, quare neutra hyperbola occurret rectæ ST, & determinari debet punctum A ut supra. Si tandem esset $z = 0$; curva transfret per punctum I.

Altera methodus innititur eliminatione secundi termini, quam infra docebit Auctor noster & quam breviter exponam pro æquationibus quadraticis.

128. Æquationem dispone secundum dimensiones alterius indeterminatæ, & hujus altissimam potestatem libera a coefficiente determinato, ut sit æquatio generalis ad sectiones conicas

$$\begin{array}{r} -\frac{2kxy}{l} + \frac{xxx}{p} \\ yy - 2my + rr = 0 \end{array}$$

Coefficiens termini secundi hic ponitur $-\frac{2kx}{l} - 2m$; cujus dimidium est $-\frac{kx}{l} - m$.

Pone y æqualem alteri indeterminatæ z , cui junges dimidium coefficientem termini secundi, mutatis signis. Quia posuimus hunc coefficientem negativum, facere debemus

$$y = z + \frac{kx}{l} + m.$$

unde

$$yy = zz + \frac{2kzx}{l} + 2mz +$$

$$\frac{kxxx}{ll} + \frac{2kmx}{l} + mm$$

$$-\frac{2kxy}{l} = -\frac{2kzx}{l} - \frac{2kxxx}{ll} - \frac{2kmx}{l}$$

atque

$$-2my = -2mz - \frac{2kmx}{l} - 2mm$$

Quibus in unum collectis, & addito ultimo æquationis propositæ termino, in quo non est y ; habetur

$$zz - \frac{kxxx}{ll} + \frac{xxx}{p} - \frac{2kmx}{l} + 2qx + rr - mm = 0$$

Æquatio carens termino secundo, quod attinet ad indeterminatam z . Ut idem efficiamus pro indeterminata x , oportet, ex regula, illius terminum altissimum liberare a coefficiente, nisi sit $-\frac{kk}{ll} = \frac{n}{p}$; quod ubi accidit res perfecta est, & manet æquatio ad parabolam.

Quod si non accidat, pone ut jam pro elliptici & hyperbola $\pm \frac{d}{p}$ pro $\frac{n}{p} - \frac{kk}{ll}$, nempe $+$ si fractio $\frac{n}{p} - \frac{kk}{ll}$ est positiva, $-$ si ea est negativa. Item $-\frac{gk}{l}$ pro $-\frac{km}{l} + q$ & hh pro $rr - mm$. Æquatio fiet

zz

$$xz + \frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} + hh = 0$$

aut

$$\frac{pzc}{d} + xx - \frac{2gkpx}{dl} + \frac{phh}{d} = 0$$

Fac

$$x = u + \frac{gkp}{dl}$$

erit

$$xx = uu + \frac{2gkpu}{dl} + \frac{gkpp}{d}$$

&c

$$-\frac{2gkpx}{dl} = -\frac{2gkpu}{dl} - \frac{2gkpp}{d}$$

Quibus in unam summam collectis & additis reliquis æquationis terminis, fit

$$\frac{pzz}{d} + uu - \frac{gkpp}{d} + \frac{phh}{d} = 0$$

Prima reductio $y = z + \frac{kx}{l} + m$, dat

TAB. M. $y - \frac{kx}{l} - m = z$. Cum autem sit $HB = y$,
Fig 1.2.3.

&c $HD = \frac{kx}{l} + m$; patet esse $DB = z$; ut in No. 105.

Jam ponamus in

$$xz = \frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} + hh$$

fractionem $\frac{lx}{f}$ pro x , restituetur ipsa æquatio inventa methodo priori. Unde patet has duas methodos congruere; quod etiam melius

dispiciet qui consideret esse $P\theta = \frac{gkp}{dl}$, ut supra; atque ideo $IO = \frac{fgkp}{dl}$, & $\frac{fu}{l} + \frac{fgkp}{dl} = r$.

Hanc posteriorem methodum primus, quod sciam, explicavit Joannes de Witt, in elementis curvarum linearum, quæ leguntur inter opera CARTESII.

Tertia methodus assumit æquationem compositam, & cum singulis hujus terminis comparans terminos singulos æquationis constru-

endæ, detegit quantitatem & positionem rectarum. Eam primus pertractavit CRAIGIUS, adhibuerunt HOSPITALIUS, WOLFIUS, & alii multi; quæ de causâ illam præteribo.

Quarta quærit ea puncta, quæ determinant sectionem conicam, ponendo singulas indeterminatas = 0; unde habenter pro singulis aut duo puncta, aut unum, aut fortasse nullum. Reliqua puncta deteguntur assignando alteri indeterminatæ valorem maxime commodum, quoties opus est ut tria puncta pro circulo, quatuor pro parabola, quinque pro ellipsi & hyperbola definiantur.

Satis fuse, nisi fallor, exposita investigatione rectarum, quæ determinant sectiones conicas, breviter afferam theorematâ, quæ ex hac investigatione conficiuntur, & quibus uti possumus tanquam regulis ad rem facilius perficiendam.

129. Quando æquatio continet saltem quatuor terminos indeterminatæ, quam pono esse y abscissam ex TS a puncto P; & ei rectæ parallelas sumi veras ordinatas ad curvam. TAB. M. Fig. 1.2.3.

130. Veræ diametri RQ positio determinabitur construendo dimidiatum secundum terminum æquationis propositæ ordinatæ secundum dimensionem litteræ y . (No. 104.)

131. Hoc facto extrahatur radix æquationis: aut sub signo est quadratum alterius indeterminatæ x , aut non est.

132. Si non est, æquatio est ad parabolam, cuius vertex A inveniatur, quærendo Pp tertiam proportionalem post coefficientem indeterminatæ x sub signo, & radicem quantitatis omnino cognitæ pariter sub signo; unde inveniemus IA quartam post FP; Pp; & FI. (No. 107. 108.) TAB. M. Fig. 1.

133. Parameter autem semper est quarta proportionalis post IF; FP; vel GK; KP, & coefficientem indeterminatæ x sub signo. (No. 108.)

134. Si adest quadratum indeterminatæ x ; æquatio erit ad ellipsim vel ad hyperbolam, quarum centrum O inveniatur sumendo Pθ quartam post numeratorem, & denominatorem xx sub signo, & dimidiatum coefficientem quem habet secundus terminus quantitatis sub signo ordinatæ secundum dimensionem litteræ x . Hinc habebitur IO quarta post FP; Pθ; FI. (No. 110.) TAB. M. Fig. 2.3.

135. Post eundem numeratorem & denominatorem xx sub signo, & terminum omnino cognitum quantitatis sub signo, quære quartam;

F f 3

PROB. XXVIII.

TAB. III. *Rectam DC datae longitudinis in datam conicam sectionem DAC*
Fig. 9. *sic inscribere ut ea per punctum G positione datum transeat.*

Sit AF axis curvæ, & a punctis D, G, & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam, ad determinandam positionem rectæ DC, puncti D aut C inventio proponi potest; sed cum hæc sint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio similis evasura esset, five quærerem CG, CB, aut AB; five comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto prospicio quod utrumque D & C similiter respectet, & una determinet. Et hujusmodi video esse punctum F.

Jam sit $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $EF = z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam suppono pro conica sectione determinanda datam esse, sit $AB = x$, & $BC = y$, & erit $FB = x - a + z$. Et propter GE. EF :: CB. FB erit iterum

$$FB = \frac{yz}{b}. \text{ Ergo } x - a + z = \frac{yz}{b}.$$

His ita præparatis tolle x per æquationem quæ curvam designat. Quemadmodum si curva sit parabola per æquationem $rx = yy$ designata, scribe

$$\frac{yy}{r} \text{ pro } x; \text{ & orietur } \frac{yy}{r} - a + z = \frac{yz}{b}. \text{ Et extracta radice } y = \frac{rz}{2b} \pm$$

$V(\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz)$. Unde patet $V(\frac{rrzz}{bb} + 4ar - rz)$ esse differentiam gemini valoris y , id est linearum + BC & — DH, adeoque (demisso DK in CB normali) valere CK (a). Est autem FG.GE :: DC.CK, hoc est

tam; qua auge aut minue quadratum ipsius Po; habebis $op = on$; & hinc semi-diametrum alteram AO = ON; quæ erit quarta post FP; po; & FI; & si op determinatur per quantitatem imaginariam, & æquatio est ad hyperbolam, erit AN diameter secunda. (Nº. 110. 115.)

136. Tandem post denominatorem & numeratorem ipsius xx sub signo, & AO quadratum, quære quartam; hæc erit alterius semi-diametri Oa quadratum. (Nº. 110. 115.)

TAB. N. Fig. 1. 2. 3. 137. Sed quando æquatio est ad hyperbolam & eam describere vis intra asymptotos; definitis, ut supra, positione rectæ RQ, & punctis O; o, sume $IM = Im$, æquales singulas dimidiato coefficienti quem habet secundus terminus quantitatis sub signo ordinatæ secundum dimensionem litteræ x ; age OM; Om habebis asymptotos. (Nº. 127.)

138. Si terminus cognitus quantitatis sub signo, est positivus; quære mediam inter ejus factores, & huic mediæ æqualem cape Il; hyperbola transibit per l. TAB. N. Fig. 2. 3.

139. Si is est negativus, determina punctum A ut Nº. 107. 110; aut (si op est quantitas imaginaria) punctum a; hyperbola transibit per A. TAB. N. Fig. 1.

140. Si is nullus est, hyperbola transibit per I, & erit Ol semi-diameter transversa, quæ non potest esse imaginaria, quia Po non determinatur per aliquam radicalem.

141. Sed si nullum est quadratum indeterminatarum; utraque coordinata parallela est asymptotis quæ facile determinantur ex Nis. 120. 124.

(a) Hæc quidem subtiliter, sed ut melius percipiamus quam vera sint, dicamus DH = u. Dum sit GE (b) ad EF (z) ut DH (u) ad HF

est $\sqrt{(bb+zz)} b :: c. \sqrt{(\frac{rzz}{bb} + 4ar - 4rz)}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando orietur

$$z^4 = \frac{4bbrz^3 - 4abbrzz + b^4rz - 4ab^4r}{rr}$$

æqua-

$$HF = \frac{rz}{b}, \text{ erit } AH = AE - EF - FH = a - z -$$

$\frac{rz}{b}$. Sed, per parabolæ proprietatem, rectangulum sub parametro (r), & AH æquale est quadrato ipsius DH ; ergo

$$ar - rz - \frac{ruz}{b} = uu.$$

Invenerat Auctor

$$ar - rz + \frac{ryz}{b} = yy$$

Hæ duæ æquationes similes sunt, & fient prorsus eadem, si ponas in prima y pro u , vel in secunda u pro y , quod facere licet, quia alterutra littera indicat ambigue ordinatas ad parabolam, quæ hic ponuntur tendere ad contrarias partes, atque ideo altera positiva est ubi altera est negativa. Hæc quam recte se habeant melius patebit, si ponamus rectam CD non secare axem: tunc enim punctum F cadet extra parabolam; & erit $AH = AE - EF + FH = a - z + \frac{rz}{b}$; unde

$$- rz + ar + \frac{ruz}{b} = uu$$

$$\& AB = BF - FE + EA = \frac{zy}{b} + a - z;$$

quare

$$+ \frac{rzy}{b} + ar - rz = yy$$

quæ duæ æquationes omnino similes sunt, quia utraque ordinata est positiva. In prima hypothesi, subducendo

$$ab ar - rz + \frac{ryz}{b}$$

$$\text{ipsam } ar - rz - \frac{ruz}{b}$$

& ab yy quadratum uu , manet

$$\frac{ryz}{b} + \frac{ruz}{b} = yy - uu,$$

& dividendo per communem divisorem $y + u$

$$\frac{rz}{b} = y - u$$

& est $y - u$ summa rectarum $CB = +y$; & $DH = -u$; quare illarum differentia $= y + u$, erit

$$2\sqrt{(\frac{rzz}{4bb} + ar - rz)}$$

quod etiam sic, longiore via sed fortasse plangiore, inveniri potest. Est

$$\frac{rz}{b} = y - u$$

unde

$$u = y - \frac{rz}{b}$$

&

$$2uy = 2yy - \frac{2rzy}{b}$$

atque

$$uu = yy - \frac{2ryz}{b} + \frac{rzz}{bb}$$

ergo

CK.

æquatio quatuor tantum dimensionum, quæ ad octo dimensiones ascendit si quævissem CG vel CB aut AB. (b)

PROB.

$$CK^2 = (y + u)^2 = yy + 2uy + uu$$

&

erit, substituendo,

$$\frac{d}{e} \sqrt{yy + ee} = \frac{yz}{b} + a - z$$

$$4yy - \frac{4ryy}{b} + \frac{rrzz}{bb} = 4ar - 4rz + \frac{rrzz}{bb}$$

unde quadrando,

ponendo pro $4yy$ valorem $4ar - 4rz + \frac{4ryz}{b}$; deductum ex æquatione Auctoris, & delendo contraria.

$$\frac{ddy + eed}{ee} = \frac{yyz}{bb} + \frac{2yz(a-z)}{b} + (a-z)^2$$

& auferendo fractiones

Sed in altera hypothefi, subducendo

$$bbddy + bbeed = eeyyz + 2beyz(a-z) + bbee(a-z)^2$$

$$ab \frac{ryy}{b} + ar - rz$$

vel, transponendo & dividendo,

$$\text{quantitatem } \frac{ryz}{b} + ar - rz$$

$$yy = \frac{2beyz(a-z) + bbee(a-z)^2 - bbeed}{bbdd - eezz}$$

& ab yy quadratum uu superest

quare

$$\frac{ryz}{b} - rz = yy - uu$$

$$y = \frac{beez(a-z) \pm \sqrt{bbeezx(a-z)^2 + bbdd - eezz}}{bbdd - eezz}$$

&

$$\frac{(bbeez(a-z)^2)(bbdd - eezz) - bbeed(bbdd - eezz)}{bbdd - eezz}$$

& dividendo per communem diviforem $y - u$

id est

$$\frac{rz}{b} = y + u$$

$$y = \frac{beez(a-z) \pm be(\sqrt{eezx + bbdd - eezz})}{bbdd - eezz}$$

quare est $\frac{rz}{b}$ summa ordinarum CB & DH; unde vel methodo Auctoris vel nostra invenitur illarum differentia CK, qualis est apud NEWTONUM.

$$\frac{(a-z)^2 - dd(bbdd - eezz)}{bbdd - eezz}$$

quod facit duplam quantitatem sub signo

Ceterum si alia æquatio ad sectiones conicas assumeretur, ut $xx = \pm \frac{ddy}{ee} + dd$; quæ

$$2bed \sqrt{aabb - bbdd - 2abbz + bbzx + eezz}$$

oritur vel ex $dd - xx = \frac{ddy}{ee}$ ad ellipfim,

differentiam gemini valoris y ; unde sequendo vestigia Auctoris, incidemus in æquationem quatuor dimensionum, sed magis compositam.

vel ex $xx - dd = \frac{ddy}{ee}$ ad hyperbolam, eodem pacto res peragi posset. Assumamus enim $xx = \frac{ddy}{ee} + dd$ ad hyperbolam, erit

enim $xx = \frac{ddy}{ee} + dd$ ad hyperbolam, erit

$$x = \sqrt{\left(\frac{ddy}{ee} + dd\right)} = \frac{d}{e} \sqrt{yy + ee}$$

(b) 142. Æquationes determinatæ secundo gradu altiores construuntur per aptorum locorum intersectiones; & æquationes quatuor dimensionum componi solent per duas sectiones conicas, quarum altera sumitur ad arbitrium, sed quam commodissima; altera determi-

na-

natur substituendo in æquatione proposita valorem incognitæ depromptum ex æquatione locali assumpta. Rem explicemus exemplo æquationis ab Auctore inventæ.

Quia illius secundum membrum totum ductum est in $\frac{bb}{rr}$, assumo æquationem ad parabolam $\frac{bb}{r} u = zz$: quare substituendo $\frac{b^4 u u}{rr}$ pro zz ; $\frac{bbuz}{r}$ pro z^3 , & $\frac{bbu}{r}$ pro zz ; æquatio proposita

$$rrz^4 = 4bb rz^3 - 4ab r rz^2 - bbr rz + 4b^4 rz - 4ab^4 r + b^4 cc$$

fit

$$b^4 u u = 4b^4 uz - 4ab^4 u - b^4 ru + 4b^4 rz - 4ab^4 r + b^4 cc$$

quæ, dividendo per b^4 , mutatur in

$$uu = 4uz - 4au - ru + 4rz - 4ar + cc$$

Ea est ad hyperbolam, quia termini altissimi $uu - 4uz$, divisores sunt u & $u - 4z$, reales & inæquales. Eam, exercitii gratia, construamus a primis principiis. Est

$$u = 2z - 2a - \frac{r}{2} \pm \sqrt{(4zz - 8az - 2rz + 4aa + 2ar + \frac{rr}{4} + 4rz - 4ar + cc)}$$

Quantitas radicalis, per reductionem, fit

$$\sqrt{(4zz - 8az + 2rz + 4aa - 2ar + \frac{rr}{4} + cc)} = t$$

Sit $t = 2z - 2a - \frac{r}{2}$, quam ut invenias

TAB. O.
Fig. I.
pone rectam $AI = \frac{r}{4}$, erit $EI = a + \frac{r}{4}$, & per I age indefinitam IL parallelam rectæ EG. Erit IL datæ parabolæ directrix.

Ex IL abscinde $IL = 2EI = 2a + \frac{r}{2}$; per L duc indefinitam Le parallelam ipsi IE; & rectæ EG occurrentem in e; & per E ac L puncta age rectam indefinitam EL; & per ejus punctum quodvis M duc ipsi IL parallelam Mm rectæ eL occurrentem in N, & rectæ EA in m.

Tom. I.

Est EI ad IL; ut 1 ad 2, ut Em (z) ad mM = 2z. Sed MN = Mm - mN = Mm -

$$IL = 2z - 2a - \frac{r}{2} = t; \text{ \& ubi } t = 0,$$

est $z = a + \frac{r}{4} = IE$; ergo est L punctum origo ipsarum t ; & harum locus est indefinita recta EL; & recta abscissarum est indefinita LN.

Cum autem sit $u = s + t$; & t ordinata ad curvam, cujus diameter jacet secundum rectam EL, (quæ determinata fuit construendo dimidiatum secundum terminum æquationis propositæ, secundum Num. 130. de Loc. Geom.) atque $u = s$, quando $t = 0$; ipsæ u supra rectam NL versus M, & indeterminatæ t hinc terminabuntur a recta EL, inde a curva, & in quolibet puncto rectæ EL erit $t = 0$, quod accidit ubi curva secat rectam EL. Ponamus ergo

$$t = \sqrt{(4zz - 8az + 2rz + 4aa - 2ar + \frac{rr}{4} + cc)} = 0$$

tunc erit

$$zz = 2az - \frac{rz}{2} - aa + \frac{ar}{2} - \frac{rr}{16} - \frac{cc}{4}$$

& est

$$-aa + \frac{ar}{2} - \frac{rr}{16} = -(a - \frac{r}{4})^2$$

igitur

$$z = a - \frac{r}{4} \pm \sqrt{((a - \frac{r}{4})^2 - (a - \frac{r}{4})^2 - \frac{cc}{4})}$$

$$= a - \frac{r}{4} \pm \sqrt{-\frac{cc}{4}},$$

quia $+(a - \frac{r}{4})^2$ & $-(a - \frac{r}{4})^2$ sese destruant. Sume igitur $LO = \frac{r}{2}$; erit $Oe =$

$$eL - LO = EI - OL = a + \frac{r}{4} - \frac{r}{2} = a - \frac{r}{4}.$$

Est autem 4 (numerator coefficientis zz sub signo) ad 1 (denominatorem) ut $4a - r$ (dimidiatus coefficientis secundi termini) ad $a - \frac{r}{4}$, ex No. 134. Jam, ubi $t = 0$,

G g

ck

est $z = eO = \sqrt{\frac{cc}{4}}$; quæ quantitas cum fit imaginaria, indicat curvam rectæ EL nusquam occurrere, vel eam esse secundam hyperbolæ diametrum; ut ex No. 135.

A recta eL hinc inde a puncto O abscinde $OQ = Oq = \frac{c}{2}$; per O; Q; & q puncta age rectas ipsi Ee parallelas, & occurrentes rectæ EL in o; R; & r; erit punctum o centrum hyperbolæ, & recta definita Rr ejus diameter secunda.

Altera semi-diameter est valor ordinatæ t in ipso centro. Tunc autem est $z = eO = a - \frac{r}{4}$; quo valore posito in valore ipsius t , inveniemus

$$t = \sqrt{4(a - \frac{r}{4})^2 - (8a - 2r)(a - \frac{r}{4}) + 4(a - \frac{r}{4})^2 + cc}$$

Est autem $(8a - 2r)(a - \frac{r}{4}) = 8(a - \frac{r}{4})(a - \frac{r}{4})$; ergo, ceteris terminis se destruentibus, erit $t = c$, cui æquales cape oS; os hinc inde a puncto o in recta oO, & per S & s puncta describe hyperbolas oppositas circa diametrum transversam Ss, & secundam Rr: habebis locum æquationis propositæ. Est autem 1, (denominator coefficientis zz sub signo) ad 4 (numeratorem) sic $\frac{cc}{4}$ (quadratum unius semi-diametri) ad cc . Conveniunt ergo hæc cum No. 136.

Recta mM ponatur occurrere hyperbolæ in P, unde ages Pp ipsi EL parallelam, & occurrentem in o diametro oS. Erit ex hyperbolæ natura rectangulum sub sp; pS ad quadratum Pp ut quadratum So ad quadratum oR, ut 4 ad 5. quandoquidem est $LE = \sqrt{LI + IE} = \sqrt{LI + 4LI} = \sqrt{5LI} = LI\sqrt{5}$; & IL ad LE ut 1 ad $\sqrt{5}$. Sed IL ad LE ut OL ad Lo ut QL ad LR, ut OQ ad RO; igitur ut 1 ad 5 sic quadratum OQ, (aut quarta pars quadrati So quia recta So facta est dupla rectæ OQ) ad quadratum Ro; & tandem ut 4 ad 5 sic rectangulum sub sp; pS ad quadratum pP.

Pariter est ut IL ad LE (1 ad $\sqrt{5}$) sic OL ($\frac{r}{2}$) ad Lo $= \frac{r}{2}\sqrt{5}$; & IL ad EL (2 ad $\sqrt{5}$)

ut NM ($s = 2z - 2a - \frac{r}{2}$) ad ML $= (z - a - \frac{r}{4})\sqrt{5}$; & Mo $= (z - a + \frac{r}{4})\sqrt{5} = Pp$, cujus quadratum est

$$(zz - 2az + \frac{rz}{2} + aa - \frac{ar}{2} + \frac{rr}{16}) 5$$

Sed pS $= po - oS = t - c = u - 2z + 2a + \frac{r}{2} - c$, ac ps $= po + oS = u - 2z + 2a + \frac{r}{2} + c$; quia erat $u - s = t$, & $s = 2z - 2a - \frac{r}{2}$; quare rectangulum sub ps; pS est

$$uu - 4uz + 4au + ur + 4zz - 8az - 2rz + 4aa + 2ar + \frac{rr}{4} - cc$$

quod cum sit ad

$$(zz - 2az - \frac{rz}{2} + aa + \frac{ar}{2} + \frac{rr}{16}) 5, \text{ ut 4 ad 5,}$$

tandem erit, multiplicando media & extrema, ac dividendo per 5, ac delendo æqualia

$$uu - 4uz + 4au + ru - 4rz + 4ar - cc = 0$$

æquatio proposita.

Si per S agatur rectæ LR parallela ST ipsi QR occurrens in T & per o recta oX parallela rectæ AE, & rectæ QR occurrens in X erit TR $= So = c = RX$ quia RQ, cum sit dupla QL, est $c - r$, & cum QX aut Oo $= 2OL = r$, facit c . Quare producamus rectam TS donec rectæ oX occurrat in Z; erit XT ad ad TZ ut oS ad SZ; sed XT ostensa est dupla ipsius oS, est ergo TZ dupla ipsius ZS, quæ ideo est æqualis ipsi ST, id est semi-diametro secundæ, quare, acta To, erunt To; oZ asymptoti hujus hyperbolæ; quod recte congruit cum æquatione, in qua z est unius dimensionis, atque ideo debet esse vel asymptotus, vel asymptoto parallela.

Præterea, recta To occurrat rectæ QO in t, & rectæ eE in i; est TX ($2oS = 2c$) ad Xo ($QO = \frac{c}{2}$) ut 4 ad 1, ut oO ($2OL = r$)

ad

P R O B . X X I X .

*Datum angulum per datum numerum multiplicare
vel dividere.*

In angulo quovis FAG inferibe lineas AB, BC, CD, DE, &c. ejusdem Tab. III. Fig. 10.
cujusvis longitudinis, & erunt triangula ABC, BCD, CDE, DEF, &c.
isocelia, adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang. A + ACB =
2 ang. A, & ang. DCE = ang. A + ADC = 3 ang. A, & ang. EDF = A +
AED = 4 ang. A, & ang. FEG = 5 ang. A, & sic deinceps. Positis jam AB,
BC, CD, &c. radiis æqualium circularum, perpendiculara BK, CL, DM,
&c. demissa in AC, BD, CE, &c. erunt sinus istorum angulorum, & AK,
BL, CM, DN, &c. sinus complementorum ad rectum. Vel posita AB
diametro, illæ AK, BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo AB = 2r &
AK = x, dein sic operare.

$$AB . AK :: AC . AL.$$

$$2r . x :: 2x . \frac{xx}{r}.$$

$$\left. \begin{array}{l} AL - AB \\ \text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \end{array} \right\} = BL, \text{ Duplicatio.}$$

$$AB . AK :: AD . (2AL - AB) . AM.$$

$$2r . x :: \frac{2xx}{r} - 2r . \frac{x^3}{rr} - x.$$

AM

ad Or = $\frac{r}{4}$; & ut = eO + Or = a —
 $\frac{r}{4} + \frac{r}{4} = a$. Pariter eo ad Oo, ut 4 ad 1,
ut te ad ei = 4a, a qua si demas partem ez
æqualem ipsi Oo = r, manebit zi = 4a — r,
dimidiato coefficienti quem habet secundus
terminus quantitatis sub signo; quare altera
asymptotus determinata est ut jubeat Nus. 137.

Tandem descripta parabola $\frac{bb}{r} u = xx$,

punctum K aut k in quo ea occurrit hyperbo-
læ, dat valorem incognitæ z; & si parabola
occurrit hyperbolæ in duobus punctis, ut in
figura; duo erunt in axe AE puncta F; f, &
duæ rectæ CGFD; cGfd problema solventes.

143. Addendo vel subducendo terminos
æquationis localis assumptæ & æquationis loca-
lis inventæ per substitutionem assumti valoris
in æquatione construenda, vel quales sunt, vel
multiplicatos per aliquem coefficientem, possunt
inveniri aliæ curvæ, e quibus commodissimam
eligit analysi.

Sic in nostro exemplo, si hinc demas $\frac{5bb}{r} u$,
& inde 5xz, habebis

$$uu - \frac{5bb}{r} u = 4uz - 5xz - 4au - ru +$$

$$4rx - 4ar + cc$$

æquationem ad ellipsum; nam altissimus ter-
minus est uu — 4uz + 5xz, cujus factores
sunt inæquales & imaginarii $u - 2z + z\sqrt{-1}$
& $u - 2z - z\sqrt{-1}$.

Gg 2

$$\left. \begin{array}{l} \text{AM} - \text{AC} \\ \text{Et } \frac{x^4}{rr} - 3x \end{array} \right\} = \text{CM, Triplicatio.}$$

$$\text{AB} . \text{AK} :: \text{AE} (2\text{AM} - \text{AC}) . \text{AN}.$$

$$2r . x :: \frac{2x^4}{rr} - 4x . \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{AN} - \text{AD} \\ \text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{array} \right\} = \text{DN, Quadruplicatio.}$$

$$\text{AB} . \text{AK} :: \text{AF} (2\text{AN} - \text{AD}) . \text{AO}.$$

$$2r . x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r^4} + 2r . \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{AO} - \text{AE} \\ \text{Et } \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x \end{array} \right\} = \text{EO, Quintuplicatio.}$$

Et sic deinceps. Quod si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx - 2rr = qr$ ad bisectionem, $x^3 - 3rrx = qrr$ ad trisectionem, $x^4 - 4rrx + 2r^4 = qr^3$ ad quadri-sectionem, $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquisectionem &c.

P R O B. X X X.

Cometæ in linea recta BD uniformiter progredientis positionem cursus ex tribus observationibus determinare.

TAB. III.
Fig. II. **S**it A oculus spectatoris, B locus cometæ in prima observatione, C in secunda, ac D in tertia; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaque dantur anguli BAC, BAD; adeoque si BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & BD in E & F, ex assumpto ut-cunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii AB. Sit ergo AB = a , BE = b , & BF = c . Porro ex datis observationum intervallis dabitur ratio BC ad BD, quæ si ponatur b ad e , & agatur DG parallela AC, cum sit BE ad BG in eadem ratione, & BE dicta fuerit b , erit BG = e , adeoque GF = $e - c$. Ad hæc si demittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF similia & simi-
li-

liter secta lineis AE ac DG, erit FE. AB :: FG. DH (c) hoc est $c - b$.
 $a :: c - c. \frac{ae - ac}{c - b} = HD$. Erit etiam FE. FB :: FG. FH, (d) hoc est
 $c - b. c :: e - c. \frac{ce - cb}{e - c} = FH$; cui adde BF five c & fit $BH = \frac{ce - cb}{e - c}$.
 Quare est $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad $\frac{ae - ac}{c - b}$, (five $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad a)
 ut BH ad HD; hoc est ut tangens anguli HDB five ABK ad radium.
 Quare cum a supponatur esse radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK,
 adeoque facta resolutione ut $e - c$ ad $e - b$ (five GF ad GB) ita c (five
 tangens anguli ABF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque ut tempus inter primam & secundam observationem, ad
 tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam pro-
 portionalem. Dein ut differentia inter illam quartam proportionalem &
 tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandem quartam proportio-
 nalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem
 anguli ABK.

P R O B. X X X I.

*Radiis a puncto lucido ad sphericam superficiem refringentem
 divergentibus, invenire concursus singulorum refractorum
 cum axe sphaerae per punctum illud lucidum
 transeunte. (e)*

Sit A punctum illud lucidum, & BV sphaera, (f) cujus axis AD, cen- TAB. III.
 trum C, (g) & vertex V, sitque AB radius incidens & BD refractus Fig. 12.
 ejus, ac demissis ad radios istos perpendicularibus CE & CF, ut & BG per-
 pendiculari ad AD, actaque BC, dic AC = a , (b) VC vel BC = r , (i)
 CG

(e). Est enim, ob similia triangula AFE; neralissima, id exercitii causa faciam.
 FGD, ut FE ad EA sic FG ad GD; & ob si-
 milia triangula AEB; DGH, ut EA ad AB,
 sic GD ad DH; unde ex aquo ordinate, FE
 ad AB ut FG ad HD.

(d) Pariter eadem triangula dant FE ad EA
 ut FG ad GD; & AE ad EB ut DG ad GH;
 quare iterum ex aquo ordinate, FE ad EB ut
 FG ad GH, & componendo, FE ad FB ut FG
 ad FH.

(e) Optime quidem Newtonus problema de
 sphaera proposuit; quia minus utiles, & magis
 difficiles sunt alia curvae; sed tamen, quia, pau-
 cissimis mutatis, potest Auctoris aequatio fieri ge-

(f) Curva quævis superficies.

(g) Quia nempe in circulo omnes normales
 ad curvam per centrum transiunt, sed in nos-
 tra hypothese ex B ducatur normalis ad cur-
 vam, quæ axi occurrat in C.

(b) In sphaera datur magnitudine recta AC;
 sed non in aliis curvis. Quare dic datam $AV = a$,
 $VG = u$; $GC = s$, & pro a , in Auctoris
 æquatione, ponere debebis $a + u + s$.

(i) Quia scilicet VC, & BC sunt radii sphæ-
 ræ; at in nostra hypothese $VC = u + s$; sed
 non æquat CB.

G g 3

(k)

CG = x , (k) & CD = z , (l) eritque AG = $a - x$, BG = $\sqrt{rr - xx}$ (m)
 AB = $\sqrt{aa - 2ax + rr}$ (n) & propter similia triangula ABG & ACE, CE
 = $\frac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$ (o). Item GD = $z + x$, (p) BD = $\sqrt{zz + 2zx + rr}$: & pro-

pter similia triangula DBG ac DCF; CF = $\frac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$ (q) Præterea cum
 ratio sinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone il-
 lam ratione esse a ad f , (r) & erit $\frac{fa\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}} = \frac{az\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$, (s)

ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr - xx}$, erit
 $f\sqrt{zz + 2zx + rr} = z\sqrt{aa - 2ax + rr}$, & quadrando, ac redigendo termi-
 nos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz + ffr}{aa - 2ax + rr - ff}$. (t) Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ scribe

p , & q pro dato $a + \frac{rr}{a} = p$, & erit $zz = \frac{2pxz + prr}{q - 2x}$ ac

$z = \frac{px + \sqrt{ppxx - 2prrx + pqr}}{q - 2x}$. Inventum est itaque z ; hoc est lon-
 gitude CD, adeoque punctum quæsitum D quo refractus BD concurrit
 cum axe Q. E. F.

