

www.e-rara.ch

Arithmetica Universalis Sive De Compositione Et Resolutione Arithmetica

**Newton, Isaac
Castillon, Giovanni Francesco Mauro Melchiorre
Amstelodami, MDCCLXI**

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5014

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3715>

Caput octavum. De reductione fractionum et radicalium.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

$$rA = m; \& A = \frac{m}{r}$$

$$rB + \frac{r \cdot r - 1}{1 \cdot 2} A^2 = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}; \text{ aut}$$

$$2rB + r^2 = \frac{m^2}{r^2} = m^2 - m,$$

vel

$$2r^2B + m^2r = m^2r - mr;$$

$$2rB = m^2 - mr; \text{ atque } B = \frac{m \cdot m - r}{1 \cdot 2 \cdot r^2}$$

Et sic de singulis. Quare constat propositum.

191. Ergo terminus generalis ipsius $p + q \frac{m}{r}$ est

$$\frac{m \cdot m - r \cdot m - 2r \dots m - rs + r}{r \cdot 2r \cdot 3r \dots mr - sr} p \frac{m}{r} - s q^s$$

ex quo facile potest deduci formula pro qualibet radice cujusvis potestatis extrahenda, dummodo pro s ponas per vices 0; 1; 3; &c; & observes in determinatione coefficientium quæ observata fuerunt (Nº. 124. &c. hujus).

Ista autem formula est hujusmodi

$$p \frac{m}{r} + \frac{m}{r} p \frac{m}{r} - 1 q + \frac{m \cdot m - r}{r \cdot 2r} p \frac{m}{r} - 2 q^2 + \frac{m \cdot m - r \cdot m - 2r}{r \cdot 2r \cdot 3r} p \frac{m}{r} - 3 q^3 + \&c.$$

five

$$p \frac{m}{r} + \frac{m}{r} p \frac{m}{r} - 1 q + \frac{m \cdot m - r}{r \cdot r} p \frac{m}{r} - 2 q^2 + \frac{m \cdot m - r \cdot m - 2r}{r \cdot r \cdot 2r} p \frac{m}{r} - 3 q^3 + \&c.$$

quæ priorem recuperat formam pro $\frac{m}{r}$ ponendo m , quod symbolum potest exponere numeros fractos æque ac integros.

CAPUT OCTAVUM.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM
ET RADICALIUM.

Præcedentibus operationibus inservit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

ARTICULUS I.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM

ad minimos terminos.

LXV. Fractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem divisorem (k).

Sic

(k) 171. Hic Canon supponit denominatorem, ac numeratorem ductos esse in eandem quantitatem, id est, reliquam fractionem ductam in fractionem, cujus denominator, & numerator sunt æquales, atqui quantitas in se

ipsa semel continetur, aut per se ipsa divisa dat unitatem, quæ multiplicans quantitatem, eam non mutat, ergo post hanc reductionem fractiones eadem manent.

Sic

H 2

Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad simpliciore $\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c ;
 & $\frac{203}{667}$ reducitur ad simpliciore $\frac{7}{23}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29;
 & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per 29c.

Atque ita $\frac{6a^3 - 9acc}{6aa + 3ac}$ evadit $\frac{2aa - 3cc}{2a + c}$ dividendo per $3a$.

Et $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ evadit $\frac{aa + bb}{a}$ dividendo per $a - b$.

Et hac methodo termini post multiplicationem vel divisionem plerumque abbreviari possunt. Quemadmodum si multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per

$\frac{9acc}{bdd}$, vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$, prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd}$, & per reductionem, $\frac{6aabb}{d}$.

Sed in hujusmodi casibus præstat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem divisorem quos postea dividere oportet. Sic in allato exemplo si dividam $2ab^3$ & bdd per communem divisorem b , & $3ccd$ ac $9acc$ per communem divisorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$, prodeunt tandem $\frac{6aabb}{d}$

ut supra. Atque ita $\frac{aa}{c}$, in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$ seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ divisa per $\frac{b}{c}$ evadit aa divisa per b seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3 - ax^3}{xx}$ in $\frac{cx}{aa + ax}$ evadit $\frac{a - x}{x}$ in $\frac{c}{x}$ seu $\frac{ac}{x} - c$. Et 28 divis. per $\frac{1}{4}$ evadit 4 divis. per $\frac{1}{4}$, seu 12.

ARTICULUS II.

De inventione Divisorum. (I)

LXVI. **H**Uc spectat inventio divisorum per quos quantitas aliqua dividi possit.

Si quantitas simplex est, divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis, & omnes quantitates

Sic $\frac{aac}{bc} = \frac{aa}{b} \times \frac{c}{c}$; sed $\frac{c}{c} = 1$,

ergo $\frac{aac}{bc} = \frac{aa}{b} \times 1 = \frac{aa}{b}$

Hæc regula pendet etiam ex EUCLID. 35. VII.

(I) 172. Quantitates, in quas alia quantitas resolvi potest, dicuntur ejus Divisores.

173. Hos voco simplices, cum dividi nequeant.

174. Unitas est semper inter divisores.

175. Compositos appello divisores, qui adhuc dividi possunt.

tatis divisores primos habebis (m). Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos, &c. duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos.

Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3 & restabit quotus indivisibilis 5. Ergo divisores primi sunt 1, 2, 3, 5. Ex binis compositi 4, 6, 10, 15. Ex ternis 12, 20, 30, ex omnibus 60 (n). Rursus si quantitatis $21abb$ divisores omnes desiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a , & quotum bb per b & restabit quotus primus b . Ergo divisores primi sunt 1, 3, 7, a , b , b ; ex binis compositi 21 , $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab , bb ; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, $3abb$; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$ (o) Eodem modo ipsius $2abb$ — $6aac$ divisores omnes sunt 1, 2, a , bb — $3ac$, $2a$, $2bb$ — $6ac$, abb — $3aac$, $2abb$ — $6aac$.

LXVII.

176 Hi ergo in simplices resolvi possunt, & iis constant.

(m) 177. Huius regulæ ratio patet per se; dico nunc, quod si duo, aut plures ex divisoribus simplicibus, invicem ducantur, hoc factum dividet quantitatem datam.

Data quantitas sit p , ejus divisores simplices a , b , c , f , erit ergo $p = abcf$, quæ dividi potest per ab , abc , $abcf$.

(n) 178. Quære divisores omnes simplices scribe unitatem, unum ex divisoribus repetitis, si qui sunt, ejus quadratum, &c., usque ad ejus maximam potestatem, hæc facta duc in alium ex divisoribus repetitis, si adest; unde habebis secundam seriem, hanc seriem duc in eundem divisorem; & sic toties quoties habetur hic divisor; hinc omnia hæc facta per alterum &c.

Sic in exemplo præcedente divisor 2 bis invenitur, scribe ergo in prima serie 1, 2, 2 x 2. quam seriem duc in 3, habeo secundam seriem 3, 2 x 3, 2 x 2 x 3, & quia hic numerus semel reperitur, ambas duc in 5, invenio 5, 2 x 5, 2 x 2 x 5, 3 x 5, 2 x 3 x 5, 2 x 2 x 3 x 5.

$$\text{Series } \left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 1. \quad 2. \quad 2 \times 2 \\ 2. \quad 2 \times 3. \quad 2 \times 2 \times 3 \\ 5. \quad 2 \times 5. \quad 2 \times 2 \times 5. \quad 3 \times 5. \\ \quad 2 \times 3 \times 5 \quad 2 \times 2 \times 3 \times 5. \end{array} \right.$$

(o) 179 Sic secundi exempli divisores simplices sunt 3, 7, a , b , ergo scribe in prima serie 1, b , bb . hanc duc per 3, habeo secundam, has duas per 7 quod efficit tertiam, has tres per a , unde exurgit quarta.

$$\text{Series } \left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \\ \text{IV.} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 1. \quad b \quad bb \\ 3. \quad 3b \quad 3bb \\ 7. \quad 7b \quad 7bb \quad 21 \quad 21b \quad 21bb \\ a. \quad ab \quad abb \quad 3a \quad 3ab \quad 3abb \quad 7a \\ 7ab \quad 7abb \quad 21a \quad 21ab \quad 21abb. \end{array} \right.$$

Detur quantitas a^3bbcc , scribe in prima serie 1, a , a^2 , a^3 , quia a in data quantitate evecta est ad tertiam potestatem; hanc primam seriem duc in b , & habeo secundam b , ab , aab , a^3b , tum quia b est duarum dimensionum, secundam hanc rursus duc in b , unde excudo tertiam bb , abb , $aabb$, a^3bb , has tres duc in c quod procreat quartam c , ac , aac , a^3c , bc , abc , $aabc$, a^3bc , $bbcc$, $abbc$, $aabbcc$, a^3bbcc , & hanc rursus in c ex quo fit quinta cc , acc , $aacc$, a^3cc , bcc , $abcc$, $aabcc$, a^3bcc , $bbcc$, $abbc$, $aabbcc$, a^3bbcc .

$$\text{Series } \left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \\ \text{IV.} \\ \text{V.} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 1. \quad a \quad aa \quad a^3 \\ b. \quad ab \quad a^2b \quad a^3b \\ b^2. \quad ab^2 \quad a^2b^2 \quad a^3b^2 \\ c. \quad ac \quad a^2c \quad a^3c \\ bc. \quad abc \quad a^2bc \quad a^3bc \\ b^2c. \quad ab^2c \quad a^2b^2c \quad a^3b^2c \\ c^2. \quad ac^2 \quad a^2c^2 \quad a^3c^2 \\ bc^2. \quad abc^2 \quad a^2bc^2 \quad a^3bc^2 \\ b^2c^2. \quad ab^2c^2 \quad a^2b^2c^2 \quad a^3b^2c^2 \end{array} \right.$$

Ut perspicui possit, utrum omnes divisores sic inventi sint, liber demonstrare sequens theorema.

180. Numerus omnium divisorum ipsius $a^m b^n c^p$, &c. est $(m+1)(n+1)(p+1)$ &c.

Nam

H. 3.

LXVII. Si quantitas postquam divisa est per omnes simplices divisores manet composita & suspicio est eam compositum aliquem divisorem habere, dispone eam secundum dimensiones literæ alicujus quæ in ea est, & pro litera illa substitue sigillatim tres vel plures terminos hujus progressionis arithmeticæ, 3, 2, 1, 0, -1, -2, ac terminos totidem resultantes una cum omnibus eorum divisoribus statue e regione correspondentium terminorum progressionis, positis divisorum signis tam affirmativis quam negativis. Dein e regione etiam statue progressionem arithmeticam, quæ per omnium numerorum divisores percurrunt pergentes a majoribus terminis ad minores eodem ordine, quo termini progressionis 3, 2, 1, 0, -1, -2 pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altissimum terminum propositæ quantitatis. Si qua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus, qui stat e regione termini 0 progressionis primæ, divisus per differentiam terminorum, & cum signo suo annexus literæ præfate, componet quantitatem per quam divisio tentanda est.

Ut si quantitas sit $x^3 - xx - 10x + 6$; pro x substituendo sigillatim terminos progressionis 1, 0, -1, orientur numeri -4, 6, +14, quos cum omnibus eorum divisoribus colloco e regione terminorum progressionis 1, 0, -1 hoc modo.

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 4 & 1.2.4. \\ 0 & 6 & 1.2.3.6 \\ -1 & 14 & 1.2.7.14 \end{array} \begin{array}{l} + 4. \\ + 3. \\ + 2. \end{array}$$

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum, præter unitatem, divisibilis est, quæro in divisoribus progressionem cujus termini differunt unitate, & a superioribus ad inferiora pergendo decrescunt perinde ac termini progressionis lateralis 1, 0, -1. Et hujusmodi progressionem unicam tantum invenio nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum +3 seligo qui stat e regione termini 0 progressionis primæ 1, 0, -1, tentoque divisionem per $x+3$. Et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$; pro y substituo sigillatim 2, 1, 0, -1, -2, & numeros resultantes 30, 7, 20, 3, 34 cum omnibus eorum divisoribus e regione colloco ut sequitur.

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & 30 & 1.2.3.5.6.10.15.30 \\ 1 & 7 & 1.7 \\ 0 & 20 & 1.2.4.5.10.20 \\ -1 & 3 & 1.3 \\ -2 & 34 & 1.2.17.34 \end{array} \begin{array}{l} + 10. \\ + 7. \\ + 4. \\ + 1. \\ - 2. \end{array}$$

Et

Nam ex regula, termini primæ seriei erunt numero $m+1$: hæc series totidem dabit sibi æquales, quot sunt unitates in n , vel tot, quot sunt unitates in $(m+1)n$, cui adde terminos primæ seriei, habebis pro numero omnium $(m+1)n + (m+1)$, sed $m+1 \equiv 1 \pmod{n+1}$, erit ergo hi numerus $(m+1)(n+1) \pmod{n+1} \equiv (m+1)(n+1)$ (Eucl. I. II.)

atqui hæc series rursus totidem series dabit sibi numero terminorum æquales, quot sunt unitates in p ; erunt ergo termini ultimæ seriei $(m+1)(n+1)p$, his adde terminos secundæ, ac primæ, & erit omnium numerus $(m+1)(n+1)p + 1 \pmod{n+1} \equiv (m+1)(n+1)(p+1) \pmod{n+1} \equiv (m+1)(n+1)(p+1)$ Q. E. D.

D E.

Et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progressionem arithmeticam $+10, +7, +4, +1, -2$. Hujus terminorum differentia 3 dividit altissimum quantitatis terminum $6y^4$. Quare terminum $+4$ qui stat e regione termini 0, divisum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y , tentoque divisionem per $y + \frac{4}{3}$, vel, quod perinde est, per $3y + 4$, & res succedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

Atque ita si quantitas sit

$$24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30;$$

operatio erit ut sequitur.

2	42	1.2.3.4.5.6.7.14.21.42	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1.2.3.	+ 1. - 1. + 1.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	- 1. - 5. - 5.
-1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	- 3. - 9. - 11.

