

www.e-rara.ch

Sulle normali all' ellissoide

Geiser, Friedrich

[S. n.], [1868]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 07

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-49469>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Sulle normali all'ellissoide.

(del sig. C. F. GEISER, a Zurigo).

Il presente lavoro ha per iscopo di dedurre per via sintetica i teoremi sulle normali di una superficie di secondo grado, che STEINER ha enunciati nella sua memoria *Ueber algebraische Curven und Oberflächen* (*), e di aggiungervi una serie d'altri risultati. Alcuni di questi sono già contenuti nelle memorie di JOACHIMSTHAL (**) e di CLEBSCH (***), nelle quali però il problema delle normali è trattato analiticamente. Per giustificare la pubblicazione di questo scritto, basti osservare che non esiste ancora una trattazione sintetica completa dell'argomento. Nell'esposizione ci parve conveniente di riferire le considerazioni all'ellissoide, perchè questa limitazione rischiarava moltissimo l'intuizione, e d'altronde il passaggio alle altre superficie di secondo grado non offre alcuna difficoltà essenziale.

I.

Se in un punto arbitrario dell'ellissoide F_2 si innalza la perpendicolare al relativo piano tangente, essa è la normale alla superficie nel punto prescelto. Da un punto dell'ellissoide si può sempre condurre una ed una sola retta, che nel punto stesso sia normale alla superficie; ma non è esclusa la possibilità che da esso partano altre rette le quali siano normali alla superficie nella loro seconda intersezione colla medesima. Una facile conside-

(*) G. di Crelle, t. 49.

(**) Ibid. t. 59.

(***) Ibid. t. 62. Annali di Matematica (1^a serie) t. 4 p. 195. Cfr. CHASLES *Aperçu historique* note 31.^e—DESBOVES *Théorie nouvelle des normales aux surfaces du 2^d ordre*. Paris 1862.

razione geometrica mostra che per un punto qualsivoglia p , non situato sull'ellissoide, passano sempre almeno due normali della superficie. Infatti se c'immaginiamo il fascio di tutte le sfere di centro p , esso si decompone in tre serie costituite dalle sfere che includono o intersecano o escludono F_2 . Queste tre serie sono separate, la prima dalla seconda e questa dalla terza, mediante due sfere che toccano l'ellissoide, e delle quali l'una include e l'altra esclude F_2 . È poi indifferente se p sia dentro o fuori dell'ellissoide, o anche infinitamente distante; ed anche nel caso limite, che p si trovi sulla superficie F_2 , si può facilmente stabilire il medesimo risultato. Per decidere se, oltre alle rette che vanno da p ai punti di contatto delle due sfere nominate, si possano condurre dallo stesso punto altre normali all'ellissoide, stabiliamo alcuni teoremi che seguono.

Se n è una normale di F_2 , essa fa un angolo retto colla sua polare, relativa alla superficie. Infatti la polare è situata nel piano tangente in quel punto dal quale si eleva la normale, cioè in un piano perpendicolare ad n ; donde segue la proprietà enunciata. Ora, se una retta g passante pel punto p , dato arbitrariamente nello spazio, dev'essere normale all'ellissoide F_2 , la sua polare g' dovrà giacere nel piano P , polare di p rispetto ad F_2 , ed inoltre l'angolo delle rette g , g' dev'essere retto. Quest'ultima condizione si può anche esprimere altrimenti, ricorrendo al cerchio immaginario all'infinito k_∞ : cioè i punti all'infinito di g e g' devono essere coniugati armonici rispetto a questo cerchio. Ma gli stessi punti sono anche coniugati armonici rispetto alla conica K_∞ , che l'ellissoide ha in comune col piano all'infinito. Dunque, se è dato il punto all'infinito p'_∞ di g' , si troverà il punto all'infinito p_∞ di g , determinando l'intersezione delle due polari di p'_∞ rispetto a k_∞ e K_∞ . Ma p'_∞ appartiene necessariamente alla retta all'infinito di P ; e se quel punto percorre questa retta, il punto p_∞ (in virtù di un noto teorema) descriverà una conica circoscritta al triangolo coniugato comune a k_∞ e K_∞ , i cui vertici sono i punti all'infinito degli assi di F_2 .