Posui hic incidentes radios divergentes esse, & in medium densius inci-
 dere; sed mutatis mutandis problema perinde resolvitur ubi convergunt,
 vel incidunt e densiori medio in rarius. (v)

PROB.

(k) Apud nos $x = s$.

n ; & m nobis indicabit sinum incidentiæ.

(l) Datum enim est in sphaera centrum C;
 sed nobis tantum punctum V datum est. Di-
 cemus ideo VD = β . Erit z (CD = DV -
 VG - GC) = $\beta - u - s$; qui valor in Aucto-
 ris æquatione ponendus erit.

(m) Ex notissima circuli proprietate. Nos
 vero, qui æquationem generalissimam quæ-
 rimus, dicemus BG = y .

(n) Nobis autem $\sqrt{aa + 2au + uu + yy}$.

(o) Id est $\frac{(a + u + s)y}{\sqrt{aa + 2au + uu + yy}}$.

(p) Substituendo $\beta - u = DG$, & BD =
 $\sqrt{\beta\beta - 2\beta u + uu + yy}$.

(q) Et nostris symbolis CF =

$$\frac{(\beta - u - s)y}{\sqrt{\beta\beta - 2\beta u + uu + yy}}$$

(r) Sed quia in hypothese nostra non datur
 a ($a + u + s$), hanc rationem ponemus m ad

$$\begin{aligned} (s) \text{ Nobis vero } & \frac{ny(a + u + s)}{\sqrt{aa + 2au + uu + yy}} \\ & = \frac{my(\beta - u - s)}{\sqrt{\beta\beta - 2\beta u + uu + yy}} \end{aligned}$$

(t) Id est (dividendo per y , multiplicando
 in crucem, & quadrando,)

$$mn(aa + 2au + 2as + uu + 2us + ss)$$

$$(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy) =$$

$$mm(\beta\beta - 2\beta u - 2\beta s + uu + 2us + ss)$$

$$(aa + 2au + uu + yy)$$

æquatio generalissima, quæ, licet nixa sit di-
 vergentiæ radiorum, facile tamen aptatur ad
 eorum parallelismum, & convergentiam.

(v) Namque si radii sunt axi paralleli a , & β
 in infinitum excrefcunt; & ideo delendi sunt
 omnes termini, in quibus eæ non sunt, aut
 non ad altissimum gradum elatæ, quia hi termi-
 ni finiti sunt, & pro nullis habentur ad infiniti-
 tos comparati; unde fit

po-

posita α infinita, & dividendo per $\alpha\alpha$

$$nn (\beta\beta - 2\beta u + uu + yy) =$$

$$mm (\beta\beta - 2\beta u - 2\beta s + uu + 2us + ss)$$

& posita β infinita & dividendo per $\beta\beta$.

$$nn (\alpha\alpha + 2\alpha u + 2\alpha s + uu + 2us + ss) =$$

$$mm (\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy)$$

Si radii convergunt, α , vel β negative sumantur, & ejus impares potestates contrariis, ac prius, signis sunt afficiendæ. Unde habetur.

posita α negativa

$$nn (\alpha\alpha - 2\alpha u - 2\alpha s + uu + 2us + ss)$$

$$(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy) =$$

$$mm (\beta\beta - 2\beta u - 2\beta s + uu + 2us + ss)$$

$$(\alpha\alpha - 2\alpha u + uu + yy)$$

& posita β negativa.

$$nn (\alpha\alpha + 2\alpha u + 2\alpha s + uu + 2us + ss)$$

$$(\beta\beta + 2\beta u + uu + yy) =$$

$$mm (\beta\beta + 2\beta u + 2\beta s + uu + 2us + ss)$$

$$(\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy)$$

Si quis hoc ratiocinio contentus non est, is calculum rursus instituat in duabus his hypothefibus, & superioribus vestigiis insistentibus ad allatas æquationes facile perveniet.

Obiter notandum: Quod si radii paralleli, aut convergentes, incident in superficiem convexam, α fiet infinita, vel negativa; β vero, si in concavam.

Ex his tribus æquationibus generalibus facile peculiares omnes deducuntur, & noscetur utrum, & quibus legibus, proposita curva habeat geometricum focus. Nam si radii sint divergentes, aut convergentes, pro α si incident in convexam; sin vero, pro β , ponetur ejus valor datus; & altera β , vel α determinabitur ab æquatione, quæ simplicior fiet ponendo pro s , aut y , ejus valorem, quem dat data curva. Erit autem curva inter punctum concursus, & punctum lucidum, cum valor quæsitæ β , vel α est positivus, ut nos posuimus; cum vero est negativus, erit punctum concursus ad easdem curvæ partes, ad quas est lucidum.

Habebit autem curva focus geometricum, quando y , & s (ubi est variabilis) aberunt ab

æquatione. Si enim omnes radii refringuntur in idem punctum D, erit VD constans; sed BG, & GC sunt variabiles, ergo magnitudo ipsius VD ab iis non pendet; sed magnitudo VG, determinatur a BG, atque ideo VG est variabilis; ac VD æquat VG, GC, CD simul sumptas; igitur ipsa VD nequit esse constans, nisi ab ejus expressione, aut valore, abfint VG, GC, aut eam determinans BG, variabiles. Secus autem curva habebit focus physicum.

Curva focus physicum habens geometrico donabitur, sublatis ex æquatione s , & y ; quod fieri nequit, nisi omnes termini, ubi sunt hæ quantitates, mutuo se destruant. Itaque, ut sciamus utrum curva focus geometricum habere possit, sumantur omnes termini homogenei, ubi reperitur s , aut y , & singula eorum aggregata ponantur æqualia nihilo.

Paucæ, ut lucem generali huic doctrinæ dandam ex conicis afferemus.

Sit VB ellipsis, & radii paralleli ex ære incident in vitrum convexum, & sit axis major $= 2a$, axis minor $= 2b$. Tunc VG $= u$, reliquus axis $= 2a - u$; & $\frac{2abbu - bbuu}{aa} = yy$, GC $=$

$$s = \frac{abb - bbu}{aa}; m = 3, n = 2.$$

Quia hic radii paralleli convexitatem feriunt, pone α infinitam, & substituendo, formula generalis evadet $4(\beta\beta - 2\beta u + uu + \frac{2abbu - bbuu}{aa})$

$$= 9(\beta\beta - 2\beta u - \frac{2abb\beta + 2bb\beta u + 2abbu - 2bbuu}{aa}$$

$$+ uu + \frac{aab4 - 2a4u + b4uu}{a4}), \text{ quæ per de-}$$

bitas reductiones, ac transpositiones fiet

$$\beta\beta = \frac{\beta(10a4u - 18aabbu + 18a4bb) - 10a4bbu}{5a4}$$

$$+ 18a4u - 5a4uu + 14aabbuu$$

$$\frac{- 9b4uu - 9a4b4}{5a4}.$$

Unde liquet, quod, extracta radice, semper u erit in valore ipsius $\beta\beta$ quare, cum u mutabitur etiam β , & ideo ellipsis focus geometricum non habet, quem tamen haberet, si a valore ipsius β abesset u . Ut ergo percipiam quando, & quibus legibus id accidat, facio $= 0$ omnes terminos homogeneos, in quibus occurrit u , qui sunt $10a4u - 28aabbu$
 $= 0,$

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet secetur, invenire figuram sectionis.

TAB. IV. **S**it ABC conus circulari basi BC infistens; IEM ejus sectio quaesita; Fig. 1. 2. KILM alia quaelibet sectio parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI; & ABC tertia sectio perpendiculariter bifecans priores duas in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipsi AK in D, actisque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic EF = a, DG = b, ED = c, EH = x, & HI = y; & propter similia triangula EHL, EDG, erit ED. DG :: EH. HL = $\frac{bx}{c}$. Dein propter similia triangula DEF, DHK, erit DE. EF :: DH.

(c

= 0; & $10a^3u + 18a^4u = 0$; tum $5a^4uu + 14aabbuu - 9b^4uu = 0$. Prima æquatio, transponendo ac dividendo, per $2aau$, dat $5aa = 9bb$, quod etiam colligitur e secunda: tertiam divido per uu , quorum sic ordino $b^4 = \frac{14aabb - 5a^4}{9}$, cujus radicem extraho, ut in æquationibus biquadraticis, &

$$\text{invenio } bb = \frac{7aa}{9} \pm \sqrt{\frac{49a^4 - 5a^4}{81}}$$

$$= \frac{7aa}{9} \pm \sqrt{\frac{49a^4 - 45a^4}{81}} = \frac{7aa \pm 2aa}{9}$$

Sed $\frac{7aa + 2aa}{9}$ dat $bb = aa$, quod rejicio,

quia non congruit cum jam inventis; ast $\frac{7aa - 2aa}{9}$

dat $bb = \frac{5aa}{9}$, sive $5aa = 9bb$, ut supra. Aut

in $b^4 = \frac{14aabb - 5a^4}{9}$ pono pro bb , & bb ,

valores ex supra inventis erutos $\frac{25a^4}{81}$ & $\frac{5aa}{9}$,

& invenio $\frac{25a^4}{81} = \frac{7aa^4}{81} - \frac{5a^4}{9} = \frac{7aa^4 - 45a^4}{81}$

$= \frac{25a^4}{81}$, quod optime ad rem facit. Igitur

in radiorum incidentium parallelismo ellipsis habet focus geometricum, cum $aa : bb :: 9 : 5$, ut

axis major ad parametrum. Sed distantia focorum est $2\sqrt{aa - bb} = (ob\ bb = \frac{5aa}{9})$

$2\sqrt{\frac{9aa - 5aa}{9}} = \frac{4a}{3}$; tunc autem est axis ad

focorum distantiam, ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis. Quæramus nunc distantiam verticis a foco isto geometrico. In æquatione priore deletis terminis ubi est u , restat

$$\beta\beta = \frac{18a^3bb\beta - 9aabb^4}{5a^4} = \frac{18bb\beta}{5a} - \frac{9b^4}{5aa}, \text{ \&}$$

$$\beta = \frac{9bb}{5a} + \sqrt{\frac{36b^4}{25aa}} = \frac{9bb + 6bb}{5a}, \text{ \&}$$

$$\beta = \frac{3bb}{a} = (ob\ \frac{5aa}{9} = bb) \frac{5a}{3} = VD. \text{ To-}$$

tus autem axis est $2a$, & distantia inter focos ellipsos est $\frac{4a}{3}$, quæ dimidiata cum dimidia-

to axe dat pariter $\frac{5a}{3}$ pro distantia verticis a

foco remotiore ellipsos; ergo focus geometricus in hac hypothese est remotior focus ellipsos.

Si VB ponatur hyperbola, & radii axi paralleli ex vitro incident in concavam aeris

superficiem, superiora premens vestigia invenies hyperbolam focus geometricum non

habere, nisi cum axis primarius est ad parametrum, ut sinus incidentiæ, ad sinum refractionis,

& quod focus hic geometricus est focus oppositæ hyperbolæ. Facile quoque videbis,

quod parabola nunquam focus dioptricum habere potest, ubi radii incidunt paralleli.

Si VB sit circulus, factis debitis substitutionibus incidet in ipsissimam æquationem Auctoris.

($c - x$ in Fig. 1, & $c + x$ in Fig. 2.) $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Denique cum sectio KIL sit parallela basi, adeoque circularis, erit $HK \cdot HL = HI \cdot q$, hoc est $\frac{ab}{c}x \mp \frac{ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y), hoc est inter axem & ordinatim applicatam sectionis EIM, quæ æquatio cum sit ad ellipsum in Fig. 1, & ad hyperbolam in Fig. 2. patet sectionem illam perinde ellipticam vel hyperbolicam esse.

Quod si ED nullibi occurrat AK, ipsi parallela existens, tunc erit $HK = EF$ (a), & inde $\frac{ab}{c}x$ ($HK \cdot HL$) $= yy$, æquatio ad parabolam.

P R O B. X X X I I I.

Si recta XY circa axem AB, ad distantiam CD, in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & solidum PQRUTS ista convolutione generatum secetur plano quolibet INQLK; invenire figuram sectionis. (x)

TAB. IV.
Fig. 3.

Esto BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum sectionis; & L quilibet concursus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelam AB, & ad AB, DF, & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, & junge FG

(x) Operæ pretium facturus videor, si solidi PQRUTS generationem illustrem. Jam rectæ AB, CD sunt in eodem plano (Eucl. 2. XI.). In eo ducatur DF ipsi BA parallela, vel normalis ad CD, & ex quolibet ipsius DF puncto F agatur FG perpendicularis ad AB, quæ erit parallela DC, & ad rectos angulos ad DF. Item ex F excita indefinitam FL rectam ad planum CDFG; recta XY esse debet in plano DFL, id est occurrere debet ipsi FL alicubi in L, (hoc enim indicant Auctoris verba, ad distantiam CD); & cum FD facere quemcumque angulum datum FDL.

Juncta GL erit in eodem plano ac FL, FG, cum quibus triangulum constituit; & planum GFL erit rectum ad planum GFDC (Eucl. 18. XI.). Rursus, quia DF, ex constructo est ad rectos angulos tum ipsi LF, tum FG, recta erit ad planum FGL (Eucl. 4. XI.), æque ac ei parallela CG (Eucl. 8. XI.). Est autem GFL triangulum rectangulum in F; quapropter hypotenusa GL major est latere GF, aut CD.

Tem. I.

Concipiatur GF producta donec æquet GL; erunt GF sic producta, & GL radii ejusdem circuli, ad quem perpendicularis erit AB; cum autem idem probari possit de omnibus punctis rectæ AB, patet solidum PQRUTS constare circulis parallelis hinc inde a CD crescentibus, & quorum omnium centra sunt in recta AB, quæ vocatur axis solidi.

Si ergo solidum secetur plano SAPQRBVT per axem, in duas partes æquales sectum erit; est enim PA, communis sectio planorum SKPI & SAPQRBVT, normalis ad AB, ut omnes ipsi SA parallelæ; sunt igitur PS, & rectæ ei parallelæ, diametri circulorum, quibus componitur solidum: quare circuli omnes ab his rectis, & ideo solidum a plano bifecatur.

Si nunc solidum rursus secetur plano KLQNI ad axem AB inclinato, sed ad planum per axem recto, dico quod recta QO communis horum planorum sectio, bifecat rectam IOK communem sectionem plani KLQNI, & circuli SKPI, & omnes NML ei parallelas.

Hh

Nam

FG & MG. Dictisque $CD = a$, $CH = b$, $HM = x$, & $ML = y$; & propter datum angulum GHQ, posito $MH : HG :: d : e$: (y) erit $\frac{ex}{d} = GH$,

& $b + \frac{ex}{d} = GC$ vel FD . Adhuc propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) posito $FD : FL :: g : b$, (z) erit $\frac{bb}{g} + \frac{hex}{dg} = FL$, cujus quadrato adde FGq , (DCq seu aa) & emer-

get $GLq = aa + \frac{hbhb}{gg} + \frac{2hbhex}{dgg} + \frac{bheexx}{ddgg}$. Hinc aufer MGq (HMq — HGq seu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & restabit $\frac{aagg + hbhb}{gg} + \frac{2hbhe}{dgg}x + xx$ ($\frac{bhee - ddgg + eegg}{ddgg}$) ($= MLq$) $= yy$: æquatio quæ exprimit relatio-

nem inter x & y , hoc est inter HM , axem sectionis, & ML , ordinatim applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x & y ad duas tantum dimensiones ascendant, patet figuram INQLK esse conicam sectionem. Ut-pote si angulus MHG major sit angulo LDF, ellipsis erit hæc figura (a); si minor, hyperbola (b); si æqualis vel parabola (c), vel (coincidentibus insuper punctis C & H) parallelogrammum (d). **PROB.**

Nam circulus PKSI est rectus ad planum per axem SAPQRBVT, ut & planum KLQNI: Igitur IK est ad planum per axem normalis (Eucl. 19. XI.), ergo etiam ad rectam PAS; sed IK est chorda circuli, cujus diameter est PAS, quare bisecta est in O; quæ demonstratio cum etiam ipsi LMN (quæ normalis est ad OHQ) possit aptari, patet omnes NML bisectas esse ab OQ.

Denum erit pariter LM normalis ad GM, ut quæ ducta a centro circuli, cujus radius est GL & chorda LN, ipsam bisecet. Insuper, quia LN est parallela ipsi KI, est etiam MG parallela ad AO, ac normalis ad AB; quod facile probatur per 10. XI.

TAB. O. (y) Assume quamlibet xx , quam dices d ,
Fig. 2. describe arcum axb ; fac angulum axb parem ipsi MHG; ex β demitte perpendicularem $\beta\gamma$: erit triangulum $\beta\gamma x$ simile GMH, & datum specie ac magnitudine; erit igitur $MH : HG :: \beta x : x\gamma :: d : e$, quare erit $x\gamma$ quam Auctor dixit e .

(z) Pariter fac angulum axx æqualem FDL, & ex λ age λd perpendicularem ad ax . Erit triangulum λdx simile LFD, & $dx = g$, si dicas $\lambda d = b$.

(a) Si angulus MHG major est angulo LDF

etiam angulus $\beta x\gamma$ major erit angulo λxd ; quare etiam arcus ab major quam ax , & $\beta\gamma$ quam λd ; sed quadrata ex λd , & $\beta\gamma$ simul æquant (quadratum ex ax , sive ex xx , aut) quadrata ex $\beta\gamma$, & $x\gamma$ simul; igitur illinc demto minore quadrato ex λd , hinc majore ex $\beta\gamma$, erit (quadratum ex $\beta\gamma$ majus quadrato ex $x\gamma$, vel) dx major $x\gamma$; quapropter $\beta\gamma$ abscindet ex ax minorem $x\mu$: est autem dx (g) ad λd (b) ut $x\gamma$ (e) ad $x\mu = \frac{be}{g}$; quapropter $\frac{bhee}{gg} + ee$

æquant quadratam ex $x\mu$, & minora sunt quam quadratum ex ax (dd), igitur $bhee + eegg$ minora sunt quam $ddgg$, quo circa terminus altissimus æquationis constat duobus factoribus inæqualibus & imaginariis.

(b) Superior demonstratio facile applicatur huic hypothese; ex quo sequitur, factores termini altissimi esse inæquales & reales.

(c) Tunc $e = g$, & $\frac{bhee - ddgg + eegg}{ddgg} = \frac{bb}{gg}$

— $dd + ee = 0$; quam ob rem quadratum xx abesset ab æquatione, quæ fieret

$$\frac{aagg + hbhb}{gg} + \frac{2hbhx}{dg} = yy.$$

(d) Ubi puncta C, H coincidunt, fit $b = 0$; quare

quare æquatio ad parabolam evadit $aa = yy$, aut $a = y$.

TAB. O.
Fig. 3.

Ceterum hoc problema (quamvis generalius, quam supra propositum de cono & ejus sectionibus) adhuc generalius fieri potest, fingendo XY esse curvam quamlibet, ita positam ut ejus axis sit non CD ad AB normalis, sed alia quævis obliqua eD; cujus solidi generationem sic illustrare conabimur.

In plano $\alpha\beta\gamma\delta$ agatur quævis recta AB, & ab aliquo ejus puncto C excitetur recta CD ad pianum $\alpha\beta\gamma\delta$ normalis, ac in eodem plano ducatur recta μC faciens cum AB in C angulum quemcumque datum μCB , & per μ , C, D transeat planum, in quo descripta intelligatur quævis curva XDY, cujus axis sit Dc, & curva XDY servans semper idem intervallum ab AB, gyret circa axem AB, oriatur solidum aliquod; concipiatur hoc sectum plano quovis; hujus sectionis natura quærenda est. Huic investigationi præmitto sequentia.

Si per D agatur tangens ad curvam, hæc esse debet normalis ad axem & obliqua ad CD; sed CD normalis est ad $eC\mu$ (Eucl. 4. XI.), ergo tangens & recta $eC\mu$ alicubi convenient: coeant in μ , hinc ducatur ad solidi axem CB normalis $\mu\sigma$. Dico triangulum $\mu C\sigma$ datum esse specie, & magnitudine.

Nam quia datur curvæ XDY natura, ac positio, & insuper punctum D, positione datur tangens D μ ; sed DC datur magnitudine, & positione, datur ideo angulus μDC , & angulus ad C est rectus, quare datur angulus D μC , & totum triangulum magnitudine ac specie datur.

Quapropter magnitudine datur recta μC ; sed ob duos angulos datos $\mu C\sigma$, $\mu\sigma C$, specie datur triangulum $\mu C\sigma$; datur etiam magnitudine: adeoque dantur magnitudine rectæ $\mu\sigma$, σC .

Si nunc ex quovis curvæ puncto ψ demittatur ad axem AB normalis $\psi\zeta$, hæc erit radius circuli gyratione descripti, & paralleli circulo, cujus radius est CD; cum enim CD & $\psi\zeta$ situm quoad axem AB non mutant, circuli ab ipsis descripti erunt ad eundem axem recti. Igitur solidi bases erunt circulares, & concipere licet solidum ubivis finitum. Nunc indaganda est ratio habendi valorem cujusvis radii.

Ducatur $\zeta\zeta$ ipsi $\mu\sigma$ parallela. Sunt igitur igitur plana μCD , $\psi\zeta\zeta$ ad idem planum $\alpha\beta\gamma\delta$

recta (Eucl. 18. XI. & quia planum $\psi\zeta\zeta$ est idem ac planum circuli recti ad axem AB, id est ad planum per axem); sed horum planorum communis sectio est $\psi\zeta$, ergo ea est normalis ad subiectum planum, & ad rectam $\zeta\zeta$, est igitur quadratum ex $\psi\zeta$ æquale quadratis ex $\zeta\zeta$, $\zeta\psi$ simul; sed, ob triangula similia $C\zeta\zeta$, $C\mu\sigma$, haberi potest valor $\zeta\psi$, & ob datam curvæ X ψ YD naturam, valor ipsius $\zeta\psi$, hinc itaque excudetur radii valor.

142. His præmissis, sit PQRVTS solidum ita Tab. O. genitum, KQI planum secans positione datum, Fig. 4.

communis autem sectio plani hujus, & SKPI (alicujus ex circulis rectis ad axem solidi) sit recta IK. Ex A hujus circuli centro demittatur in IK normalis AS eam bisecans in O; curva generans sit KDY, data recta axi normalis DC; communis sectio planorum BA ζ & KDC, recta μC , circulo SKPI occurrens in ζ , & curvam in D tangat D μ occurrens rectæ $\zeta C\mu$ in μ , unde agatur in axem normalis $\mu\sigma$, cui parallela erit A ζ . Ex Q demittatur QE ad axem normalis; & sint, CD = a, CH = b, C σ = g, $\sigma\mu$ = h, QH = d, HE = e, EQ = f, OH = x, OK = y. Jam (premendendo Newtoni vestigia) OH (x). HA :: QH

(d). HE (e); quare HA = $\frac{ex}{d}$, & CA =

b + $\frac{ex}{d}$; sed HO (x). OA :: HQ (d). QE (f);

unde OA = $\frac{fx}{d}$. At quia axis AB, rectus ad circulum SKPI, est normalis ad rectam AP, est

C σ (g). $\sigma\mu$ (h) :: CA (b + $\frac{ex}{d}$) . A ζ =

$\frac{bdh + ehx}{dg}$. Sit nunc $\zeta K = z$; erit AK =

(K ζ^2 + ζA^2) = $\frac{bbddhh + 2bdehxx + eehxxx}{ddgg}$

+ zz, & KA 2 — AO 2 =

zz + $\frac{bbddhh + 2bdehxx + eehxxx - ffgxxx}{ddgg}$

= OK 2 = yy.

Supereff, ut in hac æquatione ponatur valor ipsius z expressus per cognitæ & x, ac ex curvæ natura ductus; quod ita fieri potest.

143. Quia triangulum CA ζ rectangulum est in A,

est ζC^2 (CA 2 + A ζ^2) = $\frac{bbdd + 2bdex + eexx}{dd}$

+ $\frac{bbddhh + 2bdehxx + eehxxx}{ddgg}$ =

Hh 2

bb

$$(bbdd + 2bdex + eexx) (gg + hh)$$

Pone $gg + hh (C\sigma + \sigma\mu^2) = rr = \mu C^2$; & erit
 $\zeta C = \frac{bbddrr + 2bderrx + eerrxx}{ddgg}$; & ex-

$$\text{tracta radice, } \zeta C = \frac{bdr + erx}{dg} = \frac{lx + dm}{d},$$

faciendo brevitatis causa $g.r :: e.l = \frac{er}{g}$

$$:: b.m = \frac{br}{g}. \text{ Datur igitur valor ipsius } \zeta C$$

per x & cognitæ, sed quia omnes circuli figuræ sunt inter se paralleli, communes sectiones omnium horum circularum cum eodem plano $\mu\zeta KD$, id est, rectæ ζK , sunt parallelæ; sed CD est una ex his, & est normalis ad $\zeta\mu$; quare omnes ζK sunt normales ad $\zeta\mu$; igitur tota res reducitur ad sequens problema.

TAB. P. Curvæ KD natura, positione, & axe CD , & recta CD magnitudine, & positione datis, exponere ζK ipsi CD parallelas, & finitas hinc curva inde recta ζC normali ad CD , per eandem incognitam x per quam exponitur ζC .

Sint, $CD = a$, $Cc = c$, $cD = s$. Ex K ducatur KL parallela ζC , & KN axi cD ordinatim, & productæ CD occurrens in M , & $\zeta C = KL = \frac{lx + dm}{d}$, ac $DN = n$. Triangula similia cDC , MDN , MKL , dant $cD(s)$. $DC(a) :: MD.DN(n)$, & $DC(a).Cc(c) :: DN(n).NM$. Item $CD(a).Dc(s) :: LK(\frac{lx + dm}{d}).KM$, & demum $DC(a).Cc(c) ::$

$$LK(\frac{lx + dm}{d}).LM; \text{ quare } \frac{su}{a} = MD,$$

$$NM = \frac{cu}{a}, KM = \frac{lsx + dms}{ad}, \text{ \& } ML = \frac{clx + cdm}{ad}, \text{ ergo } KN = \frac{lsx + dms + cdu}{ad};$$

sed, cum detur curvæ natura, datur relatio inter KN & ND , hinc igitur eruatur valor n per x & cognitæ; at $K\zeta = CL = CD + DM + ML = a + \frac{su}{a} + \frac{clx + cdm}{ad}$, ergo (pro n posito ejus valore) erit ζK expressa per x , & cognitæ. Q. E. F.

Si ex. gr. curva KD parabola, cujus parameter $= p$. Erit $KN = (\frac{llsxx + 2dlmsx + aadd}{aadd} + \frac{2cdlsux + ddmms + 2cdmsu + ccdlsu}{aadd}) = pu$,

$$\text{\&, ordinando, } uu = \frac{aaddpu - 2cdmsu}{cadd} - \frac{2cdlsux - 2dlmsx - llssxx - ddmms}{cadd}; \text{ quo}$$

$$\text{circa } u = \frac{aaddp - 2cdms - 2cdlsx + 2cadd}{2cadd}$$

$$\sqrt{\frac{a^4d^4pp - 4aacd^4mps - 4aacd^4lpsx}{4c^4d^4}}$$

Hic valor ponatur in expressione ipsius ζK supra inventa, & fiat ejus quadratum (in quo semper erit radicalis $\sqrt{\frac{a^4d^4pp}{4c^4d^4}}$ &c.) hujus quadrati valor ponatur pro zz in æquatione ad sectionem, æquatio hinc oriens liberetur a radicali & habebitur æquatio ad sectionem.

Si vero curvæ axis esset ipsa CD , patet quod cD coincideret cum CD , id est, quod $s = a$, & $c = o$, ergo $\zeta K = a + u$ (deletis terminis ubi est c) tunc etiam ordinata

$$KL = \zeta C = \frac{lx + dm}{d}.$$

Sit, ex. gratia, curva KD parabola, erit $KL = (\frac{llxx + 2dlmx + ddm}{dd}) = pu$, ac $u =$

$$\frac{llxx + 2dlmx + ddm}{ddp}, \text{ \& } \zeta K =$$

$$\frac{aaddp + llxx + 2dlmx + ddm}{ddp}, \text{ cujus qua-}$$

drato posito pro zz in æquatione ad solidi sectionem, habebitur æquatio quatuor dimensionum exprimens naturam curvæ sectione genitæ.

144. Si præterea in solidi formatione recta $\zeta\mu$ caderet super AB axem solidi, tunc $\mu\sigma(h) = o$, & $\mu C(r) = C\sigma(g)$; igitur æquatio ad sectionem (Nº. 142. hujus), deletis terminis in quibus est h , fit $zz = \frac{ffxx}{dd} = yy$; sed ζC

tunc evaderet $AC = b + \frac{ex}{d}$, quam ob rem

$$\frac{bb}{p} + 2\frac{bex}{dp} + \frac{eexx}{ddp} = u, \text{ \& } zz = (a + u)^2 -$$

$$\frac{ffxx}{dd} = aa + 2\frac{abb}{p} + 4\frac{abex}{dp} + 2\frac{aeexx}{ddp} + \frac{l^4}{pp}$$

$$+ 4\frac{b^2ex}{app} + 6\frac{bbeexx}{ddpp} + 4\frac{b^2ex^2}{d^2pp} + \frac{4x^4}{d^4pp} - \frac{ffxx}{dd}$$

$= yy$, æquatio quatuor dimensionum.

TAB. P.
Fig. 2.

Insuper, si parabola generans haberet eundem axem ac solidum, & ei occurreret in C, tunc AC ($b + \frac{ex}{d}$) esset abscissa, & ζK (z) vel KA ordinata, quam ob rem KA^2 (zz) $= bp + \frac{epx}{d}$, & $zz - \frac{ffxx}{dd} = yy = bp + \frac{epx}{d} - \frac{ffxx}{dd}$ æquatio ad ellipsim. Si sectionis axis ωQ esset axi solidi AB parallelus, tunc fingi potest axem OQ gyrasse circa polum Q versus P, donec in Q ω pervenerit: sed quia punctum Q manet, ipsius QO valorem pro HO posuisse in superiore æquatione præstabit. Igitur, fiat QO $= u = x + d$, quapropter $u - d = x$, & $uu - 2ud + dd = xx$, & $yy = bp + \frac{epx}{d} - \frac{ffxx}{dd} = bp - ep + \frac{euu}{d} - \frac{ff + 2}{d} \frac{ffu}{d} - \frac{ffuu}{dd}$, in qua æquatione noto quod $bp - ep - ff = 0$, nam si solidum secetur per axem plano PAC recto ad planum IOQ, sectio PQC esset parabola, nempe ipsa genitrix, quæ tunc locum illum occuparet, quapropter QE^2 (ff) $= p$. CE $= p(b - e)$: Fieret igitur æquatio superior $yy = \frac{epu + 2ffu}{d} - \frac{ffuu}{dd} = \frac{bpu + ffu}{d} - \frac{ffuu}{dd}$ (ponendo pro ep valorem $bp - ff$).

Si nunc axis solidi parallelus esset axi sectionis, in infinitum excrescerent EH (e), & HQ (d), quibus collata QE (f) pro nihilo habenda est; igitur $yy = \frac{bpu}{d} + \frac{ffu}{d} - \frac{ffuu}{dd}$ vertitur in $yy = \frac{bpu}{d}$; sed & CH (b) est infinita atque ideo æquat d , est itaque $yy = pu$, & sectio est parabola eandem habens parametrum ac genitrix, quod etiam nullo calculo sic demonstratur.

Ob naturam curvæ SCQP, est rectangulum $S\omega P$ æquale rectangulo ex ωQ in p : Sed ob circulum SIpkK, rectangulum $S\omega P$ æquat quadratum ex ωk , ergo &c.

Eodem pacto res absolvi potest, quævis alia ponatur curva generans XDY. Nos ad casum ab auctore propositum gradatim properantes fingimus, quod.

TAB. O.
Fig. 4.

145. Ea sit recta μDK ducta in plano μDC faciente cum plano BCD angulum datum $\mu C\sigma$,

& in μ occurrens plano cui recta DC est normalis; tunc ζK (z) obtinebitur per analogiam hanc, μC (r). CD (a) :: $\mu \zeta$ ($\frac{ex + bd + dgr}{dg}$).

$$\zeta K = \frac{aex + abd + adg}{dg}; \text{ quare}$$

$$zz = \frac{aaexx + 2aabdex + 2aadegx}{ddgg} + \frac{aabbdd + 2aabd dg + aaddgg}{ddgg}$$

Hic autem valor positus in æquatione Ni. 142. dat æquationem ad sectiones conicas $yy =$

$$\frac{eehxx + aaexx - ffgxx + 2aabdex}{ddgg} + \frac{2aadegx + 2bdehxx + aabbdd + 2aabd dg}{ddgg} + \frac{aaddgg + bddh}{ddgg}$$

Sectio autem esset parabola, si, facta $\sigma \theta = \sqrt{aa + hh}$, juncta C θ esset parallela OQ axi sectionis; tunc enim C σ (g). $\sigma \theta$ ($\sqrt{aa + hh}$) :: HE (e). EQ ($f = \frac{e}{g} \sqrt{aa + hh}$), & qua-

drando $ff = \frac{aaee + eehh}{gg}$; aut $aaee + eehh - ffg = 0$, quocirca quadratum x abesset ab æquatione; sed si angulus QHE major esset quam $\theta C\sigma$, sectio esset ellipsis; si minor, hyperbola.