Tres occurrunt hic progressionēs, quarum termini $-1, -5, -5$ divisi per differentias terminorum 2, 4, 6, dant tres divisores tentandos $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$ & $a - \frac{5}{6}$. Et divisio per ultimum divisorem $a - \frac{5}{6}$ seu $6a - 5$ succedit prodeunte $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6(p)$.

Si

DEMONSTRATIO.

CLAR. DAN. BERNOULLI.

(p) 181. Sit divisor unius dimensionis inveniendus hujus quantitatis

(A) $2x^3 + xx + g$,
ponatur ille divisor
(B) $mx + n$,

ubi m , & n , quantitates denotant incognitas, & determinandas. Positis nunc successive in quantitibus (A), & (B), loco ipsius x numeris progressionem arithmeticam formantibus, puta 2. 1. 0. — 1, dabit numeros sequentes 11. 6. — 0. — 10, & (B) acquirat hos valores $2m+n$, $1m+n$, $0m+n$, $1m+n$, (ubi patet coefficients ipsius m esse numeros assumptos 2. 1. 0. — 1.). Cum vero quantitas (B) generaliter dividere debeat quantitatem (A), necesse est ut divisio illa quoque succedat in omni casu particulari, unde oportet ut,

$$p \begin{cases} -2m+n \\ 1m+n \\ 0m+n \\ 1m+n \end{cases} \text{ sit æqualis uni ex divisoribus numeri}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 \text{ qui sunt} \\ 6 \\ -9 \\ -10 \end{array} \right\} Q \left\{ \begin{array}{l} 11. 1. 0. -1. -11. \\ 6. 3. 2. 1. 0. -1. -2. -3. 6. \\ 9. 3. 1. 0. -1. -3. -9. \\ 10. 5. 2. 1. 0. -1. -2. -5. -10. \end{array} \right.$$

sed quantitates P sunt arithmetice proportionales, (quia numeri 2. 1. 0. — 1, per constructionem sunt tales,) ergo, & numeri ex prima secunda, tertia, & quarta classe eligendi debent esse arithmetice proportionales; quod est primum NEWTONI assertum. Deinde quia tertius numerus $0m+n$, nihil aliud est, quam n , sequitur numerum e regione cyphræ existentem esse æqualem ipsi n , seu numero, quo x aliquoties sumptum augeri debet, quod est alterum NEWTONI assertum.

Tandem si subtrahis $1m+n$, ex $2m+n$, remanet m , quod proin æquale est differentiæ numerorum arithmetice proportionalium, & ex numeris (Q) selectorum, id quod tertium format assertum NEWTONI, dicentis ipsum x in divisore quæsito toties esse sumendum, quot unitatibus primus terminus progressionis ex (Q) desumptæ secundum superat. Q. E. D.

SCHOLIUM.

182. In nostro exemplo numeri arithmetice proportionales, qui ex prima, secunda, tertia, & quarta classe numerorum (Q) desumi possunt, sunt —1, +1, +3, +5, quorum tertius

Si nullus occurrit hac methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam quantitatem; concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium sit quam trium dimensionum, divisorem admittere duarum. Et si ita, divisor ille investigabitur hac methodo.

In quantitate illa pro litera substitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progressionis hujus.

$$3, 2, 1, 0, \text{---} 1, \text{---} 2, \text{---} 3,$$

Divisores omnes numerorum resultantium sigillatim adde & subduc quadratis correspondentium terminorum progressionis illius ductis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini quantitatis propositæ, & summas differentiasque e regione progressionis colloca. Dein progressionem omnes collaterales nota, quæ per istas summas differentiasque percurrunt. Sit $\pm C$ terminus istiusmodi progressionis qui stat e regione termini 0 progressionis primæ, $\pm B$ differentia quæ oritur subducendo $\pm C$ de termino proxime superiori qui stat e regione termini 1 progressionis primæ, A prædictus termini altissimi divisor numeralis, & l litera quæ in quantitate proposita est, & erit $All \pm Bl \pm C$ divisor tentandus.

Ut si quantitas proposita sit

$$x^4 \text{---} x^3 \text{---} 5xx + 12x \text{---} 6,$$

pro x scribo successive 3; 2; 1; 0; --- 1; --- 2; & prodeuntes numeros

$$39; 6; 1; \text{---} 6; \text{---} 21; \text{---} 26,$$

una cum eorum divisoribus e regione dispono, addoque & subduco divisores terminis progressionis illius quadratis ductisque in divisorem numeralem termini x^4 , qui unitas est, videlicet terminis 9; 4; 1; 0; 1; 4; & summas differentiasque e latere pariter dispono. Dein progressionem, quæ in iisdem obveniunt, e latere etiam scribo, ut sequitur, Harum progressionum terminos 2 & --- 3, qui stant e regione termini 0 progressionis illius quæ in columna prima est, usurpo successive pro $\pm C$, differentias quæ oriuntur

3139

sus 3 stat e regione cyphra, seu $0m + n$, unde sequitur $n = 3$, & subtrahendo secundum a primo habetur --- 2, qui erit valor ipsius m , est ergo divisor quæsitus --- $2x + 3$.

Notandum est progressionem arithmeticam, cujus termini sunt æquales, uti semper esset 1. 1. 1. 1, nunquam esse considerandam, quia inde sequetur $m = 0$, quod nunquam contingere potest; sed, si præter talem, adhuc alia progressionem arithmetica ex numeris (2) elici potuissent, plures quam quatuor substitutiones pro x faciendæ sunt, donec

nulla talis, præter utilem, progressio formari possit. Si numeri (2) prorsus nullam suppeditant, indicium est quantitatem propositam non admittere divisorem unius dimensionis. Si, non obstantibus pro x substitutionibus, plures arithmeticae progressionem ex numeris (2) deduci possunt, suspicandum plures quoque divisores proposito satisfacere. Miror quod NEWTONUS semper in recensione numerorum (2) cyphras omiserit, omnes terminos evidentes, & quandoque necessario considerandas.

DE INVENTIONE DIVISORUM. 65

3	39	1.3.13.39.	9	—30.—4.6.8.10.12.22.48.	—4. 6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	— 2. 1. 2.3.5. 6. 7.10	—2. 3.
1	1	1.	1	0. 2.	0. 0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	— 6.—3.—2.—1.1.2.3.6.	2.—3.
—1	21	1.3. 7.21.	1	—20.—6.—2.0.2.4.8.22.	4.—6.
—2	26	1.2.13.26.	4	—22.—9.2.3.5.6.17.30.	6.—9.

subducendo hos terminos de terminis superioribus 0 & 0, nempe — 2 & + 3, usurpo respective pro $\pm B$; unitatem item pro A ; & x pro l . Et sic pro $A // \pm B // \pm C$ habeo divisores duos tentandos

$$xx + 2x \longrightarrow 2 \text{ \& } xx \longrightarrow 3x + 3,$$

per quorum utrumque res succedit.

Rursus si proponatur quantitas

$$3y^3 \longrightarrow 6y^2 + y^3 \longrightarrow 8yy \longrightarrow 14y + 14,$$

Operatio erit ut sequitur. Primo rem tento addendo & subducendo divisores quadratis terminorum progressionis 2, 1, 0, 1 usurpato 1 pro A , sed res non succedit. Quare pro A usurpo

3	170	1.2.19.38.	27	—26.—7.10.11.13.14.31.50.	—7. 17
2	38	1.2. 5. 10.	12	— 7.—2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	—7. 11
1	10	1.2. 7.14.	3	—14.—7.—2.—1. 1. 2. 7.14.	—7. 5
0	14	1.2. 5.10.	0	— 7.—2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	—7. 1
—1	10		3		—7. 7
—2	190		12		—7. 13

3, alterum nempe termini altissimi $3y^3$ divisorem numeralem, & quadratis istis multiplicatis per 3, hoc est numeris 12; 3; 0; 3; addo subducoque divisores; & progressionem in terminis resultantibus hasce duas invenio —7; —7; —7; —7; & 11; 5; —1; —7. Expeditionis gratia neglexeram divisores extremorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progressionibus sumo proximos earum hinc inde terminos, videlicet —7 & 17 superius, & —7, & —13 inferius, ac tento si subductis his de numeris 27 ac 12, qui stant e regione in quarta columna, differentiae dividunt istos 170 & 190 qui stant e regione in columna secunda. Et quidem differentia inter 27 & —7, id est 34, dividit 170; & differentia 12 & —7, id est 19, dividit 190. Item differentia inter 27 & 17, id est 10, dividit 170, sed differentia inter 12 & —13, id est 25, non dividit 190. Quare posteriorem progressionem rejicio. Juxta priorem $\pm C$ est —7, & $\pm B$ nihil; terminis progressionis nullam habentibus differentiam. Quare divisor tentandus

tandus $All \pm Bl \pm C$ erit $3yy + 7$. Et divisio succedit, prodeunte $y^3 - 2yy - 2y + 2$. (q)

LXIX.

(q) 183. Sequitur nunc methodus NEWTONI inveniendorum divisorum duarum dimensionum demonstranda. Sit proposita quantitas

$$(C) 3x^5 + 2x^4 + 2xx + 3x - 5,$$

cuius divisor inveniendus sit

$$(D) fxx + gx + h$$

(ubi f, g, h , sunt quantitates incognitæ, & determinandæ.) Positis nunc iterum successive pro x numeris arithmetice proportionalibus, ut 1, 0. — 1. — 2, habebuntur pro quantitate (C) 5. — 5. — 11. — 115, & pro quantitate (D) habebuntur quantitates $1f + 1g + h$, $0f + 0g + h$, $1f - 1g + h$, $4f - 2g + h$ (ubi probe notandum est coefficientes ipsius f esse quadrata numerorum assumptorum 1; 0; — 1; — 2, & coefficientes ipsius g , esse ipsos hos numeros). Cum autem quantitas (D) generaliter debeat dividere quantitatem (C), oportet, ut divisio illa quoque succedat in omni casu particulari, unde

quantitates æquabunt unum ex divisoribus numeri

$$1f + 1g + h$$

$$0f + 0g + h$$

$$1f - 1g + h$$

$$4f - 2g + h$$

qui sunt

$$5.1.0. - 1. - 5.$$

$$5.1.0. - 1. - 5.$$

$$11.1.0. - 1. - 11.$$

$$115.23.5.1.0. - 1. - 5. - 23. - 115.$$

& ideo quantitates

$$F \left\{ \begin{array}{l} 1g + h \\ 0g + h \\ 1g + h \\ 2g + h \end{array} \right. \text{æquabunt}$$

vel vel vel vel

$$H \left\{ \begin{array}{l} 5-1f. \quad 1-1f. \quad 0-1f. \quad -1-1f. \quad 5-1f. \\ 5-0f. \quad 1-0f. \quad 0-0f. \quad -1-0f. \quad 5-0f. \\ 11-1f. \quad 1-1f. \quad 0-1f. \quad -1-1f. \quad 11-1f. \\ 115-4f. \quad 23-4f. \quad 5-4f. \quad 1-4f. \quad 0-4f. \end{array} \right.$$

$$1-1-4f. \quad 1-5-4f. \quad 1-23-4f. \quad 1-115-4f.$$

Sed quantitates (F) sunt arithmetice proportionales, ergo & quantitates ex (H) selegendæ, debent esse tales; patet insuper quod

f esse debeat numerus submultiplicus ipsius ternarii, seu (ut generaliter rem exprimam) numeri maximo termino quantitatis (C) præfixi, unde suppono primum $f = 1$, & quæro divisorem, ut supra; sed nullum invenio. Ex quo iudico quod f nequit esse 1, ergo suppono $f = 3$, quo facto, eruo ex quantitatibus (H) numeros arithmetice proportionales hos 2. 5. 8. 11. quorum secundus e regione quantitatis $0g + h$ existentis, est $= h$, & differentia inter primum, & secundum, quæ est $-3 = g$, atque proin

$$fxx + gx + h = 3xx - 3x + 5,$$

quæ omnia NEWTONI regulæ sunt conformia. Q. E. D.

S C H O L I U M.

184. Cum quantitas f hoc modo, non nisi tentando eruatur, clarum est regulam hanc tam esse operosam, ut ad praxin revocari nequeat quandoque; sic si proponeretur quantitas, cuius maximo termino præfixus foret numerus 60, ejusque quantitatis divisor dimensionum duarum querendus esset, undecim substitutiones pro f faciendæ essent, antequam præcisa responsio dari posset: dein raro sufficiunt quatuor substitutiones pro x , ut nulla alia progressio arithmetica, præter utilem, ex quantitatibus (H) deduci possit, unde plures sæpe substitutiones pro x ponenda, quæ omnia, ut in effectum deducerentur, infinitum quasi laborem requirerent.

Notandum hic quamlibet progressionem arithmetica, sive differentia ejus sit nulla sive aliqua, subsistere posse, nihil enim impedit, quominus secundus divisoris quæsit terminus æqualis esse possit cyphra.

185. NEWTONUS, adhibitis hisce duabus regulis, addit methodum suam etiam ad altiores divisores inveniendos se extendere. Verum illud est, & demonstratio facile ex hucusque dictis patet, sed non termini arithmetice proportionales essent querendi ex quantitatibus (H), alio etiam modo construendis, sed termini quorum differentia primæ, secundæ, &c. sint arithmetice proportionales. Cum vero tales numeri non in oculis currant, sicut numeri simpliciter arithmetice proportionales; imo, quasi omni adhibita opera dignosci nequeant, impossibile esset regulas illas in effectum deducere. Operæ pretium tamen erit, ostendere regulam a modo dicta diverfam, quæ divisor

LXIX. Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concludendum est quantitatem propositam non admittere divisorem duarum dimensionum. Posset eadem methodus extendi ad inventionem divisorum dimensionum plurium, quærendo in prædictis summis differentiisque progressionibus non arithmeticas quidem, sed alias quasdam quarum terminorum differentia primæ, secundæ, tertiæ, &c. sunt in arithmetica progressionem: At in his Tyro non est detinendus.

LXX. Ubi in quantitate proposita duæ sunt literæ, & omnes ejus termini ad dimensiones æque altas ascendunt; pro una istarum literarum pone unitatem, per regulas præcedentes quære divisorem, ac divisoris hujus comple deficientes dimensiones restituendo literam illam pro unitate.