Dunque se una retta deve passare per un punto p e fare angolo retto colla sua polare relativa all'ellissoide F_2 , essa sarà una delle generatrici di un cono di secondo grado, avente il vertice in p e contenente tre rette parallele agli assi di K_2 . Una di tali generatrici è evidentemente la perpendicolare abbassata dal punto p sul suo piano polare P . Questo cono passa inoltre pel centro M di F_2 , perchè la polare di Mp rispetto a K_∞ giace per intero nel piano all'infinito, e necessariamente è incontrata dalla polare del punto all'infinito di Mp rispetto a k_∞ , così che,

secondo la precedente notazione, un punto infinitamente lontano p'_∞ di g' ed il punto all'infinito p_∞ di $g \equiv Mp$ sono coniugati armonici rispetto a k_∞ ed a K_∞ .

In generale, una normale è perpendicolare all'ellissoide in uno solo dei punti ove incontra la superficie. Se essa fosse, per entrambi i punti d'intersezione, perpendicolare ai rispettivi piani tangenti, questi dovrebbero essere paralleli, cioè la normale passerebbe pel centro dell'ellissoide. Ma le normali passanti pel centro si determinano facilmente, perchè i loro punti all'infinito dovranno avere la stessa polare rispetto a k_∞ e K_∞ ; cioè queste normali sono gli assi dell'ellissoide. Ciascuno di essi è normale all'ellissoide in ambedue i punti d'intersezione, epperò l'ellissoide ha tre normali doppie passanti pel centro. Una semplice considerazione geometrica mostra che anche le tre rette all'infinito, le quali congiungono i punti all'infinito degli assi, sono normali doppie di F_2 ; cioè l'ellissoide ha per normali doppie i sei spigoli del tetraedro coniugato che esso ha in comune con una qualsivoglia sfera concentrica, ovvero con k_∞ , considerato come superficie di seconda classe (il tetraedro degli assi). Se ora esistesse un'altra normale doppia, k_∞ e K_∞ avrebbe più di un triangolo coniugato comune, epperò coinciderebbero, e l'ellissoide sarebbe allora una sfera: superficie nella quale tutte le normali sono infatti normali doppie. non esatto

In generale adunque una normale all'ellissoide F_2 è perpendicolare alla superficie in uno solo dei due punti d'intersezione; questo punto dicesi piede della normale.

II.

Acciocchè due normali dell'ellissoide si incontrino, dev'essere soddisfatta la condizione che la retta congiungente i due piedi sia perpendicolare alla propria polare rispetto ad F_2 . Infatti, se p_1 e p_2 sono i piedi di due normali segantisi in p , i loro piani polari, cioè i piani tangenti in p_1 e p_2 , si incontrano lungo una retta, che è perpendicolare al piano pp_1p_2 , epperò anche alla retta p_1p_2 contenuta in questo piano. Viceversa, se la retta che congiunge due punti p_1, p_2 dell'ellissoide è perpendicolare alla propria polare, le normali in p_1, p_2 giacciono in un medesimo piano. Ma (I) tutte le rette passanti per p_1 e perpendicolari alle rispettive polari sono situate in un cono quadrico K_1 , che ha il vertice in p_1 e passa pei vertici del tetraedro

degli assi, e per la retta pp_1 normale in p_1 . Sia p un punto di questa normale; il cono K_1 conterrà i piedi di tutte le normali abbassate da p . Le medesime normali sono poi anche generatrici di un altro cono quadrico K , di vertice p , circoscritto anch'esso al tetraedro degli assi. I due coni si segano secondo la retta pp_1 , ed inoltre secondo una cubica gobba C_3 passante per p e p_1 , ed è su queste linee che devono trovarsi i piedi delle normali abbassate da p . L'ellissoide e la retta pp_1 hanno due punti comuni, de' quali uno solo, p_1 , è piede di una normale passante per p ; perchè pp_1 è normale nel solo punto p_1 . La cubica C_3 incontra l'ellissoide in sei punti, uno de' quali è p_1 , e ciascuno di essi sarà il piede di una normale abbassata da p . Siccome K e K_1 passano insieme pei quattro vertici del tetraedro degli assi, nessuno de' quali è situato in pp_1 , così si ha il teorema: Da un punto dato si possono in generale condurre sei normali all'ellissoide, delle quali almeno due sono reali; i sei piedi insieme coi quattro vertici del tetraedro degli assi (cioè col centro e coi punti all'infinito dei tre assi dell'ellissoide) sono situati in una cubica gobba, la quale è per conseguenza un'iperbole gobba equilatera (*).