146. Quod si angulus $\mu C\sigma$ evanesceret, aut si C σ caderet super axem AB, tunc $\sigma \mu = b = 0$, unde, terminis in quibus est b ex æquatione superiore deletis, $yy = \frac{aaexx - ffgxx}{ddgg} + \frac{2aabdex + 2aadegx + aabbdd + 2aabd dg}{ddgg} + \frac{aaddgg}{ddgg}$, tunc autem, ut statim apparet,

solidum esset conus rectus, & hoc problema casus problematis superioris.

147. Si vero, angulo $\mu C\sigma$ existente, $K\zeta = CD = a$, æquatio Ni. 142. evaderet $yy = \frac{eehxx}{ddgg} - \frac{ffgxx}{ddgg} + \frac{2behxx}{dgg} + \frac{bhhh + aagg}{gg}$, æquatio Auctoris, si animadvertas quod QH (dd) $= HE^2 + EQ^2$ ($ee + ff$), quare $ff = ee - dd$.

H h 3

De-

PROB. XXXIV.

Si ad AF erigatur perpendicularum AD datæ longitudinis, & norma DEF crus unum ED continuo transeat per punctum D dum alterum crus EF æquale AD dilabatur super AF; invenire curvam HIC quam crus EF medio ejus puncto C describit.

TAB. IV. **S**it EC vel CF = a , perpendicularum CB = y , AB = x , & propter similitudinem triangula FBC, FEG, (e) erit BF ($\sqrt{aa-yy}$). BC + CF ($y+a$) :: EF ($2a$). EG + GF (AG + GF) seu AF. (f) Quare $\frac{2ay+2aa}{\sqrt{aa-yy}}$ (= AF = AB + BF) = $x + \sqrt{aa-yy}$. Jam multiplicando per $\sqrt{aa-yy}$ fit $2ay + 2aa = aa - yy + x\sqrt{aa-yy}$, seu $2ay + aa + yy = x\sqrt{aa-yy}$, & quadrando partes divisas per $\sqrt{aa-yy}$, (g) ac ordinando prodit $y^3 + 3aay + 3aa^2 + a^3 - ax^2 = 0$.

Idem

148. Demum si in hac ultima hypothese $\mu\sigma = h = 0$ æquatio præcedens mutabitur in $yy = aa - \frac{ffxx}{dd}$, quæ semper est ad ellipsem; sed tunc liquet ex solidi genere quod solidum est cylindrus, ergo sectio obliqua cylindri est ellipsis.

Harum omnium hypotheseum tanquam generale corollarium est inventio lineæ, qua solidum supra dictis modis genitum finitur; Hæc invenitur secto solido per axem, id est, posito quod QO axis sectionis cadat super AB axem solidi. Tunc autem EQ (f) = 0, & QH (d) = HE (e), quibus substitutionibus factis, æquatio Ni. 142 fit

$$xz + \frac{bbhh + 2bhhx + hbx^2}{gg} = yy,$$

Sic æquatio Ni. 144 fit

$$aa + \frac{2abb}{p} + \frac{4abx}{p} + \frac{2axx}{p} + \frac{b^4}{pp} + \frac{4b^3x}{pp} + \frac{6bbxx}{pp} + \frac{4bx^3}{pp} + \frac{x^4}{pp} = yy, \text{ Ni. 145.}$$

$$\text{evadit } yy = \frac{bhxx + aaxx + 2aabbx + 2bhhx + 2aagx + aabb + 2aagb + aagg + qggg}{gg};$$

æquatio ad hyperbolam: ea Ni. 146, mutatur in

$$yy = \frac{aaxx + 2aabbx + 2aagx + aabb + 2aagb + aagg}{gg},$$

& extracta radice, $yy = \frac{ax + ab + ag}{g}$,

æquatio ad triangulum; Ni. 147 in $yy = \frac{bhxx + 2bhhx + bbbh + aagg}{gg}$, æquatio rursus ad hyperbolam; & æquatio Ni. 148. fit $yy = aa$, & $y = a$, ad parallelogrammum.

149. (e) Rectangula nempe in E, & B, & habentia angulum EFG communem.

150. (f) Nam AG æquat GE, quia scilicet triangula DAG, FEG rectangula in A, & E habent angulos ad G verticales & pares, ac latus DA æquale ipsi EF ex hyp.

(g) Siquidem $aa + 2ay + yy (= (a+y)^2)$ $(a+y) = (a+y) \sqrt{aa-yy} \sqrt{aa-yy} = x \sqrt{aa-yy} (= x \sqrt{aa-yy} \sqrt{aa-yy})$ idem est ac $(a+y) \sqrt{aa-yy} = x \sqrt{aa-yy}$, unde quadrando exsurgit $a^2 + 3aay + 3aay + y^2 = a^2 - yxx$. &c.

(b)

Idem aliter.

In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF, & age KF, HI, HC, ^{TAB. IV.} ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N, & in ^{Fig. 5.}

HC demitte normalem IL. (b) Eritque angulus $K = \frac{1}{2} BCF = \frac{1}{2} EGF$
 $= GFD = AMH = MHI = CIL$; adeoque triangula rectangula KBF,
 FBN, HLI & ILC similia. Dic ergo $FC = a$, $HI = x$, & $IC = y$; &
 erit $BN (2a - y) BK (y) :: LC. LH :: CIq (yy.) HIq (xx.)$ adeoque
 $2axx - yxx = y^3$. (i) Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam
 esse cissoidem Veterum, ad circulum cujus centrum sit A ac radius AH
 pertinentem.

PROB.

(b) Tota sequens angulorum collatio sic explicari, & demonstrari potest. Quia triangulum CKF est isosceles per constructionem, est angulus exterior BCF duplus interioris & oppositi CKF, aut KFC: sed ob triangula similia BCF, EGF, (149. hujus), angulus BCF æquat EGF, & hic duplus est anguli interioris & oppositi GFD, aut GDF (sunt enim æqualia triangula DAG, FEG (150. hujus.) & ideo triangulum DGF est isosceles), igitur pares sunt anguli FDG, GFD, KFC, CKF. Atqui anguli BCF, CFB simul unum rectum constituunt, ergo angulus NEK est rectus & circulus centro C radio CK descriptus transire debet per F & N puncta; est igitur NC æqualis FC, aut DH; quo circa parallelæ sunt rectæ HC, DF, & angulus GFD æquat oppositum ad easdem partes AMH, & hic alterum MHI, qui æqualis est CIL, quia triangula HIG, CLI rectangula in I, & L, & habentia angulum HCI communem, similia sunt.

est absurdum, nam quantitas finita nunquam sit æqualis nihilo, curva ideo nunquam occurrit rectæ VZ.

Est y augetur dum x crescit, nam si y minueretur x crescente, quantitas $2a - y$ semper cresceret, quia ex eadem demeretur quantitas semper minor, sed $y.2a - y :: xx. yy$, igitur xx quantitas semper crescens ad yy quantitatem semper decrecentem haberet eandem rationem ac y quantitas semper decrecens ad $2a - y$ quantitatem semper crescentem. Id est absurdum. Itaque curva semper propius accedit rectæ VZ, quæ ideo ejus asymptota est.

Ex æquatione superiore deducitur analogia $x.y :: \frac{yy}{x}.2a - y$; sed $x.y :: y.\frac{yy}{x}$, sunt igitur x, y, $\frac{yy}{x}$, $2a - y$ in proportionem continuam. At acta ordinata quavis CI; & ex C, CQ parallela ST, & circulo occurrente in O, est HQ (IC = y). QO :: QO.Qd ($2a - y$); ideoque est OQ media inter y & $2a - y$, & $= \frac{yy}{x}$; quod etiam sic invenitur. Jam $OQ^2 = 2ay - yy$; sed quia $y^3 = 2axx - yxx$, est, ducendo cuncta in y, & dividendo per xx , $\frac{y^4}{xx} = 2ay - yy$, quare $\frac{y^4}{xx} = OQ^2$; & $\frac{yy}{x} = OQ$. Sunt ergo dQ, QO, QH, QC in proportionem continuam.

TAB. P.
Fig. 3.

(i) Examinemus hanc æquationem, & aliquas hujus curvæ proprietates investigemus. Si hæc curva occurreret rectæ XY, in occursum puncto fieret $y = a$, ponamus hunc valorem in æquatione, ea fiet $a^3 = 2axx - axx$, quare $aa = xx$, & $a = \pm x$; igitur centro A, radio AH describe circulum HPdp occurrentem rectæ XY in P, p, hæc erunt puncta, in quibus occurrit rectæ curva, quæ hinc inde extenditur, sed nunquam transiit rectam TS, quia tunc haberetur $-y$, & cubus $-y^3$ est $-y^3$ & $x = \frac{-y\sqrt{2a-y}}{2a+y}$, quod est absurdum.

Age per d indefinitam VZ parallelam XY, & circuli tangentem; si curva occurreret ipsi VZ tunc fieret $y = 2a$, adeoque æquatio ad curvam fieret $8a^3 = 2axx - 2axx = 0$, quod

Nunc ex puncto C, ubi recta QC occurrit curvæ, duc ad punctum H rectam HC secantem circulum in R, & rectam VZ in N. Junge HO, Od; & ex R age RK parallelam ipsi VZ.

VZ. Jam CQ est ad QH ut RK ad KH; sed CQ ad QH est ut HQ ad QO, & RK ad KH ut Kd ad KR, igitur HQ ad QO ut dK ad, KR, similia sunt itaque triangula dKR, HQO; quare angulus QHO æqualis angulo KdK, & arcus Od arcui RH, ac recta HO æqualis dR, id est, dK æquat HQ, & RN æquat CH.

Quæ cum sit descriptio curvæ, quam veteres dixere *Cissoïdem*, patet nostram curvam esse quoque *Cissoïdem*.

Veteres hujus curvæ ope duas medias inter duas datas rectas invenerunt ut tradit *Pappus Collect. Math. Lib. III. Prop. V.*

TAB. IV.
Fig. 5.

Sed hoc problema potest aliquanto reddi generalius. Quia normæ DEF crux unum DE semper transire debet per punctum D, & alterum EF semper labi super rectam AF, patet quod quando punctum F cadit in A, & tota FE super totam AD, punctum E commune ambobus normæ cruribus debet cadere super D, & punctum C super H; atque ideo AF, AD, AH, FC semper debent æquari. Potest igitur hypothesis mutari, ponendo EF divisam esse in C non bifariam, sed secundum quamvis rationem. Sit, ex. gr. $DA = EF = a$, & $CF = AH = BI = \frac{am}{n}$, erit $BC = y - \frac{am}{n}$, & $BF = \sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)}$. Verum BF $\left(\sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)}\right) \cdot FC \left(\frac{am}{n}\right) :: EF (a)$. $FG = \frac{aam}{n\sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)}}$, & $FB \left(\sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)}\right)$. $BC \left(y - \frac{am}{n}\right) :: AD (a) \cdot AG = \frac{any - aam}{n\sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)}}$, ergo $x + \sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)} = \frac{ay}{\sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)}}$, & $x\sqrt{\left(\frac{2am}{n} - yy\right)} = ay + yy - \frac{2am}{n}$, & quadrando, $\frac{2amyx}{n} - xxyy = y^4 + 2ay^3 - \frac{4amy^2}{n} + aayy - \frac{4aamy}{n} + \frac{4aamy}{nn}$, in qua si ponas $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, habebis $ayxx - xxyy = y^4$, aut $axx - xxy = y^4$.

151. Quin, etiam si anguli DAF, DEF essent

obliqui & inæquales, problema resolvi posset TAB. P. hoc modo. Ex dato puncto D duc DM fa- Fig. 4.

cientem angulum DMF æqualem dato DEF, & DN ad rectos angulos ipsi AF. Ex C age CB facientem quoque angulum CBF æqualem DEF, & CL normalem. Dic $MD = a$, $DN = b$, $NM = c$, $EF = f$, $FC = g$, & variables $MB = x$, $BC = y$. Triangula similia MDN, BCL dant $MD (a) : DN (b) ::$

$BC (y) \cdot CL = \frac{by}{a}$, est ideo $LF = \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}$. Item $DM (a) \cdot MN (c) :: CB (y)$.

$BL = \frac{cy}{a}$, qua propter $BF = \frac{cy}{a} + \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}$. Sed triangula GFE, CFB habentia

communem angulum ad F, & angulum GEF æqualem CBF, similia sunt, ut & triangula FEG; GDM, ergo $BF \left(\frac{cy}{a} + \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}\right) \cdot FC$

$(g) :: EF (f) \cdot FG = \frac{fg}{\frac{cy}{a} + \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}}$, &

$FB \left(\frac{cy}{a} + \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}\right) \cdot BC (y) :: DM (a) \cdot$

$MG = \frac{ay}{\frac{cy}{a} + \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}}$; unde $MG + GF$

$= \frac{ay + fg}{\frac{cy}{a} + \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}} = x + \frac{cy}{a} +$

$\sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)} = MB + BF$; & sublata fra-

ctione $ay + fg = \frac{cxy}{a} + x\sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)} +$

$\frac{ccyy}{aa} + 2\frac{cy}{a}\sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)} + gg - \frac{bby}{aa}$,

& (cunctis ductis in aa , translatis terminis

commensurabilibus, & asymmetris divis per

quantitates rationales, per quas multiplicati

sunt) $\frac{bby - ccy + a^2y - acxy + aafg - aagg}{aax + 2acy}$

$= \sqrt{\left(gg - \frac{bby}{aa}\right)}$ & quadrando,

$4y^4 - 2bbccy^4 + 4y^4 + 2a^2bby^3 - 2abbccy^3 -$

$a^4xx + 4a^2cxy + 4aacyy$

$2a^2ccy + 2ac^2xy + 2aabbccfy -$

$a^4xx + 4a^2cxy + 4aacyy$

$2aabbccgy - 2aacccfy$

$a^4xx + 4a^2cxy + 4aacyy$

$$+ \frac{2aaccggyy + a^6yy - 2a^4cxxy + aacccxyy + 2a^5fgy - 2a^5ggy - 2a^4cfgy + 2a^4cggy}{a^4xx + 4a^3cxy + 4a^2ccyy} = \frac{aagg - bbyy}{aa}, \text{ ac (sublati fractionibus, deletis delendis, \& transponendo, ac dividendo altissimum terminum per datas)}$$

$$\begin{array}{r} + 2aabbfg \\ - 2aabbgg \\ + 2abbex \\ - 2aacfg \\ + 2a^5fg \\ + a^4ggff \\ + 2a^4bb \\ - 2aacgg \\ - 2a^5gg \\ - 2a^3cfx \\ + 2a^4g^3f \\ + 2a^4cc \\ + a^6 \\ - 2a^3cfx \\ + a^4g^4 \\ + 2ac^2x \\ - 2a^4cx \\ - 2a^3cggx \\ - a^4ggxx \\ + aacccx \\ + aabbxx \\ \hline b^4 + 2bbcc + c^4 \end{array} = 0,$$

& quia $NM^2 + ND^2 (cc + bb) = DM^2 (aa)$, erit $c^4 + 2bbcc + b^4 = a^4$, & $2abbex + 2ac^2x = 2a^4cx$; atque $2aabbgg + 2aacgg = 2a^4gg$; & $aabbxx + aacccx = a^4xx$, unde æquatio inducet hanc formam simplicior

$$\begin{array}{r} + 2\frac{bb}{a} \\ - 2\frac{cc}{a} \\ + 2\frac{cx}{a} \\ + 2\frac{bbf}{a} \\ - 2\frac{ccf}{a} \\ + \frac{aa}{a} \\ - 2\frac{cx}{a} \\ + \frac{xx}{a} \\ + 2\frac{aagf}{a} \\ - 2\frac{aag}{a} \\ - 2\frac{cfx}{a} \\ - 2\frac{cggx}{a} \\ + \frac{ffg}{a} \\ - 2\frac{fg^3}{a} \\ + \frac{g^4}{a} \\ - \frac{ggxx}{a} \end{array} = 0,$$

Occurret autem hæc curva rectæ MF in puncto P, facta $MP = EC$, quod apparet ex generi, aut etiam ex æquatione, posita $y = 0$; restat enim $ffg - 2g^3 + g^4 = ggxx$, aut $f - 2g + g^2 = xx$, & $f - g (EC) = x$; at difficilior inveniretur ubi ea occurrat rectæ DM.

152. Si vero, ceteris stantibus, angulus DMF evaderet rectus, tunc $a = b$, & $c = 0$, & æquatio hæc fieret

$$y^4 + 2ay^3 - 2gg yy + 2aag y - 2fg^3 + g^4 - ggxx = 0$$

Inveniretur ubi curva occurrit rectæ DM, ponendo $x = 0$; nam æquatio superior fiet

$$y^4 + 2ay^3 - 2gg yy + 2aag y - 2fg^3 + g^4 = 0,$$

& extracta radice $yy + ay + fg - gg = 0$, unde $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{4} + gg - fg\right)}$.

153. Si vero in hypoth. Num. 151. & 152 fieret $a = f$, æquatio Nr. 151. mutaretur in hanc

$$\begin{array}{r} + 2\frac{bb}{a} \\ - 2\frac{cc}{a} \\ + 2\frac{cx}{a} \\ + 2\frac{bbf}{a} \\ - 2\frac{ccf}{a} \\ + \frac{aa}{a} \\ - 2\frac{cx}{a} \\ + \frac{xx}{a} \\ + 2aag \\ - 2aag \\ - 2cfx \\ - 2cggx \\ + aagg \\ - 2ag^3 \\ + g^4 \\ - ggxx \end{array} = 0,$$

& ex genesi patet, quod tunc curva occurreret rectæ DM in Q, ita ut QM = CF. Aequatio numeri 152 hanc induceret formam

$$y^4 + 2ay^3 + \frac{2ag}{aa}yy + \frac{2ag}{xx} = 0$$

& (si curva occurrat rectæ DM) $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa-4ag+4gg}{4}} = \frac{-a \pm a-2g}{2}$, ubi ex genesi noscimus, quod fumere debemus $y = \frac{-a+a-2g}{2} = -g$, ut supra.

Et si præterea in hypothesibus Ni. 154. esset $2g = a$, æquatio prima fieret

$$y^4 - \frac{bb}{g}y^3 + \frac{bb}{cc}yy + \frac{4g^3}{3cgx} + \frac{g^4}{ggxx} = 0$$

& secunda, $y^4 + 4gy^3 + 3ggyy + 4g^2y + g^4 = 0$, quæ divisa per $y + g$ dat æquationem, quam *Newtonus* invenit in prima hujus problematis resolutione, memento tantum nos vocasse g lineam quam dixit a .

TAB. P.
Fig. 5.

Si vero anguli dati DEF crux unum EF caderet super alterum ED, tunc negligi posset pars CE, & recta CG semper foret magnitudine data. Aequatio hujus curvæ posset a superioribus deduci, sed præstat calculum instaurare. Igitur, facto angulo CBL æquale DAN, & ductis DN, CL normalibus; sint DA = a , AN = c , ND = b , AB = x , BC = y , CG = f ; & quia AD (a). DN (b) BC (y). CL = $\frac{by}{a}$, & AD (a). AN (c) :: CB (y). BL = $\frac{cy}{a}$, erit GL = $\sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})}$, & GB = $\sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})} - \frac{cy}{a}$, ac NG = $x - c + \frac{cy}{a} - \sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})}$; sed DN (b). NG ($x - c + \frac{cy}{a} - \sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})}$) :: CL ($\frac{by}{a}$). LG ($\sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})}$), igitur $\frac{xy - cy}{a} + \frac{cyy}{aa} - \frac{y}{a} \sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})} = \sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})}$ & (cunctis ductis in aa , asymmetrisque in unam partem conjectis) $axy - acy + cyy = (aa + ay) \sqrt{(ff - \frac{bbyy}{aa})} = (\frac{aa + ay}{a}) \sqrt{(aaff - bb yy)} = (a + y) \sqrt{(aaff - bb yy)}$; igitur quadrando $aa xxyy - 2aacxyy + 2acxy^2 + aacyy^2 - 2accy^3 + ccy^4 = a^4 f^2 - aabyy + 2a^2 ffy - 2abyy^2 + aaffyy - bby^4$, & (conjiendo terminos omnes ad eandem partem, ac dividendo per $bb + cc$, vel per æqualem aa)

$$y^4 - 2\frac{cc}{a}y^3 + \frac{2cc}{aa}yy - 2affy - aaff = 0$$

Si curva hæc alicubi accurreret rectæ AB, aliquantulum distare a recta AB; sed quo magis ea recedit a normali DN, eo acutior fit angulus DGN, vel par CGL, adeoque normalis CL semper decrescit, vel curva accedit ad rectam, quam tamen nunquam attingit, quæ duæ sunt proprietates characteristicæ asymptotorum.

Ubi

PROB. XXXV.

Si datae longitudinis recta ED angulum datum EAD subtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli istius latera AD & AE perpetim contingant; proponatur curvam FCG determinare quam punctum quodvis C in recta ista ED datum describit.

TAB. IV.
Fig. 6.

A dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB = x, BC = y, CE = a & CD = b, & propter similia triangula DCB, DEA, erit EC.AB::CD.BD; hoc est a.x::b.BD = $\frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculari CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH, sit a.e::BC.BH, & erit BH = $\frac{ey}{a}$. Aufer hanc de BD & restabit HD = $\frac{bx - ey}{a}$. Jam in trian-

gu-
Ubi DC cadit in VD, est VN par GC, ut patet ex genesi. Et hæc quidem si una ex coordinatis ponatur parallela ipsi BC; sed melius fiet NL = x, LC = y, quo casu punctum A, unde incipiunt omnes x, cadit in N, c = 0, a = b, quibus substitutis in æquatione, ea convertitur in hanc simpliciore

$$y^4 + 2ay^3 + aa yy - 2affy - aaff = 0$$

TAB. P.
Fig. 5.

Si data GC sumpta fuisset infra rectam AB, y fieret negativa quantitas, & æquatio ad hanc curvam deduceretur ex superiore mutatis signis terminorum in quibus index ipsius y est impar; unde fieret

$$y^4 - 2ay^3 + aa yy + 2affy - aaff = 0$$

Hic revoca quæ supra notavimus, quibus adde, quod cum GC est minor, aut æqualis DN, curva CV semel occurrit rectæ DN inter D & N si GC est minor quam DN; in ipso puncto D si æqualis; sed cum CG, aut ei par NV, major est quam ND, curva occurret rectæ ND in duobus punctis V, & D.

TAB. Q.
Fig. 1.
Nam finge rectam, quæ semper transiens per D describit curvam, esse NV: jam erit V punctum ad curvam. Centro D radio NV describe arcum secantem rectam NG in g, erit

Dg æqualis NV, & rursus D ad curvam. Quamdiu vero rectæ extremitas altera versabitur inter N & g, puta in y, erit yD minor quam Dg; quare altera hujus rectæ extremitas describit arcum D.V. Quum autem ea transgressa fuerit g, erit GD major quam gD, & punctum datum describet curvæ arcum DC. Eadem dicenda sunt cum recta ex N trahitur versus M.

Hæ curvæ dicuntur *Conchoides Nicomedea* a Nicomede inventore, & punctum D vocatur *polus*, recta NG *Regula* vel *directrix*, & NV *intervallum*.

Hinc facile dato angulo CbL, & extra eum puncto D, agitur per D recta quæ ita secet anguli crura, ut interjecta pars CG æquet rectam datam.

Nam ex D in alterum anguli dati crus Lb (productum quatenus opus est) demitte normalem DN, ex qua producta abscinde NV datæ parem; ex polo D, regula NL, intervallo NV describe conchoidem. Et quia recta BC, quo magis producitur, eo magis recedit a NL cui semper conchois accedit, patet quod aliquando recta, & curva sibi occurrent. Occurrant in C, age CD, & erit CG cruribus anguli comprehensa æqualis datæ, ut liquet.

Hæc curva Nicomedes duas invenit medias continue proportionales inter duas datas, & angulum trifariam divisit. Hujus usum videbimus in *appendice* de æquationum constructione lineari.

gullo BCH, propter angulum rectum BHC, est $BCq - BHq = CHq$, hoc est $yy - \frac{ecyy}{aa} = CHq$. Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, est $CDq - CHq = HDq$, hoc est $bb - yy + \frac{ecyy}{aa}$ ($= HDq = \frac{bx - cy}{a}$ quadrato) $= \frac{bbxx - 2bexy + ecyy}{aa}$. Et per reductionem $yy = \frac{2be}{aa} xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$, Ubi cum incognitæ quantitates sint duarum tantum dimensionum, paret curvam esse conicam sectionem. Præterea extracta radice, fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{(ecxx - aaxx + a^4)}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficientis ipsius xx est $ee - aa$. Atqui erat $a.e :: BC.HB$; & BC necessario major est linea quam BH, nempe hypotenusa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e , & $ee - aa$ negativa est quantitas, atque adeo curva erit ellipsis. (k)

PROB.

TAB. Q. Fig. 2. (k) Hujus ellipseos diametri sic inveniri possunt, sume $AL = \frac{aa}{b}$, per L age LM parallelam AE, & æqualem e . Duc indefinitam AM. Jam pone $\frac{b}{aa} \sqrt{(ecxx - aaxx + a^4)} = 0$, erit $x = \pm \frac{aa}{\sqrt{(aa - ee)}}$. Sit $AQ = a$; Ex Q age in AD normalem QN: erit $AN = \sqrt{(aa - ee)}$. Quare tertiam post AN & AQ, quæ sit AO. $= Ao$. Age OV, ou parallelas AE. Diameter vero secunda invenitur ponendo $x = 0$, nam A est centrum, ut apparet, tunc autem habetur $y = \pm b = AP = Ap$. Nam hoc centro, hisque diametris conjugatis describe ellipsum VPup; & ex quovis puncto C duc ordinatam CR occurrentem AD in B. Jam, quia $AL (\frac{aa}{b})$. LM (e) :: AB (x). BR $= \frac{bex}{aa}$, erit $CR = y - \frac{bex}{aa}$. Dic AM $= f$; & quia LA ($\frac{aa}{b}$). AM (f) :: BA (x). AR :: AO ($\frac{aa}{\sqrt{(aa - ee)}}$). AV; erunt, $AR = \frac{bf x}{aa}$, & $AV = \frac{bf}{\sqrt{(aa - ee)}}$ $= An$; igitur $VR = \frac{bf}{\sqrt{(aa - ee)}} - \frac{bf x}{aa}$, & Ru

$= \frac{bf}{\sqrt{(aa - ee)}} + \frac{bf x}{aa}$; quare uRV rectangulum $= \frac{bbff}{aa - ee} - \frac{bbffxx}{a^4}$; sed uRV. RC :: AV. AP, ergo $\frac{bbff}{aa - ee} - \frac{bbffxx}{a^4} = yy - \frac{2bexy}{aa} + \frac{bbexxx}{a^4} :: \frac{bbff}{aa - ee} . bb$, & invicem ducendo extremas, & dividendo per mediarum alteram $yy - \frac{2bexy}{aa} + \frac{bbexxx}{a^4} = bb - \frac{aabbxx + bbexxx}{a^4}$, id est, $yy = 2 \frac{be}{aa} xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$, æquatio construenda.

Si angulus EAD esset rectus, $BH = \frac{ey}{a} = 0$, adeoque æquatio fieret $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, & $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}$. Si $\sqrt{(aa - xx)} = 0$, esset $x = \pm a$, quæ foret una ex semi-diametris, & (ponendo $x = 0$) $y = \pm b$, quæ esset altera.

PROB. XXXVI.

Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo
subtendat angulum rectum EAB, dum terminus alterius
cruris BD describat curvam aliquam lineam FDG;
invenire lineam istam FDG quam punctum D
describit.

TAB. IV.
Fig. 7.

A puncto D ad latus AC demitte perpendicularum DC; & dictis $AC = x$,
& $DC = y$, atque $EB = a$ & $BD = b$; in triangulo BDC propter
angulum rectum ad C, est $BC^2 = BD^2 - DC^2 = bb - yy$. Ergo
 $BC = \sqrt{bb - yy}$ & $AB = x - \sqrt{bb - yy}$. Præterea propter similia
triangula BEA, DBC, est $BD : DC :: EB : AB$. hoc est $b : y :: a : x -$
 $\sqrt{bb - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, sive $bx - ay =$
 $b\sqrt{bb - yy}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy =$
 $\frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extracta radice $y = \frac{abx + bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$.

Unde patet iterum curvam esse ellipsim. (1)

Hæc ita se habent ubi anguli EBD & EAB recti sunt. Sed si anguli
isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales, sic pro-

ce-

TAB. Q.
Fig. 2.

(1) Cape $AL = a + \frac{bb}{a}$. Per L age LM
parallelam AP, & æqualem b. Duc indefini-
tam AM. Nunc ponendo, $\frac{bb}{aa + bb} \sqrt{aa + bb -$
 $- xx} = 0$; est $x = \frac{bb}{a} \sqrt{aa + bb}$
 $= AO = Aa$; per O, & a duc OV, cu-
parallelas AP. Erit uV altera diametrorum. Quia
A est centrum, pone $x = 0$; unde $y = \frac{bb}{aa + bb}$
 $\sqrt{aa + bb} = \frac{bb}{\sqrt{aa + bb}}$, cui pares ab-
scinde AP, Ap: erit Pp diameter conjugata.

Nam $AL (a + \frac{bb}{a}) . LM (b) :: AB (x) . BR ::$
 $AO (\sqrt{aa + bb}) . OV$; quare $BR = \frac{abx}{aa + bb}$,
& $OV = \frac{a\sqrt{aa + bb}}{aa + bb} = \frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$. Dic
 $AM = f$; quia $AL (a + \frac{bb}{a}) . AM (f) :: AB$
 $(x) . AR :: AO (\sqrt{aa + bb}) . AV$, est AR
 $= \frac{afx}{aa + bb}$, & $AV = \frac{a\sqrt{aa + bb}}{aa + bb}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{af}{\sqrt{aa + bb}} = Au; \text{ ergo } uR = \frac{af}{\sqrt{aa + bb}} \\ &+ \frac{afx}{aa + bb}, \text{ RV} = \frac{af}{\sqrt{aa + bb}} - \frac{afx}{aa + bb}; \\ &\& \text{ rectangulum VRu} = \frac{aaff}{aa + bb} - \frac{aaffxx}{(aa + bb)^2}, \\ &RC = y - \frac{abx}{aa + bb}, \& RC^2 = yy - \\ &2 \frac{abxy}{aa + bb} + \frac{aabbxx}{(aa + bb)^2}; \text{ sed } uRV . RC^2 :: \\ &AV^2 . AP^2, \text{ aut } \frac{aaff}{aa + bb} - \frac{aaffxx}{(aa + bb)^2} \text{ ad} \\ &yy - 2 \frac{abxy}{(aa + bb)} + \frac{aabbxx}{(aa + bb)^2} \text{ ut } \frac{aaff}{aa + bb} \\ &\text{ad } \frac{abx}{aa + bb}; \text{ quare } yy - 2 \frac{abxy}{aa + bb} \\ &+ \frac{aabbxx}{(aa + bb)^2} = \frac{l^4}{aa + bb} - \frac{l^4xx}{(aa + bb)^2}, \\ &\text{vel } \frac{abx}{aa + bb} = yy - 2 \frac{abxy}{aa + bb} \\ &+ \frac{aabbxx + l^4xx}{(aa + bb)^2} = yy - \frac{2abxy + bbxx}{aa + bb}, \\ &\text{æquatio proposita.} \end{aligned}$$

Li 3

(m)

TAB. IV.
Fig. 8.

cedendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut ante, & agatur DH constituens angulum DHA æqualem angulo HAE, puta obtusum, dictisque $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$, & $HD = y$, propter similia trian- gula EAB, BHD, erit $BD : DH :: EB : AB$. hoc est $b : y :: a : AB = \frac{ay}{b}$.

Aufer hanc de AH, & restabit $BH = x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, as- sume DH ad HC in ratione quavis data puta b ad e , & cum DH sit y , erit $HC = \frac{ey}{b}$, & $BH \cdot HC = \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD est $BDq = BHq + DHq + 2BH \cdot HC$, hoc est $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{(eeyy - bbyy + bbbb)}}{b}$. Ubi cum b sit major e , hoc est $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam esse ellipsim. (m)

PROB. XXXVII.

TAB. IV.
Fig. 9.

In dato angulo PAB actis utcumque rectis BD; PD in data ratione hac semper lege, ut BD sit parallela AP, & PD terminetur ad punctum P in recta AP datum; invenire locum puncti D.

Age CD parallelam AB & DE perpendicularem AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$, sitque BD ad PD in ratione d ad e , & erit AC

TAB. Q.
Fig. 3.

(m) Fac angulum LAP æqualem angulo EAP. Posito quod a sit minor quam e , cape $AL = b$. Duc LM parallelam AH, & æqualem $a - e$, quæ cadet versus p, ob $a - e$ negativam, age indefinitam MA. Sit nunc $\sqrt{\frac{eeyy - bbyy + l^4}{b}} = 0$; erit $y = \pm \frac{bb}{\sqrt{bb - ee}}$ $= AO = Ao$. Duc QV, ov parallelas AH; erit Vv una ex diametris, pone nunc $y = 0$, quia A est centrum, & invenies $x = \pm b = AP = Ap$. Circa has diametros describe ellipsim, & erit quæsitæ.