Ut si quantitas sit

$$6y^4 - cy^3 - 21cyy + 3c^2y + 2c^4$$

ubi termini omnes sunt quatuor dimensionum; pro c pono 1, quantitas evadit

$$6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20,$$

cujus

divisor duarum dimensionum eruitur, & quidem scientificè, id est absque ut necesse sit numerum f tentando determinare, quo ipso simul patebit quomodo NEWTONUS progressionibus terminorum, quorum differentia sunt arithmetice proportionales applicare possit.

Sit itaque quantitas.

$$(S) 4x^3 + 2xx - 16x + 7$$

(talem quantitatem commoditatis calculi causa eligo, quamvis proprie quantitas plurium dimensionum assumenda esset, quia quantitas trium dimensionum divisa per quantitatem unius dimensionis, eo ipso, pro quotiente exhibet divisorem duarum dimensionum) cujus divisor quæsitus sit (T) $fx + gx + h$, dico f, g, h tali modo determinari posse. Ponatur x successive æqualis numeris arithmetice proportionalibus, & (quod in hac regula essentialè est, secus ac in præcedentibus, unitate differentibus). Sint numeri hi, 2. 1. 0. — 1. — 2, qui collocentur uti in apposita figura videre est.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} C \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{array} \right. & \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \\ + \end{array} & \begin{array}{l} 15 \\ 3 \\ 7 \\ 21 \\ 15 \end{array} & \begin{array}{l} 15.5.3. + \\ 3.1.0. - \\ 7.1.0. - \\ 21.7.3. + \\ 15.5.3. + \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1.0. - 1. - 3. - 5. - 15. \\ 1. - 3. \\ 1. - 7. \\ 1.0. - 1. - 3. - 7. - 21. \\ 1.0. - 1. - 3. - 5. - 15. \end{array} \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ -3 \\ -7 \\ -7 \\ -3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{array}$$

quibus apponantur numeri ex quantitate S post substitutionem resultantes nempe 15; — 3; + 7, + 21; + 15, postea apponantur horum numerorum diviores, uti in præsentè schediasmate. Ex hisce divisorum classibus eligantur tales numeri, ut eorum differentia sint arithmetice proportionales, iique ponantur in latere: tales numeri in nostro exemplo sunt 5; — 3; — 7; — 7; — 3, quorum differentia arithmetice proportionales 8. 4. 0. — 4, iterum ad latus ponantur, sed uno loco inferius, quo factò erit f æqualis dimidiæ differentia terminorum arithmetice proportionalium, posteaque inventus valor ipsius f si subtrahatur a termino progressionis (A) e regione cyphrae progressionis (C) existente, erit residuum æquale ipsi g , & tandem h erit æqualis termino progressionis (B) e regione cyphrae progressionis (C) existente, unde in nostro exemplo

$$f = \frac{8-4}{2} = 2, \quad g = 4 - 2 = 2, \quad \&$$

$h = -7$, adeoque divisor quæsitus est $2xx + 2x - 7$, qui revera quantitatem propositam dividit. Hæc regula longe esset præferenda regulæ NEWTONI, nisi difficulter admodum termini progressionis (B) eruerentur.

cujus divisor, ut supra, est $3y+4$, & completa deficiente dimensione posterioris termini per dimensionem, c , fit $3y+4c$ divisor quæsitus. Ita si quantitas fit

$$\begin{array}{l} x^4 - bx^3 - 5bbxx + 12b^3x - 6b^4, \\ \text{posito } 1 \text{ pro } b, \text{ \& quantitatìs resultantis} \\ x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 \end{array}$$

invento divifore $xx+2x-2$, compleo ejus deficientes dimensiones per dimensiones b , & sic habeo diviforem quæsitum $xx+2bx-2bb$.

LXXI. Ubi in quantitate propofita tres vel plures funt literæ, & ejus termini omnes ad eafdem dimensiones afcendunt; poteft divisor per præcedentes regulas inveniri; fed expeditius hoc modo:

Quere omnes divifores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eft, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eft, pariter & omnium in quibus tertia litera, quartaque, & quinta non eft, fi tot funt literæ. Et fic percurre omnes literas. Et e regione literarum colloca divifores refpectivè. Dein vide fi in ferie aliqua diviforum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes tot vicibus reperiantur quot funt literæ una dempta in quantitate propofita: Et partes duas literas involventes tot vicibus quot funt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita eft; partes iftæ omnes fub fignis fuis femel fumptæ erunt divifor quæfitus.

Ut fi proponatur quantitas

$$\begin{array}{r} 12x^3 - 14bx^2 - 12bbx + 8b^3 \\ + 9c \quad x^2 - 6bcx - 12b^2c \\ + 8cc \quad x - 4bc^2 \\ + 6c^3 \end{array}$$

terminorum

$$8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$$

in quibus non eft x , divifores unius dimensionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b - 3c$ & $4b - 6c$;

terminorum

$$12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$$

in quibus non eft b , divifor unicus $4x + 3c$;

ac terminorum

$$12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$$

in quibus non est c , divisores $2x - b$ & $4x - 2b$. Hos divisores e regione literarum x, b, c dispono ut hic vides.

$$\begin{array}{l|l} x & 2b - 3c. \quad 4b - 6c. \\ b & 4x + 3c. \\ c & 2x - b. \quad 4x - 2b. \end{array}$$

Cum tres sint literæ & divisorum partes singulæ non nisi singulas literas involvant, in serie divisorum debent partes illæ bis reperiri. At divisorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b, 6c, 2x, b$ non nisi semel occurrunt. Extra divisorem illum, cujus sunt partes, non reperiuntur. Quare divisores illos negligo. Restant tantum tres divisores $2b - 3c, 4x + 3c$ & $4x - 2b$. Hi in serie sunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes singulæ $2b, 3c, 4x$, bis reperiuntur in ipsis ut oportuit, idque cum signis iisdem, si modo signa divisoris $2b - 3c$ mutantur, & ejus loco scribatur $-2b + 3c$. Nam signa divisoris cujusvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b, 3c, 4x$ semel sub signis suis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ divisor erit quem invenire oportuit. Nam si per hunc dividas quantitatem propositam prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

Rursus si quantitas sit

$$\begin{array}{r} 12x^5 - 10ax^4 - 26aa^3 + 24a^3b - 4a^3b^2 + 12a^4b \\ - 9b^4x^4 + 12abx^3 - 8a^2b^2x^2 + 6a^2b^2x + 32a^2b^3 \\ + 6bb^4 - 8ab^3 - 12ab^3 - 18b^4 - 12b^5 \end{array}$$

divisores terminorum, in quibus x non est, colloco e regione x ; illos terminorum, in quibus a non est, e regione a ; & illos terminorum, quibus b non est, e regione b , ut hic vides.

$$\begin{array}{l|l} x & b, 2b, 4b, aa + 3bb, 2aa + 6bb, 4aa + 12bb, bb - 3aa, \\ & 2bb - 6aa, 4bb - 12aa. \\ a & 4xx - 3bx + 2bb, 12xx - 9bx + 6bb. \\ b & x, 2x, 3x - 4a, 6x - 8a, 3xx - 4ax, 6xx - 8ax, \\ & 2xx + ax - 3aa, 4xx + 2ax - 6aa. \end{array}$$

Dein illos omnes qui sunt unius dimensionis rejiciendos esse sentio, quia simplices $b, 2b, 4b, x, 2x$, & partes compositorum $3x - 4a, 6x - 8a$, non nisi semel in omnibus divisoribus reperiuntur; tres autem sunt literæ in quantitate proposita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter divisores duarum dimensionum

$aa + 3bb, 2aa + 6bb, 4aa + 12bb, bb - 3aa$ & $4bb - 12aa$ rejicio, quia partes eorum $aa, 2aa, 4aa, bb$ & $4bb$, unicam tantum literam a vel b involventes, non nisi semel reperiuntur. Divisoris autem $2bb - 6aa$, qui solus restat e regione x , partes $2bb$ & $6aa$ quæ similiter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in divisore

$4xx - 3bx + 2bb$, & pars $6aa$ in divisore $4xx + 2ax - 6aa$. Quin etiam hi tres divisores in ferie sunt, stantes e regione trium literarum x, a, b ; & omnes eorum partes $2bb, 6aa, 4xx$, quæ unicam tantum literam involvunt, bis reperiuntur in ipsis, idque sub propriis signis; partes vero $3bx, 2ax$, quæ duas literas involvunt, non nisi semel occurrunt in ipsis. Quare horum trium divisorum partes omnes diversæ $2bb, 6aa, 4xx, 3bx, 2ax$ sub signis suis connexæ, divisorem desideratum

$$2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$$

conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propositam & oritur
 $3x^3 - 4axx - 2aab - 6b^3$.

LXXII. Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complenda sunt dimensiones deficientes per dimensiones literæ cujusvis assumptæ, dein per præcedentes regulas invento divisore, litera assumpta delenda est.

Ut si quantitas sit

$$\begin{array}{r} 12x^3 - 14b \quad x^2 - 12b^2 \quad + \quad 8b^3 \\ + \quad 9 \quad \quad + \quad 8 \quad \quad - \quad 12b^2 \\ \quad \quad \quad + \quad 8 \quad \quad - \quad 4b \\ \quad \quad \quad \quad \quad + \quad 6 \end{array}$$

assume literam quamvis c , & per dimensiones ejus comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum

$$\begin{array}{r} 12x^3 - 14b \quad x^2 - 12b^3 \quad + \quad 8b^3 \\ + \quad 9c \quad \quad + \quad 6bc \quad x - 12b^2c \\ \quad \quad \quad + \quad 8c^2 \quad \quad - 4bc^2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad + \quad 6c^3 \end{array}$$

Dein hujus divisore $4x - 2b + 3c$ invento, dele c ; & habebitur divisor desideratus $4x - 2b + 3$.

LXXIII. Aliquando divisores facilius quam per has regulas inveniri possunt. Ut si litera aliqua in quantitate proposita sit unius tantum dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum, in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum, in quibus non reperitur: nam divisor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nullus erit divisor totius. Exempli gratia, si proponatur quantitas

$$\begin{array}{r} x^4 - 3a \quad x^3 - 8aa \quad x^2 + 18a^3 \quad + \quad 6a^3c \\ + \quad c \quad \quad + \quad ac \quad \quad - 8aac \quad x - 8a^4 \end{array}$$

quærat communis divisor terminorum

$+cx^3$

$$+ cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$$

in quibus c unius est tantum dimensionis, & terminorum reliquorum

$$x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$$

ac divisor ille, nempe $xx + 2ax - 2aa$, dividet totam quantitatem.

LXXIV. Ceterum maximus duorum numerorum divisor communis, si prima fronte non innotescit, invenitur perpetua ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quaesitus erit divisor qui tandem nihil relinquit. *

Sic ad inveniendum maximum communem divisorem numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & reliquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58, restabitque nihil: quod indicat 29 esse divisorem quaesitum.

LXXV. Haud secus in speciebus communis divisor, ubi compositus est, invenitur subducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus de altera: Si modo & quantitates illae & residuum juxta literae alicujus dimensiones, ut in divisione ostensum est, ordinentur, & qualibet vice concinnentur dividendo ipsas per suos omnes divisores qui aut simplices sunt, aut singulos terminos, instar simplicium, dividunt.

Sic ad inveniendum communem divisorem numeratoris ac denominatoris fractionis hujus.

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$$

multiplica denominatorem per x , ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & restabit $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum dividendo per $-2a$, evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$. Hoc aufer de denominatore & restabit $-axx - 2aax + 2a^3$. Quod idem per $-a$ divisum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x multiplica, ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino novissimi ablati $x^3 - 6aax + 4a^3$, de quo auferendum est; & restabit $-2axx - 4aax + 4a^3$, quod per $-2a$ divisum fit etiam $xx + 2ax - 2aa$. Et hoc cum idem fit ac superius residuum, proindeque ablatum relinquat nihil, quaesitus erit divisor per quem fractio proposita, facta numeratoris ac denominatoris divisione, reduci potest ad simpliciores, nempe ad $\frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$.

Atque ita si habeatur fractio

* Euct. 2. VII.

$$\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc,}{9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3}.$$

termini ejus imprimis abbreviandi sunt dividendo numeratorem per aa ac denominatorem per $3b$ Dein ablato bis

$$3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3 \text{ de } 6a^5 + 15aab - 4acc - 10bcc,$$

restabit

$$\begin{array}{r} 15b \quad aa \quad - \quad 10bcc \\ + 18c \quad aa \quad - \quad 12c^3 \end{array}$$

Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b + 6c$ perinde ac si $5b + 6c$ simplex esset quantitas, evadit $3aa - 2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ & secunda vice restabit $-9aac + 6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa - 2cc$ ut ante. Quare $3aa - 2cc$ quaesitus est divisor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propositae & obtinebitur

$$\frac{2a^3 + 5aab}{3ab - 9bc}.$$

LXXVI. Quod si divisor communis hoc pacto non inveniatur, certum est nullum omnino existere, nisi forsan e terminis prodeat per quos numerator ac denominator fractionis abbreviantur. Ut si habeatur fractio

$$\frac{aadd - ccdd - aacc + c^4}{4aad - 4acd - 2acc + 2c^3},$$

ac terminis ejus juxta dimensiones litterae d disponantur, ita ut evadat

numerator

$$\begin{array}{r} aa \quad dd - aacc \\ - cc \quad dd + c^4 \end{array}$$

denominator

$$\begin{array}{r} 4aa \quad d - 2acc \\ - 4ac \quad d + 2c^3 \end{array}$$

Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque numeratoris terminum per $aa - cc$ & utrumque denominatoris per $2a - 2c$ perinde ac si $aa - cc$ & $2a - 2c$ essent simplices quantitates. Atque ita vice numeratoris

toris emerget $dd - cc$, & vice denominatoris $2ad - cc$, ex quibus sic præparatis nullus communis divisor obtineri potest. Sed e terminis $aa - cc$ & $2a - 2c$, per quos numerator ac denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a - c$, cujus ope fractio ad hanc

$$\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$$

reduci potest. Quod si neque termini $aa - cc$ & $2a - 2c$ communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

LXXVII. Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores:

Sed plerumque expeditius inveniuntur querendo omnes alterutrius quantitatis divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram dividant absque residuo.