Nam ex quolibet ellipseos puncto D age DH ipsi AL parallelam, & DF parallelam PA. Erit $HD = AR = y$, & $AH = RD = x$: quia AL (b). LM ($a - e$) :: AR (y). RF = $\frac{ey - ay}{b}$, erit $FD = x + \frac{ey - ay}{b}$, & $FD^2 = xx + \frac{2exy - 2aeyy}{b} + \frac{eeyy - 2aeyy + aayy}{bb}$. Dic $AM = f$: quia AL (b). AR (y) :: AM (f).

$AF :: AO (\frac{bb}{\sqrt{bb - ee}}) \cdot AV$, erit $AF = \frac{fy}{b}$, & $AV = \frac{bf}{\sqrt{bb - ee}} = Av$; quapropter $vF = \frac{bf}{\sqrt{bb - ee}} + \frac{fy}{b}$, & $FV = \frac{bf}{\sqrt{bb - ee}} - \frac{fy}{b}$, ac rectangulum vFV = $\frac{bbff}{bb - ee}$. $\frac{ffyy}{bb}$. Ast vFV . FD :: AV . AP, vel $\frac{bbff}{bb - ee} - \frac{ffyy}{bb} \cdot xx + \frac{2exy - 2aeyy}{b} = \frac{bbff}{bb - ee} \cdot bb$, vel $xx + \frac{2exy - 2aeyy}{b} + \frac{eeyy - 2aeyy + aayy}{bb} = bb - yy + \frac{eeyy}{bb}$, quæ (deletis delendis) est æ- quatio superior.

AC vel BD = $a - x$, & PD = $\frac{ea - ex}{d}$. Sit insuper, propter datum
angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f , & erit CE = $\frac{fy}{d}$, & EP =
 $x - \frac{fy}{d}$. Atqui, propter angulos ad E rectos, est CDq — CEq (= EDq)
= PDq — EPq, hoc est $yy - \frac{ffy}{dd} = \frac{eaa - 2eex + eexx}{dd} - xx$
+ $\frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobique $\frac{ffyy}{dd}$, terminisque rite disposi-
tis, $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eaa - 2eex + eexx - ddx}{dd}$. Et extracta radice

$y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{(eaa - 2eex + eexx - ddx)}}{d}$. Ubi cum x & y in æquatione pe-
nultima non nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit co-
nica sectio, eaque hyperbola, parabola, vel ellipsis, prout $ee - dd + ff$,
(coefficientens ipsius xx in æquatione posteriore,) sit majus, æquale, vel mi-
nus nihilo. (n)

PROB.

TAB. Q. (n) Quia d est quantitas arbitraria pone eam
Fig. 4.5.6. æqualem a , erit ideo

$$y = \frac{fx}{a} \pm \frac{\sqrt{(aace - 2acex + eexx + fxx - aaxx)}}{a}$$

Fac AF = f , & age indefinitam PF. Est igitur AP ad AF ut CD ad CE: sed anguli PAF, DCE sunt æquales, ergo triangulum PAF simile est triangulo DCE, & angulus F æqualis recto E.

TAB. Q. Nunc super ab ipsi AP parem, fac angulum
Fig. 7. $\beta\gamma$ æqualem angulo PAF, & descripto super
diametrum ab semicirculo rectæ $\alpha\gamma$ occurrente
in γ , perficiatur triangulum rectangulum
 $\alpha\gamma\beta$: erit, ut patet, hoc triangulum æquale
& simile triangulo AFP (figg. 4. 5. 6) & $\alpha\gamma$
æqualis AF. Aut igitur ab ad $\beta\gamma$ eandem ha-
bet rationem, ac a ad e , aut minorem, aut ma-
jorem.

Si primum, erit $\beta\gamma = PF = e$, & $aa =$
 $ee + ff$, quo circa $y = \frac{fx \pm \sqrt{(aace - 2acex)}}{a}$,
æquatio ad parabolam. Pone $\frac{\sqrt{(aace - 2acex)}}{a} = 0$,

& inuenies $x = \frac{a}{2} = PO$. Duc OV paral-

lelam AF: erit V vertex curvæ, VP = $\frac{e}{2}$,
Fig. 4.

& VH axis. In $\frac{\sqrt{(aace - 2acex)}}{a}$ fac $x = 0$;
cadet ordinata in P, & æquabit e , est igitur
P focus, & PQ semiparameter.

Si secundum; erit $\beta\gamma$ major quam e . Finge
Fig. 7. $e = \gamma\delta$, cadet punctum δ inter α & β , quo
circa aa majus erit quam $ff + ee$, & æquatio
superior ad ellipsim spectabit. Pone

$$\frac{\sqrt{(aace - 2acex + eexx + fxx - aaxx)}}{a} = 0, \&$$

$$\text{erit } xx = \frac{-2acex + aace}{aa - ff - ee}, \text{ vel}$$

$$x = \frac{-ace \pm \sqrt{(a^2ee - aaceff)}}{aa - ff - ee}$$

$$= \frac{-ace \pm ae \sqrt{(aa - ff)}}{aa - ff - ee}$$

Sume Pk = $\frac{ace}{aa - ff - ee}$, & hinc inde kO =

Fig. 5.

PROB. XXXVIII.

Rectis duabus VE & VC positione datis, & ab alia recta PE circa polum positione datum P vertente, sectis utcumque in C & E; si recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

TAB. V.
Fig. 1.

Age VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic VP = a, VA = x, & AD = y, & cum detur ratio CD ad DE, vel converse ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit EB = $\frac{ey}{d}$. Præterea, cum detur angulus EVB, adeoque ra-

tio EB ad VB, sit ista ratio e ad f, & erit VB = $\frac{fy}{d}$. Denique propter similia triangula CEB, CDA, CPV, est EB . CB :: DA . CA :: VP . VC, & componendo EB + VP . CB + VC :: DA + VP . CA + VC. Hoc est

$\frac{ae \sqrt{aa - ff}}{aa - ff - ee}$. Age kK, OV, ov parallelas AF: erunt puncta K centrum, V & v vertices. Rursus in radicali pone x = o, & ordinata transiens per P = e.

Jam quia AP (a) . PF ($\sqrt{aa - ff}$) :: Pk $\frac{ae}{aa - ff - ee}$. PK = $\frac{ee \sqrt{aa - ff}}{aa - ff - ee}$: KV = $\frac{aa - ff}{aa - ff - ee}$, erit VP = $\frac{aa - ff - ee \sqrt{aa - ff}}{aa - ff - ee}$, & Pv = $\frac{aa - ff + ee \sqrt{aa - ff}}{aa - ff - ee}$, ac VP . Pv = $\frac{aa - ff - ee \sqrt{aa - ff}}{aa - ff - ee} \cdot \frac{aa - ff + ee \sqrt{aa - ff}}{aa - ff - ee} = \frac{aa - ff - ee^2}{aa - ff - ee}$; sed VP . Pv . PQ² :: 2KV . π: igitur π = 2e, atque adeo est P focus, & PQ semiparameter.

TAB. Q.
Fig. 7.

Si tertium, erit βγ minor quam e; sit γλ = e: cadet punctum λ extra αβ; quare aa minor erit ff + ee, & superior æquatio ad hyperbolam pertinebit. Pone

$$\frac{\sqrt{aa - ff} - 2aex + cexx + ffx - aaxx}{a} = 0,$$

$$\text{erit } xx = \frac{2aex - aae}{ee + ff - aa}, \text{ \& } x =$$

$$\frac{ae \pm \sqrt{a^4 ee - aaeff}}{ee + ff - aa} =$$

$$\frac{ae \pm ae \sqrt{aa - ff}}{ee + ff - aa}.$$

Cape Pk = $\frac{aa}{ee + ff - aa}$, & hinc inde TAB. Q. Fig. 6.

ko = ko = $\frac{ae \sqrt{aa - ff}}{ee + ff - aa}$, & age kK, OV, ov, parallelas AF, erunt, K centrum, V, v vertices. In radicali finge x = o, & ordinata in P = e, & superioribus vestigiis insitens invenies π = 2e.

Nota quod in secunda hypothesi $\sqrt{aa - ff}$ = γλ est major quam e = γδ; itaque $\frac{ae \sqrt{aa - ff}}{aa - ff - ee}$ superat $\frac{ae}{aa - ff - ee}$, vel KV major est quam KP; sed in hac tertia est $\sqrt{aa - ff}$ = γλ minor quam γλ = e, quo circa $\frac{ae \sqrt{aa - ff}}{ee + ff - aa}$ superatur ab $\frac{ae}{ee + ff - aa}$, vel KV minor est quam KP. Quod optime convenit cum curvarum natura.

$\frac{ey}{d} + a \cdot \frac{fy}{d} :: y + a \cdot x$. Ductisque extremis & mediis in se, $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cum indefinitæ quantitates x & y non nisi ad duas dimensiones ascendunt, sequitur curvam VD, in qua punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x , est unius tantum dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y (o).

PROB.

TAB. Q. Fig. 8. (o) Cum d sit arbitrariæ magnitudinis, pone eam $= VP = a$; & quia DC. CE :: $a \cdot e$, & DC minor ponitur quam CE, erit a minor quam e ; sit VF $= e$. Duc FG parallelam VE. Erit VG $= f$, quia EB. BV :: FV. VG :: $e \cdot f$. Aequatio autem fiet $exy + aax = fyy + afy$, aut, dividendo per $ey + aa$, $x = \frac{fyy + afy}{ey + aa}$

(divisione reipsa facta)

$$\frac{efy + aef - aaf}{ee} + \frac{a^2f - a'ef}{e'y + aae}$$

Dic

$$u = \frac{efy + aef - aaf}{ee}$$

&

$\frac{a^2f - a'ef}{e'y + aae} = z$. Sit $u = 0$; erit $y = \frac{ae - aa}{e}$; quære igitur quartam post FV, VP, PF; ea erit $= y$. Hæc sit VH. Jam pone $y = 0$, fiet $u = \frac{aef - aaf}{ee}$; fac igitur FV (e). VG (f) :: HV ($\frac{ae - aa}{e}$). VK $= \frac{aef - aaf}{ee}$, & per K, H age indefinitam MQ, ea erit una ex asymptotis.

Nunc, quia diximus $z = \frac{a^2f - a'ef}{e'y + aae}$, erit $e'yz + aaez = a^2f - a'ef$; pone z infinitam, erit $y = \frac{aa}{e} = VL$: per L duc LM parallelam VB & occurrentem QM in M; hæc erit altera asymptotus, & M centrum. Pone $y = 0$, & restat $z = \frac{aaf - aef}{ee}$ æqualis VK

Tom. I.

si eam negative sumas, est enim $\frac{aaf - aef}{ee}$ quantitas negativa, ob a minorem quam e . Describe igitur inter asymptotos QMR hyperbolam transeuntem per V. Dico eam esse locum æquationis propositæ.

Duc enim quamlibet NA parallelam VF, & occurrentem curvæ in D, asymptoto in T, & rectæ VB in A; & per D age DQ parallelam asymptoto MR: dic AV $= x$, AD $= y$, FG $= m$. Jam GV (f), VF (e) :: AV (x). AN $= \frac{ex}{f}$:: QD. DT; sed TD $(= AD + TN - AN) = y + \frac{ae - aa}{e} - \frac{ex}{f}$, ergo QD $= \frac{fy}{e} + \frac{aef - aaf}{ee} - x$. Item VG (f). GF (m) :: AV (x). VN $= \frac{mx}{f} = TH$:: DQ ($\frac{fy}{e} + \frac{aef - aaf}{ee} - x$). QT $= \frac{my}{e} + \frac{aem - aam}{ee} - \frac{mx}{f}$:: VK ($\frac{aef - aaf}{ee}$). KH $= \frac{aem - aam}{ee}$. Rursus HL $= LV - VH = \frac{2aa - ae}{e}$, & VF (e). FG (m) :: LH ($\frac{2aa - ae}{e}$). HM $= \frac{2aam - aem}{ee}$: est igitur MQ $= MH + HT + TQ = \frac{aam}{ee} + \frac{my}{e}$, &

MK $= MH + HK = \frac{aam}{ee}$; sed MQ. QD $= MK \cdot KV$, ergo (restitutis symbolis, deletis delendis, cunctisque divis per m , & multiplicatis per ee) $fyy + afy = exy + aax$, quæ est æquatio nostra, & quæ donat æquationem Auctoris, reposita d pro a in aax .

Quod si a major esset quam e , id est, si omnes Kk

re

PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ AC, BC a duobus positione datis punctis A & B in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur; invenire locum puncti concursus C.

TAB. V.
Fig. 2.

Junge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque AB = a , AD = x , DC = y : Erit AC = $\sqrt{xx + yy}$. BD = $a - x$ & BC (= $\sqrt{BD^2 + DC^2}$) = $\sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Jam cum detur ratio AC ad BC, sit ista d ad e ; & extremis & mediis in se ductis, erit $e\sqrt{xx + yy} = d\sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Et per reductionem $\sqrt{\frac{ddaa - 2ddax}{ee - dd} - xx} = y$. Ubi cum xx sit negativum, & sola unitate affectum, atque etiam angulus ADC rectus, patet curvam in qua punctum C locatur, esse circulum. Nempe in recta AB cape puncta E & F ita ut sint $d.e :: AE.BE :: AF.BF$, & erit EF circuli hujus diameter. (p)

Et

TAB. R.
Fig. 1.

rectæ PE producendæ essent in D ut PE ad PD haberet datam rationem, tunc $\frac{ae - aa}{e}$

esset quantitas negativa; at $\frac{as - aa}{e} = -y$,

ergo, transferendo terminos omnes, $y = \frac{aa - as}{e}$,

igitur VH capi deberet in PV producta. Sed

inveneramus $u = \frac{aef - aaf}{ee}$ quæ est quantitas

negativa, sumere ergo debemus VK versus S, & per K, H agere indefinitam MQ; cetera vero ut supra: observa solum quod in prima hypothese VL minor est quam VP, quia est e major ad a (VP) minorem ut a ad VL; nunc autem est VL major quam VP, quia e minor est quam a . Debet autem hæc hyperbola contineri angulo SVN, & ei ad verticem, & superior angulo NVA, & ei ad verticem, ut positio asymptotorum & puncti in hyperbola satis ostendunt.

Si vero in æquatione ad curvam ponamus $x = 0$, sit $y = -a$, at in priori hypothese non potest hyperbola ingredi angulum SVN, nec ei ad verticem; igitur hyperbola opposita transibit per P. Sed in secunda hypothese per P transit ipsa hyperbola quam descripsimus.

Si $a = e$, patet locum esse rectam VE; quod etiam ex æquatione deducitur; tunc enim est

$$x = \frac{fyy + afy}{ay + aa} = \frac{fy(y + a)}{a(y + a)} = \frac{fy}{a}.$$

Ceterum etiam sic solvi potuisset problema. TAB. R. Reliquis positis, ut in Auctore, a puncto D Fig. 2.

agatur ipsi BU parallela DA rectæ UE occurrens in A; & a puncto P eidem BU parallela ducatur PF rectæ EU productæ occurrens in F. Dicatur FP = a ; FU = b ; UA = y ; AD = x , & sit CD ad DE ut FP (a) ad PG (d), & sit FG = $a + d = c$.

Est CD ad DE (ut a ad d), ut UA (y) ad AE = $\frac{dy}{a}$. Quare EU = $\frac{ay + dy}{a} = \frac{cy}{a}$,

atque FE = $\frac{ab + cy}{a}$. Sed PF (a) ad FE

($\frac{ab + cy}{a}$), ut DA (x) ad AE ($\frac{dy}{a}$): ergo fa-

ciam ex extremis $dy = \frac{abx + cxy}{a}$, quod

est factum ex mediis; & rursus habetur æquatio ad hyperbolam facile construenda.

(p) Ponamus d , quantitatem arbitrariam, æqualem a , & primo sit e major quam a .

Fac $y = 0 = \sqrt{\frac{a^4 - 2a^1x}{ee - aa} - xx}$, erit

$$xx = \frac{-2a^1x + a^4}{ee - aa}, \text{ ac } x = \frac{-a^1}{ee - aa} \pm$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^6}{(ee - aa)^2} + \frac{a^4}{ee - aa}\right)} = \frac{-a^1 \pm \sqrt{a^4 ee}}{ee - aa}$$

Et hinc e converso patet hoc theorema, quod in circuli cujusvis diametro EF infinite producta datis utcumque duobus punctis A & B hac lege ut sit AE.AF::BE.BF, & a punctis hisce actis duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum in puncto quovis C; erit AC ad BC in data ratione AE ad BE. (q)

PROB.

TAB. R.
Fig. 3.

$\frac{-a^1 + aae}{ee - aa} = (\text{si utaris } \frac{-a^1 + aae}{ee - aa}) \frac{aa}{e + a}$;
aut (si praeferas $\frac{-a^1 - aae}{ee - aa} = \frac{-aa}{e - a}$). Sed
 $e + a . a :: a . \frac{aa}{e + a}$, & est $e + a$ major
quam a , igitur etiam a major quam $\frac{aa}{e + a} = AE$.
Abscinde nunc AF = $\frac{aa}{e - a}$ & diametro EF
describere circulum.

Patet quod in hac hypothefi, punctum A
est inter E & F; est autem BE = BA - AE =
 $a - \frac{aa}{e + a} = \frac{ae}{e + a}$, & BF = BA + AF =
 $a + \frac{aa}{e - a} = \frac{ae}{e - a}$, & AE ($\frac{aa}{e + a}$) . EB
($\frac{ae}{e + a}$) :: a . e (multiplicando terminos hos
per $e + a$, & dividendo per a) :: AF ($\frac{aa}{e - a}$)
· FB ($\frac{ae}{e - a}$), multiplicando per $e - a$, & di-
videndo per a , quod analogiam non turbat.

TAB. R.
Fig. 4.

Si vero sit e minor quam a , erit $ee - aa$
quantitas negativa, ut $-a^1 + aae$, igitur
 $\frac{-a^1 + aae}{ee - aa}$ restabit positiva = $\frac{aa}{e + a}$, ut
antea, (dividendo scilicet per $e - a$). Ea sit AE.
Item quantitas positiva fiet $\frac{-a^1 - aae}{ee - aa} = \frac{aa}{a - e}$
(divisa nempe per negativam $-a - e$); sed
 $a - e . a :: a . \frac{aa}{a - e}$, & est $a - e$ minor quam
 a , ergo a etiam minor quam $\frac{aa}{a - e}$, huic pa-
rem abscinde AF, & punctum F cadet inter
A & B: rursus diametro EF describere circulum.
Dico hunc esse locum æquationis inven-
tentæ.

Infecte quamlibet ACB, & ex C demitte
CD ad rectos angulos super AB. Erit AD =
x in prima hypothefi, id est + x ubi D

cadit inter puncta A & B, & - x ubi cadit
inter A & F, aut in secunda hypothefi semper
AD = + x, DC = y in utraque hypothefi.

Item in prima hypothefi, DF æqualis FB—TAB. R.
BA + AD, cum D est inter A & B, aut Fig. 3.
FB—BA—AD, cum D est inter A & F,

semper = $\frac{ae}{e - a} - a + x = \frac{aa}{e - a} + x$,
& ED æqualis EA—AD, aut EA + AD,
semper = $\frac{aa}{e + a} - x$. Sed ex proprietate
circuli, rectangulum FDE æquat quadratum
ex CD, ergo $\frac{a^4}{ee - aa} + \frac{aa x}{e + a} = \frac{aa x}{e - a} -$
 $xx = yy = \frac{a^4 - 2a^1 x}{ee - aa} - xx$.

At in secunda hypothefi, DF æqualis AD + TAB. R.
FB—BA = x— $\frac{ae}{a - e} - a = x - \frac{aa}{a - e}$, Fig. 4.
& ED = EA—AD = $\frac{aa}{a + e} - x$; unde,
& ex natura circuli— $\frac{a^4}{aa - ee} + \frac{aa x}{a + e} +$
 $\frac{aa x}{a - e} - xx = \frac{-a^4 + 2a^1 x}{aa - ee} - xx = yy$.

(q) Cum sit AE ad EB ut AC ad CB, ut
AF ad FB, patet quod junctæ CF, CE bi- TAB. R.
secant angulos ACG in prima hypothefi, BCG Fig. 3. 4.
in secunda, & ACB in utraque.

Igitur arcus CE æquat arcum EH, & est
EF diameter, ergo CH ad rectos angulos est
super EF.

Ceterum hoc theorema deducitur ex prop.
2. lib. 2. Locor. plan. Apollonii restitutorum
a Roberto Simfon, quam lege. Idem etiam sic
demonstrari potest.

Sit circulus, cujus diameter EF, & a quovis TAB. R.
peripheria puncto H ad diametrum agatur per- Fig. 3.
pendicularis HD rursus occurrens peripheria in C,
& per C ducatur quavis recta occurrens diametro
in B & rursus peripheria in c, ac junctæ cH
diametrum conveniat in A: dico, ut AE ad

Kk 2

EB

PROB. XL.

Si punctum lucidum A radiis versus refringentem superficiem planam CD ejiciat; invenire radium AC, cujus refractus CB impinget in datum punctum B.

TAB. V.
Fig. 3.

A puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendicularum AD, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius BC in E, & perpendicularum a puncto B demissum in F, & agatur BD; dictisque $AD = a$, $BD = b$, $BF = c$, $DC = x$, statue rationem sinuum incidentiæ & refractio-

EB ita esse AC ad CB, & AF ad FB, & si AE sit ad EB ut AF ad FB erit CH vel ch perpendicularis diametro.

Jungantur CE, CF, CAh & ch diametro occurrens in d. Quia CH ad angulos rectos insitit diametro, erit arcus CE æqualis arcui EH, & arcus CeF æqualis FhH, quare trianguli ACH angulus CAH bisectatur recta BF: sed æquales sunt anguli ad verticem CAH; cAb, & CAD; bAd, ut & HAD; cAd; quare trianguli cAb angulus cAb bisectus est eadem recta BF; rectæ cA; Ab æque distant a centro; ideo sunt æquales, ut & anguli Ach; chA. Ergo recti sunt anguli circa punctum d; recta ch parallela recta CH; & arcus cC æqualis arcui bH; atque arcus cCE arcui EHb & reliquus cF reliquo Fh. Jam ergo æquales sunt anguli cCF; FCh insistentes æqualibus arcibus; id est trianguli ACB angulus exterior ACc bisectus est recta CF & est AE ad FB ut AC ad CB. Sed anguli cCA; ACB simul æquant duos rectos, id est bis angulum FCE, vel bis angulum FCA & bis angulum ACE; ergo demis æqualibus angulis cCA & bis FCA, manet angulus ACB æqualis bis angulo ACE, & ejusdem trianguli ACB angulus interior ACB bisectus est recta CE; quare AC ad CB ut AE ad EB. Unde patet propositum. Q. E. primum.

TAB. R.
Fig. 4.

Dico nunc quod si sit AE ad EB, ut AF ad FB, & per B agatur quævis chorda CBh, & juncta AC rursus occurrat peripheriæ in c, juncta ch secat diametrum ad rectos angulos. Non enim; sed si fieri potest, sit cM normalis diametro; duc CM diametro occurrens in L, erit FL major, aut minor quam FB. Sit major: ergo EL minor quam EB; sed AE ad EL ut AF ad FL, & alternando AE ad AF, ut EL ad LF, ut EB ad BF, & rursus alternando EL minor ad EB majorem ut FL

major ad FB minorem, quod est absurdum. Eodem pacto devenies ab absurdum si FL minorem ponas quam ipsa FB. Q. E. alterum.

Si in circuli diametro EF indefinite producta sumantur duo quævis puncta A, B, ita ut AE ad EB sit ut AF ad FB, & inflectatur quævis ACB, erit semper AC ad CB ut AF ad FB.

Occurrant AC, BC productæ iterum peripheriæ in c & b, agatur cdb per data puncta c, b, erit recta cb normalis ad diametrum, ergo patet propositum.

Si a duobus datis punctis inflectantur AC, CB, ita ut quævis potestas ipsius AC sit ad æque altam potestatem CB in data ratione, locus erit circulus sic describendus.

Esse debeat $AC^m \cdot CB^m :: d \cdot e$, quare inter d & e, medias continue proportionales numero m — 1, quarum prima sit e, tunc $d^m \cdot e^m :: d \cdot e$; quare debet esse AC . BC :: d . e: Seca itaque AB data puncta jungentem in F, ita ut AF . FB :: d . e, eamque producat ut AE . EB :: AF . FB, & diametro FE describe circulum. Hic erit locus quæsitus, ut patet.

Datam autem rectam AB sectam in F, produces in E, ut AF ad FB sit ut AE ad EB, sumendo FN ipsi FB parem, & querendo quartam BE post datas AN, NF, AB; nam quia AN ad NF est ut AB ad BE; etiam componendo AF ad (NF vel) FB ut AE ad EB.

Patet autem quod si imperata ratio esset æqualitatis, locus esset normalis bisecans rectam AB.

tionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED (r) esse d ad e , & cum EC & AC (ut notum est) (s) sint in eadem ratione, & AC sit $\sqrt{aa+xx}$ erit $EC = \frac{d}{e} \sqrt{aa+xx}$. Præterea est ED ($= \sqrt{EC^2 - CD^2} =$

$\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$, & DF $= \sqrt{bb-cc}$, atque EF $= \sqrt{bb-cc} + \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$. Denique propter similia triangu-
la ECD, EBF;

est ED:DC::EF:FB, & ductis extremorum & mediorum valoribus in se, $e \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x \sqrt{bb-cc} + x \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$,
five $(e-x) \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x \sqrt{bb-cc}$. Et partibus æqua-

tionis quadratis & rite dispositis, $x^4 - 2cx^3 + \frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx = 0$.

P R O B . X L I .

Invenire locum verticis trianguli D, cujus basis AB datur, & anguli ad basem DAB, DBA datam habent differentiam.

TAB. V.
Fig. 4.

Ubi angulus ad verticem, five (quod perinde est) ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circum-

TAB. R.
Fig. 5. (r) Nam, si per C agatur recta GH parallela rectæ EF, erit angulus GCA, angulus incidentiæ, est autem æqualis alterno CAD. Pariter angulus BCH est angulus refractionis & est æqualis opposito CED. Quare &c.

(s) Quia in triangulo ECA, latera EC; CA sunt ut sinus angulorum oppositorum CAE, vel CAD, & CEA.

(t) Pone quantitatem arbitrariam $d = b$, æquatio fiet

$$x^4 - 2cx^3 + \frac{bbccxx + aabbxx - eebbxx}{bb-cc} - \frac{2aabbcc + aabbcc}{bb-cc} = 0$$

aut, ponendo $cc + aa = ff$, & $bb - ee = gg$

$$x^4 - 2cx^3 + \frac{bbffxx - eebbxx - 2aabbcc}{gg} = 0$$

Fac $gy = xx$, quæ est æquatio ad parabolam, & ponendo $ggyy$ pro x^4 ; gxy pro x^3 , & gy pro xx , in æquatione postrema, habebis, dividendo per gg ,

$$yy - \frac{2cxy}{g} + \frac{bbffyy - bbeeyy}{g^2} - \frac{2aabbccx + aabbcc}{g^2} = 0$$

æquationem ad hyperbolam, cum diviso-
termini altissimi $yy - \frac{2cxy}{g}$, sint y & $y - \frac{2cx}{g}$,
inæquales & reales; quam facile describes e su-
perioribus.

ferentiam circuli; proposuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F. Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC occurrens BF in G. Dictisque $AB = a$, $AC = x$, & $CD = y$, erit $BC = a - x$. Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli, dabitur ratio laterum BC & GC; sit ista d ad a , & erit $GC = \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC

sive y , & restabit $DG = \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea, propter similia trian-

gula BGC, DGE, est BG . BC :: DG . DE. Est autem in triangulo BGC, $a . d :: CG . BC$; adeoque $aa . dd :: CGq . BCq$, & componendo $aa + dd . dd :: BGq . BCq$. Et extractis radicibus $\sqrt{aa + dd} . d (:: BG . BC) ::$

DG . DE. Ergo $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Adhæc cum angulus ABF sit

differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, similia erunt triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia DA . DC :: BD . DE. Sed est $DC = y$. DA (= $\sqrt{ACq + DCq}$) = $\sqrt{xx + yy}$. DB (= $\sqrt{BCq + DCq}$) = $\sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$,

& supra erat $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Quare est $\sqrt{xx + yy} . y ::$

$\sqrt{aa - 2ax + xx + yy} . \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Et extremorum & mediorum

quadratis in se ductis $aa yy - 2ax yy + xx yy + y^4 = \frac{dd xx yy + ddy^4}{aa + dd}$

$\frac{2aadxx - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx + a^4yy - 2a^3x^3}{aa + dd}$

$\frac{-2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa + dd}$

Duc omnes terminos in $aa + dd$, & prodeuntes redige in debitum or-

dinem, & orietur $x^4 + \frac{2d}{a} y x^3 + \frac{2dy}{aa} xx + \frac{2dd}{a} yy - \frac{2a}{a} x^4 - \frac{2dy}{a} x^3 - \frac{2dy}{a} x^2 - \frac{2dy}{a} x - \frac{2dy}{a} = 0$.

Divide hanc æquationem per $xx - ax + \frac{dy}{a}$, & orietur

$xx - \frac{a}{2d} x - \frac{yy}{a} = 0$. Duæ itaque prodierunt æquationes in solutione hu-

jus problematis. Prior $xx - ax + \frac{dy}{yy} = 0$ est ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD fumitur ad alias partes rectæ BF quam in figura describitur, existente angulo ABF summa angulorum DAB, DBA ad basem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Posterior

$xx - a - yy = 0$ est ad hyperbolam, locum puncti D ubi angulus FBD

fitum obtinet a recta BF quem in figura descripsimus, hoc est ita ut angulus ABF sit differentia angulorum DAB, DBA ad basem. Hyperbolæ autem hæc est determinatio. Biseca AB in P. Age PQ constituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR asymptoti hujus hyperbolæ, & B punctum per quod hyperbola transibit. (u)

Et

TAB. R. Fig. 6. (u) Si propositum fuisset problema. Invenire locum verticis D trianguli, cujus basis AB datur, & anguli ad basem DAB, DBA datam efficiunt summam, posses illud solvere ratiocinio prorsus eodem, nisi quod hic e GC demere deberes CD; sed nihilominus ad eandem æquationem devenires, ut facile videbis; debet igitur hæc æquatio ambabus hypothesebus inservire.

Posuimus autem angulum ABF, vel æqualem BDF, esse recto minorem, alioquin rectæ BF, CD coire nequissent in G, ut statuimus, est ergo angulus BDA obtusus, quapropter circuli centrum debet esse infra rectam BA.

Si nunc circulum, cujus segmentum terminatum recta BA debet esse capax anguli BDA, describas *Euclides* more, erit BG hujus circuli tangens, BM diameter, & L centrum, quod invenies bisecta chorda AB in H, & ex H ducta normali ipsi BA.

Junge AM, erit angulus ad A rectus, & AMB æqualis CBG; sunt igitur similia triangula rectangula CBG, AMB; & est AM ad AB, ut BC ad CG :: d . a , sed AB = a , ergo AM = d : quare HL aut CP = $\frac{d}{2}$, igitur DP = $y + \frac{d}{2}$. Pariter BL, vel LO, aut LO = $\sqrt{\left(\frac{aa+dd}{4}\right) (BH^2 + HL^2)}$, quo circuli OP (= LO + LQ - QP) = $\sqrt{\left(\frac{aa+dd}{4}\right) +$

$\frac{a}{2} - x$, & Po (= OL - LQ + QP) = $\sqrt{\left(\frac{aa+dd}{4}\right) - \frac{a}{2} + x}$. Sed ex proprietate circuli OP.Po = PD², ergo $ax - xx = xx + dy$, aut $xx - ax + \frac{dy}{yy} = 0$.

Atqui æquatio ab Auctore inventa debet etiam hanc continere, & quidem per multiplicationem, ergo dividendo restat

$xx + \frac{2dy}{a} - \frac{yy}{dd} = 0$, pro solutione problematis quod propositum fuerat.

Hyperbola facile determinatur & superioribus.

Est enim $y = \frac{dx}{a} - \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{aa+dd}{aa}\right) \frac{xx}{a} - \frac{x(aa+dd)}{a} + \frac{dd}{4}}$; & factis $u = \frac{dx}{a} - \frac{d}{2}$, ac $z = \sqrt{\left(\frac{aa+dd}{aa}\right) \frac{xx}{a} - \frac{x(aa+dd)}{a} + \frac{dd}{4}}$; ubi $u = 0$, est $x =$

$\frac{a}{2} = AP$, & cum $x = 0$, $u = -\frac{d}{2} = AL$. Proinde per P & L age indefinitam PL in ea erit vera diameter ordinarum AL, cujus positio determinata est secundum Num.

Et hinc prodit tale theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & terminis ejus ad hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, DB, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri constituent æquales.

Idem brevius.

Ad PROB. XXIV. Regulam de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad basem eodem modo se habet ad utrumque angulum; & in constructione schematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipsi BF parallelam, ac subtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec subtraho, sed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri subtraho. Deinde cum etiam ambiguum sit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC insitit, adhibeatur, neutrum adhibeo; sed biseco AB in P, & ad.

130. Sed est $LA \left(\frac{d}{2}\right) \cdot AP \left(\frac{a}{2}\right) :: d : a ::$
BC . CG, & sunt anguli ad A & C æquales,
igitur similia sunt triangu-
la PAL, GCB, &
angulus ALP æquat angulum CBG.