Sic ad reducendum $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi sunt divisores quantitatis $aa - ab$ nempe a & $a - b$. Dein tentandum est an alteruter a vel $a - b$ dividat etiam $a^3 - aab + abb - b^3$ absque residuo.

Regulam generalem tradidit Cel. Nicol. Bernoulli & Leibnitii. T. 2. p. 189. &c.

ARTICULUS III.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM

ad communem denominatorem.

LXXVIII. **F**ractiones ad communem denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius (r).

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d , & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b , & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator

(r) EUCL. 17. VII. Vel sic per d , & ideo minor fit, quare est ducenda in d , ne valorem mutet, siquidem $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$. Idem dicendum de reliqua.

Tom. I.

K

tor bd . Atque ita a & $\frac{ab}{c}$ five $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi vero denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alterne per quotientes. Sic fractiones $\frac{a'}{bc}$ & $\frac{a'}{bd}$ ad hasce $\frac{a'd}{bcd}$ & $\frac{a'c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alterne per quotientes c ac d ortos divisione denominatorum per communem divisorem b .

LXXIX. Hæc autem reductio præcipue usui est in additione & subtractione fractionum, quæ, si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt antequam uniri possunt.

Sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$, five $\frac{ad+bc}{bd}$.

Et $a + \frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$.

Et $\frac{a'}{bc} - \frac{a'}{bd}$ evadit $\frac{a'd - a'c}{bcd}$ vel $\frac{d-c}{bcd} a'$.

Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx} - cc-xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$ (s).

Atque ita $\frac{2}{7} + \frac{1}{7}$ evadit $\frac{2}{7} + \frac{1}{7}$ five $\frac{14+15}{21}$ hoc est $\frac{29}{21}$.

Et $\frac{1}{8} - \frac{1}{4}$ evadit $\frac{1}{8} - \frac{2}{8}$ five $\frac{1}{8}$.

Et $\frac{1}{4} - \frac{1}{12}$ evadit $\frac{3}{12} - \frac{1}{12}$ five $\frac{2}{12}$ hoc est $\frac{1}{6}$.

Et $3\frac{1}{7}$ five $\frac{1}{7} + \frac{21}{7}$ evadit $\frac{1}{7} + \frac{21}{7}$ five $\frac{22}{7}$.

Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{1}{2}$.

LXXX. Fractiones, ubi plures, sunt gradatim uniri debent.

Sic habito $\frac{aa}{x} - a + \frac{2xx}{3a} - \frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a & restabit $\frac{aa-ax}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$ & prodibit $\frac{3a^2-3aax+2x^2}{3ax}$ unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$ & restabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^2-2x^4}{3aax-3axx}$.

(s) 187. Nam reducendo has fractiones

$\frac{c^4+x^4}{cc-xx}$, $\frac{cc}{1}$, $\frac{xx}{1}$ ad eundem denominatorem, habetur,
 $\frac{c^4+x^4}{cc-xx}$; $\frac{cc}{1}$; $\frac{xx}{1}$

sed duæ secundæ subducendæ sunt a primis, ergo erit

$\frac{c^4+x^4}{cc-xx} - \frac{cc}{1} - \frac{xx}{1}$
 $\frac{c^4+x^4-cc^2-xx^2}{cc-xx}$

DE REDUCTIONE RADICALIUM. 75

Atque ita si habeatur $3\frac{4}{7} - \frac{4}{7}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum est nempe $\frac{25}{7}$ dein ab hoc auferendum $\frac{4}{7}$ & restabit $\frac{21}{7}$ (t).

ARTICULUS IV.

DE REDUCTIONE RADICALIUM.

ad minimos terminos.

LXXXI. **R**adicalis, ubi totius radix extrahi nequit, plerumque continetur extrahendo radicem divisoris alicujus.

Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem divisoris aa fit $a\sqrt{bc}$ (u).

Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem divisoris 16 fit $4\sqrt{3}$.

Et $\sqrt{48aabc}$ extrahendo radicem divisoris $16aa$ fit $4a\sqrt{3bc}$.

Et $\sqrt{\frac{a^2b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aa - 4ab + 4bb}{cc}$ fit $\frac{a - 2b}{c} \sqrt{ab}$.

Et $\sqrt{\frac{Vaaomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aamm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz}$ in $Voo + 4mp$.

Et $6\sqrt{\frac{7}{12}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{1}{12}$ fit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$, five $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$ radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Et sic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ five $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$ extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{ab}$ (x).

Et $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4}$ extrahendo radicem cubicam divisoris $8a^3$ fit $2a$ in $\sqrt[3]{b + 2a}$.

Haud secus $\sqrt[4]{a^3x}$ extrahendo radicem quadraticam divisoris aa fit $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{ax}$ (y) vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam divisoris a^4 fit $a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$ (z).

At-

(t) 188. Nam $3\frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{25}{7}$; $= \frac{a}{a} \sqrt{ab}$ (quia $\sqrt{\frac{1}{aa}} = \frac{1}{a}$) $= \sqrt{ab}$.

& $\frac{25}{7}$; $\frac{2}{3}$ ad eundem denominatorem reduc-

tæ dant $\frac{75}{21}$ & $\frac{14}{21}$ quarum differentia $= \frac{61}{21}$.

(u) 189. Siquidem $\sqrt{aabc} = \sqrt{bc} \cdot \sqrt{aa}$ (192. hujus) sed $\sqrt{aa} = a$, ergo &c.

(x) Ductis denominatore, ac numeratore in a , fit $a\sqrt{\frac{b}{a}} = a\sqrt{\frac{ab}{aa}} = a\sqrt{\frac{1}{aa}} \cdot \sqrt{ab}$

(y) Nam $\sqrt[4]{a^3x} = \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ax} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{ax}$ (ex $\sqrt[4]{a^2}$ extracta radice quadrata).

(z) Item $\sqrt[4]{a^3x} = \sqrt[4]{\frac{a^4x}{a}} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{a}} = a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$.

K 2

Atque ita $\sqrt[6]{a^7x^5}$ convertitur in $a\sqrt[6]{ax^5}$, (a) vel in $ax\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$ (b) vel in $\sqrt[6]{ax} \cdot \sqrt[6]{axx}$ (c).

LXXXII. Ceterum hæc reductio non tantum concinnandis radicalibus inservit, sed & earum additioni & subtractioni, si modo ex parte radicali convenient ubi ad formam simplicissimam reducuntur. Tunc enim uniri possunt, quod aliter non fit.

Sic $\sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3}$ hoc est $9\sqrt[3]{3}$.

Et $\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3}$ hoc est $-\sqrt[3]{3}$ (d).

Et sic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}} + \sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ extrahendo quicquid est rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab} + \frac{a - 2b}{c}\sqrt{ab}$ (e) hoc est $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$.

Et $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4} - \sqrt[3]{b^4 + 2ab}$ evadit $2a\sqrt[3]{b + 2a} - b$ in $\sqrt[3]{b + 2a}$ (f) hoc est $2a - b$ $\sqrt[3]{b + 2a}$.

A R T I C U L U S V.

D E R E D U C T I O N E R A D I C A L I U M.

ad eandem denominationem.

LXXXIII. CUM in radicalibus diversæ denominationis instituenda est multiplicatio vel divisio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo signum radicale, cujus index est minimus numerus, quem earum indices dividunt absque residuo, & suffixas

(a) Enim $\sqrt[6]{a^7x^5} = \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{ax^5} = \sqrt[6]{ax^5}$. $\sqrt[6]{\frac{16}{27}}$ & omnibus divis per $\sqrt[6]{3}$, $x = \sqrt[6]{\frac{16}{27 \cdot 3}}$

(b) Pariter $\sqrt[6]{a^7x^5} = \sqrt[6]{\frac{a^7x^6}{x}} = \sqrt[6]{a^6x^6} \cdot \sqrt[6]{\frac{a}{x}} = \sqrt[6]{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$ quare $\frac{4}{9}\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{\frac{16}{27}}$.
 $= ax\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$.

(c) Denique $\sqrt[6]{a^7x^5} = \sqrt[6]{a^3x^3} \cdot \sqrt[6]{a^4x^2}$.
 Cum vero ex harum nulla extrahere possim radicem sextam, & prima quantitas sit cubica secunda quadrata, & prima cubicam, & secunda quadratam radicem extraho, & invenio $\sqrt[6]{ax} \cdot \sqrt[6]{a^2x}$.

(d) Jam $\sqrt[6]{48} = \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{3} = 4\sqrt[6]{3}$. querenda est igitur quantitas ducta in $\sqrt[6]{3}$ & æqualis ipsi $\sqrt[6]{\frac{16}{27}}$: sit hæc x , ergo $x\sqrt[6]{3} =$

(e) Siquidem $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}} = \sqrt{\frac{4b^3}{c^2}} \cdot \sqrt{ab} = \frac{2b}{c}\sqrt{ab}$, & $\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}} = \sqrt{\frac{a^3 - 4ab + 4b^2}{cc}} \sqrt{ab} = \frac{(a - 2b)}{c}\sqrt{ab}$.

(f) Est enim $\sqrt[3]{(8a^3b + 16a^4)} = \sqrt[3]{8a^3} \cdot \sqrt[3]{(b + 2a)} = 2a\sqrt[3]{(b + 2a)}$ & $\sqrt[3]{(b^4 + 2ab)} = \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{(b + 2a)} = b\sqrt[3]{(b + 2a)}$.

quantitates toties, dempta una vice, in se ducendo quoties index ille jam major evaserit (g).

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt{aax}$ evadit $\sqrt[6]{a^3x^3}$ in $\sqrt[5]{a^4xx}$ hoc est $\sqrt[6]{a^7x^3}$.

Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{ax}$ evadit $\sqrt[4]{aa}$ in $\sqrt[4]{ax}$ hoc est $\sqrt[4]{a^5x}$.

Et $\sqrt[6]{a}$ in $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ evadit $\sqrt[12]{36}$ in $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ hoc est $\sqrt[4]{30}$.

Eadem ratione $\sqrt{abc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$ hoc est $\sqrt{aabc}$.

Et $4\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$ hoc est $\sqrt{48aabc}$.

Et $2\sqrt{b+2a}$ evadit $\sqrt[4]{8a}$ in $\sqrt[4]{(b+2a)}$ hoc est $\sqrt[4]{(8ab+16a^2)}$.

Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$ five $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$.

Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab}}$ fit $\frac{\sqrt{36aabb^4}}{\sqrt{18ab}}$ five $\sqrt{2ab}$. Et sic in aliis.

ARTICULUS VI.

DE REDUCATIONE RADICALIUM.

ad simpliciores radicales per extractionem radicum.

LXXXIV. **R** Adices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur sic extrahe.

Designet *A* quantitatis alicujus partem majorem, *B* partem minorem: Et erit

$$\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} \text{ quadratum majoris partis radicis; } \& \frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$$

(g) 191. In sequentibus radices notabimus, ut dictum est (N. 159. hujus) commodo Typothetarum inservientes.

Radicum eundem denominatorem habentium jam tradita est multiplicatio (XLIV. hujus) & divisio (XLIX hujus): cum vero diversum habent denominatorem ad eundem sunt reducendæ. Sumamus $a^{\frac{n}{p}}$; $b^{\frac{m}{q}}$. Jam patet $a^{\frac{nq}{pq}} = a^{\frac{n}{p}}$, &

$a^{\frac{nq}{pq}} = a^{\frac{n}{p}}$. Item $b^{\frac{mq}{pq}} = b^{\frac{m}{q}}$, quare reductio facta est.

Si vero p , & q , communem habeant mensuram. ex. gr. si $p = rs$, & $q = rs$, habere-

mus $a^{\frac{nrs}{rst}}$ & $b^{\frac{mrs}{rst}}$, indices fracti reducantur ad minimos terminos per LXV. hujus, restat $a^{\frac{nr}{st}}$, & $b^{\frac{ms}{st}}$ eundem habentes denomi-

natorem, (quod erat faciendum) & prioribus simpliciores (quod semper est querendum) quam ob rem inveniatur rst minimus numerum, quos duo dati metiuntur (Eucl. 27. VII.) hic dividatur per rs indicem unius ex radicalibus, unde habetur t; elevetur a^n ad potestatem t, & ex ea extrahatur radix rst. Idem fiat de secunda, & voti compotes facti erimus.

Sic minimus numerus quem 2, & 3 metiuntur est 6; $\frac{6}{2} = 3$, ergo ax elevanda ad tertiam potestatem, unde a^3x^3 , & ejus radix sexta $a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{ax}$: sed $\frac{6}{3} = 2$, quare elevamus aax ad quadratum, habiturus a^4xx , & $a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{aax}$.

quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius B (b).

Ut

(b) 192. Ad hanc regulam intelligendam observa tacite supponere Auctorem.

193. Quod termini, quibus constat quantitas complexa reducenda; sint incommensurabiles, & quidem ita ut commensurabiles fieri nullo pacto queant.

Hinc excluduntur quantitates huiusmodi $a + \sqrt{b^2}$; quia $\sqrt{b^2} = b$; atque a & b sunt commensurabiles; aut $\sqrt{a^2 c} + \sqrt{b^2 c} = a\sqrt{c} + b\sqrt{c}$ (art. LXXXI. hujus) $= (a+b)\sqrt{c}$ (art. LXXXII. hujus); aut denique $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{a}}$ (art. XLIV. LXXVIII. & LXXIX. hujus).

194. Quod quantitas reducenda constet ex integris & radicalibus, & quidem *quadraticis*, aut ex quantitatibus quæ ad integras & radicales quadraticas reduci possint; ut melius videbimus infra No. 203. 204. 205.

195. Quod omnes quantitates commensurabiles pro una sumantur.

Sic infra, ubi quantitatem $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xy}$ reducendam proponit NEWTONUS, commensurabiles aa & $5ax$ pro una sumit.