Pone nunc $o = z = \sqrt{\frac{(aa + dd)xx}{aa}}$
 $x \frac{(aa + dd)}{a} + \frac{dd}{4}$ erit $xx = ax - \frac{aadd}{4aa + 4dd}$
& $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4aa + 4dd}} = \frac{a}{2} \pm$

$\frac{aa}{2\sqrt{(aa + dd)}}$, & jam $AP = \frac{a}{2}$, ut in No.
104; quare ergo tertiam post LP $\frac{\sqrt{(aa + dd)}}{4}$,
& PA $\left(\frac{a}{2}\right)$; hæc sit PN = Pn, & age NO,
no parallelas AL; erunt O, o vertices hyper-
bolæ oppositarum, ut ex No. 135.

Atqui triangu-
la similia LAP, ONP dant
LP . PA :: OP . PN, & fecimus LP . PA ::
PA . PN, ergo PA . PN :: PO . PN, quare
est OP = PA = $\frac{a}{2}$, igitur OP, PA sunt
diametri æquidistantes ab axe, nam hyperbo-
la transit per B & per A, quia si in æquatio-
ne ponas $y = 0$, est $xx - ax = 0$, id est
 $x = 0$, vel $x = a$.

Sed LP² — PO² $\left(\frac{dd}{4}\right) \cdot LA^2 \left(\frac{dd}{4}\right) :: OP^2$.

xx , est igitur $x = \frac{a}{2}$, & hyperbola est æqui-
latera, quapropter asymptoti sunt invicem ad
rectos angulos; sed axis bisecat angulum asym-
ptotorum, debent ergo asymptoti facere cum
diametris OP, PA angulos æquales; verum
anguli APL; PLA simul conficiunt unum re-
ctum, igitur fac angulum QPB æqualem di-
midio dato CBG, & recta QB erit asympto-
torum una, altera vero erit RP priori nor-
malis.

Nam age quamlibet MC parallelam AL, &
curvæ occurrentem in V: erit AC = x,
CP = $x - \frac{a}{2}$, & CV = y; sed quia AP
 $\left(\frac{a}{2}\right) \cdot AL \left(\frac{d}{2}\right) :: PC \left(x - \frac{a}{2}\right) \cdot CM = \frac{dx}{a}$
 $-\frac{d}{2}$; est MV = $\frac{dx}{a} - \frac{d}{2} - y$, & cum
AP $\left(\frac{a}{2}\right) \cdot PL \left(\frac{1}{2}\sqrt{(aa + dd)}\right) :: CP \left(x - \frac{a}{2}\right) \cdot PM = \frac{x}{a}\sqrt{(aa + dd)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa + dd)}$,
reperitur PM² = $xx + \frac{ddxx}{aa} - ax -$
 $\frac{ddx}{a} + \frac{aa + dd}{4}$; sed PM² — PO² = MV²
ergo $xx - ax = yy + dy - 2\frac{dxy}{a}$, quæ est
æquatio construenda.

adhibeo PC: vel potius acta MPQ constituenta hinc inde angulos APQ, ^{TAB. V.} BPM æquales dimidio differentię angulorum ad basem, ita ut ea cum ^{Fig. 5.} rectis AD, BD, constituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO, & adhibeo DO pro ordinatim applicata ac PO pro indefinita linea cui insistit. Voco itaque $PO = x$, $DO = y$, AR, vel $BN = b$, & PR vel PN = c. Et propter similia triangula BNM, DOM, erit $BN : DO :: MN : MO$: & dividendo, $DO - BN (y - b) : DO$

$(y) :: MO - MN (ON, \text{five } c - x) : MO$. Quare $MO = \frac{cy - xy}{y - b}$.

Similiter ex altera parte propter similia triangula ARQ, DOQ, erit AR: DO :: RQ. QO: & componendo $DO + AR (y + b) : DO (y) ::$

$QO + RQ (OR, \text{five } c + x) : QO$. Quare $QO = \frac{cy + xy}{y + b}$. Denique

propter æquales angulos DMQ, DQM, æquantur MO & QO, hoc est $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominato-

res, & oriatur $cy + bc - xy - bx = cy - bc + xy - bx$, five $cb = xy$, notissima æquatio ad hyperbolam. (v)

Quin etiam locus puncti D sine calculo algebraico prodire potuit. Est enim ex superioribus $DO - BN : ON :: DO : MO (QO) :: DO + AR : OR$. Hoc est $DO - BN : DO + BN :: ON : OR$, & mixtim (x)

$DO : BN :: \frac{ON + OR}{2} (NP) : \frac{OR - ON}{2} (OP)$. Adcoque DO in OP = BN in NP.

PROB.

(v) Hujus hyperbolæ constructionem ut nimis facilem, omitto.

(x) Est enim $DO - BN$ ad $DO + BN$ ut ON ad OR ; ergo $DO - BN + DO + BN (2DO)$ ad $DO + BN$ ut $NO + OR$ ad OR ; ergo etiam $DC + BN$ ad $DO + BN - DO + BN (2BN)$ ut OR ad $OR - ON$; quare ex æquo ordinate, $2DO$ ad $2BN$ ut $RO + ON$ ad $RO - ON$, & dividendo per 2. &c.

Sed idem problema facilius solvit Robertus Simson in appendice ad suas sectiones conicas, edit. 2a; hoc pacto.

Est triangulum ABC, cujus datur basis AB & excessus anguli ABC supra angulum BAC. Ipsi angulo BAC æqualis ponatur angulus BCD.

Cum sit angulus ABC æqualis utrique BDC & DCB, vel BAC, simul; erit angulus BDC excessus anguli ABC supra angulum BAC; atque ideo dabitur angulus BDC per hypot.

Nunc triangula ADC; BDC, quæ habent communem angulum ad D & æquales angulos DAC; DCB, sunt æquiangula; ergo AD ad DC ut CD ad DB, & rectangulum sub AD; DB est æquale quadrato ex DC, & datus est angulus ADC; quare punctum C tangit hyperbolam æquilateram, quæ describitur bisecta AB in E, & ducta EF æquali ipsi AE vel EB, & constituenta angulum AEF æqualem dato angulorum excessui. Erunt AE; EL, semidiametri conjugatæ, quarum transversa & integra erit AB.

PROB. XLII.

Locum verticis trianguli invenire cujus basis datur & angulorum ad basem unus dato angulo differt a duplo alterius.

TAB. V.
Fig. 5.

In schemate novissimo superioris problematis fit ABD triangulum illud, AB basis bisecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB; & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. (y) Ad MQ demitte perpendiculara AR, BN, DO; & angulum DMQ biseca recta MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM similia; adeoque OQ . OM :: OD . OS, & dividendo OQ — OM . OM :: SD . OS :: (per 3. VI. Elem.) DM . OM Quare (per 9. V. Elem.) OQ — OM = DM. Dictis jam PO = x, OD = y, AR vel BN = b, & PR vel PN = c, erit, ut in superiore problemate, OM = $\frac{cy - xy}{y - b}$, & OQ = $\frac{cy + xy}{y + b}$, adeoque OQ — OM = $\frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}$.

Pone jam DOq + OMq = DMq, hoc est $yy + \left(\frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb}\right)yy = \left(\frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4}\right)yy$. Et per debitam reductionem (z) orietur

$$\text{tandem } y^4 - 2bbyy + b^4 + cc + 2bxx + b^4 - 2bb - 2cx yy + 4bcxy - 3bbcc - 3xx + 2bcc + bbxx = 0.$$

Divide omnia per $y - b$, & evadet $y^3 + byy + \frac{bb}{y} + \frac{b^3}{y} + \frac{cc}{2cx} + \frac{3bcc}{2bcx} - \frac{3xx}{bxx} = 0$.

Quare punctum D est ad curvam trium dimensionum; quæ tamen evadit hyperbola ubi angulus BPM statuitur nullus, sive angulorum ad basem unus DBA duplus alterius DAB. Tunc enim BN, sive b evanescente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$ (a).

Ex

(y) Cum angulus BPM sit triens anguli, quo angulus DBP superat duplum anguli DAP, & cum angulus DBP æquet angulos DMP, BPM simul; erit angulus DMP æqualis duplo angulorum DAP, APQ simul; at angulus DQM æquatur angulis DAP & APQ, ergo angulus DMP par est duplo angulo DQM.

(z) Reductio fiet ducendo yy in $y^4 - 2bbyy + b^4$, & $(cc - 2cx + xx)yy$ in $yy + 2by + bb$, (est enim $y^4 - 2bbyy + b^4 = (yy - 2by + bb)$

$(yy + 2by + bb)$) & deletis delendis, ac transponendo &c.

(a) Cum $y = \pm \sqrt{3xx + 2cx - cc}$ TAB. S: fit = 0, est $xx = \frac{-2cx + cc}{3}$, & $x = \frac{-c \pm \sqrt{4cc}}{3}$, Fig. 1.

quare $x = \frac{c}{3}$, aut $x = -c$. Abscinde

PV = $\frac{c}{3}$, quo circa erunt V, & R vertices

hy-

Ex hujus autem æquationis constructione tale elicitur theorema. Si cen-
tro C, asymptotis CS, CT, angulum SCT 120 graduum continentibus
describatur hyperbola quævis DV, cujus semiaxes sint CV, CA: produc
CV ad B, ut sit VB = VC, & ab A & B actis utcunque rectis AD, BD
concurrentibus ad hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD,
triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta.
Hoc intelligendum est de hyperbola quæ transfit per punctum V. Quod
si ab iisdem punctis A & B actæ rectæ Ad, Bd convenient ad conjugatam
hyperbolam quæ transfit per A: tunc externorum angulorum trianguli ad
basem, ille ad B erit duplus alterius ad A.

PROB.

hyperbolarum oppositarum, & tota diameter
 $VR = \frac{4c}{3}$, atque ideo dimidia $VC = \frac{2c}{3} = VN$.
Erit igitur quævis abscissa $PQ = x$, & RQ
 $= x + x$; sed $QV = x - \frac{c}{3}$, & $RQ \cdot QV =$
 $\frac{3xx + 2cx - cc}{3}$, quæ quantitas esse debet
ad ordinatæ quadratum ($yy = 3xx + 2cx - cc$)
:: $VC \cdot \left(\frac{4cc}{9}\right) \cdot \sigma\sigma = \frac{4cc}{3}$: sume hinc inde

$CL = Cl, = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ & circa has diametros descri-
be hyperbolam, quæ, ut constat, erit locus
æquationis.

Nunc dico quod angulus, quem faciunt
asymptoti est 120. graduum.

Nam per V acta KV ad rectos angulos, &
quæ asymptoto occurrat in K, & juncta NK,
quia NV æquat VC, erit NK æqualis KC; sed
sed quadratum ex KV, (CL) æquat ter qua-
dratum ex CV, igitur quadratum ex CK æquat
(quater quadratum ex CV vel) quadratum ex
CN: est igitur æquilaterum triangulum NCK,
quapropter angulus NCK est 60. grad. Q.E.D.

Hinc facilius hyperbolæ determinatio. Tri-
seca rectam RN; super duos ejus trientes NC
describere triangulum æquilaterum NKC, age
TC facientem cum NC angulum TCN æqua-
lem NCK; erunt TC, CK asymptoti, & hy-
perbola transire debet per V.

Idem, analysi geometrica.

Sit triangulum ABC habens angulum
ACB duplum anguli BAC. Ex B demitte per-
pendicularem BD, & abscinde DE ipsi DC
parem. Erit igitur juncta EB æqualis BC, &
angulus BEC angulo BCE: sed angulus BEC

angulo EBA una cum BAE æquatur, ergo
(angulus BEC, aut) bis angulus EAB æqualis
est angulis EAB, ABE; atque ideo triangulum
AEB est isosceles. Idem ostenditur in fig. 3. su-
mendo angulum BEF pro angulo BEC. Sed ex-
cessus quadrati ex BE super quadratum ex ED
est quadratum ex DB, & (sumpta EF ipsi ED
æquali) excessus quadrati ex AE super quadratum
ex EF est rectangulum DAF; & æqualia sunt
quadrata ex AE, EB, atque ex EF, DE, igitur
rectangulum DAF æquat quadratum ex DB.

Sit CG triens datæ CA, & quia CD triens est
ipsum CF, erit residuum (fig. 2.), aut summa (fig.
3.) AF triplex reliqui aut summæ GD, quare ter
rectangulum ADG æquabit (rectangulum DAF
vel) quadratum ex DB; est igitur rectangulum
ex data AG una cum variabili GD in variabi-
lem GD ad quadratum ex variabili DB ut
unitas ad tres, quare punctum B est ad hyper-
bolam.

Componetur sic. Ex data AC abscinde
trientem CG, ex axe AG; parametro tripla
ipsum AG, describe hyperbolam, erit angulus
ACB duplex anguli CAB.

Nam ducta normali BD, est rectangulum
ADG ad quadratum ex DB ut unitas ad tres,
quo circa ter rectangulum ADG æquale est
quadrato ex DB, hoc est excessui quadrati ex
CB super quadratum ex CD, aut (capta ED
ipsi DC æquali) quadrati ex EB super qua-
dratum ex ED. Pone nunc EF ipsi ED pa-
rem, & quia tota AC est ad trientem CG ut
residuum vel summam antecedentium AF ad re-
siduum vel summam consequentium GD: igitur
AF est tripla ipsius GD, quare rectangu-
lum DAF æquat ter rectangulum ADG, id
est, excessum quadrati ex BE super quadra-
tum ex ED; sed rectangulum DAF, est ex-
cessus quadrati ex AE super quadratum ex EF;
igitur quadratum ex AE æquat quadratum ex

Ll 2

EB,

P R O B. X L I I I.

Circulum per data duo puncta describere qui rectam positione datam continget (c).

TAB. V.
Fig. 7.

Sunt A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulus ABE per ista puncta describere, qui contingat rectam istam FE. Junge AB, & eam biseca in D. Ad D erige normalem DF occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc novissime ductam DF, puta in C. Junge ergo CB; & ad FE demitte CE normalem, eritque E punctum contactus, ac CB, CE æquales inter se, utpote radii circuli quæsit. Jam cum puncta A, B, D, & F dentur, esto DB = a, ac DF = b; & ad determinandum centrum circuli quærat DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB propter angulum ad D rectum, est $\sqrt{(DB^2 + DC^2)}$, hoc est $\sqrt{(aa + xx)} = CB$. Est & DF — DC sive $b - x = CF$. Et in triangulo rectangulo CFE cum dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; sit ista d ad e, & erit $CE = \frac{e}{d}$ in CF

hoc est $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæsit,

ti,) æquales inter se, & habebitur æquatio $\sqrt{(aa + xx)} = \frac{eb - ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddx = eebb$

$+ eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{2eebx - aadd}{dd - ee}$. Et extracta radice,

$x = \frac{eeb + d\sqrt{(eebb + ecaa - ddaa)}}{dd - ee}$. Inventa est ergo longitudo DC

adco-

EB, quare triangulum AEB est isosceles, & angulus (BEC, fig. 2. vel BEF, fig. 3. vel æqualis) BCA duplex anguli CAB. Q. E. D.

Si angulus ACB esset rectus, puncta C, D, E, F coinciderent, & analysis ac demonstratio eadem esset, sed aliquanto brevior.

(c) Apollonius ille qui scripserat *conicarum* libros octo, (septem tantum nobis reliquit tempus edax), plura volumina de rebus geometricis (ut discimus ex Pappo in præf. ad septimum collectionum Mathem. librum) confecerat, & inter alia duo *rætionum* quæ perdidimus temporum injuria.

TAB. S.
Fig. 4.

Hinc angulum datum MPQ trifariam cum Vetricibus dividemus. Nam quemvis circulum ACB secabimus in duo segmenta, quorum unum ATC capax sit anguli dati, tum tripartita chorda AC, super AG dupla ipsius CG describemus hyperbolam, cujus parameter triplex sit ipsius AG, connexis punctis A, B, C, erit angulus HBC æqualis angulo dato, & triplex anguli BAC.

Horum problematum in his libris contentorum unum solum proficit *Eucl. lib. IV. 5.* secundi casus, videlicet ubi tres rectæ datæ constituunt triangulum *ibid. prop. 4.*; septem autem solvit Newtonus hoc problemate & quatuor sequentibus, omnia soluta habeo, & me editurum spero propediem, cum Porismatis Euclidis restituis.

adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B describendus est ut contingat rectam FE (d).

PROB. XLIV.

Circulam per datum punctum describere qui rectas duas positione datas continget.

Esto datum punctum A, & sint EF, FG rectæ duæ positione datæ, & AEG circulus quæsitus eandem contingens, ac transiens per punctum

TAB. V.
Fig. 8.

TAB. S.
Fig. 5.

(d) Æquatio superior datæ
 $xx + 2ebx = eebb - aadd$; sed producta DB
donec ipsi FE occurrat in G & dicta FG = d,
est GD = e, quia FC ad CE, ut FG ad GD; &
 $dd - ee (FG^2 - GD^2) = (DF^2) = bb$, ergo $xx + 2\frac{ex}{b} = ee - \frac{aadd}{bb}$. Per A duc AL facientem angulum DAL æqualem angulo DFG, & occurrentem FC productæ in L: erit DF (b). FG (d) :: AD (a). AL = $\frac{ad}{b}$, quam dic = g; ergo
 $xx + 2\frac{ex}{b} = ee - gg$. Per G age GM parallelam CE, & occurrentem FL in M; hinc FD (b). DG (e) :: DG (e). DM = $\frac{ee}{b}$. Recta igitur per Num. 35. Sect. IV. faciendum GD + AL (e + g). x + 2DM :: x. DG - AL (e - g).

Determinatio.

Posuimus quod $ee - gg$ sit quantitas positiva, quod accidit cum $eebb$ major est quam $aadd$, aut eb major quam ad , vel cum e ad a majorem habet rationem quam d ad b ; sed (ex D acta super FG ad rectos angulos DO) est FG (d) ad FD (b) ut GD (e) ad DO, tunc ergo DG (e) ad DB (a) majorem habebit rationem quam ad DO, igitur DG superat DB.

TAB. S.
Fig. 6. Sed si $eb = ad$, tunc DO æquaret DB, & æquatio superior fieret $xx + 2\frac{ex}{b} = 0$, unde colligitur aut $x = 0$, & circuli centrum esset D, aut $x = -2\frac{ee}{b}$, & (sumpta CD æquali 2MD) esset C centrum circuli.

TAB. S.
Fig. 7. Si demum esset eb minor quam ad , tunc etiam OD minor esset quam DB, & nostra

æquatio hæc erit $-xx - 2\frac{ex}{b} = gg - ee$, & x sumi deberet ex D versus M, & CF exprimenda fuisset per $b + x$.

Duos habet valores æquatio nostra, & videndum est quando unum, quando nullum habeat circulum, quod concinnius fiet extracta æquationis radice, nam illa duos valores melius explicat: sumamus ergo $x =$

$$\frac{-ebb \pm \sqrt{eebb + aee - aadd}}{dd - ee} = (\text{si, ut so-}$$

lemus, determinetur $d) - \frac{ee}{b} \pm \frac{d}{b} \sqrt{ee - aa}$, statim apparet unum futurum valorem x, cum $e = a$, vel cum punctorum unum est in recta positione data; nullum ubi e minor est quam a, aut recta positione data est inter duo puncta.

Igitur, proposito problemate, si recta non separet data puncta, statim dispiciendum est utrum alterum punctorum B sit in ipsa recta, tunc junge data puncta AB, age indefinitam FD, quæ bisecet AB ad rectos angulos; ex B erige BM datæ rectæ perpendicularem & FD occurrentem in M, quo centro, radio MB describe circulum qui, ut liquet, problemati satisfaciet.

Sed facilius ita. Juncta AB & acta BM normali fac angulum BAM æqualem ABM, erit M centrum circuli.

Si vero neutrum ex punctis sit in data recta junge AB quam biseca in D: ex D age DO ad rectos angulos datæ rectæ; si DO, DB sint æquales erit ipsum D centrum unius circuli, aliud inuenies ut supra; si DB sit minor aut major DO construes æquationem ut supra, sed valor x qui est positivus cum DB minor est quam DO, sit negativus cum DB major est quam DO, & contra.

TAB. S.
Fig. 5. 6.

Resolvi-
tur ut
Prob. 43.
Nam da-
to puncto
A, datur
& aliud
punctum
B.

Etum istud A. Recta CF bifecetur angulus EFG & centrum circuli in ipsa reperietur. Sit istud C; & ad EF & FG demissis perpendicularibus CE, CG, erunt E ac G puncta contactus. Jam in triangulis CEF, CGF, cum anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli EFG, dantur omnes anguli, adeoque ratio laterum CF & CE vel CG. Sit ista d ad e , & si ad determinandum centrum circuli quæsitum C, assumatur CF = x , erit CE vel CG = $\frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH^(e), & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur istæ a & b , & ab FH, sive b , ablato FC, sive x , restabit CH = $b - x$. Cujus quadrato, $bb - 2bx + xx$, adde quadratum ipsius AH, sive aa & summa $aa + bb - 2bx + xx$, erit ACq per 47. I. Elem.; siquidem angulus AHC ex hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli AC & CG inter se æquales; hoc est pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur æquatio $aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx , & mutatis omnibus signis erit $-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd , ac divide per $dd - ee$, & evadet $\frac{aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx$ (f). Cujus æquationis extracta radix est $x = \frac{bdd - d\sqrt{(eebb + ecaa - ddaa)}}{dd - ee}$. Inventa est itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum est circuli quæsitum.

Si inventus valor x , sive FC, auferatur de b , sive HF, restabit HC = $\frac{ceb + d\sqrt{(eebb + ecaa - ddaa)}}{dd - ee}$; eadem æquatio quæ in priori problemate prodit, ad determinandum longitudinem DC.

PROB. XLV.

Vide

Prop. 21.

Circulum per data duo puncta describere, qui alium circulum positione datum continget (g).

TAB. VI. Fig. 1. Sint A, B puncta data, EK circulus positione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæsitus per puncta A & B transiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB produ-

(e) Eam produc donec rectæ FE occurrat in L, & dic FL = d , erit LH = e .

(f) Sed quia $dd - ee (FL^2 - LH^2) = FH^2 = bb$,

erit $2 \frac{ddx}{b} - xx = dd + \frac{aadd}{bb}$, quam facile construes.

(g) Jam vidimus quod problema XXI. hujus idem est ac istud XLV.

Etam demitte perpendiculara CD, & FG; & age CF, secantem circulos in puncto contactus E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His constructis dic AD vel DB = a , DG vel HF = b , GF = c , & EF (radius nempe circuli dati) = d , atque DC = x : & erit CH (= CD - FG) = $x - c$, & CFq (= CHq + HFq) = $xx - 2cx + cc + bb$, atque CBq (= CDq + DBq) = $xx + aa$, adeoque CB vel CE = $\sqrt{xx + aa}$. Huic adde EF, & habebitur CF = $d + \sqrt{xx + aa}$, cujus quadratum $dd + aa + xx + 2d\sqrt{xx + aa}$, æquatur valori ejusdem CFq prius invento, nempe $xx - 2cx + cc + bb$. Aufer utrobique xx , & restabit $dd + aa + 2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - 2cx$. Aufer insuper $dd + aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - dd - aa - 2cx$. Jam, abbreviandi causa, pro $cc + bb - dd - aa$, (b) scribe $2gg$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = 2gg - 2cx$, sive $d\sqrt{xx + aa} = gg - cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx + ddaa = g^4 - 2ggcx + ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & restabit $ddxx - ccxx = g^4 - ddaa - 2ggcx$. Et partibus æquationis divisus per $dd - cc$, habebitur $xx = \frac{g^4 - ddaa - 2ggcx}{dd - cc}$. Atque per extractionem radice affectæ $x = \frac{-ggc + \sqrt{g^4dd - d^2aa + ddaacc}}{dd - cc}$. (i)

In-

(b) Junge FK, & KG = $\sqrt{dd - cc}$ quam dic = h ; restat igitur $bb - hh - aa$: sed LD $h + b$ & DK = $b - h$; quare LDK vel (ducta tangente DN) DN = $bb - hh$, cui parem sume DO, & quia AB secta est in æqualia in D, & ei addita BO, erit AOB cum quadrato ex BD æquale quadrato ex DO, vel AOB æquale $bb - hh - aa$: dic AOB = $2gg$.

(i) Quia KG = $\sqrt{dd - cc} = h$, erit $x = \frac{cgg \pm d\sqrt{g^4 - aabb}}{hh}$: fac $g.a :: h$. ad quartam = q , & $gg = ah$, ant $ggq = aabb$; quapropter $x = \frac{cgg \pm d\sqrt{gg - qq}}{hh}$: quære $oo = gg - qq$, & fiet $x = \frac{cgg \pm dgo}{hh}$: fac demum $hh = cg \pm do :: g$. ad quartam x .

Sed quia duo reperiuntur valores x , qui ad unum redigerentur si $\frac{gg}{h} = a$, & impossibiles fierent si $\frac{gg}{h}$ esset minor quam a , videndum est quando $\frac{gg}{h}$ major, æqualis, aut minor sit quam a . Biseca AO in P. Quia diximus AOB = $2gg$, erit POB = gg : idcirco fac ut GK ad PO ita OB ad quartam; si hæc

æquat DB problema erit possibile & unam habebit solutionem, eritque $x = \frac{ac}{b}$; si major, duas, quas construes ut supra, & centrum unius circuli cadet supra AB, alterius vero infra; si minor, problema est impossibile.

Si recta AB tangeret in G circulum KNL, esset $c = d$, & æquatio $ddxx - ccxx = g^4 - aadd - 2ggcx$ fieret $x = \frac{gg}{2d} - \frac{aad}{2gg}$; sed tum $2gg = bb - aa = AGB$, & $gg = DGB$; quare fac AGB ad quadratum ex DB ut FK ad quartam, & excessus hujus supra illam erit x .

Si AB neque tangeret, neque secaret circulum KNL, esset c major quam d & æquatio fieret $xx = \frac{2ggcx + aadd - g^4}{cc - dd}$.

Si punctum B caderet in peripheria circuli KNL, & punctum A extra, esset $b = a + c$; quare $2gg$, in prima & tertia hypothesi, = $2cc + 2ac - dd$; in secunda, = $cc + 2ac$. Facile persequeris reliquos casus, nempe, quando unum ex punctis est in peripheria, dum alterum intra circulum existit; ambo intra circulum; circulus inter utrumque medius. Ambo autem puncta nequeunt esse in peripheria dati circuli.

Inventa igitur x , five longitudine DC, biseca AB in D, & ad D erige perpendiculum $DC = \frac{ggc + d\sqrt{(g^2 - aadd + aacc)}}{dd - cc}$. Dein centro C per punctum A vel B describe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & transibit per utrumque punctum A, B. Q. E. F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum describere qui datum circulum, & rectam lineam positione datam continget.

TAB. VI.
Fig. 2.

Sit circulus iste describendus BD, ejus centrum C, punctum per quod describi debet B, recta quam continget AD, punctum contactus D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactus E. Junge CB, CD, CF; & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF secabit circulos in puncto contactus E. Produca CD ad Q ut sit $DQ = EF$ & per Q age QN parallelam AD. Denique a B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN, & a C ad AB & FN perpendicula CK, CL. Et cum sit $BC = CD$ vel AK , erit $BK (= AB - AK) = AB - BC$, adeoque $BKq = ABq - 2AB \cdot BC + BCq$. Aufer hoc de BCq , & restabit $2AB \cdot BC - ABq$, pro quadrato de CK. Est itaque $AB(2BC - AB) = CKq$; & eodem argumento erit $FN(2CF - FN) = CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB} + AB = 2BC$, & $\frac{CLq}{FN} + FN = 2CF$. Quamobrem, si pro AB, CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c , & $c - y$, erit $\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, & $\frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. De FC aufer BC, & restabit $BF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Jam si puncta ubi FN producta secat rectam AD, & circulum GEM notentur literis H, G, & M & in HG producta capiatur $HR = AB$, cum sit $HN (= DQ = EF) = GF$, addendo FH utrinque, erit $FN = GH$, adeoque $AB - FN (= HR - GH) = GR$, & $AB - FN + 2EF$, hoc est $a - b + 2EF = RM$, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Quare, cum supra fuerit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}RM = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} - \frac{1}{2}a$. Dic ergo RM d , & erit $d = \frac{cc - 2cy + yy}{b} - \frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b , & orietur $abd = acc - 2acy + ayy - byy$. Aufer utrinque

que $acc - 2acy$, & restabit $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide per $a - b$, & orietur $\frac{abd - acc + 2acy}{a - b} = yy$. Et extracta radice $y = \frac{ac}{a - b}$

$\pm \sqrt{\frac{aabd - abbd + abce}{aa - 2ab + bb}}$. Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Po-

ne $c.b :: d.e$, dein $a - b.a :: c.f$; & erit $fe - fc + 2fy = yy$, five $y = f \pm \sqrt{ff + fe - fc}$. Invento y , five KC vel AD, cape $AD = f$

$\pm \sqrt{ff + fe - fc}$, ad D erige perpendiculum DC (= BC) $= \frac{KCq}{2AB} + \frac{1}{2} AB$,

& centro C, intervallo CB vel CD describe circulum BDE, nam hic transiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

Hinc circulus etiam describi potest qui duos datos circulos, & rectam ^{TAB. VI.} positione datam continget. Sint enim circuli dati RT, SV, eorum centra ^{Fig. 3.} B, F, & recta positione data PQ. Centro F, radio FS — BR describe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP, & producto eo ad A ut sit PA = BR per A age AH parallelam PQ, & circulus describatur qui transeat per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; jungo BC secantem circulum RT in R, & eodem centro C, radio vero CR descriptus circulus RS tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione manifestum est.

P R O B. X L V I I.

Circulum describere qui per datum punctum transibit, & alios duos positione, & magnitudine datos circulos continget.

Esto punctum datum A, sintque circuli positione, & magnitudine dati ^{TAB. VI.} TIV, HRS, centra eorum C & B, circulus describendus AIH cen- ^{Fig. 4.} trum ejus D, & puncta contactus I & H. Jungo AB, AC, AD, DB, secetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC, producta circulum TIV in T & V. Et a punctis D & C demissis perpendiculis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \cdot AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \cdot BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & restabit $ABq - 2AD \cdot BR - BRq$, pro $2AE \cdot AB$. Est & $ABq - BRq = (AB - BR)(AB + BR) = AR \cdot AS$.

Quare $AR \cdot AS - 2AD \cdot BR = 2AE \cdot AB$. Et $\frac{AR \cdot AS - AB \cdot AE}{BR} = 2AD$.

Et simili ratiocinio in triangulo ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} = \frac{RAS}{RAS}$

$$\frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}. \text{ Et } \left(\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \right) \frac{CT}{2AC} = AF.$$

$$\text{Unde cum sit } AK.AC :: AF.AG, \text{ erit } AG = \left(\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \right) \frac{CT}{2AK}.$$

$$\frac{CT}{2AK}. \text{ Aufer hoc de AE sive } \frac{2KAE}{CT} \text{ in } \frac{CT}{2AK}, \text{ \& restabit } GE =$$

$$\left(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \right) \frac{CT}{2AK}. \text{ Unde cum sit } KC.AK ::$$

$$GE.DE; \text{ erit } DE = \left(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \right) \frac{CT}{2KC}. \text{ In}$$

$$AB \text{ cape } AP \text{ quæ sit ad } AB \text{ ut } CT \text{ ad } BR, \text{ \& erit } \frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}, \text{ adeo-}$$

$$\text{que } \frac{2PK.AE}{CT} = \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}, \text{ adeoque } DE = \left(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK.AE}{CT} \right) \frac{CT}{2KC}.$$

$$\frac{CT}{2KC}. \text{ Ad } AB \text{ erige ergo perpendicularum } AQ = \left(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} \right) \frac{CT}{2CK},$$

$$\text{\& in eo cape } QO = \frac{PK.AE}{KC}, \text{ \& erit } AO = DE.$$

Junge DO, DQ, CP, & triacula DOQ, CKP erunt similia, quippe quorum anguli ad O & K sunt recti, & latera (KC.PK :: AE, vel DO.QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales sunt, & proinde QD perpendicularis est ad CP. Quamobrem si agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triacula AQN, PCK similia; adeoque PC.KC :: AQ.AN. Unde cum AQ sit $\left(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} \right) \frac{CT}{2KC}$, AN erit $\left(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} \right) \frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M ut sit NM = AN, & erit AD = DM, adeoque circulus quæsitus transibit per punctum M. Cum ergo punctum M datum sit, ex his, sine ulteriore analysi, talis emergit problematis resolutio.

In AB cape AP, quæ sit ad AB ut CT ad BR; junge CP eique parallelam age AM, quæ sit ad $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope Prob.

45. per puncta A & M describe circulum AIHM qui tangat alterutrum circulum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et hinc circulus etiam describi potest qui tres circulos positione & magnitudine datos continget. Sunt trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F, radii B ± A, C ± A describantur duo circuli, & tertius circulus qui hosce tangat, transeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H, & eodem centro H radio G ± A descriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

PROB.

P R O B. X L V I I I.

Si ad extremitates fili DAE circa paxillum A labentis appendantur pondera duo D & E, quorum pondus E labitur per lineam obliquam BG: invenire locum ponderis E, ubi pondera hæc in æquilibrio consistunt.