Eodem pacto si haberemus $100 + \sqrt{3267} + \sqrt{867}$, quantitates $\sqrt{3267}$, & $\sqrt{867}$ reducendæ essent ad minimos terminos per (art. LXXXI. hujus); quo facto obtinebimus $3\sqrt{3}$ & $1\sqrt{3}$, quæ conjunctæ (art. LXXXII. hujus) dabunt $100 + 5\sqrt{3}$.

196. Quod omnia quadrata simplicia sint commensurabilia, non autem rectangula cum quadratis.

197. In hoc articulo quantitas complexa vocabitur *binomium*, si constet duabus partibus incommensurabilibus; *trinomium* si ex tribus; *quadrinomium* si ex quatuor &c.; & in genere *polynomium* si ex pluribus, quamvis pars integra sit complexa.

198. *Quadratum radice polynomia*, (nisi plures termini coaluerint) continet tot terminos quot sunt unitates in dimidiato numero terminorum radice ducto in eundem numerum unitate auctum.

Sit numerus terminorum in radice $= m$.

In quadrato numerus terminorum æquat numerum terminorum radice ductum in se, (No. 92. hujus). Est ergo mm . Tot autem sunt quadrata simplicia, quot sunt termini in radice: igitur eorum numerus est m ; qui si dematur ex numero terminorum omnium, supererit $mm - m$ pro numero rectangulorum. Sed bina quæque rectangula sunt æqualia & in unum coeunt; quare, hac reductione facta, eorum numerus erit $\frac{mm - m}{2}$. Redde numerum quadratorum, & fiet numerus terminorum distinctorum $\frac{mm - m}{2} + m = \frac{mm - m + 2m}{2}$ (Art. LXXIX. hujus) $= \frac{mm + m}{2} = \frac{m}{2} (m + 1)$.

Hinc facile dignoscemus utrum in polynomio, quod tanquam quadratum proponitur, omnes termini adfint, an aliqui coaluerint, & quot. Pone tantum pro m successive numeros naturales 2, 3, 4 &c. & dispice num. $\frac{m}{2} (m + 1)$ det numerum terminorum polynomii propositi. Si hoc fit, omnes termini aderunt. Secus vero, ex variis numeris, qui oriuntur ex $\frac{m}{2} (m + 1)$ sume numerum proximæ majorem numero terminorum polynomii; hunc ex illo subduc; differentia adde unitatem, & habebis numerum terminorum qui in unum coiverunt.

Habeat, ex. gr. polynomium propositum quinque terminos. Pone $m = 2$; erit $\frac{m}{2} (m + 1) = 1$; & $m + 1 = 3$; ergo $\frac{m}{2} (m + 1) = 1 \cdot 3$.

Nunc pone $m = 3$; erit $\frac{3}{2} (m + 1) = 4$; & $\frac{m}{2} (m + 1) = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$; qui numerus superat datum terminorum numerum unitate; huic differentia adde unitatem, & duos terminos coaluisse reperies.

Est quidem directa methodus inveniendi utrum numerus terminorum assignatus possit æquare $\frac{m}{2} (m + 1)$; sed cum ea pendeat ab articulo XI. Sect. II. infra legendo; & cum me-

Methodus indirecta non nimis fit difficilis, hac nos decet esse contentos.

199. Si, præter bina rectangula, omnia quadrata in unum coierint; erit numerus terminorum $\frac{m \cdot m - m}{2} + 1$.

200 Binomium oritur ex radice binomiali, & duæ quadrati partes in unam coaluerunt.

201. Si quadratum radice polynomia involvit radicalis, & omnia quadrata sunt commensurabilia, quadratum hoc erit factum polynomii compositi ex integris & radicalibus quadraticis in aliam quamvis radicalem.

Sit radix polynomia $a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{m}} + c^{\frac{1}{r}} + \dots$
&c., ejus quadratum erit $a^{\frac{2}{n}} + 2a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{2}{m}} + 2a^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{r}} + 2b^{\frac{1}{m}}c^{\frac{1}{r}} + c^{\frac{2}{r}} + \dots$
&c. Jam, ut quadrata sint commensurabilia, opus est ut, saltem, revocari possint ad eundem radicalem. Sit ergo

$$a^{\frac{2}{n}} = yx^s; b^{\frac{2}{m}} = zx^s; c^{\frac{2}{r}} = ux^s \quad \&c.$$

Erit, extrahendo radices quadraticas, (No. 161. huius)

$$a^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}}; b^{\frac{1}{m}} = z^{\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}}; c^{\frac{1}{r}} = u^{\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}} \quad \&c.$$

& superius quadratum fiet

$$yx^s + 2y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}x^s + 2y^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}x^s + 2z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}x^s + ux^s + \dots \quad \&c.$$

id est

$$(y + z + u + \dots + 2y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} + \dots) x^s$$

Ergo &c.

Ita $\sqrt[3]{3087} + \sqrt[3]{139968} = (7 + 2\sqrt{3})\sqrt[3]{9}$;
est enim, quævis divisoribus, $3087 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$,

$$\& \sqrt[3]{3087} = \sqrt[3]{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3} = 7\sqrt[3]{9}$$

$$139968 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

atque

$$\sqrt[3]{139968} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot 9 \cdot 9}$$

202. Quin & hujusmodi quadratorum radices recidunt in polynomia composita ex radicalibus quadraticis ductis in eandem radicalem quamlibet, cujus radicalis exponens est par. Si quidem ea radix fit

$$y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}} + z^{\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}} + u^{\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}} + \dots \quad \&c.$$

$$= (\sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{u}) \sqrt{x^s}$$

203. Ubi omnia quadrata sunt inter se commensurabilia, rectangula fieri commensurabilia nequeunt. Nam, ut $\sqrt{yz}$, & $\sqrt{yu}$ fiant commensurabilia, opus est ut vel

1º. Quadrata sint x , & u & quidem ex radicibus commensurabilibus; sit $z = \alpha\alpha$, & $u = \beta\beta$; tunc polynomium No. 201. fit

$$(y + \alpha\alpha + \beta\beta + 2\alpha + 2\beta) \sqrt{y + 2\alpha\beta} x^{\frac{s}{2}}$$

& ejus radix descripta No. 202. evadit

$(\sqrt{y} + \alpha + \beta) x^{\frac{s}{2}}$; cum autem α & β sint commensurabiles; radix trinomina fit binomia, contra hypothesein.

2º. Sit $\sqrt{yz} = \alpha\sqrt{\beta}$, & $\sqrt{yu} = \kappa\sqrt{\beta}$; & sint commensurabiles α & κ ; erit quadrando, $yz = \alpha\alpha\beta$; & $yu = \kappa\kappa\beta$, & $y = \frac{\alpha\alpha\beta}{\beta} = \frac{\alpha\alpha}{\frac{\kappa\kappa}{\beta}}$;

ergo multiplicando in crucem & dividendo per β , $\alpha\alpha u = \kappa\kappa z$, & $z = \frac{\alpha\alpha u}{\kappa\kappa}$, quare yz

$$= \frac{y\alpha\alpha u}{\kappa\kappa} = \alpha\alpha\beta, \quad \& \text{dividendo } \frac{y\alpha\alpha u}{\kappa\kappa} \& \alpha\alpha\beta \text{ per}$$

$\alpha\alpha$; fiet $\frac{yu}{\kappa\kappa} = \beta$; ac multiplicando per $\kappa\kappa$ &

dividendo per u , $y = \frac{\kappa\kappa\beta}{u}$; quocirca radix descripta No. 202. fiet $(\kappa\sqrt{\frac{\beta}{u}} + \frac{\alpha}{\kappa}\sqrt{\frac{\beta}{u}} + \sqrt{u})$

$\sqrt{u} \times \frac{1}{2s}$ aut reducendo $\frac{x}{x} \sqrt{u}$, & $\sqrt{u}$ ad eundem denominatorem ($x \sqrt{\frac{\beta}{u}} + \frac{x+x}{x}$ in $\sqrt{u} \times \frac{1}{2s}$, quæ iterum est binomia.

204. Non ergo necesse est ut quantitas reducenda nullas contineat radicales præter quadraticas, sed ut ad integras & quadraticas quantitates reduci possit.

205. Hoc evenit etiam ubi $s = 2$; id est ubi nullæ sunt radices nisi quadraticæ, tunc enim quadratum fit

$$(y + z + u + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{yu} + 2\sqrt{zu}) \sqrt{x}.$$

Sic infra proponit Auctor reducendam quantitatem $\sqrt{32} - \sqrt{24}$, quæ abit in $(4 - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}$, est enim $32 = 2 \cdot 16$, & $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, atque $24 = 4 \cdot 2 \cdot 3$, & $\sqrt{24} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

Eodem pacto $\sqrt{12} + \sqrt{24}$ fit $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (2 + 2\sqrt{2}) \sqrt{3}$.

206. Hac divisione facta, radicales residuæ sunt quævis duplum rectangulum; ergo dividi singulæ poterunt per $\sqrt{4} = 2$; alioquin frustra quæretur radix quantitatis propositæ.

207. Si radicales, quibus constat quisque quadrati terminus ad eundem exponentem reducuntur, radicales rectangulorum habebunt exponentem duplum exponentis radicalium in quadratis.

208. In quadrato binomii summa quadratorum major est summa rectangulorum.

Primum quadratum est ad rectangulum ut rectangulum ad alterum quadratum (Eucl. 1. VI. aut 17. VII. vel 11. VIII.). Harum quantitatum media non potest esse neque maxima neque minima (ut facile deducitur ex Eucl. def. 5. & 7. aut prop. 14. V.); ergo quadratorum alterum erit quantitas maxima, alterum minima; & semper summa quadratorum major quam summa rectangulorum (Eucl. 25. V.) Q. E. E. D.

209. Si ergo, facta reductione de qua Nis. 203. 204. 205. quantitas integra minor sit quantitate radicali, frustra adhibebis Regulam NEWTONI.

Quantitas autem quantitas reducenda revocari

possit ad polynomium constans ex integeris & radicalibus quadraticis, & quævis radicalis dividi possit per $\sqrt{4} = 2$; & in binomio, quantitas integra major sit radicali, non semper tamen ea quantitas reduci potest, quia non semper est quadratum. Igitur Regula supponit quantitatem reducendam esse quadratum.

Nunc demonstramus regulam Auctoris.

Sit primo quantitas reducenda binomium.

Quoniam, ex hypothesi, $A + B$ est quadratum, concipi potest ejus radix, quæ erit binomialis, nam ex radice simplici oritur quadratum simplex, & ex radice binomiali quadrinomialium (Nº. 92.). Quadratum autem radice binomialis continet quadratum primæ partis radice, duo rectangula ex prima parte in secundam, & quadratum secundæ (Nº. 122. hujus & Eucl. 4. 11. & A exponit aggregatum quadratorum ex hypothesi; ergo B exprimit duo rectangula. Quamobrem quadratum ipsius A continebit quadrato-quadratum primæ partis radice, duo facta ex quadrato primæ partis in quadratum secundæ, & quadrato-quadratum secundæ; & quadratum ipsius B erit quater factum ex quadrato primæ partis radice in quadratum secundæ. Igitur differentia quadratorum ex A & ex B continebit quadrato-quadratum primæ partis radice, & quadrato-quadratum secundæ multata bis facto ex quadrato primæ partis radice in quadratum secundæ; cujus aggregati radix est differentia quadratorum primæ partis radice & secundæ (Eucl. 7. 2.). Huic adde A, vel ambo quadrata, & habebis bis quadratum primæ partis; quod erat primum.

Ex ambobus quadratis deme eorum differentiam, supererit bis quadratum secundæ partis, quod erat alterum.

Hoc ratiocinium ita symbolis poni sub oculis potest. Esto radix quantitatis reducendæ $x + y$. Quantitas ipsa æqualebit huic

$$xx + 2xy + yy = A + B.$$

Jam est

$$A = xx + yy \text{ ergo } AA = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

&

$$B = 2xy; BB = 4x^2y^2; \text{ quare } AA - BB = x^4 - 2x^2y^2 + y^4,$$

quapropter

$$\sqrt{AA - BB} = x^2 - y^2; A + \sqrt{AA - BB} = x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2x^2$$

at-

DE REDUCTIONE RADICALIUM. 81

Ut si quantitas sit $3 + \sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA - BB} = 1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3 + 1}{2}$ id est 2, & quadratum minoris partis $\frac{3 - 1}{2}$ id est 1. Ergo radix est $1 + \sqrt{2}$.

Rurfus si ex $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2}$ hoc est $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ (i) quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$.

Eodem modo si de $aa + 2x\sqrt{aa - xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa , & pro B $2x\sqrt{aa - xx}$ & erit $AA - BB = a^4 - 4a^2xx + 4x^4$. Cujus radix est $aa - 2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa - xx$; illud alterius xx ; adeoque radix $x + \sqrt{aa - xx}$.

Rurfus si habeatur $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xx}$, scribendo $aa + 5ax$ pro A & $2a\sqrt{ax + 4xx}$ pro B, fiet $AA - BB = a^4 + 6a^3x + 9a^2xx$, cujus radix est $aa + 3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa + 4ax$, illud minoris ax , & radix $\sqrt{aa + 4ax} - \sqrt{ax}$.

De-

atque

$$\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 2y^2;$$

$$\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = x^2; \frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = y^2.$$

Vel, cum A sit aggregatum duorum quadratorum, & B summa duorum rectangulorum; & cum primum quadratum sit ad rectangulum ut rectangulum ad alterum quadratum; ita in duas partes dividenda est quantitas A ut prima pars sit ad dimidium B, ut dimidium B est ad alteram partem;

Sit ergo $A = 2x$, & prima pars (nempe quadratum maximae partis radicis) sit $x + y$; reliqua pars, (scilicet quadratum minimae partis radicis,) erit $A - x - y = 2x - x - y$

$$= x - y. \text{ Est ergo } x + y : \frac{B}{2} :: \frac{B}{2} : x - y, \&$$

$$xx - yy = \frac{BB}{4}; \text{ sed } AA = 4xx, \& \frac{AA}{4} = xx;$$

$$\text{quare } \frac{AA}{4} - yy = \frac{BB}{4}; \text{ aut (addendo hinc}$$

Tom. I.

inde yy) $\frac{AA}{4} = \frac{BB}{4} + yy$; & (utrinque demendo $\frac{BB}{4}$) $\frac{AA - BB}{4} = yy$; & extracta radice, $\frac{1}{2} \sqrt{AA - BB} = y$. Sed $x = \frac{A}{2}$;

quapropter $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = x + y$; quod est quadratum primae partis radicis, & $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = x - y$, quod est quadratum secundae partis radicis.

Cetera, quae pertinent ad polynomia reducenda, leguntur infra suo loco.

(i) Est enim,

$$32 = 16 \cdot 2, \& \sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ Item } 8 = 4 \cdot 2, \& \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

ideo

$$\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}; \text{ pariter } \frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

L

Denique si habeatur $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$, ponendo $6 + \sqrt{8} = A$ & $-\sqrt{12} - \sqrt{24} = B$, fiet $AA - BB = 8$. Unde radice pars major $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ hoc est (ut supra) $1 + \sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipsa $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ (k).

Ce-

(k) 210. Polynomium $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$ habet quatuor terminos; ergo certe non oritur a radice binomiali. Quamobrem ponamus in formula Ni. 198. $m = 3$. Erit

$$\begin{aligned} mm &= 9; \quad mm - m = 9 - 3 = 6; \\ \frac{mm - m}{2} &= 3; \quad \frac{mm - m}{2} + 1 = 4. \end{aligned}$$

Unde sequitur radicem trinomialem præbere quadratum constans quatuor terminis, si quadrata omnia in unum fuerint coacta; quæ est nostra hypothesis.

211. Si in quadrato radice trinomialis omnia quadrata simplicia in unum redacta sint, dico quod alterum terminorum par, quomodocumque sumptum, continet quadratum duarum partium radice junctim sumptarum una cum quadrato reliquæ.

Sit radix trinomialis $x + y + z$; cujus quadratum erit

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2. \\ \text{Ergo, secundum hypothesein, } x^2 + y^2 \\ + z^2 = u^2, \text{ \& fiet} \\ x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 = \\ u^2 + 2xy + 2xz + 2yz. \end{aligned}$$

Nunc fumere potes
aut $u^2 + 2xy$; aut $u^2 + 2xz$; aut $u^2 + 2yz$.

Nam, si inde fumis duo rectangula quævis, semper hinc restabit u^2 cum altero rectangulo.

Erit autem

$$u^2 + 2xy = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = x^2 + (x + y)^2$$

&

$$u^2 + 2xz = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = y^2 + (x + z)^2$$

atque

$$u^2 + 2yz = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = x^2 + (y + z)^2$$

Ergo, &c.

212. Si igitur concipis quadratum binomii $x + y$, vel $x + z$, vel $y + z$, tanquam unum quadratum, demonstratio regulæ Newtonianæ,

quam pro binomiis reducendis tradidimus, extendetur ad quadrinomia.

213. Quamquam hoc Theorema non supponat reductionem No. 201., tamen sine ea vix, ac ne vix quidem, fieri potest reductio quadrinomialium radicalium.

Proponatur, exempli gratia, reducendum quadrinomialium

$$\sqrt[3]{4000} + \sqrt[6]{221184} + \sqrt[6]{1024000} + \sqrt[6]{3456000}$$

& fit

$$A = \sqrt[3]{4000} + \sqrt[6]{3456000} = \sqrt[6]{16000000} + \sqrt[6]{3456000}$$

&

$$B = \sqrt[6]{221184} + \sqrt[6]{1024000}$$

erit

$$AA = \sqrt[3]{1600000} + 2\sqrt[6]{5529600000000} + \sqrt[3]{3456000}$$

atque

$$BB = \sqrt[3]{221184} + 2\sqrt[6]{226492416000} + \sqrt[3]{1024000}$$

unde $AA - BB$ erit quantitas sex nominum, quæ multo difficilius reduci potest quam proposita.

Sed præliminaris reductio nostra Ni. 201., ostendit esse

$$\sqrt[3]{4000} = 10\sqrt[3]{4}$$

&

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{221184} &= \sqrt[6]{16 \cdot 13824} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{24} \\ &= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

atque

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{1024000} &= \sqrt[6]{16 \cdot 64000} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{40} \\ &= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

deni-

DE REDUCTIONE RADICALIUM. 83

Ceterum ubi plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citius inveniri dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam dupli quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ (1). Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$, $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, $\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$.

Er-

denique

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{3456000} &= \sqrt[6]{16 \cdot 216000} = \sqrt[6]{4 \cdot 60} \\ &= \sqrt[6]{4} \sqrt[6]{4} \sqrt[6]{15} = 2 \sqrt[6]{15} \sqrt[6]{4}\end{aligned}$$

quapropter polynomium propositum evadit

$$(10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}) \sqrt[6]{4}$$

Sit nunc

$$A = 10 + 2\sqrt{6} \quad B = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$$

erit

$$AA = 100 + 40\sqrt{6} + 24 = 124 + 40\sqrt{6} \&$$

$$BB = 40 + 8\sqrt{150} + 60 = 100 + 40\sqrt{6}$$

$$\text{nam } 150 = 25 \cdot 6; \sqrt{150} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6},$$

$$\& 8\sqrt{150} = 40\sqrt{6}$$

quocirca

$$\begin{aligned}AA - BB &= 24 = 4 \cdot 6 \text{ atque } \sqrt{AA - BB} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

unde

$$\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{2}$$

$$= 5 + 2\sqrt{6}$$

sed

$$\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{10 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{2} = 5$$

& hinc conficitur alteram quæsitæ radicis partem esse $\sqrt{5}$. Reliquæ duæ investigantur quærendo radicem quadratam binomii $5 + 2\sqrt{6}$.

Sit ergo

$$A = 5; B = 2\sqrt{6}; \text{ erit } AA = 25; BB = 24;$$

$$AA - BB = 1; 1 = \sqrt{AA - BB}$$

&

$$\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3, \text{ atque}$$

$$\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

qua de causa duæ residuæ partes radicis erunt $\sqrt{2}$; & $\sqrt{3}$ atque radix tota

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \sqrt[3]{2}, \text{ nam } \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}.$$

Sed in polynomiis non raro incideret in perplexas & arduas rationes subducendas qui vellet uti hac methodo. Sequens facilius est.

(1) 214. Quælibet pars polynomii, quod sumitur pro quadrato, aut est quadratum alicujus partis radicis, aut duplum factum ex una parte radicis in alteram. Facta reductione Ni. 201. omnia quadrata simul conficiunt quantitatem integram; quare singulæ radicales sunt duplum factum ex una parte radicis in alteram; & duæ radicales invicem multiplicatæ quadruplum factum est quatuor partibus radicis, aut, (si eadem pars radicis occurrat in utraque radicali,) quadruplum factum ex quadrato unius partis radicis in duas alias; quod si dividas per aliam radicalem quæ sit hoc ipsum factum ex duabus aliis partibus radicis, quotus erit duplum quadratum alterius partis radicis, & hujus quoti duplum erit quadruplum quadratum, cujus radix est dupla pars radicis.

215. Sicui magis placeat rationes subducere, en superius ratiocinium calculis explicatum.

Quadratum ipsius $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{u} + \sqrt{t} \&c.$ est.

$$\begin{aligned}x + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xu} + 2\sqrt{xt} + y \\ + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{yu} + 2\sqrt{yt} + z + 2\sqrt{zu} \\ + 2\sqrt{zt} + u + 2\sqrt{ut} + t \&c.\end{aligned}$$

fit $x + y + z + u + t \&c. = s$, quadratum superius fiet

$$\begin{aligned}s + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xu} + 2\sqrt{xt} \\ + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{yu} + 2\sqrt{yt} + 2\sqrt{zu} \\ + 2\sqrt{zt} + 2\sqrt{ut}\end{aligned}$$

duc, exempli gratia $2\sqrt{xy}$ in $2\sqrt{xt}$, habebis $4\sqrt{x^2yt}$; hanc divide per $2\sqrt{yt}$, restabit $2\sqrt{x^2}$, cujus duplum est $4\sqrt{x^2}$, hujus radix $2\sqrt{x}$, dupla pars radicis quæsitæ.

L 2

Ergo partes radices sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut supra (m).

LXXXV.

(m) 216. Si omnes radicales dividas per $\sqrt{4} = 2$, (quod semper fieri potest si quantitas proposita est quadratum, (No. 206.) facilius erit usus hujus regulæ. Sic in exemplo proposito fit

$$6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24} = 6 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

tum autem sume pro multiplicatione & divisione imperata radicales ipsas, omisso coefficiente 2, & quotus erit quadratum partis radices. Itaque

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1; \text{pariter } \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}; \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

cujus radix est $\sqrt{2}$. Eodem pacto

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3,$$

cujus radix est $\sqrt{3}$.

Haud aliter facillime reduces polynomium

$$\sqrt{3179} - \sqrt{264} + \sqrt{440} + \sqrt{616} + \sqrt{660} + \sqrt{1540}$$

si animadvertas esse

$$\sqrt{3179} = 17\sqrt{11}; \sqrt{264} = \sqrt{24} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}; \sqrt{440} = \sqrt{40} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{11}$$

&

$$\sqrt{616} = \sqrt{56} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}; \sqrt{660} = \sqrt{60} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{15} \cdot \sqrt{11}$$

atque

$$\sqrt{1540} = \sqrt{140} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{35} \cdot \sqrt{11}$$

unde polynomium propositum fit

$$(17 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{35}) \sqrt{11}$$

Est autem

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}; \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = 2,$$

cujus radix est $\sqrt{2}$.

Item

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}; \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 3,$$

cujus radix est $\sqrt{3}$.

Pariter

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}; \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 5,$$

cujus radix est $\sqrt{5}$.

Denique

$$\sqrt{14} \cdot \sqrt{35} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10}; \frac{7\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 7,$$

cujus radix est $\sqrt{7}$.

quare tota radix est

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{11}$$

217. Sed, inventis omnibus partibus radices præter ultimam, hæc facile invenitur per subtractionem. Nam, quantitas integra est aggregatum omnium quadratorum. Hinc ergo dema quadrata omnium partium inventarum, restabit quadratum partis quæsitæ.

Sic in exemplo proposito est $17 - 2 - 3 - 5 = 7$.

218. Si radix est polynomia, fieri non potest ut in ejus quadrato tota rectangula coeant quæ sunt radices partes.

Sit q numerus terminorum seu partium in radice. Quadratum continebit $\frac{q}{2}$ rectangula nullam litteram communem habentia. Nam duo termini diversi dant unum rectangulum. Ergo in q rectangulis, aut quivis terminus radices bis, aut aliquis sæpius repetitus & semper in terminum diversum ductus invenietur.

Sint ergo $a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}}$; $a^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{r}}$ duo rectangu-

la in quibus adest idem radices terminus $a^{\frac{1}{m}}$.

Jam $a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{r}}$ ut $b^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{r}}$, sunt

autem commensurabiles quantitates $a^{\frac{1}{m}}$.

$b^{\frac{1}{n}}$, & $a^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{r}}$ per hypothefin, ergo & $b^{\frac{1}{n}}$

atque $c^{\frac{1}{r}}$ (Eucl. 10. X).

Eodem pacto $c^{\frac{1}{r}}$ probabitur commensurabilis alteri radices termino, & sic in infinitum; Ergo omnes termini radices erunt commensu-

LXXXV. Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commensurabilium partium.

Sit quantitas $A \pm B$. Ejus pars major A . Index radice extrahende c . Quere minimum numerum n , cujus potestas n^c dividitur per $AA - BB$ sine residuo, & sit quotus Q . Computa $\sqrt[c]{(A + B) \vee Q}$ in numeris integris proximis. Si illud r . Divide $A \vee Q$ per maximum divisorem rationalem: Sit

$$\text{quotus } s, \text{ sitque } \frac{r + \frac{n}{r}}{2s} \text{ in numeris integris proximis } t. \text{ Et erit } \frac{ts \pm \sqrt{(tts - n)}}{2c} \sqrt[c]{Q}$$

radix quaesita, si modo radix extrahi potest.

Ut

rabiles (Eucl. 12. X.) contra hypothefim.

219. Quot rectangula sunt in quadrato commensurabilia, siue coalescunt, tot in radice termini sunt commensurabiles, & coeunt.

Si q , numerus terminorum in radice, esset impar, ex eo deme unitatem, & $\frac{q-1}{2}$ erit numerus rectangulorum diversorum; ut patet; quocirca idem radice terminus saltem ter reperiatur esset in quadrato. Qua hypothefi ratiocinium nostrum confirmatur & fortius evadit.

220. Si radix est polynomia, fieri non potest ut in quadrato alterum quadratum simplex, & tot rectangula, quot sunt partes radice, una demta, coeant, nisi haec rectangula sint in eadem ratione.

Quoniam, si q est numerus terminorum in radice, numerus rectangulorum nullam literam communem habentium est in quadrato $\frac{q}{2}$; in $q-1$ rectangulis quivis terminus radice saltem bis repetetur, nisi $\frac{q}{2} = q-1$, aut $q = 2$; & tunc polynomium recideret in binomium, in quo est primum quadratum ad rectangulum ut rectangulum ad alterum quadratum (Eucl. 1. VI. aut 17. VII., vel 11. VIII.) sed, ex hypothefi alterum quadratum & rectangulum sunt commensurabilia, ergo & rectangulum atque reliquum quadratum (Eucl. 12. X.). Quare totum polynomium coalescet,

Sit ergo $q-1$ major quam $\frac{q}{2}$; & rectangula commensurabilia inter se & cum quadrato ipsius a^m , sint

$$\frac{1}{b^n} \frac{1}{c^r}; \frac{1}{f^t} \frac{1}{g^p}; \frac{1}{c^r} \frac{1}{f^t}; \frac{1}{b^n} \frac{1}{g^p}; \&c.$$

quae non habent eandem rationem. Jam est

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{b^n} & \frac{1}{c^r} & \frac{1}{a^d} & \frac{1}{c^r} & \frac{1}{f^t} & \frac{1}{b^n} & \frac{1}{a^d} & \frac{1}{f^t} \\ \frac{1}{b^n} & \frac{1}{c^r} & \frac{1}{a^d} & \frac{1}{b^n} & \frac{1}{g^p} & \frac{1}{c^r} & \frac{1}{a^d} & \frac{1}{g^p} \\ \frac{1}{f^t} & \frac{1}{g^p} & \frac{1}{a^d} & \frac{1}{c^r} & \frac{1}{f^t} & \frac{1}{g^p} & \frac{1}{a^d} & \frac{1}{f^t} \end{array}$$

Et rectangula sunt commensurabilia per hypothefim; commensurabiles ergo sunt quantitates

$$\frac{1}{b^n}; \frac{1}{c^r}; \frac{1}{f^t}; \frac{1}{g^p}; \&c.; \text{ id est omnes ter-}$$

mini radice, saltem praeter a^m , erunt commensurabiles, & radix fiet binomia, contra hypothefim.