TAB. VI.
Fig. 5.

Puta factum, & ipsi AD age parallelam EF quæ sit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et a punctis A & F ad lineam BG demitte perpendiculara AB, FG. Jam cum pondera, ex hypothesi, sint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas istas, pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo corpus E proprii ponderis vi directæ EF tendit versus F, & vi obliqua EG tendit versus G. Et idem corpus E, ponderis D vi directæ AE, trahitur versus A, vi obliqua BE trahitur versus B. Cum itaque pondera se mutuo sustineant in æquilibrio, vis qua pondus E trahitur versus B æqualis esse debet vi contrariæ qua tendit versus G, hoc est BE æqualis esse debet ipsi EG. Jam vero datur ratio AE ad EF, ex hypothesi, & propter datum angulum FEG datur etiam ratio FE ad EG cui BE æqualis est. Ergo datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E facile dabitur. Nempe dic $AB = a$, $BE = x$, & erit $AE = \sqrt{aa + xx}$: sit insuper AE ad BE in data ratione d ad e , & erit $e \sqrt{aa + xx} = dx$. Et partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa = ddx - eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd - ee}} = x$. Inventa

est igitur longitudo BE quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quod si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, computum TAB. VI. sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ positione datæ per quas Fig. 6. pondera ista D & E descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendiculara AC, AB, iisque productis occurrant in punctis G & H lineæ EG, DH, a ponderibus perpendiculariter ad horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota gravitas ipsius E, erit ad vim qua pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE, ut GE ad BE; atque vis qua conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE descendere, hoc est ad vim qua filum AE distenditur, ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipsius E, erit ad tensionem fili AE ut GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius DA + AE longitudo e , sitque pars ejus AE = x , & erit altera pars AD = $e - x$. Et quoniam est AEq = ABq = BEq, & ADq = ACq = CDq, sit insuper AB = a , & AC = b , & erit BE = $\sqrt{xx - aa}$ & CD = $\sqrt{xx - bb}$. Adhæc cum triangula BEG, CDH, dentur specie, sit BE . EG :: f . E, & CD . DH :: f . g, & erit EG =

Mm 2

$$\frac{E}{f} \sqrt{xx}$$

$\frac{E}{f} \sqrt{xx - aa}$, & $DH = \frac{g}{f} \sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$. Quamobrem cum sit GE ad AE ut pondus D ad tensionem AE, & HD ad AD ut pondus D ad tensionem AD, & tensiones istæ æquantur inter se, erit $\frac{E}{f} \sqrt{xx - aa} =$ ten-

sioni AE = tensioni AD = $\frac{Dc - Dx}{\frac{g}{f} \sqrt{xx - 2cx + cc - bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit $gx \sqrt{xx - 2cx + cc - bb} = (Dc - Dx) \sqrt{xx - aa}$ five

$$-DDx^2 + 2Dcx - DDc^2 + 2DDc^2x - DDcc^2 = 0; \text{ five } x = \frac{ac}{a+b} \quad (l).$$

Si casum desideras quo hoc problema per regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g = D$, (k) adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $aa xx - 2aax + aacc = 0$; five $x = \frac{ac}{a+b} \quad (l)$.

PROB.

(k) Nam $\frac{BE}{EG} = \frac{f}{E}$, & $\frac{CD}{DH} = \frac{f}{g}$; cum ergo nunc sit $\frac{BE}{EG} \left(\frac{f}{E}\right) \cdot \frac{CD}{DH} \left(\frac{f}{g}\right) :: D.E$, erit, invicem ductis extremis & mediis, $\frac{Df}{g} = f$, & $D = g$.

(l) Aut enim b æquat a , aut minor est, aut major. Si primum, $axx - bxx = 0$, & æquatio restat $x = \frac{c}{2} = \frac{2ac}{2a} = \frac{ac}{a+b}$. Hoc autem accedit quando BA, AC sunt æquales.

Si secundum, æquatio fit $xx = \frac{2aax - aacc}{aa - bb}$, & $x = \frac{aac \pm \sqrt{aabbcc}}{aa - bb} = \frac{aac \pm abc}{aa - bb} = \frac{ac(a \pm b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ac}{a \pm b}$; & tunc duo videntur esse puncta æquilibrium dantia. Sed si ponamus $x = \frac{ac}{a-b}$, erit tensio fili AE

$$\frac{fx}{\sqrt{xx - aa}} = \frac{acf}{(a+b)\sqrt{\frac{aac}{aa - 2a + bb} - aa}}$$

$$= \frac{cf}{\sqrt{cc - aa - 2ab - bb}}. \text{ Atqui tensio fili AD} = \frac{bef}{\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}} = \frac{bef}{(a+b)\sqrt{\frac{aac}{a+b^2}}}$$

$$= \frac{cf}{\sqrt{cc - aa - 2ab - bb}}$$

$$= \frac{cf}{\sqrt{cc - aa - 2ab - bb}}; \text{ \& tensio fili}$$

$$AD = \frac{-cf}{\sqrt{cc - aa - 2ab - bb}}$$

quæ quantitas est quidem alteri æqualis, sed negativa, & debet esse positiva, quia tensiones ambæ tendunt ad easdem plagas; fieret tantem positiva si pro tensione ipsius AD haberetur non

P R O B. X L I X.

Si ad filum DACBF circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili, & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos positum: ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera consistunt in æquilibrio.

Cum tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF, (m) tensiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, E, F. In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC donec ea occurrat GH in K, & erit

$GK = KH$, & $CK = \frac{1}{2} CI$, adeoque C centrum gravitatis trianguli

GHI. (n) Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare PQ, & huic a punctis G, & H, perpendicularia GP, HQ. Et si vis qua filum AC vi ponderis D trahit punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis qua filum istud trahet idem punctum versus P exponatur per lineam CP, & vis qua trahit illud versus K exponatur per lineam GP. Et similiter vires quibus filum BC vi ponderis F, trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis qua filum CE vi ponderis E, trahit punctum illud C versus E, exponatur per lineam CI. Jam cum punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in

æqui-

$$\frac{fc-fx}{\sqrt{(xx-2cx+cc-bb)}} \text{ sed } \frac{fx-fe}{\sqrt{xx-2cx+cc-bb}}$$
 quod indicat hunc ignotæ valorem satisfacere problemati, si pro summa filorum DA, AE data fuisset eorum differentia.

Denique si b major est quam a, æquatio evadit $xx = -\frac{2aacx + aacc}{bb - aa}$; aut $x = \frac{-aac \pm \sqrt{abc}}{bb - aa}$; quarum altera ($\frac{-aac - \sqrt{abc}}{bb - aa}$)

est falsa, quam non quærimus, & quæ satisfaceret problemati si fuisset quærendum punctum æquilibrii pondere labente per CD, & illud retrahente potentia quadam æquale ponderi E juxta directionem IF ipsi BE parallelam filo circa A recurvato in F ita ut FA AE sint in directum. Altera vero ($\frac{-aac + \sqrt{abc}}{bb - aa}$) dat

$$\frac{ac}{a+b}$$

(m) Quoniam pondera D, E, F, sunt in æquilibrio, vis qua pondera D & F deorsum trahuntur, æquat vim qua pondus E deprimitur. Pondus autem E simul tendit fila AC, CB; ac tensioni filii AC contraria est tensio fili AD, tensioni vero fili CB contraria est tensio fili BF; ergo hæ tensiones contrariæ debent esse æquales; alioquin enim tensio major minorem vinceret, & pondera non essent in æquilibrio.

Tensio fili AD est effectus ponderis D perpendiculariter trahentis, & idcirco totam suam vim exferentis; ergo est ei proportionalis. Sed tensio fili AC æquat tensionem fili AD, igitur tensio fili AC est ut pondus D. Idem dicendum de tensionem fili BC. Tensionem CE esse ut pondus E statim patet.

(n) Quod GH bifecetur in K, & quod KC sit dimidiata CI ab Auctore dilucide ostenditur, & notum est esse C centrum gravitatis trianguli GIK.

æquilibrio, summa virium quibus fila AC & BC, simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ qua filum EC, trahit punctum illud versus E, hoc est summa GP + HQ, æqualis erit ipsi CI; & vis qua filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ qua filum BC trahit idem punctum C versus Q, hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cum PG, CK, & QH parallelæ sint, erit etiam GK = KH, & CK (= $\frac{GP+HQ}{2}$) = $\frac{1}{2}$ CI. Quod erat ostendendum. Restat itaque

triangulum GCH determinandum, cujus latera GC & HC, dantur, una cum linea CK, quæ a vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque a vertice C ad basem GH perpendiculum CL, & erit $\frac{GCq - CHq}{2GH} = KL = \frac{GCq - KCq - GKq}{2GK}$. Pro 2GK scribe GH, & rejecto communi divisore GH, & ordinatis terminis, erit GCq - 2KCq + CHq = 2GKq, sive $\sqrt{\frac{1}{2} GCq - KCq + \frac{1}{2} CHq} = GK$. Invento GK vel KH, dantur simul anguli GCK, KCH, sive DAC, FBC. Quare a punctis A & B in datis istis angulis DAC, FBC duc lineas AC, BC concurrentes in puncto C, & istud C erit punctum quod quaeritur.

Ceterum quaestiones omnes quæ sunt ejusdem generis non semper opus est per algebram figillatim solvere, sed ex solutione unius plerumque confectatur solutio alterius. Ut si jam proponeretur hæc quaestio.

TAB. VI.
Fig. 8.

Filo ACDB in datas partes AC, CD, DB diviso & extremitatibus ejus ad paxillos duos A, B positione datos ligatis, si ad puncta divisionum C ac D appendantur pondera duo E & F; ex dato pondere F, & situ punctorum C ac D, cognoscere pondus E.

Ex præcedentis problematis solutione satis facile colligetur hæc solutio hujus. Producat lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et hinc obiter patet ratio componendi stateram ex solis filis, qua pondus corporis cujusvis E, ex unico dato pondere F cognosci potest.

P R O B. L.

Lapide in puteum decidente, ex sono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoscere.

Sit altitudo putei x , & si lapis motu uniformiter accelerato descendat per spatium quodlibet datum a in tempore dato b , & sonus motu uniformi-

formi transeat per idem spatium datum a in tempore dato d , lapis descendet per spatium x , in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, sonus autem qui fit a lapide in fundo putei impingente ascendet per idem spatium x , in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim sunt spatia gravibus decidentibus descripta, ita sunt quadrata temporum descensus; vel ut radices spatiorum, hoc est ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita sunt ipsa tempora. Et ut spatia x & a , per quæ sonus transit, ita sunt tempora transitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ summa conflatur tempus a lapide demisso ad sonus reditum. Hoc tempus ex observatione cognosci potest. Sit ipsum t , & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. Et per reductionem $xx = \frac{2adt + abb}{dd}x - \frac{aat}{dd}$. Et extracta radice $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}$. $\sqrt{(bb + 4dt)}$ (o).

P R O B. L I.

Dato globo A , positione parietis DE , & centri globi B a pariete distantia BD ; invenire molem globi B ea lege ut in spatii liberis, & vi gravitatis destitutis, si globus A , cujus centrum in linea BD , quæ ad parietem perpendicularis est, ultra B producta consistit, uniformi tum motu versus D feratur donec is impingat in alterum quiescentem globum B ; globus iste B postquam reflectitur a pariete, denuo occurrat globo A in dato puncto C . TAB. VII. Fig. 1.

Sit globi A celeritas ante reflexionem a & erit per PROB. XII. Quæst. Arit. celeritas globi A post reflexionem $= \frac{aA - aB}{A + B}$, & celeritas globi B

(o) Hic sumitur minor æquationis radix, quia t (tempus quod labitur, dum lapis descendit & sonus ascendit) debet esse majus quam $\frac{dx}{a}$ (tempus, per quod sonus ascendit); ergo $\frac{at}{d}$ majus quam x , quod sic optime efficitur. Est enim $\sqrt{(bb + 4dt)}$ major quam b , pone eam $= b + c$; ergo

post

$$x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{\frac{1}{2}abb - \frac{1}{2}abc}{dd} = \frac{adt - \frac{1}{2}abc}{dd} : \text{est autem } \frac{adt - \frac{1}{2}abc}{dd} \text{ minor quam } \frac{adt}{dd}; \text{ ergo } x \text{ minor quam } \frac{adt}{dd} = \frac{at}{d}.$$

post reflexionem $= \frac{2aA}{A+B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B est ut A — B ad 2A. In GD cape $gD = GH$ diametro nempe globi B; & celeritates istæ erunt ut GC ad $Gg + gC$. Nam ubi Globus A impigit in globum B, punctum G quod in superficie globi B existens movetur in linea AD, perget per spatium Gg antequam globus ille B impingat in parietem, & per spatium gC postquam a pariete reflectitur; hoc est per totum spatium $Gg + gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per spatium GC, eo ut globus uterque rursus conveniant & in se mutuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD, dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$, & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC = 2gD = GB + BD + DC = 2GH = x + n - 4x$, seu $= n - 3x$. Supra erat A — B ad 2A ut celeritas globi B ut GC ad $Gg + gC$, adeoque A — B ad 2A ut GC ad $Gg + gC$, ergo cum sit $GC = m + x$, & $Gg + gC = n - 3x$, erit A — B ad 2A sicut $m + x$ ad $n - 3x$. Porro globus A est ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc est si ponas radium AF esse s , ut s^3 ad x^3 . Ergo $s^3 - x^3 . 2s^3$ ($:: A - B . 2A$) $:: m + x . n - 3x$. Et ductis extremis & mediis in se habebitur æquatio $s^3n - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2xs^3$. Et per reductionem

$$3x^4 - nx^3 - 5s^3x + \frac{s^3n}{1 - 2s^3m} = 0.$$

Si datus esset globus B & quæreretur globus A ea lege ut globi duo post reflexionem convenirent in C, quæstio foret facilior. Nempe in inventa æquatione novissima supponendum esset x dari & s quæri. Qua ratione per debitam reductionem illius æquationis, translatis terminis $5s^3x + s^3n - 2s^3m$ ad æquationis partem contrariam ac divisa utraque parte per $5x - n + m$, emergeret $\frac{3n^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Ubi per solam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s .

Quod si dato globo utroque quæreretur punctum C in quo post reflexionem ambo in se mutuo impingerent: cum supra fuerit A — B ad 2A ut GC ad $Gg + gC$ ergo invertendo & componendo 3A — B erit ad A — B ut 2Gg ad distantiam quæsitam GC.

P R O B. L I I.

Si globi duo *A* & *B* tenui jungantur filo *PQ*, & pendente globo *B* a globo *A*, si demittatur globus *A*, ita ut globus uterque simul sola gravitatis vi in eadem linea perpendiculari *PQ* cadere incipiat; dein globus inferior *B*, postquam a fundo seu plano horizontali *FG* sursum reflectitur, superiori decidenti globo *A* occurrat in puncto quodam *D*: ex data fili longitudine *PQ*, & puncti illius *D* a fundo distantia *DF*, invenire altitudinem *PF*, a qua globus superior *A* ad hunc effectum demitti debet.

TAB. VII.
Fig. 2.

Sit fili *PQ* longitudo *a*. In perpendiculo *PQRF* ab *F* sursum cape *FE* æqualem globi inferioris diametro *QR*, ita ut cum globi illius punctum infimum *R* incidit in fundum ad *F*, punctum ejus supremum *Q* occupet locum *E*; sitque *ED* distantia per quam globus ille, postquam a fundo reflectitur, ascendendo transit antequam globo superiori decidenti occurrat in puncto *D*. Igitur, ob datam puncti *D* a fundo distantiam *DF* globique inferioris diametrum *EF*, dabitur eorum differentia *DE*. Sit ea = *b*. Sitque altitudo quam globus ille inferior, antequam impingit in fundum, cadendo describit, *RF* vel *QE* = *x*, siquidem ea ignoretur. Et invento *x* si eidem addantur *EF* & *PQ* habebitur altitudo *PF*, a qua globus superior ad effectum desideratum demitti debet.

Cum igitur sit *PQ* = *a*, & *QE* = *x*, erit *PE* = *a* + *x*. Aufer *DE* seu *b*, & restabit *PD* = *a* + *x* — *b*. Est autem tempus descensus globi *A* ut radix spatii cadendo descripti seu $\sqrt{a+x-b}$, & tempus descensus globi alterius *B* ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{x}$, & tempus ascensus ejusdem ut differentia radices illius & radices spatii quod cadendo tantum a *Q* ad *D* describeretur (*p*). Nam hæc differentia est ut tempus descensus a *D* ad *E*, quod æquale est tempori ascensus ab *E* ad *D*. Est autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Unde tempus descensus & ascensus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori descensus globi superioris erit $\sqrt{a+x-b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$ (*q*). Cujus æquationis partibus quadratis habebitur

$$a+x$$

(*p*) Hæc explicantur infra sub signo *q*.

(*q*) Cum vis gravitatis eadem sit in globo ascendente aut descendente, cumque ea deorsum tendat, illa uniformiter retardabit globum ascendente, ut uniformiter cadentem acceleraverat. Ita ut si globus *B* in *QR* quiescens vi gravitatis cadere concipiatur in *EF*, & inde versus *RQ* repelli eadem prorsus velocitate quam acquisiverat, eodem tempore ascen-

det in primum locum *RQ* ac ex eo descendat in *EF*, & ipso momento, quo venerit in *RQ*, nullum prorsus motum habebit; sed tempus descensus puncti *Q* ex *Q* in *E* est ut $\sqrt{x}$, ergo tempus ascensus ejusdem erit ut $\sqrt{x}$; quare hæc duo tempora simul sumpta ut $2\sqrt{x}$; sed cum punctum *Q* debeat solum venisse in *D*, quando globus *A* item est in *D*, ergo ex tempore ascensus globi *B* demendum est tempus ascensus ex *D* in *Q*, quod est ut $\sqrt{x-b}$;

Nn

est

$a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{xx - bx}$, seu $a = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$, & ordinata æquatione $4x - a = 4\sqrt{xx - bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, seu $aa = 8ax - 16bx$.

Et divisis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a - 16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x , habebitur x seu QE. Q. E. I.

Quod si ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ seu a ; eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$ (r). Id est si sumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit PQ = 4EY. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x(x - b)}$, seu $\sqrt{xx - bx}$ quod subductum de x seu QE, relinquit EY, cujus quadruplum est $4x - 4\sqrt{xx - bx}$.

Sin vero ex datis tum QE, seu x , tum fili longitudine PQ, seu a , quæreretur punctum D in quo globus superior in inferiorem incidit; puncti illius a dato puncto E distantia DE seu b , e præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eructur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum signis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ut a ad b , & habebitur b seu DE.

Hactenus supposui globos tenui filo connexos simul demitti. Quod si nullo connexi filo diversis temporibus demittantur, ita ut globus superior A verbi gratia prius demissus, descenderit per spatium PT antequam globus alter incipiat cadere, & ex datis distantis PT, PQ ac DE quæratur altitudo PF a qua globus superior demitti debet ea lege ut inferiorem incidat ad punctum D; sit PQ = a , DE = b , PT = c , & QE = x , & erit PD = $a + x - b$, ut supra. Et tempora quibus globus superior cadendo describat spatia PT ac TD, & globus inferior prius cadendo dein reascendendo describat summam spatiorum QE + ED, erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$ hoc est ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$, & $2\sqrt{x - b}$. At ultima duo tempora, propterea quod spatia TD, & QE + ED simul describuntur, æqualia sunt. Ergo $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c} = 2\sqrt{x - b}$

est igitur tempus descensus ex Q in E, & ascensus ex E in D, ut $2\sqrt{x - b}$; sed globus B debet descendere & ascendere quo tempore globus A venit ex P in D, ergo $\sqrt{x + a - b} = 2\sqrt{x - b}$.

(r) Hic quoque radix habetur ambigua, nam $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$; quæ ambæ sunt positivæ: cur ergo minor eligenda? Responsum nascitur ex re ipsa. Siquidem esse debet $\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x - b}$ (substitut.) $\sqrt{5x - b} = \sqrt{16xx - 16bx}$: extrahe hanc radicem, & fac $A = 5x - b$ (Sect. I. Cap. VIII. Art. VI.), $B = \sqrt{16xx - 16bx}$; erit

$$\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = 4x, \text{ quadratum majoris partis radices, \& } \frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = x - b$$

quadratum minoris partis; ergo radices sunt $2\sqrt{x}$ & $\sqrt{x - b}$, hæc signis, quæ prius habebant, iungendæ sunt; ergo sumi debet $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$, alioquin haberetur $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x - b}$, quod est absurdum, nisi cum $x = b$, id est, cum globus B debet ad pristinum situm ascendisse, cum inluditur globo A cadenti, tunc enim $\sqrt{x - b} = 0$, & $2\sqrt{x} - 0 = 2\sqrt{x} + 0$: sed tunc statim apparet $a = 4x = 4b$.

$\sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis $a+c = 2\sqrt{ca-cb+cx}$
 $= 4x - 4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c = e$, & $a-b = f$, & erit per
debitam reductionem $4x - e + 2\sqrt{cf+cx} = 4\sqrt{xx-bx}$, & parti-
bus quadratis $ee = 8ex + 16xx + 4cf + 4cx + (16x - 4e)\sqrt{cf+cx}$
 $= 16xx - 16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee + 4cf$ scripto m
aec non pro $8e - 16b - 4c$ scripto n , habebitur per debitam reductio-
nem $(16x - 4e)\sqrt{cf+cx} = nx - m$. Et partibus quadratis $256cfxx$
 $+ 256cx^3 - 128cef x - 128cexx + 16ceef + 16ceex = nxxx - 2mnx$
 $+ mm$. Et ordinata æquatione $256cx^3 - 128cexx + 16ceex + 16ceef$
 $= 0$. Cujus æquationis constructione dabitur x seu QE, cui si addas da-
tas distantias PQ, & EF habebitur altitudo PF quam oportuit invenire.

P R O B. L I I I.

*Si globi duo quiescentes superior A, & inferior B diversis tempori-
bus demittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere
incipiat ubi superior cadendo jam descripsit spatium PT;
invenire loca α , β quæ globi illi cadentes occupabunt
ubi eorum intervallum πx dato æquale est.*

TAB. VII.
Fig. 3.

Cum dentur distantie PT, PQ, & πx , dic primam a , secundam b , ter-
tiam c , & pro $P\pi$ seu spatio quod globus superior, antequam perve-
nit ad locum quæsitum α , cadendo describit, ponatur x . Jam tempora qui-
bus globus superior describit spatia PT, $P\pi$, $T\pi$, & inferior spatium $Q\chi$,
sunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\pi}$, $\sqrt{P\pi} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$: quorum temporum po-
steriora duo, eo quod globi cadendo simul describant spatia $T\pi$ & $Q\chi$,
sunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\pi} - \sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\pi = x$,
& $PT = a$, & ad $P\pi$ addendo πx seu c & a summa auferendo PQ seu b
habebitur $Q\chi = x + c - b$. Quamobrem his substitutis fiet $\sqrt{x} - \sqrt{a} =$
 $\sqrt{x + c - b}$. Et æquationis partibus quadratis, oriatur $x + a =$
 $2\sqrt{ax} = x + c - b$. Ac deletis utrobique x , & ordinata æquatione habe-
bitur $a + b - c = 2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a + b - c$
æquale $4ax$, & quadratum illud divisum per $4a$ æquale x , seu $4a$ ad
 $a + b - c$ sicut $a + b - c$ ad x . Ex invento autem x seu $P\pi$ datur
globi superioris decidentis locus quæsitus α . Et per locorum distantiam
simul datur etiam locus inferioris β .

Et hinc si punctum quærat ubi globus superior cadendo impinget in
inferiorem; ponendo distantiam πx nullam esse seu delendo c , dic $4a$ ad
 $a + b$ ut $a + b$ ad x , seu $P\pi$, & punctum π erit quod quæris.

Et vicissim si detur punctum illud π vel χ in quo globus superior incidit
in inferiorem, & quærat locus T, quem superioris globi decidentis pun-
ctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere; quo-
niam

niam est $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x , seu ductis extremis & mediis in se $4ax = aa + 2ab + bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa = 4ax - 2ab - bb$; extrahe radicem quadraticam & proveniet $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$ (s). Cape ergo $V\pi$ mediam proportionalem inter $P\pi$ & $Q\pi$, & versus V cape $VT = VQ$, & erit T punctum quod quaeris. Nam $V\pi$ erit $= \sqrt{P\pi}$. $Q\pi$ hoc est $= \sqrt{x(x-b)}$ seu $= \sqrt{xx - bx}$, cujus duplum subductum de $2x - b$, seu de $2P\pi - PQ$, hoc est de $PQ + 2Q\pi$, relinquit $PQ - 2VQ$ seu $PV - VQ$, hoc est PT .

Si denique globorum, postquam superior incidit in inferiorem, & impetu in se invicem facto inferior acceleratur, superior retardatur, desiderantur loci ubi inter cadendum distantiam datæ rectæ æqualem acquirunt: quaerendus erit primo locus ubi superior impingit in inferiorem; dein ex cognitum magnitudinibus globorum tum eorum, ubi in se impingunt, celeritatibus, inveniendæ sunt celeritates quas proxime post reflexionem habebunt, idque per modum PROB. XII. Quæst. Arith. Postea quaerenda sunt loca summa ad quæ globi celeritatibus hisce si sursum ferantur ascenderent, & inde cognoscantur spatia quæ globi datis temporibus post reflexionem cadendo describent, ut & differentia spatiorum: & vicissim ex assumpta illa differentia, per analysin regredietur ad ipsa spatia cadendo descripta.

TAB. VII.
Fig. 4.

Ut si globus superior incidit in inferiorem ad punctum π , & post reflexionem celeritas superioris deorsum tanta sit, ut si sursum esset, ascendere faceret globum illum per spatium πN , & inferioris celeritas deorsum tanta esset, ut, si sursum esset, ascendere faceret globum illum inferiorem per spatium πM ; tum tempora quibus globus superior vicissim descenderet per spatia $N\pi$, NG , & inferior per spatia $M\pi$, MH , forent ut $\sqrt{N\pi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\pi}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus superior conficeret spatium πG , & inferior spatium πH , forent ut $\sqrt{NG} - \sqrt{N\pi}$, ad $\sqrt{MH} - \sqrt{M\pi}$. Pone hæc tempora æqualia esse, & erit $\sqrt{NG} - \sqrt{N\pi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\pi}$. Et insuper cum detur distantia GH pone $\pi G + GH = \pi H$. Et harum duarum æquationum reductione solvetur problema. Ut si sit $M\pi = a$, $N\pi = b$, $GH = c$, $\pi G = x$, erit juxta posteriorem æquationem $x + c = \pi H$. Adde $M\pi$ fiet $MH = a + c + x$. Ad πG adde $N\pi$, & fiet $NG = b + x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{b+x} - \sqrt{b} = \sqrt{a+c+x} - \sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{b+x} = \sqrt{e+x} - \sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b+x = e+x+f - 2$

(s) En rursus radicem ambiguam, in quo bivio Mercurius noster erit, (ut semper,) consideratio rei ipsius.

Quia hic $e = 0$, debet esse $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x-b}$: sed $a = 2x - b = \sqrt{4xx - 4bx}$; ergo quaeramus radicem ipsius $2x - b = \sqrt{4xx - 4bx}$, ut videamus quinam sit valor ipsius a . Sit igitur $2x - b = A$ (Sect. I. C. VIII. Art. VI.), $\sqrt{4xx - 4bx} = B$, tunc $\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$

$= x$, & $\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = x - b$; ergo $\sqrt{a} = \sqrt{x} = \sqrt{x-b}$; sed $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x-b} - \sqrt{x} = -\sqrt{x} + \sqrt{x-b} = 0$ supra $\sqrt{a}$ sumi debet $+\sqrt{x-b}$; quare $\sqrt{a} = \sqrt{x} - \sqrt{x-b}$ & $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$.

$2\sqrt{(ef+fx)}$, seu $e+f-b=2\sqrt{(ef+fx)}$. Pro $e+f-b$ scribe g , & fiet $g=2\sqrt{(ef+fx)}$, & partibus quadratis $gg=4ef+4fx$, & per reductionem $\frac{gg}{4f}-e=x$.

P R O B. L I V.

Si duo sint globi A, B , quorum superior A ab altitudine G decidens, in alterum inferiorem B a fundo H versus superiora resili-TAB. VII.
Fig. 5.entem incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuo recedant, ut globus A vi reflexionis illius ad altitudinem priorem G redeat, idque eodem tempore quo globus inferior B ad fundum H revertitur; dein globus A rursus decidat, & in globum B a fundo resilientem denuo incidat, idque in eodem loco AB ubi prius in ipsum incidebat; & sic perpetuo globi ab invicem resiliant rursusque ad eundem locum redeant: ex datis globorum magnitudinibus, positione fundi, & loco G a quo globus superior decedit, invenire locum ubi globi in se mutuo impingent.

Sit e centrum globi A , & f centrum globi B , d centrum loci G in quo globus superior in maxima est altitudine, g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, a femidiameter globi A , b femidiameter globi B , c punctum contactus globorum in se mutuo impingentium, & H punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A , ubi in globum B impingit, ea erit quæ generatur casu globi ab altitudine de ; adeoque est ut $\sqrt{de}$ (†). Hac eadem celeritate reflecti debet globus A versus superiora, ut ad locum priorem G redeat: at globus B eadem celeritate deorsum reflecti debet qua ascenderat ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde recesserat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales esse debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate (v). Unde si factum ex unius globi mole & celeritate divi-

(†) Nam celeritates acquisite, in motibus uniformiter acceleratis, sunt ut tempora; tempora autem in subduplicata spatiorum peractorum ratione.

(v) Etenim (Probl. Arithm. XII. Cas. II.) invenimus velocitatem Corporis A post reflexionem $= \frac{aA-aB-2bB}{A+B}$. Hæc debet

esse negativa quidem, sed æqualis velocitati, quam A habebat ante reflectionem, nempe æqualis velocitati $-a$; ergo $aA-aB-2bB=-aA-aB$: & (deletis delendis, ac transponendo) $2aA=2bB$, vel $aA=bB$. Sunt autem aA, bB motus corporum A & B ; ergo &c. Idem invenissemus, si adhibuissemus velocitatem ipsius B post reflexionem.

dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & post reflexionem, seu sub fine ascensus & initio descensus.

Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{AVde}{B}$, seu, cum globi sint ut cubi radiorum,

ut $\frac{a^3Vde}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis

globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, si occurfu globi A in eum decidit non impediretur, ascen-

deret, ad altitudinem ed a qua globus A descendit. Hoc est ut $\frac{Aq}{Bq} de$ ad

de seu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x , si modo pro altitudine posteriore ed ponatur x . Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum

B, si non impediretur, ascenderet, est $\frac{a^6}{b^6} x$. Sit ea fK . Ad fK adde fg ,

seu $dH - de - ef - gH$, hoc est $p - x$ si modo pro dato $dH - ef -$

gH scribas p , & x pro incognito de & habebitur $Kg = \frac{a^6}{b^6} x + p - x$.

Unde celeritas globi B ubi decidit a K ad fundum, hoc est ubi decidit per spatium Kg , quod centrum ejus inter decidendum describeret, erit ut

$V(\frac{a^6}{b^6} x + p - x)$. At globus ille decidit a loco Bef ad fundum eodem tem-

pore quo globus superior A ascendit a loco Ace ad summam altitudinem d ,

aut vicissim descendit a d ad locum Ace , & proinde cum gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi

B descendendo ad fundum tantum augebitur quanta est celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo a d ad e acquirat vel ascendendo ab e

ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bef , adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace , & summa, quæ est ut $Vde +$

$\frac{a^3Vde}{b^3}$, seu $Vx + \frac{a^3}{b^3} Vx$ æquabitur $V(\frac{a^6}{b^6} x + p - x)$. Pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$ scri-

be $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$ & æquatio illa fiet $\frac{r}{s} Vx = V(\frac{rt}{ss} x + p)$, &

partibus quadratis $\frac{rr}{ss} x = \frac{rt}{ss} x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss} x$, duc omnia in

ss ac divide per $rr - rt$, & orietur $x = \frac{ssp}{rr - rt}$. Quæ quidem æqua-

tio prodiisset simplicior si modo assumpsissem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, prodiisset e-

nim $\frac{ss}{p - t} = x$. Unde faciendo ut sit $p - t$ ad s ut s ad x habebitur x

seu ed ; cui si addas ec habebitur de , & punctum e in quo globi in se mutuo impingent. Q. E. F.

PROB.

PROB. LV.

Ereclis alicubi terrarum tribus baculis ad horizontale planum in ^{TAB. VII.} punctis A, B, & C perpendicularibus, quorum is qui in A sit sex ^{Fig. 6.} pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, existente linea AB triginta trium pedum; contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A, transire per puncta B & C, baculi autem B per A & C, ac baculi C per punctum A. Quæritur declinatio solis & elevatio poli, siue dies locusque ubi hæc evenierint (x)?