Nunc rectangula commensurabilia sint in eadem ratione, puta,

$$\frac{1}{b^n} \frac{1}{c^r}; \frac{1}{b^n} \frac{1}{g^p}; \frac{1}{f^t} \frac{1}{c^r}; \frac{1}{f^t} \frac{1}{g^p}; \&c.$$

Probabitur, ut supra, esse $\frac{1}{c^r}$ & $\frac{1}{g^p}$; $\frac{1}{b^n}$

& $\frac{1}{f^t}$ commensurabiles binae inter se, sed non omnes. Unde conficietur radicem quidem habere minorem terminorum numerum, quam supponebatur, sed non esse binomiam.

Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt[3]{968 + 25}$; erit $AA - BB = 343$; (n) ejus divisores 7, 7, 7, ergo $n = 7$ & $Q = 1$. Porro $(A + B)\sqrt[3]{Q}$, seu $\sqrt[3]{968 + 25}$, extracta prioris partis radice, sit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis est 4 (o). Ergo $r = 4$. Insuper $A\sqrt[3]{Q}$ seu $\sqrt[3]{968}$ extrahendo quicquid rationale est sit $22\sqrt[3]{2}$ (p). Ergo

$\sqrt[3]{2}$, ejus pars radicalis, est s , & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{5 \frac{3}{4}}{2\sqrt[3]{2}}$ in numeris integris

proximis est 2 (q). Ergo $t = 2$. Denique ts est $2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{tss - n}$ est 1

& $\sqrt[3]{Q}$ seu $\sqrt[3]{1}$ est 1. Ergo $2\sqrt[3]{2} + 1$ est radix quæ sita si modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem si cubus ipsius $2\sqrt[3]{2} + 1$ sit $\sqrt[3]{968 + 25}$ & res succedit.

Rursus si radix cubica extrahenda sit ex 68 — $\sqrt[3]{4374}$; erit $AA - BB = 250$ (r). Cujus divisores sunt 5, 5, 2. Ergo $n = 5 \cdot 2 = 10$, & $Q = 4$ (s). Et $\sqrt[3]{(A + B)\sqrt[3]{Q}}$ seu $\sqrt[3]{(68 + \sqrt[3]{4374})2}$ in numeris proximis integris est 7 = r . Insuper $A\sqrt[3]{Q}$ seu $68\sqrt[3]{4}$ extrahendo quicquid rationale est sit $136\sqrt[3]{1}$. Ergo $s = 1$, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{7 + \frac{10}{7}}{2}$ in numeris

integris proximis est 4 = t (t): Ergo $ts = 4$, $\sqrt[3]{tss - n} = \sqrt[3]{6}$ & $\sqrt[3]{Q} = \sqrt[3]{4}$ seu

(n) Pone $A = \sqrt[3]{968}$, & $B = 25$; & erit $AA = 968$, $BB = 625$, unde $AA - BB = 968 - 625 = 343$.

(o) Siquidem quadratum proximum ipsi 968 est 961, cujus radix est 31; & $31 + 25 = 56$, cui proximus cubus est 64, hujusque radix = 4 = r .

(p) Nam $\sqrt[3]{968} = \sqrt[3]{484 \cdot 2}$, & $\sqrt[3]{484} = 22$.

(q) Est enim $r + \frac{n}{r} = 4 + \frac{7}{4} = 5 \frac{3}{4}$.
 $= \sqrt[3]{5 \frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{5 \frac{3}{4}} = \sqrt[3]{25 + \frac{30}{4} + \frac{9}{16}}$
 $= \sqrt[3]{33 \frac{1}{16}}$; quæ divisa per 2 = $2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8}$

dat $\sqrt[3]{4 \frac{17}{128}}$; negligo $\frac{17}{128}$; quia quæritur numerus integer, restat $\sqrt[3]{4} = 2 = t$.

(r) Fac $A = 68$; $B = \sqrt[3]{4374}$; ergo AA

= 4624; $BB = 4374$.
 (s) Nempe quia $n^3 = 1000$, & $\frac{n^3}{A^3 - B^3} = \frac{1000}{250} = 4$.

(t) Quadratum proximum ipsi 4374 est 4356, cujus radix = 66, & $(68 + 66)2 = 268$; cui proximi cubi sunt 343, aut 216, illius radix = 7; hujus = 6; alterutram sume; si pri-

ma, erit $r = 7$, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \frac{7 + \frac{10}{7}}{2} = \frac{59}{14} = 4 = t$; si secundam erit $r = 6$,

& $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \frac{6 + \frac{10}{6}}{2} = \frac{23}{6} = 4 = t$; nimis enim a vero aberrabis si pro $\frac{23}{6}$ ponas 3.

feu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tendanda $\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum si radix quadrato-cubica extrahenda sit ex $29\sqrt{6} + 41\sqrt[3]{3}$; erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{(tss - n)} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[5]{Q} = \sqrt[5]{81}$ feu $\sqrt[5]{9}$ (u) atque adeo radix tendanda $\frac{\sqrt{6} + \sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{9}}$ (x).

LXXXVI.

(u) Sit $A = 29\sqrt{6}$; $B = 41\sqrt[3]{3}$; $AA = 5046$; $BB = 5043$; $AA - BB = 3 = n$; $\frac{AA - BB}{n} = \frac{243}{3} = 81 = Q$; $\sqrt{Q} = 9$; $(A + B)\sqrt{Q} = 261\sqrt{6} + 369\sqrt[3]{3} = \sqrt{408726} + \sqrt[3]{408483} = 639 + 639$ (scilicet in numeris integris promis,) quare $\sqrt{(A + B)\sqrt{Q}} = \sqrt{1278}$; proximiores potestates quintae sunt 3125; & 1024 illius radix = 5 hujus = 4; sumpta prima habes

$$\frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \frac{5 + \frac{3}{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(31 + \frac{9}{25})}}{\sqrt{24}} = 1 = t \text{ in numeris integris; sumpta secunda reperies}$$

$$\frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \frac{4 + \frac{3}{4}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(22 + \frac{9}{16})}}{\sqrt{24}} = 1. \text{ (in numeris integris).}$$

(x) 221. In geometrica proportionione continua descendente $a. b :: b. c$, dico quod $a - b$ differentia inter primum, & secundum terminum superat $\frac{a - c}{2}$ semissem differentia inter primum, & tertium.

Nam $a + c$ superat $2b$. (Eucl. 25. V.); ergo a superat $2b - c$, & $a - 2b$ superat $-c$, & addita utrinque a , $2a - 2b$ superat $a - c$, ac dividendo per 2, $a - b$ superat $\frac{a - c}{2}$.

222. Si dua continua proportioniones geometrica $a. b :: b. c$, & $f. b :: b. g$, habuerint eandem mediam b , & sit a major quam f , erit vice versa g major quam c .

Siquidem $ac = bb = ef$, ergo $a. g :: f. c$ (Eucl. 16. VI.), sed per hypothesin a major quam f , ergo g major quam c (Eucl. 16. V.)

223. Si dua geometrica proportioniones continuae decrescentes $a. b :: b. c$, & $f. b :: b. g$, habeant communem mediam b , dico $(a - f)$ differentiam inter primos terminos majorem esse $(c - g)$ differentia inter ultimos.

Est enim $a. g :: f. c$ (No. 222. huius) ergo $a - f. g - c :: f. c$ (Eucl. 19. V.) sed quia proportioniones decrescunt f major quam b , & b major quam c ; ergo &c.

224. Si $\sqrt[m]{p}$ sit quantitas sarda, & sumatur in integris numeris potestas perfecta a^m , illi proxima, ita ut $p = a^m \pm b$, dico a differre a vera radice $\sqrt[m]{(a^m + b)}$ & quidem quantitate positiva, sed differentiam unitate minorem esse.

Sit x quævis quantitas, ita ut $(a \pm x)^m = a^m \pm b$, ostendendum est esse x minorem unitate.

Jam a^m minor quam $a^m + b$, at $a^m + b$ ponitur $= (a + x)^m$, ergo a^m minor quam $(a + x)^m$ & a minor quam $a + x$: Item $a^m - b$ minor quam a^m , sed $a^m - b = (a - x)^m$, igitur a major quam $a - x$; quare semper x major quam $a - a$, id est nihilo, adeoque x est quantitas positiva.

Rursus $a^m \pm b$ minor quam $(a \pm 1)^m$, secus enim a^m non esset potestas in numeris integris omnium proxima ipsi $a^m \pm b$, ac ob eandem rationem $a^m \pm b$ major quam $(a - 1)^m$, ergo $\sqrt[m]{(a^m \pm b)}$, aut $a \pm x$ minor quam $a + 1$, & major quam $a - 1$, igitur $a \pm x$ minus.

LXXXVI. Ceterum in hujusmodi operationibus si quantitas fractio sit, vel partes ejus communem habeant divisorem; radices denominatoris & fa-

cto-

minus differt ab $a \pm x$, quam ab $a - 1$, id est $a + 1 - a \pm x$ minor quam $a + 1 - a + 1$, aut $1 \mp x$ minor quam 2, aut $\mp x$ minor quam $2 - 1$, id est, unitate.

225. Si dua geometrica proportionibus continua $\sqrt[m]{a^m + b}$. $c :: c.f$, & $a.c :: c.g$, habeant mediam communem c , & sit $\sqrt[m]{a^m + b} - c$ major unitate; a vero sit radix proxima ipsi $\sqrt[m]{a^m + b}$, in numeris integris, dico quod a est major quam c .

Est ex hyp. $\sqrt[m]{a^m + b} - c$, major unitate; ergo $\sqrt[m]{a^m + b} - 1$ major quam c , sed $\sqrt[m]{a^m + b} - a$ est minor unitate, aut a est major quam $\sqrt[m]{a^m + b} - 1$, ergo fortius a major est quam c .

226. Si ad potestatem c , eleuetur binomium $a + b$, & hujus potestatis

$$a^c + ca^{c-1}b + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3 + \frac{c.c-1.c-2.c-3}{2.3.4} a^{c-4}b^4 \&c.$$

termini

$$a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 + \frac{c.c-1.c-2.c-3}{2.3.4} a^{c-4}b^4, \& \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3 \&c.$$

alternatim sumantur, dico quod

$$(a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 \&c.)^2 - (ca^{c-1}b + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3 \&c.)^2$$

differentia nempe quadratorum partium

$$= (aa - bb)^c.$$

$$\text{Pone } a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 \&c. = f,$$

$$\& ca^{c-1}b$$

$$+ \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3 \&c. = g$$

erit tota potestas

$$a^c + ca^{c-1}b + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 \&c.$$

$$= (a+b)^c = f + g,$$

& partium differentia

$$a^c - ca^{c-1}b + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2$$

$$- \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3 \&c.$$

$$= (a-b)^c = f - g$$

sed &c

$$(a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2)^2 \&c. = ff, \text{ atque}$$

$$(ca^{c-1}b + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3)^2$$

$$\&c. = gg,$$

quapropter

$$(a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2)^2 - (ca^{c-1}b + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3)^2 = ff - gg$$

& est

$$ff - gg = (f+g).(f-g) = (a+b)^c.(a-b)^c = (aa-bb)^c. (\text{Eucl. 5. II.})$$

227. In numeris, si a superat b , & c sit nu-

me-

storum seorsim extrahe. Ut si ex $\sqrt[2]{42} = 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda sit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt[2]{968} - 25}{2}$.

Dein

merus impar, erit $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^c$ binomium, cujus membrum majus ductum est in $\sqrt{a}$, & minus in $\sqrt{b}$.

Cum c sit impar, erit $c-1$ par. Ponatur $c-1 = 2n$. Erit

$$\begin{aligned} c-1 &= 2n+1; c-2 = 2n-1; \\ c-3 &= 2n-2; c-4 = 2n-3; \\ c-5 &= 2n-4 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Jam, $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^c$, neglectis signis & coefficientibus, (de quibus hic non agitur) fit

$$\begin{aligned} &\sqrt{a}^c; \sqrt{a}^{c-1} \cdot \sqrt{b}; \sqrt{a}^{c-2} \cdot b; \\ &\sqrt{a}^{c-3} \cdot b \sqrt{b}; \sqrt{a}^{c-4} \cdot b b; \\ &\sqrt{a}^{c-5} \cdot b b \sqrt{b} \text{ \&c.} \end{aligned}$$

aut, positis pro c ; $c-1$; $c-2$; &c. valoribus supra determinatis,

$$\begin{aligned} &\sqrt{a}^{2n+1}; \sqrt{a}^{2n} \cdot \sqrt{b}; \sqrt{a}^{2n-1} \cdot b; \\ &\sqrt{a}^{2n-2} \cdot b \sqrt{b}; \sqrt{a}^{2n-3} \cdot b b; \\ &\sqrt{a}^{2n-4} \cdot b b \sqrt{b} \text{ \&c.} \end{aligned}$$

est autem

$$\sqrt{a}^{2n+1} = a^n \sqrt{a}; \sqrt{a}^{2n} = a^n;$$

$$\sqrt{a}^{2n-1} = \frac{a^n}{\sqrt{a}};$$

$$= \frac{a^{n-1} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = a^{n-1} \sqrt{a};$$

$$\sqrt{a}^{2n-2} = a^{n-1} \text{ \&c.}$$

Igitur termini superiores mutabuntur in

$$\begin{aligned} &a^n \sqrt{a}; a^n \sqrt{b}; a^{n-1} b \sqrt{a}; a^{n-1} b \sqrt{b}; \\ &a^{n-2} b b \sqrt{a}; a^{n-2} b b \sqrt{b} \text{ \&c.} \end{aligned}$$

quare termini alternatim ducti sunt in $\sqrt{a}$; & $\sqrt{b}$; si ergo alternatim excerptur, habebitur numerus rationalis ductus in $\sqrt{a}$ unum terminum efficiens, ut alter pariter rationalis ductus in $\sqrt{b}$.