Quoniam umbra baculi cujusque descripsit conicam sectionem, sectionem nempe conii radiosi cujus vertex est baculi summitas; fingam BCDEF, esse hujusmodi curvam (sive ea sit hyperbola, parabola vel ellipsis) quam umbra baculi A eo die descripsit, ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuisse cum BC, BA, CA respectively fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ esse lineam meridionalem siue axem hujus curvæ ad quem demissæ perpendiculares BM, CH, DK, EN, & FL, sunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite designabo littera y, & axis partes interceptas AM, AH, AK, AN, & AL littera x. Fingam denique æquationem $aa \pm bx \pm cxx = yy$, ipsarum x, & y relationem (i. e. naturam curvæ) designare, assumendo aa, b & c tanquam cognitæ ut ex analysi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantum dimensionum posui quia æquatio est ad conicam sectionem; & ipsius y dimensiones impares omisi quia ipsa est ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipsorum b & c, quia indeterminata sunt, designavi notula $\pm$ quam indifferenter pro + aut — usurpo, & ejus oppositum $\mp$ pro signo contrario. At signum quadrati aa affirmativum posui, quia baculum A umbras in adversas plagas (C & F, B & E) projicientem concava pars curvæ necessario complectitur; & proinde si ad punctum A erigatur perpendiculum AB; hoc alicubi occurret curvæ puta in B, hoc est, ordinatim applicatum y, ubi x nullum est, erit reale. Nam inde sequitur quadratum ejus, quod in eo casu est aa, affirmativum esse.

Constat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \pm bx \pm cxx = yy$, sicut terminis superfluis non referta sic neque restrictor est quam ut ad omnes hujus problematis condiciones se extendat, hyperbolam, ellipsin vel parabolam

(x) Hoc problema totidem verbis propositum, & diversimode solutum legitur apud Schootenium in additamento ad suos commentarios in Cartesii Geometriam, quem lege.

majorem Astronomiæ cognitionem flagitet, quam qua Tirones plerumque præditi sint; nos autem Tironibus scribamur, nec fieri possit ut omnia scitu necessaria satis breviter & perspicue tradantur, consultius duximus illos non explicata relinquere.

(y) Cum hoc problema, æque ac sequens

lam quamlibet designatura prout ipsorum aa , b , c , valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibusque signis b & c debent affici, & inde quænam sit hæc curva ex sequenti analyfi constabit.

Analyseos pars prior.

Cum umbræ sint ut altitudines baculorum erit $BC : AD :: AB : AE$ ($:: 18 : 6$) $:: 3 : 1$. Item $CA : AF :: 8 : 6$ $:: 4 : 3$. Quare nominatis $AM = r$, $MB = s$, $AH = t$, & $HC = v$. Ex similitudine triangulorum AMB , ANE , & AHC , ALF erunt $AN = -\frac{r}{3}$. $NE = -\frac{s}{3}$. $AL = -\frac{3t}{4}$. Et $LF = -\frac{3v}{4}$: quarum signa signis ipsarum AM , MB , AH , HC contraria posui quia tendunt ad contrarias plagas respectu puncti A , a quo ducuntur, axisve PQ cui insistant. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa \pm bx \pm cxx = yy$, respective scriptis,

$$r \text{ \& } s \text{ dabunt } aa \pm br \pm crr = ss.$$

$$-r \text{ \& } -\frac{s}{3} \text{ dabunt } aa \pm \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss.$$

$$t \text{ \& } v \text{ dabunt } aa \pm bt \pm ctt = vv.$$

$$-\frac{3}{4}t \text{ \& } -\frac{3}{4}v \text{ dabunt } aa \pm \frac{3}{4}bt \pm \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv.$$

Jam e prima & secunda harum exterminando ss ut obtineatur r , prodit $\frac{2aa}{\pm b} = r$. Unde patet $\pm b$ esse affirmativum. Item e tertia & quarta ex-

terminando vv ut obtineatur t , prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et scriptis insuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, oriuntur $3aa \pm \frac{4a^2c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \pm \frac{a^2c}{9bb} = vv$.

Porro demissa BA perpendiculari in CH , erit $BC : AD :: 3 : 1$ $:: BA : AK :: CA : DK$. Quare cum sit $BA (= AM - AH = r - t)$ $= \frac{5aa}{3b}$, erit $AK = \frac{5aa}{9b}$, vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum sit $CA (= CH - BM = v - s)$ $= V(\frac{4aa}{3} \pm \frac{a^2c}{9bb}) - V(3aa \pm \frac{4a^2c}{bb})$, erit $DK (= \frac{1}{3}CA) = V(\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^2c}{81bb}) - V(\frac{1}{3}aa \pm \frac{4a^2c}{9bb})$. Quibus in æquatione

aa

$aa + bx \div cxx = yy$, pro AK, ac DK, five x , & y , respective scriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \div \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27} aa \div \frac{37a^4c}{81bb} \div 2(\sqrt{\frac{4aa}{27} \div \frac{a^4c}{81bb}})(\sqrt{\frac{aa}{3} \div \frac{4a^4c}{9bb}})$. Et per reductionem $bb \div 4aac = \div 2\sqrt{(36b^4 \div 51aabb + 4a^4cc)}$, & partibus quadratis iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 \div 196aabb + 4a^4cc$, five $\frac{143bb}{196aa} = \div c$. Unde constat $\div c$ negativam esse, adeoque æquationem fictitiam $aa \div bx \div cxx = yy$, hujus esse formæ $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam, quam designat, ellipsin esse. Ejus vero centrum & axes duo sic eruuntur.

Ponendo $y = 0$, sicut in figuræ verticibus P & Q contingit, habebitur $aa + bx = cxx$, & extracta radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = AQ$ vel AP . Adeoque sumpto $AV = \frac{b}{2c}$, erit V centrum ellipsis, & VQ vel VP $(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}})$ semiaxis maximus. Si porro ipsius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa + bx - cxx = yy$ scribatur, fiet $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Quare est $aa + \frac{bb}{4c} = VZq$, hoc est quadrato semiaxis minimi. Denique in valoribus ipsarum AV, VQ, VZ jam inventis, scripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c , exeunt $\frac{98aa}{143b} = AV$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b} = VQ$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$.

Analyseos pars altera.

Supponatur jam baculus puncto A insistens esse AR, & erit RPQ planum meridionale, ac RPZQ conus radiosus cujus vertex est R. Sit insuper per TXZ planum secans horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ sectio sit ad axem mundi, conive, perpendicularis, & ipsum planum TXZ erit ad eundem axem perpendicularare, & conum secabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT distabit. Quamobrem si PS ipsi TX parallela ducatur, fiet RS = RP propter æquales RX, RT; nec non SX = XQ propter æquales PV, VQ. Unde est RX vel RZ $(= \frac{RS + RQ}{2}) = \frac{RP + RQ}{2}$. Denique ducatur RV; & cum VZ perpendiculariter insistat plano RPQ, (sectio utique existens planorum eidem perpendiculariter insistentium fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.

Dictis jam $RA = d$, $AV = e$, PV vel $VQ = f$, & $VZ = g$, erit
 $AP = f - e$, & $RP = \sqrt{ff - 2ef + ee + dd}$. Item $AQ = f + e$,
 & $RQ = \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}$: adeoque $RZ = \frac{RP + RQ}{2}$
 $= \frac{\sqrt{ff - 2ef + ee + dd} + \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}}{2}$. Cujus quadratum

$\frac{dd + ee + ff}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$, est æquale
 $(RVq + VZq = RAq + AVq + VZq =) dd + ee + gg$. Jam reductione
 facta est $\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4} = dd + ee - ff + 2gg$,
 & partibus quadratis ac in ordinem reductis, $ddff = ddg + eeg - ffg$
 $+ g^4$, five $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Denique $6, \frac{98aa}{143b}, \frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, &
 $\frac{8a\sqrt{3}}{143}$ (valoribus ipsorum AR, AV, VQ , & VZ), pro d, e, f , ac g resti-

tutis, oritur $36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36 \cdot 14 \cdot 14aa}{143bb}$, & inde per reducti-
 onem $\frac{49a^4 + 36 \cdot 49aa}{48aa + 1287} = bb$.

In Fig. 6. est $AMq + MBq = ABq$, hoc est $rr + ss = 33 \cdot 33$. Erat
 autem $r = \frac{2aa}{b}$, & $ss = 3aa - \frac{4a^4c}{bb}$, unde $rr = \frac{4a^4}{bb}$, & (substituto
 $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss = \frac{4aa}{49}$. Quare $\frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \cdot 33$, & inde per reductio-
 nem iterum resultat $\frac{4 \cdot 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$. Ponendo igitur æqualitatem in-
 ter duo bb , & dividendo utramque partem æquationis per 49, fit
 $\frac{a^4 + 36aa}{48aa + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis,
 ordinatis, ac divisus per 49, exit $4a^4 = 981aa + 39204$ cujus radix aa est
 $\frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280\frac{2254144}{8}$.

Supra inventum fuit $\frac{4 \cdot 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$, five $\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$. Un-
 de $AV (\frac{98aa}{143b})$ est $\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, & VP vel $VQ (\frac{112aa\sqrt{3}}{143b})$ est
 $\frac{8}{143} \sqrt{160083 - 12aa}$. Hoc est substituendo $280\frac{2254144}{8}$ pro aa , ac
 terminos in decimales numeros reducendo, $AV = 11\frac{188297}{143}$, & VP vel
 $VQ = 22\frac{147085}{143}$. Adeoque $AP (PV - AV) = 10\frac{958788}{143}$, & AQ
 $(AV + VQ) = 33\frac{335382}{143}$.

Deni-

Denique si $\frac{1}{6}$ AR five 1 ponatur radius, erit $\frac{1}{6}$ AQ five 5555897 tangens anguli ARQ 79 gr. 47. 48", & $\frac{1}{6}$ AP five 1826465 tangens anguli ARP 61 gr. 17. 57". Quorum angulorum semisumma 70 gr. 32. 52", est complementum declinationis solis; & semidifferentia 9 gr. 14. 56", complementum latitudinis loci. Proinde declinatio solis erat 19 gr. 27. 8", & latitudo loci 80 gr. 45. 4". Quæ erant inveniendæ.

P R O B. L V I.

E cometæ motu uniformi rectilineo per cælum trajicientis locis quatuor observatis, distantiam a terra, motusque determinationem, in hypothesi copernicæ colligere.

SI e centro cometæ in locis quatuor observatis, ad planum eclipticæ TAB. VII. Fig. 8. demittantur totidem perpendiculara; sintque A, B, C, D, puncta in plano illo in quæ perpendiculara incidunt; per puncta illa agatur recta AD, & hæc secabitur a perpendicularis in eadem ratione cum linea quam cometa motu suo describit, hoc est, ita ut sit AB ad AC ut tempus inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam ac tertiam, & AB ad AD ut tempus illud inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam & quartam. Ex observationibus itaque dantur rationes linearum AB, AC, AD, ad invicem.

Insuper in eodem eclipticæ plano sit S sol, EH arcus lineæ eclipticæ in qua terra movetur, E, F, G, H loca quatuor terræ temporibus observationum, E locus primus, F secundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur donec tres posteriores priorem fecerint in I, K, & L, BF in I, CG in K, DH in L. Et erunt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ longitudinum observatarum cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi cometæ & secundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex observationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis cometæ & solis tempore observationis primæ. Quare si complementum ejus ad duos rectos, nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et simili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur positione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque problema huc redit, ut lineis quatuor positione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione secabitur.

Demissis ad AL perpendicularis BM , CN , DO , ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI . Est & BM ad CN in data ratione BA ad CA , & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN . Quare datur etiam ratio BM ad KN ; & inde ratio quoque BM ad $MI - KN$, hoc est ad $MN + IK$. Cape P ad IK ut est AB ad BC , & cum sit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam $P + MA$ ad $IK + MN$ in eadem ratione; hoc est in ratione data. Quare datur ratio BM ad $P + MA$. Et simili argumento si capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD , dabitur ratio BM ad $Q + MA$. Et proinde ratio BM ad ipsorum $P + MA$ & $Q + MA$ differentiam, quoque dabitur. At differentia illa, nempe $P - Q$ vel $Q - P$, datur. Et proinde dabitur BM . Dato autem BM , simul dantur $P + MA$, & MI , & inde MA , ME , AE , & angulus EAB .

His inventis, erige ad A lineam plano eclipticæ perpendicularem; quæ sit ad lineam EA ut tangens latitudinis cometæ in observatione prima ad radium, & istius perpendicularis terminus erit locus centri cometæ in observatione prima. Unde datur distantia cometæ a terra tempore illius observationis. Et eodem modo si e puncto B erigatur perpendicularis quæ sit ad lineam BF ut tangens latitudinis cometæ in observatione secunda ad radium, habebitur locus centri cometæ in illa secunda. Et acta linea a loco ad primo ad secundum, ea est in qua cometa per cælum trajicit.

R R G B. L V I I.

Si angulus datus CAD circa punctum angulare A , positione datum, & angulus datus CBD circa punctum angulare B , positione datum, ea lege circumvolvuntur ut crura AD , BD ad rectam positione datam EF sese semper interfecent: invenire lineam illam curvam quam reliquorum crurum AC , BC intersectio C describit.

T A B.
VIII.
Fig. I.

Produc CA ad d ut sit $Ad = AD$, & CB ad δ ut sit $B\delta = BD$. Fac angulum Ade æqualem angulo ADE , & angulum $B\delta f$ æqualem angulo BDF , & produc AB utrinque donec ea occurrat de & δf in e & f . Produc etiam ed ad G , ut sit $dG = \delta f$, & a puncto C ad lineam AB ipsi ed parallelam age CH , & ipsi δf parallelam CK . Et concipiendo lineas eG , $f\delta$ immobiles manere dum anguli CAD , CBD lege præscripta circa polos A & B voluntur, semper erit Gd æqualis ipsi $f\delta$, & triangulum CHK dabitur specie (a) . Dic itaque $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, &

(a) Ad plenioris hujus problematis explanationem, anguli dati certum aliquem situm occupare fingantur, ita ut puncta e , L æque dentur ac puncta A , B : tunc dabuntur eA , AL ; LB ; Bc , ut & anguli ALE , BLF .

& fiant anguli $Ale = ALE$, & $B\delta f = BLF$; & ex e ducantur eh , ek , ipsi el , $f\delta$, parallelæ; eæ dabuntur: sit ergo $ke = d$, $eh = e$, $hk = f$.

Sumantur ergo $LA = AL$, ac $AB = BL$; Jam vero anguli gyrent circa polos A & B , ceteris stantibus, & venerint quocumque eA in

& CK = y. Et erit BK ad CK ut Bf ad fd. Ergo $fd = \frac{cy}{x} = Gd$. Aufer hoc de Ge, & restabit $ed = b - \frac{cy}{x}$. Cum detur specie triangulum CKH, pone CK ad CH ut d ad e, & CH ad HK ut e ad f, & erit $CH = \frac{cy}{d}$, & $HK = \frac{fy}{d}$.

Ade.

in AC, Al in Ad, AL in AD, BL in BD, T. Si primum, rursus aut versus E, aut versus F.

Semper triangulum dAl erit æquale ac simile triangulo ADL, ut DBL triangulo DBA.

Cum enim anguli gyranes dati sint, & semper sibi met æquales, semper quoque sibi met æquales erunt anguli quibus ii a duobus rectis deficient; ergo angulus dAD = lAL; igitur, demto communi lAD, erit dAl = DAL: sed angulus Al d factus est æqualis angulo ALD: ergo triangula dAl, DAL sunt æquiangula; atqui latus LA æquat homologum Al, ex constructione: igitur triangula dAl, DAL sunt etiam æqualia. Quare dl = DL.

Sed eodem pacto demonstratur triangulum lBd æquale triangulo LBD. Proinde ld = LD = dl.

Si ergo sumatur lG = fa datæ; semper erit dG vel (dl + lG) = fd vel (fa + ld).

Quod si ex C ducantur CH & CK ipsis ch, ck parallelæ; erunt triangula hck, HCK similia.

Hæc sufficiunt quidem ad Auctorem intelligendum: sed viam ad inferius dicenda straturus, denuo rem, nonnullis mutatis, aggredior.

Tab. T. Aut anguli dati sunt æquales aut inæquales. Fig. 1. Si primum, licet quemlibet assumere: si secundum, bene sumetur minimus, quem esse pono ad A.

Super AB fiat angulus BAL æqualis dato illi, qui circa A movetur; seu (quod idem est) ponatur alterum ex ejus cruribus cadere in AB; alterum crus anguli gyranis circa B cadet in LB per hypothesim. Jam, bisecta AB in V, demittatur ei ad rectos angulos TV secans EF in T: eidem EF occurret AL, aut extra punctum T, aut in ipso puncto

Jungantur AT, TB: erunt anguli TAB, TBA æquales. Nunc si punctum L est versus E, cadet recta BL intra angulum TBA; erit ergo angulus LBA minor angulo TBA vel TAB; sed hic minor est angulo BAL, per hypothesim, igitur illo minor est angulus LBA. Sed angulus gyranis circa B positus est non minor angulo LAB; quare alterum illius crus cadere debet supra lineam AC: cadat in BM.

Si vero punctum L est versus F, eodem pacto probabitur angulus LBA major angulo LAB; ideo fieri poterit ut alterum anguli circa B gyranis crus cadat vel supra lineam AB, vel in ipsa, vel infra eam: si cadit supra, res in casum superiorem recidet, & eadem utemur figura: si in ipsa recta AB, quid accadat dispiciemus suo loco: si vero infra, utemur ejus productione BM eademque figura.

Si autem punctum L cadit in T, anguli mobiles aut æquales sunt, aut inæquales. Si primum, alterum crus anguli B cadet in ipsa BA, & de hoc casu postea loquemur. Si inæquales, crus illud cadere debet supra AB, per hypothesim.

Animadvertendum est, quod in his omnibus, nulla positionis rectæ EF ratio habita est; unde fit hæc stare in illius positione quacunque.

Jam super BA ultra A sumatur Ae æqualis datæ AL, & fiat angulus AeN æqualis dato ALE, ponaturque eA = AL = a.

Item super MB ultra B producta capiatur Bg æqualis datæ BL, & fiat angulus Bgf æqualis angulo dato BLF, & exponatur gf per b, ac fB per e; & sumatur eG = gf = b.

Oo 3

Gy:

Adcoque $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. Est autem AH ad HC ut Ae ad ed, hoc est

$m - x - \frac{fy}{d} : \frac{ey}{d} :: a : b - \frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in se,

fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{acy}{d}$. Duc omnes terminos in

dx , cosque in ordinem redige; & fiet $fcyy - acxy - dcmy - bdx + bdmx = 0$.

Ubi cum incognitæ quantitates x & y , ad duas tantum dimensiones ascendant, patet curvam lineam quam punctum C describit, esse conicam sectionem.

Pone $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, & fiet $xy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et ex-

tracta radice $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}\right)}$.

Unde colligitur curvam hyperbolam esse, si sit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negati-

vum & minus quam $\frac{pp}{ff}$; parabolam, si sit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; ellip-

sin vel circulum, si sit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I. (b)

PROB.

Gyrent nunc anguli dati, & eorum latera se interfecent in recta EF alicubi in D ab L versus F; latus anguli LAB erit in AP, ita ut angulus DAP æquet angulum LAB; quocirca, demto communi DAB, erit LAD æqualis BAP vel eAd, si latus PA producatnr donec occurrat N in d. Quod etiam patet, quia angulus LAe æquat DAd; & communi LAa ablato, DAL æqualis est ipsi dAe. Sed anguli LAD, ADL simul sumti sunt æquales externo ALE, & hic, per constructionem, æquat angulum AeN, id est, angulos internos & oppositos eAd, Ade simul; ergo, sublatis æqualibus, DAL, dAe, restat angulus ADL æqualis angulo Ade; & ob latus eA æquale lateri AL, est latus dA æquale lateri AD, ac ed æquale LD.

Haud aliter latus BM tunc erit in BQ, ita ut angulus LBM æquet angulum DBQ; & demto communi LBQ, erit angulus LBD æqualis angulo MBQ vel gBd, producta recta QB: quare angulus BDE, qui æquat interiores oppositos DBL, BLD simul, æquabit ipsos dBg, Bgd, vel huius parem Bdf; æquales enim

fecimus angulos BLF, Bgf.

Atqui triangula æquiangula BLD, Bgd habent latera LB, Bg æqualia; sunt igitur æqualia, & DB æquat Bd, ac DL ipsam dg; sed recta DL ostensa est æqualis rectæ ed, & facta fuerat eG æqualis fg; superest igitur dG æqualis ipsi fd.

Nunc ex R, ubi FE occurrit eG (productæ, quatenus opus est), duc Rk ipsi fg parallelam, & dic kR = d, Re = e, ek = f.

In ceteris Auctorem sequere.

(b) Si crura AP, BQ datorum angulorum fieri possunt parallela, tunc ordinata in infinitum crescit, id est curva in seipsam non redit; sed in infinitum extenditur; secus vero, si crura illa semper in aliquo puncto concurrant.

Si primum, curva erit hyperbola aut parabola; si secundum, ellipsis aut circulus.

Crura PA, QB parallela erunt, si anguli PAB;

TAB. T.
Fig. 2.

PAB; ABQ simul æquales sint duobus angulis rectis: sed anguli BAD; ADB; DBA simul æquales sunt duobus rectis; ergo est ADB complementum angulorum datorum PAD; DBQ simul ad quatuor rectos.

Ut ergo appareat utrum PA, QB esse possint parallela, super AB describatur versus EF arcus capax hujus complementi.

Hic aut secabit rectam EF, aut eam tanget, aut intersectam & intactam infra se relinquet.

TAB. T.
Fig. 3.

Si primum, duo erunt puncta in recta EF, nempe E; F, ubi eam secat circulus; quæ suppeditabunt latera parallela. Jam sint anguli in EAP, EBQ; latera vero AP, BQ parallela. Si tantisper moveatur intersectio E, & veniat in e, circulus alicubi secabit ipsam Bz in G. Junge AG, angulus AGB æquabit angulum AEB; est autem exterior AGB major interiore & opposito AEG; ergo angulus AEG minor est angulo AEB: atque ideo anguli eAB, eBA simul sumti majores sunt angulis EAB, EBA simul. Sunt autem anguli eAp, eBq, simul, æquales angulis EAP, EBQ, simul; igitur, demtis hinc minoribus EAB, EBA, inde majoribus eAB, eBA, restant anguli pAB, ABq, simul, minores angulis PAB, ABQ; & hi æquales erant duobus rectis, ergo anguli pAB, ABq minores sunt duobus rectis, quapropter rectæ Ap, Bq alicubi conveniant supra rectam AB: conveniant in c.

Jam quia angulus eAB major est angulo EAB, debet reliquus BAp minor esse reliquo BAP, & recta Ap occurrere rectæ BQ, & ultra eam ferri versus R. Quoniam vero eBA minor est EBA, est reliquus ABq major reliquo ABQ, & recta BQ cadit ultra BQ versus R.

Eodem pacto probabitur quod si intersectio super recta fiat in f, concursus laterum reliquorum fiet ultra lineam AO versus S.

TAB. T.
Fig. 4.

Rursus veniat eadem intersectio in e inter puncta E & F, & circulus occurreret ipsi Bz, productæ, alicubi in G; & juncta AG, demonstrabitur eodem pacto angulos BAp, ABq simul majores esse duobus rectis, & latera illa producta occurrere infra rectam AB ultra rectam PAL versus F, & ideo AL totam esse extra curvam.

Idem demonstratur de recta MN. Unde conficitur duas rectas sibi non parallelas huic curvæ non occurrere, nisi, singulas in singulis punctis. Notum autem est ex conicis id uni hy-

perbolæ contingere, & quidem quando rectæ illæ sunt asymptotis parallelæ. Tunc igitur curva est hyperbola.

Iisdem vestigiis insistent facile dispicies, quando arcus, ut supra, descriptus, tangit rectam EF, unum esse punctum præbens latera parallela: hæc duo latera curvæ non occurrere, nisi singula in singulis punctis, & rectas omnes alias bis curvam secare: constat ex conicis id uni parabolæ accidere, & quidem quando rectæ illæ sunt diametri. Tunc ergo curva est parabola.

Sed quando arcus rectæ EF non occurrat, nullum est punctum præbens latera parallela; neque curva in infinitum extenditur. Est ergo circulus aut ellipsis.

Ut nunc perspiciam num sectio sit circulus aut ellipsis, noto quod in circulo transeunte per A, B, angulus describens, C, e, debet semper esse idem; quare semper eadem est summa angulorum CAB, CBA, & eAB, eBA; ergo & PAB, ABQ, & pAB, ABq; quapropter etiam angulus concursus (si quis sit) est semper idem: sed locus tunc est circuli arcus. Ergo ut describatur circulus, aut PA, BQ debent esse parallelæ, aut percurrere circuli arcum; ergo in hypothesi nostra sectio semper est ellipsis.

TAB. T.
Fig. 5.

Hinc sequitur quod cum recta EF ipsam AB secat inter A & B, sectio semper est hyperbola.

Si, ceteris stantibus, anguli dati ita mutantur, ut eadem semper sit eorum summa, curvæ species non mutatur; nam semper idem erit angulus ADB: quare arcus illius capax sibi conitabit, & si primo casu rectam EF tetigerit, semper eam tanget, &c.

Cum latus QB cadit super BA intersectio curvam describens fit in A.

TAB. T.
Fig. 6.

Tunc autem AP sectionem tangit in A; Feratur enim punctum D in d, tunc certe recta PA (producta pro necessitate) cadere debet in pA inter PA & punctum B vel supra vel infra rectam AB, & recta BQ tunc lata in Bq ei occurrat inter PA & punctum B; quare curva totam rectam extra se relinquet versus Q.

Data quavis recta QB transeunte per alter- TAB. U;
utrum polorum B facile invenitur punctum Fig. 1.
ubi ea sectioni occurrat. Fiat angulus QBD æqualis dato gyranti in B. Jungatur DA & fiat

PROB. LVIII.

Parabolam describere quæ per data quatuor puncta transibit.

TAB. U.
VIII.
Fig. 2.

Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam biseca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum esse parabolæ, puncto V existente vertice ejus. Junge AC ipsique AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic AB = a, AC = b, AG = c, GD = d. In AC cape AP cujusvis longitudinis & a Page PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum esse parabolæ; dic AP = x, PQ = y, & æquationem quamvis ad parabolam assume quæ relationem inter AP & PQ exprimat. Ut quod sit $y = e + fx \pm \sqrt{gg + bx}$.

Jam si ponatur AP sive $x = 0$, puncto P incidente in ipsum A, fiet PQ sive $y = 0$, ut & = — AB. Scribendo autem in æquatione assumta o pro x, fiet $y = e \pm \sqrt{gg}$, hoc est = $e \pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e + g$ est = o, minor $e - g = -AB$ sive — a (c). Ergo $e = -g$ & $e - g$, hoc est — $2g = -a$, sive $g = \frac{1}{2} a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc $y = -\frac{1}{2} a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa + bx}$.

Adhæc

fiat angulus DAP æqualis alteri ex datis. Recta AP alicubi occurret rectæ BQ in P, quod erit punctum quæsitum.

tersectio Q anguli mobilis EAQ semper fit in recta QB, quæ hoc motu describitur.

Veniamus tandem ad alteram hypotheseim.

Nunc igitur ambo anguli simul cadere ponuntur in AB: sint ii BAL, LBA.

TAB. U.
Fig. 4.

Quia hic ambo crura super eandem rectam cadunt; sumatur $eA = AL = a$, & $fB = BL = c$, & fiant anguli $N_1A = ALE$, ac $MfB = BLF$; & quia punctum g cadit in f, erit b (distantia horum punctorum) = o.

Igitur ex superiore æquatione deleantur termini, ubi est b; & erit

$fey \pm \frac{dc}{ae} xy - dcm = 0$, & cunctis divisifis per y, $fey \pm \frac{dc}{ae} x - dcm = 0$, æquatio ad rectam,

(c) Quando $x = 0$, habet y ex æquatione duos valores $e + g$, $e - g$, & ex consideratione figuræ duos alios o & — a; hi duo valores debent esse æquales singuli singulis, igitur, pone, ut libet, vel $e + g = 0$ vel $e - g = 0$. Si primum, quid inde fiat vides apud Auctorem. Si secundum, erit ergo $e + g = -a$; sed quoniam

Ex his facillime describuntur sectiones hoc problemate quæsitæ.

TAB. U.
Fig. 2.

Sit enim AP sectionis tangens in A, cui parallela sit BQ. Inveniatur punctum Q, ubi hæc sectioni occurret. Recta BQ bisecetur in G. Erit AG diameter; id sufficit pro parabola.

Sed pro aliis sectionibus, quære in AG punctum H, ubi AG curvæ occurrit & describe sectionem.

Nota quod in ellipsi erit AH major quam AG; focus vero in hyperbola.

TAB. U.
Fig. 3.

Cum recta EF transsit per alterutrum polorum B, recta describitur.

Siquidem, quia datorum angulorum crura concurrere debent in recta EF, punctum aliquod ex crure anguli QBE semper esse debet in recta FE; sed alterum ex his punctis (nempe punctum B) est in eadem recta; ergo totum crus illius anguli cum recta FE coincidit: quare alterum BQ jacet immobile; igitur in-

Adhæc si ponatur AP five $x = AC$ ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum $PQ = 0$. Pro x igitur in æquatione novissima scribe AC five b , & pro y , 0, & fiet $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$ (d), five $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$; & partibus quadratis, $-afb + ffb = hb$. Sive $ffb - fa = b$.

Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$.

Insuper si ponatur AP five $x = AG$ five e , fiet PQ five $y = -GD$ five $-d$ (e). Quare pro x & y in æquatione novissima scribe e & $-d$, & fiet $-d = -\frac{1}{2}a + fe - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffb - fac}$. Sive $\frac{1}{2}a - d - fe = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffb - fac}$. Et partibus quadratis, $-ad - fac + dd + 2def + ecf = ffb - fac$. Et æquatione ordinata & reducta, $ff = \frac{2d}{b-e}f + \frac{dd - ad}{bc - ce}$.

Pro $b - c$ hoc est pro GC scribe k , & æquatio illa fiet $ff = \frac{2d}{k}f + \frac{dd - ad}{kc}$. Et extracta radice $f = \frac{d}{k} + \sqrt{\frac{ddc + ddk - adk}{kkc}}$. (f) In-

vento

niam $e - g = 0$, est $e = g$, ergo $2g = e + g = -a$, & $g = -\frac{1}{2}a = e$, unde oritur eadem æquationis assumptæ mutatio.

(d) Ponit Newtonus signum positivum quantitati radicali, quia jam finxerat radicem majorem æqualem nihilo, & in eadem hypothesi semper est manendum. Siquis autem finxisset minorem radicem, in superiori collatione, æqualem nihilo, affigere nunc deberet quantitati radicali signum negativum & idem inveniret.

(e) Est quidem etiam $y = +Gg$: sed quoniam hoc non conducit ad definiendum valorem ipsius f , ideo negligitur.

(f) Duc AF ipsi BD parallelam & æqualem, & CH parallelam FA; & habebis AG (c). GF (GD - DF = GD - BA = d - a) :: CG (k). GH = $\frac{dk - ak}{c}$, & proinde HD = $\frac{cd + dk - ak}{c}$; igitur si fiat GD (d).

Tom. I.

DK :: DK.DH, erit DK = $\sqrt{\frac{cdk + ddk - adk}{c}}$:

est autem $fk = d \pm \sqrt{\frac{cdk + ddk - adk}{c}}$, atque ideo æquat aut GD + DK (id est, 2GD + GK) aut DG - DK (hoc est, -GK). Pone GK = n ; & erit fk , vel æqualis $2d + n$, vel $-n$: unde æquatio ad parabolam evadet,

vel $y = -\frac{a}{2} + \frac{2dx + nx}{k} \pm \sqrt{\frac{aa + 4bddx + 4bdnx + bnnx - 2adx - annx}{kk}}$

vel $y = -\frac{a}{2} - \frac{nx}{k} \pm \sqrt{\frac{aa + bnnx}{kk} + \frac{anx}{k}}$; quæ cum diversæ sint, indicant parabolas duas problemati satisfacere.

Primam ut construas, pone MD æqualem DG. Ex K age KL parallelam & æqualem datæ CG. Junge ML, cui parallelam duc El occurrentem MK productæ in I. Cetera, ut in Auctore. Secundæ autem constructionem dat Auctor ipse.

TAB. U.
Fig. 4.

Pp

vento autem f , æquatio ad parabolam, id est $y = -\frac{1}{2}a + fx + \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$, plene determinatur: cujus itaque constructione parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bifecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut sit EV.EI::EBq. DIq—EBq, & erit V vertex (g), VE diameter, & $\frac{BEq}{VE}$ latus rectum parabolæ quæsitæ. (b)

PROB.

(g) Est enim VI ad VE ut quadratum DI ad quadratum BE, & dividendo, &c.

TAB. U. Fig. 5. 6. Verticem autem sic expedite invenies. Super DI diametro describe semicirculum ILD, cui inscribe chordam DN æqualem BE, junge IN, & ex N demitte NR ad rectos angulos supra DI. Junge RE, & age parallelam DV. Dico factum.

Est enim VI ad VE ut DI ad DR ut quadratum ID ad quadratum DN vel EB.

(b) Quia nempe rectangulum lateris recti in abscissam æquat quadratum ordinatæ.

Una autem erit parabola quæsito respondens, cum unus erit valor ipsius f ; nempe cum aut nulla erit horum valorum differentia $2\sqrt{\frac{edd + ddk - adk}{ckk}}$, aut cum f evanescit.

Si primum; fiet $ed + dk = ak$, vel $c + k$ ($AG + GC = b$). $k(GC = b - c) :: a(AB, d(GD)$, aut $CA. AB :: CG. GD$, quod, quoniam anguli CAB, CGD sunt æquales) fieri nequit, nisi quando puncta B, D, C sunt in eadem recta; tunc autem res erit semper impossibilis, quia parabola rectæ occurrere nequit in tribus punctis. Oportet ergo ut valor ipsius f sit nullus, id est, ut $\frac{d}{k} = \frac{a}{c}$.
 $\sqrt{\frac{edd + ddk - adk}{ckk}}$, aut $\frac{dd}{kk} = \frac{edd + ddk - adk}{ckk}$,
 & denique $a = d$, five rectæ AC, BD parallelæ.

Hæc eleganter quidem Newtonus: sed facile poterat hoc per præcedens problema solvi.

TAB. U. Fig. 7. Jungantur tria quævis puncta B, A, C; e quarto D fiant anguli DBM = CBA, &

DAP = CAB. Super chorda AB describatur arcus capax complementi datorum angulorum ad quatuor rectos, ad quem ex P ducantur tangentes EP, PF. Jam demonstratum est angulos hos descripturos parabolam, quæ transibit per D, B, A tria ex datis punctis, ut & per quartum C, cum latera AB, BD venient ambo in ABK.

Eodem pacto invenietur ellipsis & hyperbola transiens per data quatuor puncta.

Ellipsis, quidem, ducta ex P aliqua Pe extra circumulum.

Hyperbola vero, ducta aliqua Pc secante circumulum. Et quia infinitæ Pe, Pc duci possunt, liquet quod infinitæ ellipses aut hyperbolæ problemati satisfaciunt.

Idem Analyti Geometrica.

Putæ factum, & data quatuor puncta C, A, B, D. Sit parabola per illa transiens AOVD: Fig. 1. ita junge bina puncta ut rectæ jungentes AD, CB alicubi se interfecent in G; & sint VI diameter pertinens ad ordinatam AD & LM diameter pertinens ad ordinatam BC. Hæ duæ diametri sunt parallelæ. Per L agatur recta LE parabolam tangens; hæc erit parallela ipsi BC, & occurret IV. productæ alicubi in E. Ex L demitte LK parallelam ipsi AD. Pariter per V age VF tangentem parabolæ & occurrentem ML productæ in F; & per V duc VN parallelam BC. Hæ duæ tangentes alicubi, in H, se decussabunt. Quia ELNV, VFLK sunt parallelogramma, æquales sunt EV, LN, & VK, FL; sed KV æquat BV, ergo etiam FL & LN; & FH æquat HV, ac EH, HL. Est autem quadratum LK vel VF æquale rectangulo ex VK in ejus latus rectum σ , & quadratum VN vel EL rectangulo

gulo ex LN in ejus latus rectum π ; ergo hæc duo quadrata, vel quadrata VH, HE, sunt ut π & π . Jam ex G age GO diametrum five parallelam VI, & OP ordinatam; erit quadratum OP par rectangulo PV in π , & quadratum AI par rectangulo IV in π , ac excessus hujus quadrati supra illud, nempe rectangulum AGD, æquale excessui rectangulorum, id est, rectangulo ex PI, seu OG, in π . Eadem ratione, æcta per O parallela ipsi CB, demonstrabitur rectangulum BGC æquale rectangulo OG in π . Igitur hæc duo rectangula sunt ut π & π , seu, ut quadrata VH, HE; vel, æcta AQ diametro, ut quadratum AG ad GQ quadratum. Dantur autem rectangula AGD, BGC; datur itaque eorum ratio (Dat. 1.) id est, quadratorum AG, GQ. At datur recta AG, ergo etiam GQ (Dat. 2.), & datum est punctum G in recta BC positione data; datur ideo etiam punctum Q, & recta AQ datur positione ut omnes ei parallelae; quapropter duc BR ipsi AQ parallelam & datam positione ac magnitudine: biseca datam AD in I; magnitudine quoque dabuntur AR, RD, AI. Est autem, ex demonstratis, rectangulum ARD ad quadratum AI ut BR ad VI; igitur datur VI magnitudine. Quære tertiam post VI, IA, quæ erit latus rectum π . & per V verticem, latere recto π , diametro VI describe parabolam, quæ transibit per quatuor assignata puncta.

Demonstrationem facile invenies, analyseos vestigia retro legens.

Notandum quod punctum Q sumi potest versus B, & tunc fuissent duæ parabolæ proposito servientes.

Determinatio.

TAB. X.
Fig. 2. Sed si alterutrum ex punctis Q, puta Q¹, caderet in C, una esset parabola solvens problema; illa nempe, cujus diameter est AQ²; nam illa, cujus diameter est AQ¹; evanescit, quia tunc diameter occurrere debet parabolæ in duobus punctis A, C, quod est absurdum. Tunc autem iterum parallelæ essent AC, BD. Igitur si & alterum punctum Q caderet in alterum ex datis punctis, problema esset impossibile.

Aliter.

TAB. X.
Fig. 3. 4. Factum sit, & jungantur data quatuor puncta C, A, B, D, duabus rectis alicubi convenientibus in G, aut extra, aut intra parabolam. Per A ducatur AH parallela ipsi BD,

ac per puncta A, C, H, diametri AE, CF, HK.

Patet quod si daretur punctum F, problema esset solutum; tunc enim daretur positione & magnitudine recta CF; quare & diametri parabolæ darentur positione; & quia recta BD datur magnitudine, datur etiam punctum I eam bifecans, quapropter positione datur diameter IV, sed etiam magnitudine; quoniam rectangulum (quod tunc datum esset) DFB ad quadratum datum DI, ut data recta FC ad IV. Daretur ergo parabolæ vertex & diameter, sed & latus rectum; est enim tertia post duas datas VI, ID. Superest igitur investigandum punctum F.

Jam rectangulum BFD est ad rectangulum BED ut CF ad AE, vel ut FG ad GE. Sed rectangulum BFD una cum quadrato IF æquat quadratum ID, nempe rectangulum BKD una cum quadrato KI; & quadratum KI par est rectangulo EFK & quadrato IF simul; igitur, demito hinc inde communi, rectangulum BFD æquat rectangula EFK & BKD, vel BED (sunt enim æquales BI, ID, & EI, IK.) Igitur rectangula BED & EFK, simul, ad rectangulum BED ut FG ad GE, & BED ac EFK simul ad EFK ut GF ad FE ut GFK ad EFK; sunt igitur æqualia rectangula BED ac EFK simul, seu BED, & GFK; quare GF ad FB ut DF ad FK, atque FG ad GB ut FD ad DK vel BE: igitur (addendo antecedentes antecedentibus, & consequentes consequentibus) DG ad GE ut FG ad GB, & rectangulum DGB æquat rectangulum EGF. Datur autem rectangulum DGB; quo circa & rectangulum EGF datur magnitudine: sed EG ad GF eandem habet rationem ac data AG ad datam GC; ideoque rectangulum EGF specie datur, & latera EG, GF: dantur magnitudine (dat. 55.); quare, cum detur punctum G & recta GD positione, dantur puncta E & F. Quod inveniendum supererat.

Compositio fiet describendo rectangulum æquale dato BGD & simile dato AGC per 25. VI. Elem. & sumendo GE, GF æqualia lateribus rectanguli sic descripti.

Quia vero e G versus D & versus partes contrarias sumi possunt GE & GF; duæ sunt parabolæ proposito satisfaciens; nisi cum alterum punctum F cadit in D: quod si accideret, esset rectangulum DGB æquale rectangulo DGE, ergo GE = GB: factum autem est rectangulum FGE, id est, nunc DGB, simile rectangulo, CAG; igitur DG
P p 2

TAB. X.
Fig. 5.

TAB. X.
Fig. 6. 7.

ad

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.

TAB. VIII
Fig. 3.

Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut sit AHC ad BHE :: AIC ad FID :: EKG ad FDK, & erunt puncta F ac G in conica sectione, ut notum est (i). Hoc tamen observare debebis, quod si punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At si punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E, vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & similiter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum; id quod fiet capiendo IF, KG, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biseca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM se mutuo secantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ sectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum DM (k). Produc LM hinc inde si opus est ad P & Q ita ut sit BLq. FMq :: PLQ. PMQ, & erunt P & Q vertices conicæ sectionis & PQ latus transversum. Fac PLQ. LBq :: PQ. T. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoscitur figura.

Restat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda sit ad P & Q ita ut fiat BLq. FMq :: PLQ. PMQ. Nempe PLQ sive PL. LQ est (PR — LR) (PR + LR), nam PL est PR — LR, & LQ est RQ + LR seu PR + LR. Porro (PR — LR) (PR + LR) multiplicando fit PRq.

ad IC ut EG ad GA; & CD; AB rursus sunt parallelæ, & parabola satisfaciens problemati ea esset, cujus diameter bisecaret ordinatas AB, CD, &c.

(i) Puncta F ac G sic inveniri possunt.

TAB. X.
Fig. 8.

Per tria data puncta A, B, C, transeat circulus ABCR. Est AH.HC = BH.HR; quare AH.HC ad BH.HE :: RH ad HE, quod debet esse :: AI.IC ad DI.IF :: $\frac{AI.IC}{DI}$ ad IF; ergo

inveni IS = $\frac{AI.IC}{DI}$ (junctis DC, & ducta AS ipsi DC parallela) & junge RI, RS, atque huic parallelam duc VF; & erit punctum F quæsitum, quia RH ad HE :: RI ad IV :: SI ad IF, restat faciendum :: KG ad $\frac{FK.KD}{EK}$; quod

eodem pacto facile fiet.

Auctoris vero monitum pendet a propos. cui solutio innititur.

(k) Nam EB & FD ut & EG; AI; sunt ordinatæ parallelæ, quæ a diametris bisecari debent. Omnes autem diametri aut sunt parallelæ aut per centrum transeunt. Unde intersectio duarum diametrorum licet non conjugatarum exhibet centrum. Si ML, ON parallelæ sint, sectio erit parabola cujus vertex V, & parameter invenietur ut in Probl. superiori.

Si hæ diametri se decussant, sectio erit hyperbola aut ellipsis.

$PRq - LRq$. Et ad eundem modum PMQ est $(PR + RM)(PR - RM)$, seu $PRq - RMq$. Ergo $BLq \cdot FMq :: PRq - LRq \cdot PRq - RMq$, & dividendo $BLq - FMq \cdot FMq :: RMq - LRq \cdot PRq - RMq$. Quamobrem cum dentur $BLq - FMq$, FMq , & $RMq - LRq$ dabitur $PRq - RMq$. Adde datum RMq , & dabitur summa PRq , adeoque & latus ejus PR (l), cui QR æqualis est.

(l) Recta autem PR invenitur more solito per circulos & rectas.

TAB. Y. Fig. 1. Ex. gr. diametro BL describatur semicirculus BLm , sit chorda $Lm = FM$. Erit $Bm^2 = BL^2 - FM^2$; fiat $Lm = mQ$. Sit $BT = RM$; describatur alter semicirculus BTX ; & sit chorda $TX = LR$; & erit $XB^2 = RM^2 - LR^2$. Jungatur mX ; cui parallela ducatur QZ ; & habebitur Bm ($\sqrt{BL^2 - FM^2}$) mQ (FM) :: BX ($\sqrt{RM^2 - LR^2}$) XZ , quæ proinde æquabit $\sqrt{PR^2 - RM^2}$. Sume $XY = RM$, & erit $ZY = PR$. Eodem pacto invenitur altera sectionis diameter.

Cum duæ diametri datæ sint magnitudine & positione, patet quod una tantum sectio problemati satisfaciatur.

Poterant aliter inveniri puncta P & Q . Sed opus est his duobus lemmatibus.

TAB. Y. Fig. 2. Si inter duas parallelas AB , CD incidat quomodocumque recta OF , a cujus punctis duobus quibuscumque agantur alia recta EH , LI , parallelis occurrentes in P & K , erit rectangulum ENL ad rectangulum LME ut HNK rectangulum ad rectangulum PMI .

Nam ratio rectanguli ENL ad rectangulum EML componitur ex ratione NE ad EM & NL ad LM . Sed ratio NE ad EM eadem est ac ratio NH ad MP ; ratio autem NL ad LM eadem est ac ratio NK ad MI ; & ex rationibus NH ad NK , ac PM ad MI componitur ratio rectangulorum HNK , GMI &c.

TAB. Y. Fig. 3. Si datum sit rectangulum utrumque ACB , ADB , & data puncta C , D , invenire puncta A , B .

Rectangulo ACB æquale fiat rectangulum DCE ; quod quoniam datum est magnitudine & datum est latus DC , dabitur latus CE & punctum E . Erit autem BC ad CD ut EC ad CA : sed BC major est CD , ex hypoth. ergo CE major est CA ; quare dividendo CB ad BD ut CE ad EA .

Item rectangulo ADB fiat æquale CDF , &

datum erit punctum F . Sed est CD ad DB ut AD ad DF ; ergo etiam CB ad BD ut AF ad FD . Atqui demonstratum est, ut CB ad BD ita etiam CE ad EA : igitur AF ad FD ut CE ad EA , & rectangulum FAE æquat rectangulum ex FD in CE ; sed hoc datur, & illud applicatum est rectæ datæ FE , ita ut deficiat quadrato; datur ergo recta EA & punctum A . Jam dabitur rectangulum ACB & datur latus unum AC , ergo & alterum CB .

Compositio manifesta est.

Nunc ex A duc AS parallelam diametro TAB. Y. Fig. 4. jam descriptæ PQ ; & in ea determina punctum S ad sectionem. Junge FC occurrentem AS in T , & PQ in M , ac CS occurrentem PQ in K ; & per data puncta F , A , age rectam FA occurrentem PQ in V . Et quoniam inter duas parallelas AS , PQ incidit recta FC , a qua ductæ duæ parallelis occurrentes FV , CS ; erunt rectangula FMC , FTC ut rectangula KMV , STA . Sed quia puncta A , F , S , Q , C , P , sunt ad sectionem conicam, & AS , PQ parallelæ, rectangula eadem FMC , FTC sunt ut rectangula QMP , STA . Igitur æqualia sunt KMV , QMP ; hoc autem datum est, ergo & illud magnitudine datur.

Eodem modo per A & E age rectam AE occurrentem PQ in β , & per B & S rectam BS occurrentem PQ in γ , & demonstrabis rectangulum QLP æquale $\beta L \gamma$, & hoc datum est, ergo & illud; dantur autem duo puncta M & L ; ergo, per lemma II, dantur etiam puncta Q & P . Quod E. I.

Item poterat hoc problema solvi per TAB. Y. Fig. 5. Probl. LVII. Junctis enim tribus quibuscumque punctis A , E , C ut & A , B , E , ac A , D , E ; fac angulum $BAF = DAG =$ dato CAE ; item angulum $BEF = DEH =$ dato CEA . Produce HE in G , donec ipsi AG occurrat: duc rectam GF occurrentem ipsi AE in M ; anguli dati MAC , MEC gyrantes circa polos A , E & per rectam GM circumducti describunt conicam sectionem per data quinque puncta transeuntem, ut liquet.

PROB. LX.

*Conicam sectionem describere quæ transibit per quatuor data puncta,
& in uno istorum punctorum continget rectam positione datam.*

TAB.
VIII.
Fig. 4.

Sint puncta quatuor data A, B, C, D, & recta positione data AE, quam conica sectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta D, C, & DC, producta si opus est, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum B ipsi DC age parallelam BF, quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipsi BF in I. In FB, DI, si opus est productis, cape FG, HI ejus longitudinis ut sit AEq. CED :: AFq. BFG :: DIH. BIG. Et erunt puncta G & H in conica sectione, ut notum est: si modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in superiore problemate traditam. Biseca BG, DC, DH in K, L & M. Junge KL, AM se mutuo secantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad semidiametrum AO. Quibus cognitis cognoscitur figura (m).

PROB. LXI.

*Conicam sectionem describere quæ transibit per tria data puncta,
& in duobus istorum punctorum continget rectas positione datas.*

TAB.
VIII.
Fig. 5.

Sint puncta illa data A, B, C, tangentes AD, BD ad puncta A & B, D communis intersectio tangentium. Biseca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF ætæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O, & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO ea lege ut sit etiam AEq. CFq :: VE (VO + OE) . VF (VO + OF); & erit V vertex, & O centrum figuræ. Quibus cognitis figura simul cognoscitur. Est autem $VE = VO - OE$, adeoque $VE (VO + OE) = (VO - OE) (VO + OE) = VOq - OEq$. Præterea, quia VO media proportionalis est inter DO & EO, erit $VOq = DOE$, adeoque $VOq - OEq = DOE - OFq = DEO$. Et simili argumento erit $VF (VO + OF) = VOq - OFq = DOE - OFq$. Ergo $AEq . CFq :: DEO . DOE - OFq$. Est $OFq = EOq - 2FEO + FEq (n)$. Adeoque $DOE - OFq = DOE$

TAB. Y.
Fig. 6.

(m) Nulla hic est difficultas; sed interim per Probl. LVII. hoc solvam. Junge DC, CB, donec rectæ DC, CB occurrant datis FA, AG in F & G; per quæ puncta duc rectam indefinitam FG, quacum perpetuo concurrant recta GB & crus anguli GAB; sic describetur sectio conica transiens per puncta B, A, D, C & rectam AE tangens in A.

(n) Est enim EO divisa in F; ergo EO

quadratum æquale quadratis EF, FO una cum bis rectangulo EFO; igitur OF quadratum æquat excessum quadrati EO supra quadratum EF cum bis rectangulo EFO; sed bis rectangulum EFO una cum bis quadrato EF æquat bis rectangulum OEF; igitur quadratum OF æquat excessum quadratorum OE, EF supra bis rectangulum OEF, aut $OFq = OEq + EFq - 2OEF$.

$$\text{DOE} - \text{OE}q + 2\text{FEO} - \text{FE}q = \text{DEO} + 2\text{FEO} - \text{FE}q. \text{ Et } \text{AE}q. \\ \text{CF}q :: \text{DEO} . \text{DEO} + 2\text{FEO} - \text{FE}q :: \text{DE} . \text{DE} + 2\text{FE} - \frac{\text{FE}q}{\text{EO}}.$$

Datur ergo $\text{DE} + 2\text{FE} - \frac{\text{FE}q}{\text{EO}}$. Aufer hoc de dato $\text{DE} + 2\text{FE}$, & resta-

bit $\frac{\text{FE}q}{\text{EO}}$ datum. Sit illud N ; & erit $\frac{\text{FE}q}{\text{N}} = \text{EO}$, adeoque dabitur EO .

Dato autem EO simul datur VO medium proportionale inter DO & EO .

Hoc modo per theorematum quædam Apollonii (e) satis expedite resolvuntur hæc problemata: quæ tamen sine istis theorematibus per Algebram solam resolveri possent. Ut si proponatur primum trium novissimorum problematum; sint puncta quinque data A, B, C, D, E , per quæ conica sectio transire debet. Junge duo quævis AC , & alia duo BE rectis sectantibus in H . Ipsi BE parallelam age DI occurrentem AC in I ; ut & aliam quamvis rectam KL occurrentem AC in K , & conicæ sectioni in L . Et finge conicam sectionem datam esse, ita ut cognito puncto K simul cognoscatur punctum L . Et posito $AC = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y , assume quamvis æquationem quæ conicas

TAB. VIII. Fig. 6.

(e) Quoniam Apollonii theorematibus uti vult Auctor, multo facilius poterat centrum inveniri. Per datum punctum C due ipsi AD parallelam CG , quæ occurrat DB in G , & sectioni in I ; erit igitur per demonstrata in conicis, rectangulum CGI ad quadratum GB ut quadratum AD ad quadratum DB ; dantur autem tria hæc quadrata, & insuper recta CG ; datur ergo recta GI , & punctum I . Quapropter ordinata est IC ; eam biseca, & per puncta contactus & bisectionis age rectam, quæ aut suo cum DF concursu dabit centrum; aut ei parallela erit.

propositum, quia difficilius est, & solum exhibet solutionem alterius.

Ceterum punctum I facile determinatur. Occurrat enim recta CG rectæ AB in K ; & erit AD ad DB ut KG ad GB ; seu quadrata AD , DB ut quadrata KG , GB ; ostensum autem est in conicis ut quadrata AD , DB ita esse rectangulum CGI ad quadratum GB ; ergo quadratum datum KG æquat rectangulum CGI ; igitur CG ad GK ut KG ad GI ; dantur autem CG , GK ; quare datur etiam GI .

Si primum sectio erit ellipsis, si centrum cadit intra angulum ADB , hyperbola veso, si cadit extra; & tunc semper, dato EO , ut ait Newtonus, simul datur VO medium proportionale inter DO & EO .

Poterat etiam per C agi ki parallela alteri tangenti, & sic definir punctum i quantum ad sectionem, quæ descripta circa hæc quinque puncta, tanget rectas AD , DB .

Sed & hoc per Probl. LVII. solvi potest.

Si secundum, sectio erit parabola, & bisecta ED dat V verticem. Hoc enim problema diversimode proponi potest. Siquidem fieri potest, ut sciamus AD , DB esse tangentes nunc parabolæ, nunc hyperbolæ, nunc ellipseos per C transeuntis, & describenda sit certa curva; & fieri potest ut datis tangentibus & punctis, proponatur invenire quænam sectio problemati satisfaciatur, & eam describere. Nos solvimus problema secundo modo

Jungantur puncta $B; A; C$; fiat angulus CAG æqualis KAB ; & per CB agatur recta $Fig. 7.$ CB ipsi AG occurrens in G , fiat nunc angulus BAF æqualis BAK ; producat FA , donec ipsi DB occurrat in L ; per data puncta G, L agatur recta indefinita GL ; recta GB ; & angulus GAC circa puncta $A; G$; gyranter, concursu suo peragranter rectam GL describeat sectionem conicam requisitam.

TAB. Y.

nicas sectiones generaliter exprimit, puta hanc $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates determinatas cum signis suis, x vero & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire possumus, habebimus conicam sectionem. Fingamus ergo punctum L successive incidere in puncta A, C, B, E, D , & videamus qui inde sequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A , erit in eo casu AK & KL , hoc est x & y , nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evanescent, & restabit $a = 0$. Quare delendum est a in æquatione illa, & ceteri termini

$$bx + cxx + dy + exy + yy \text{ erunt } = 0.$$

Porro si L incidit in C , erit AK seu $x = AC$, & LK seu $y = 0$. Pone ergo $AC = f$, & substituendo f pro x , & 0 pro y ; æquatio ad curvam

$$bx + cxx + dy + exy + yy = 0,$$

evadet

$$bf + cff = 0, \text{ seu } b = -cf.$$

Et in æquatione illa scripto $-cf$ pro b evadet

$$-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0.$$

Adhæc si punctum L incidit in punctum B , erit AK seu $x = AH$, & CL seu $y = BH$. Pone ergo $AH = g$ & $BH = h$, & perinde scribe g pro x & h pro y , & æquatio

$$-cfx + cxx, \text{ \&c.}$$

evadet

$$-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0.$$

Quod si punctum L incidit in E , erit $AK = AH$ seu $x = g$, & KL seu $y = HE$. Pro HE . ergo scribe $-k$ cum signo negativo quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC , & substituendo g pro x & $-k$ pro y , æquatio

$$-cfx + cxx, \text{ \&c.}$$

evadet

$$-cfg + cgg - dk - egk + kk = 0.$$

Aufer hoc de superiori æquatione

$$-cfg + cgg + dh + egh + hh,$$

&

& restabit

$$dh + egh + bh + dk + egk - kk = 0.$$

Divide hoc per $b + k$, & fiet $d + eg + h - k = 0$.

Hoc ductum in b aufer de

$$-efg + eeg + dh + egh + bh = 0,$$

& restabit

$$-efg + eeg + bk = 0; \text{ seu } \frac{bk}{eg + fg} = e.$$

Denique si punctum L incidit in punctum D , erit AK seu $x = AI$, & KL seu $y = ID$. Quare pro AI scribe m & pro ID n , & perinde pro x & y substitue m & n , & æquatio

$$-efx + exx, \text{ \&c.}$$

evadet.

$$-efm + cmm + dn + emn + nn = 0.$$

Hoc divide per n & fiet

$$\frac{-efm + cmm}{n} + d + em + n = 0.$$

$$\text{Aufer } d + eg + h - k = 0,$$

& restabit

$$\frac{-efm + cmm}{n} + em - eg + n - h + k = 0.$$

Sive

$$\frac{cmm}{n} - \frac{efm}{n} + n - h + k = eg - em.$$

Jam vero ob data puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI , hoc est f, g, m, h, k, n . Atque adeo per æquationem $\frac{bk}{fg - gg} = e$ datur e . Dato autem e , per æquationem

Tom. I.

Q9

cmm

$$\frac{emm - efm}{n} + n - h + k = eg - em$$

datur $eg - em$. Divide hoc datum per datum $g - m$, & emerget datum e . Quibus inventis, æquatio $d + eg + h - k = 0$, seu $d = k - h - eg$ dabit d . Et his cognitis, simul determinatur æquatio ad quæfitam conicam sectionem

$$cfx = cxx + dy + exy + yy.$$

Et ex ea æquatione per methodum Cartesii determinabitur conica sectio.

Quod si quatuor puncta A, B, C, E, & positio rectæ AF quæ tangit conicam sectionem ad unum istorum punctorum A, daretur, posset conica sectio sic facilius determinari. Inventis ut supra æquationibus

$$cfx = cxx + dy + exy + yy,$$

$$d = k - h - eg,$$

$$e = \frac{\frac{8x}{bk}}{fg - gg},$$

concepe tangentem AF occurrere rectæ EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipsius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut contemplanti figuram constare potest (p). Dic vero $FH = p$, & in hoc casu ubi LK est ad AK in ultima ratione, erit $p \cdot g :: y, x$, sive $\frac{gy}{p} = x$. Quare pro x in æquatione

$$cfx = cxx + dy + exy + yy,$$

scribe $\frac{gy}{p}$, & orietur

$$\frac{cgy}{p} = \frac{cgyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy.$$

Divide omnia per y , & emerget

(p) Ubiunque cadat recta LK, si producat in I, similia semper erunt triangula IAK, FAH, unde semper $IK : KA :: FH : HA$; quæ ratio, cum semper eadem sit, manebit etiam, ubi IK tam prope AL erit, ut fere cum ea coincidat, sive, ut triangulum IKA evanescat; tunc vero coincident puncta K, L, A, quæ ratio dicitur ultima.

$$\frac{efg}{p} = \frac{egg}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y.$$

Jam, quia supponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL, seu y, infinite parvum vel nihil esse, dele terminos qui per y multiplicantur, & restabit $\frac{efg}{p} = d$. Quare fac $\frac{bk}{fg - gg} = e$ dein $\frac{efg}{p} = d$, denique $\frac{k - b - d}{g} = e$, & inventis e, d & e, æquatio

$$efx = cxx + dy + exy + yy$$

determinabit conicam sectionem.

Si denique tria tantum puncta A, B, B dentur, una cum positione dua-^{TAB. VIII.} rum rectarum AT, CT, quæ tangunt conicam sectionem in duobus isto-^{Fig. 7.} rum punctorum A & C, obtinebitur ut supra ad conicam sectionem æquatio hæc

$$efx = cxx + dy + exy + yy.$$

Deinde si supponatur ordinatam KL parallelam esse tangenti AT, & concipiatur eam produci donec rursus occurrat conicæ sectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram constare potest. Quamobrem in illo casu existentibus KL & KM, sibi invicem æqualibus, hoc est duobus valoribus ip-
y (affirmativo scilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æqua-
tionis

$$efx = cxx + dy + exy + yy$$

termini illi in quibus y est imparis dimensionis, hoc est termini $+ dy + exy$ respectu termini yy in quo y est paris dimensionis, evanescere (q). Aliter enim duo valores ipsius y, affirmativus & negativus, æquales esse non possunt. Et in illo quidem casu AK infinite minor erit quam LK, hoc est x quam y, proinde terminus exy quam terminus yy. Atque adeo infinite
mi-

(q) Ex æquationum natura patebit in omni æquatione secundum terminum evanescere, ubi aggregatum ex radicibus affirmativis æquat aggregatum ex radicibus negativis. Nobis autem sufficit id demonstrare in æquationibus quadraticis; in quibus duæ sunt omnino radices, & ideo debent esse æquales, ut aggregatum ex positivis æquet aggregatum ex nega-

tivis. Sit igitur $x = a$, & $x = -a$; aut $x - a = 0$ & $x + a = 0$, Factum ex duabus hisce quantitativis est $xx - aa$, ubi secundus terminus ax non apparet; & quoniam hæc æquatio exponit omnes quadraticas habentes duas radices æquales, sed alteram negativam, alteram positivam, patet propositum.

minor existens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy respectu termini yy , non evanescet ut oportet, sed eo major erit nisi d supponatur esse nihil (r). Delendus est itaque terminus dy , & sic restabit

$$efx = cxx + exy + yy,$$

æquatio ad conicam sectionem. Conciplantur jam tangentes AT, CT sibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipsius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y ; AK, x ; & AC, f ; atque adeo KC, $f - x$. Dic AT = g , & ultima ratio y ad $f - x$, erit ea quæ est g ad f . Æquatio

$$efx = cxx + exy + yy,$$

subducto utrobique cxx , fit

$$efx - cxx = exy + yy,$$

hoc est, $f - x$ in $ex = y$ in $ex + y$. Ergo est $y \cdot f - x :: ex \cdot ex + y$, adeoque $g \cdot f :: ex \cdot ex + y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil (s). Er-

(r) Mens Auctoris non bene explicari posse videtur nisi e Fluxionum natura, quæ consideratio loci hujus non est. Sed, opinor, res ipsa potest aliter explanari. Secundus terminus $dy + exy$ debet evanescere. Igitur $d + ex = 0$; sed quia ex hypothesi $x = 0$, erit $d + 0 = 0$ aut $d = 0$.

(s) Licet hæc satis perspicua videantur, tamen sic quodammodo explicari possunt. Quia $f - x$ & y in nihilum evanescunt, eis præfigatur 0, ut simul pateat illas quantitates in nihilum redactas esse, & nosci possit, unde quivis terminus ortus sit; tunc ergo y evadet oy , & $f - x$ fiet $of - ox$; (non enim x evanescit, quinimo evadit quam maximus potest, sed tota quantitas complexa $f - x$) est autem $ey \cdot of - ox :: g \cdot f$, igitur $oy = of - \frac{gox}{f}$,

quapropter

$$efx - cxx = (f - x) ex$$

fit

$$(of - ox) ex;$$

&

$$exy = ex \cdot y = ex \cdot oy = ex \left(of - \frac{gox}{f} \right);$$

ac

$$yy = oyoy = oogg - \frac{2ofgox}{f} + \frac{ggooxx}{ff};$$

unde habetur

$$(of - ox) ex = ex \left(of - \frac{gox}{f} \right)$$

$$+ oogg - \frac{2ofgox}{f} + \frac{ggooxx}{ff}$$

& cunctis divis per 0,

$$(f - x) ex = ex \left(g - \frac{gx}{f} \right) + ogg - \frac{2ogex}{f}$$

$$+ \frac{ggooxx}{ff};$$

atque ultimi tres termini ducti in nihilum evanescant, dum alteri manent finiti, ergo

$$(f - x) ex = ex \left(g - \frac{gx}{f} \right);$$

&

Ergo $g : f :: ex : ex$. Divide posteriorem rationem per x , & evadet
 $g : f :: e : e$, & $\frac{ef}{g} = e$. Quare si in æquatione

$$efx = exx + exy + yy,$$

scribas $\frac{ef}{g}$ pro e , fiet

$$efx = exx + \frac{ef}{g} xy + yy,$$

æquatio ad conicam sectionem. Denique ipsi KL seu AT a dato puncto
 B, per quod conica sectio transire debet, age parallelam BH occurrentem
 AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat,
 in eo casu erit AH = x , & BH = y . Dic ergo datam AH = m , &
 datam BH = n , & perinde pro x & y in æquatione

$$efx = exx + \frac{ef}{g} xy + yy,$$

scribe m & n , orietur

$$efm = emm + \frac{ef}{g} mn + nn.$$

Aufer utrobique $emm + \frac{ef}{g} mn$, & fiet

$$efm - emm - \frac{ef}{g} mn = nn.$$

Pone $f - m - \frac{fn}{g} = s$, & erit $esm = nn$. Divide utramque partem
 æquationis per sm , & orietur $e = \frac{nn}{sm}$. Invento autem e , determinata ha-
 beretur æquatio ad conicam sectionem

$$efx = exx + \frac{ef}{g} xy + yy.$$

Et

& cunctis divisus per x , multiplicatisque per f ,
 $(f-x) ef = e (gf - gx) = e \cdot g (f-x)$;

quare $ef = ge$, & $\frac{ef}{g} = e$,

Qq 3

Et inde per methodum Cartesii conica sectio datur & describi potest.

Atque hactenus varia evolvi problemata. In scientiis enim addiscendis profunt exempla magis quam præcepta. Qua de causa in his fufius expatiatus sum. Sed & aliqua quæ inter scribendum occurrebant, immiscui sine Algebra soluta, ut insinuarem in problematibus, quæ prima fronte difficilia videntur, non semper ad Algebram recurrendum esse. Sed tempus est jam æquationum resolutionem docere. Nam postquam problema ad æquationem deductum est, radices illius æquationis, quæ quantitates sunt problemati satisfaciennes, extrahere oportebit.

FINIS TOMI I