Item bini termini proximi habent $a^n \sqrt{a}$, $a^n \sqrt{b}$ &c., scilicet habent eandem quantitatem rationalem, tantum ergo irrationali dif-

ferunt; sed $\sqrt{a}$ major est $\sqrt{b}$, ergo $a^n \sqrt{a}$ major est $a^n \sqrt{b}$, & sic de ceteris.

228. Si pro $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$, habeatur quantitas rationalis f , membrum quod nunc est ductum in $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$, erit rationale, eritque rationale membrum potestatis altero majus, si rationalis terminus radices alterum superet.

229. *Iisdem positis, si numerus c fuerit par, potestas erit binomium, cujus membrum unum rationale, alterum erit ductum in $\sqrt{ab}$.*

$$\text{Nam tunc } c = 2m, \text{ \& } a^{\frac{c}{2}} = a^m;$$

$$\begin{aligned} a^{\frac{c-1}{2}} \sqrt{b} &= a^m - \frac{1}{2} \sqrt{b} = a^{m-1} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ &= a^{m-1} \sqrt{ab}, \quad a^{c-2} b = a^{m-1} b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{\frac{c-3}{2}} b \sqrt{b} &= a^{m-1} b \sqrt{ab} \text{ \&c.} \end{aligned}$$

230. Si pro $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$ scribatur quantitas rationalis f , irrationale binomii membrum ducetur tantum in quantitate irrationali, quæ superest.

231. Tunc ergo $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^c$
 $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2m}$, sed $\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2m}}$
 $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^m$ (No. 159. hujus). Tunc igitur potest extrahi radix quadrata ex binomio proposito.

232. Potestas continens radices quadratas habet radicem compositam pariter ex radicibus quadratis.

233. *Non potest ex binomio radix c extrahi, nisi differentia quadratorum partium habeat radicem c rationalem.*

Radix, si potest exprimi, continet solum radices quadratas, sit ergo hæc $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, ita ut binomium datum æquet $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^c$, differentia quadratorum partium est $(a-b)^c$ (No. 226. hujus) cujus radix c est $a-b$.

Dein extracta seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur
 $\frac{2\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$. Rursus si ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda

234. Non potest ex binomio $A + B$ radix c extrahi, cum c est par, & $c = 2m$, nisi rationale binomii membrum A , sit altero majus.

Ponamus $A + B = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^c$
 $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2m}$, ergo $\sqrt{A + B}$
 $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^m$. Facio $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^m =$
 $f\sqrt{a} + g\sqrt{b}$; igitur quadrando $A + B$,
 $= ffa + 2fg\sqrt{ab} + ggb$, quare $A = ffa + ggb$,
 $\& B = 2fg\sqrt{ab}$, sed $ffa = fg\sqrt{ab}$, $\therefore fg\sqrt{ab}$,
 ggb (Eucl. 11. VIII.) $\& ffa + ggb$ superat
 $2fg\sqrt{ab}$, ergo A superat B .

His positis sic demonstratur Auctoris regula

235. Binomium datum est $A \pm B$; n determinatur, & Q determinatur, ita ut $AAQ - BBQ$

$= n^c$.
 Non binomii dati, sed hujus $A\sqrt[Q]{Q} \pm B\sqrt[Q]{Q}$, radicem quærit Auctor, & ubi hanc detectam habet, ipsam dividit per $\sqrt[Q]{Q}$ ipsius $\sqrt[Q]{Q}$, id est, per $\sqrt[Q]{Q}$, ut habeat radicem binomii dati $A \pm B$.

Præparatione hac binomium acquirit conditiones, sine quibus ipsius radix exprimi non posset, (No. 233. hujus); est nunc n^c differentia quadratorum membrorum $A\sqrt[Q]{Q}$, & $B\sqrt[Q]{Q}$, ex qua si $\sqrt[Q]{Q}$ extrahatur, habemus rationalem numerum n .

Ponamus $x\sqrt[Q]{y} \pm \sqrt[Q]{z}$ exprimere radicem quæsitam binomii $A\sqrt[Q]{Q} \pm B\sqrt[Q]{Q}$, & $x\sqrt[Q]{y}$, esse partem majorem. Cum nunc de de fractionibus non agatur, de quibus Auctor separatim tractat, erunt x , y , z , numeri integri, nam cum in potestate proposita non dentur fractiones, neque in radice dantur.

Differentia quadratorum membrorum binomii $x\sqrt[Q]{y} \pm \sqrt[Q]{z}$ elevati ad potestatem c , id est differentia quadratorum $A\sqrt[Q]{Q}$, & $B\sqrt[Q]{Q}$, est $(xxy - z)^c$ (No. 226. hujus) ergo $(xxy - z)^c$

$= AAQ - BBQ = n^c$, & $xxy - z = n$.

Ex hac æquatione deducimus decrecentem proportionem $x\sqrt[Q]{y} + \sqrt[Q]{z} : \sqrt[Q]{n} :: \sqrt[Q]{n} : x\sqrt[Q]{y} - \sqrt[Q]{z}$.

Sed $r : \sqrt[Q]{n} :: \sqrt[Q]{n} : \frac{n}{r}$; & r superat $\sqrt[Q]{n}$ (No.

fit;

234. hujus) ergo $\sqrt[Q]{n}$ superat $\frac{n}{r}$, & $\frac{n}{r}$ superat $x\sqrt[Q]{y} - \sqrt[Q]{z}$, aut o superat $x\sqrt[Q]{y} - \sqrt[Q]{z}$ — $\frac{n}{r}$, si $x\sqrt[Q]{y} + \sqrt[Q]{z}$ superat r , aut vice versa (No. 222. hujus) & $x\sqrt[Q]{y} + \sqrt[Q]{z} - r$ minor 1, (No. 223. hujus) & $x\sqrt[Q]{y} - \sqrt[Q]{z}$ — $\frac{n}{r}$ minor 0, ergo $2x\sqrt[Q]{y} - r - \frac{n}{r}$, (differentia inter $2x\sqrt[Q]{y}$, & $r + \frac{n}{r}$, multo mi-

nor unitate, quare $x\sqrt[Q]{y} - \frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ minor $\frac{1}{2}$.

His positis quatuor casus examinandi sunt, nam $A\sqrt[Q]{Q}$, est aut rationalis, aut furda, & in utroque casu, c est par, aut impar.

I. Rationalis est quantitas $A\sqrt[Q]{Q}$, & c impar.

In hoc casu $x\sqrt[Q]{y}$ pars major radices est rationalis, (No. 228. hujus); est ergo numerus integer; non enim hic, ut jam monuimus,

agitur de fractionibus, idcirco $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ est ipsum membrum maximum radices; nam numeri integri ad minimum unitate differunt, & quantitas hæc non $\frac{1}{2}$ differt a membro maximo.

Tunc etiam $s = 1$, & ideo $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$

$= \frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = s = ss$, & membrum maximum bene per regulam Auctoris determinatum est.

II. Irrationalis est quantitatis $A\sqrt[Q]{Q}$, & numerus c impar.

Est nunc $x\sqrt[Q]{y}$ numerus furdus, & quantitas $A\sqrt[Q]{Q}$ ad minimos terminos reducta eandem radicalem habet cum $x\sqrt[Q]{y}$ (No. 227. hujus) radicalem hanc Auctor quærit, & vocat s , ergo $s = \sqrt[Q]{y}$.

Vi-

fit; divide partes per communem divisorem $\sqrt[3]{3}$; & emerget $11 + \sqrt{125}$

Vidimus $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ ab $\sqrt[3]{y}$ non differre $\frac{1}{2}$, minus differunt si per s , aut $\sqrt[3]{y}$ dividantur, quia quantitas hæc superat unitatem. Idcirco $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$, & x , minus differunt $\frac{1}{2}$, & ideo x

est numerus integer proximus ipsi $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$, id est $t = x$.

Sed jam habuimus $s = \sqrt[3]{y}$, ergo $ts = \sqrt[3]{y}$, & bene radice membrum fuit determinatum.

III. Rationalis est quantitas $B\sqrt[3]{Q}$, & c numerus par.

In hoc casu, non ut casu 1., constat $\sqrt[3]{y}$ esse rationale (No. 229. hujus): ideo casus hic tertius in duos subdividitur.

Quando $\sqrt[3]{y}$ est rationale, demonstratio casus primi locum habet, & detegitur pars major radice.

Si vero $\sqrt[3]{y}$ sit furda quantitas, methodus ad veram radicem non conducit, nam propter rationalem $\sqrt[3]{Q}$, semper $s = 1$, & non $\sqrt[3]{y}$, quod desideratur ut in casu 2. demonstravimus.

IV. Irrationalis est quantitas $A\sqrt[3]{Q}$, & c numerus par.

Ex hac quantitate radix quæsitæ non potest extrahi (No. 234. hujus) & inutile foret Auctoris regulam, aut aliam quamcunque, tali quantitati applicare.

Dato nunc $\sqrt[3]{y}$ maximo membro radice æquale ts , demonstramus $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{tss - n}$, id est $z = tss - n$.

Habemus

$$\sqrt[3]{y} = ts \text{ \& } xxy = tss$$

sed, ut superius vidimus, $xy - z = n$.

Ergo subtrahendo æquationem ultimam ex præcedenti.

$$xxy - xxy + z = z = tss - n.$$

Quod demonstrandum erat.

Eodem signo radice membra jungenda esse, quo membra quantitatis propositæ junguntur, clarum est.

Radice detectam tentandam esse dicit au-

ctor, quia demonstratio ponit, radicem posse exprimi per $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{z}$, & ideo locum tantum habet quando radix extrahi potest; sed minime ex demonstratione sequitur semper posse.

Ex demonstratis sequentia deducimus corollaria, quibus methodus auctoris illustratur.

236. Quando c est numerus impar, semper methodus Auctoris conducit ad veram radicem, quando hæc extrahi potest.

237. Quando c est par, & radix extrahi potest, detegitur hæc si alterutrum membrorum radice fuerit rationale.

Constat hoc est demonstratis, si rationale fuerit membrum majus radice (No. 234. hujus); sed si membrum hoc irrationale fuerit, detegitur radix si $B\sqrt[3]{Q}$ adhibeatur in detegendo s , non $A\sqrt[3]{Q}$, ut hoc patet hisce casibus applicando demonstrata, constat enim in hoc casu etiam esse $s = \sqrt[3]{y}$ (No. 230. hujus).

Unde deducimus, cum ante initam operationem non possimus prævidere utrum membrum radice rationale sit majus an minus, si radix per methodum Auctoris detecta, quæ semper habebit majus membrum rationale, non sit vera, aliam quærendam esse, in qua majus membrum sit irrationale.

238. Si nulla ex ambabus radicibus in corollario præcedenti memoratis vera sit, neque inde poterimus concludere radicem extrahi non posse.

Si enim membra ambo radice fuerint irrationalia $\sqrt[3]{y}$, & $\sqrt[3]{z}$, erit tamen $A\sqrt[3]{Q}$ rationale (No. 234. hujus), & $s = 1$ (Cas. I. hujus), per methodum Auctoris. Si juxta observata in corollario præcedenti, in subsidium vocemus $B\sqrt[3]{Q}$ erit $s = \sqrt[3]{yz}$, (No. 229. hujus) & non incipias ire possumus in hoc casu fallere Auctoris methodum, qui defectus tamen usum ipsius methodi non minuit, si, ut in sua methodo præscribit VAN SCHOOTEN, extractione radice quadratæ, per methodum notissimam, problema reducamus ad extractionem radice, cujus index est numerus impar.

239. Quando index radice est numerus par, & majus membrum binomii propositi est irrationale, non potest radix exprimi, & non quærenda est, ut jam monuimus (Cas. IV. hujus).

(y). Unde quantitas proposita valet $\sqrt[3]{3}$ in $(11 + \sqrt{125})$ cujus radix invenietur extrahendo seorsim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11 + \sqrt{125}$.

Hæc demonstratio est Clarissimi s'GRAVESANDE, quam paulisper mutavimus propter principia a nobis jam posita.

$$= \sqrt[6]{9}, \text{ atque } \frac{\sqrt[6]{17578125}}{\sqrt[6]{9}} = \sqrt[6]{1953125} =$$

$$(y) \text{ Nam } \frac{\sqrt[3]{3993}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{1331} = 11; \text{ \& } \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{125}.$$

S E C T I O S E C U N D A.

C A P U T P R I M U M.

D E F O R M A Æ Q U A T I O N I S.

I. **Æ**quationes, quæ sunt quantitatum aut sibi mutuo æqualium, aut simul nihilo æquipollentium, congeries, duobus præcipue modis considerandæ veniunt; vel ut ultimæ conclusiones ad quas in problematis solvendis devenit, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ sunt.

Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modo problema sit definitum & aliquid certi quærendum innuat.

Sed ex posterioris generis involvunt plures quantitates incognitas, quæ ideo debent inter se comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui inest unica, quam quærimus, incognita quantitas admista cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio ista variis plerumque modis transformanda est, donec evadat ea simplicissima quæ potest, atque etiam similis alicui ex sequentibus earum gradibus, in quibus x designat quantitatem quæsitam ad cujus dimensiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quascunque quantitates ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos explicandas investigari potest.

$$\begin{aligned} x &= p. \\ xx &= px + q. \\ x^3 &= pxx + qx + r. \\ x^4 &= px^3 + qxx + rx + s. \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - p &= 0. \\ \text{Vel } xx - px - q &= 0. \\ x^3 - pxx - qx - r &= 0. \\ x^4 - px^3 - qxx - rx - s &= 0. \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

II. Ad horum normam itaque termini æquationum secundum dimensiones

nes