Al medesimo risultato si può arrivare anche nella seguente maniera. Si sa già che da p partono due normali pp_1, pp_2 ; se per p passano altre normali, che naturalmente incontrano pp_1 , i loro piedi dovranno trovarsi sul cono K_1 di secondo grado, cioè sulla curva C_4' , intersezione di questo cono coll'ellissoide: per la quale curva il punto p' (come vertice del cono) è un punto doppio. Similmente, le richieste normali devono incontrare anche pp_2 , epperò i loro piedi si troveranno anche nella curva C_4'' , che un certo cono K_2 di vertice p_2 ha in comune coll'ellissoide. Dunque i piedi delle normali sono i punti comuni alle curve C_4' e C_4'' . Queste curve gobbe di quart'ordine, essendo situate sopra una medesima superficie di secondo grado, hanno otto punti comuni; ma due di essi sono riuniti in p_1 e due altri in p_2 ; cioè oltre a pp_1, pp_2 passano per p altre quattro normali dell'ellissoide.

(*) Tutte le superficie di 2° grado passanti per queste cubiche gobbe sono iperboloidi equilateri. Ne segue che tutti gl' iperboloidi equilateri, i quali passano pei piedi delle sei normali abbassate da un punto dato sopra un ellissoide, contengono la cubica gobba che passa pei nominati sei punti.

III.

Il numero delle normali che si possono condurre da un punto dato ad un ellissoide, si può anche determinare con un altro metodo, che si fonda sopra considerazioni più generali.

Tre superficie quadriche F' , F'' , F''' determinano una rete geometrica (*), costituita da tutte le superficie di secondo grado, passanti pei punti comuni alle tre date. Il luogo dei vertici dei coni della rete, ossia il luogo dei punti di contatto fra superficie della rete, è una curva gobba di sesto ordine, Jacobiana delle tre superficie date (o di altre tre qualsivogliano superficie della rete, che però non formino un fascio) (**).

Ma questa proposizione generale si modifica essenzialmente, se le tre superficie date hanno fra loro speciali relazioni di posizione. Pel nostro intento, supporremo che F'' ed F''' si tocchino lungo una conica, il cui piano E avrà per conseguenza lo stesso polo e rispetto ad entrambe le superficie. Allora, nella determinazione della Jacobiana, possiamo sostituire alla superficie F''' il piano E ; onde il luogo dei vertici dei coni della rete (F' , F'' , F''') risulta identico al luogo dei poli del piano E rispetto alle superficie quadriche passanti per la curva comune a F' e ad una qualunque delle superficie del fascio (F'' , F'''); il quale ultimo luogo è una cubica gobba (***), che passerà pel punto e , pel polo di E relativo ad F' , e pei vertici del triangolo coniugato comune alle coniche, sezioni di F' , F'' con E . Gli ultimi quattro punti sono i vertici del tetraedro coniugato comune ad F' ed alla conica comune alle F'' , F''' .

Per applicare queste considerazioni al problema delle normali, supponiamo che F'' , F''' siano due sfere concentriche, il cui centro comune sia un punto p dello spazio, onde il piano E sarà il piano all'infinito; ed assumiamo in luogo di F' l'ellissoide F_2 . Allora la cubica gobba, luogo dei centri delle superficie della rete, ovvero luogo dei punti di contatto fra le superficie medesime, conterrà il punto p , il centro M dell'ellissoide, ed i punti all'infinito sugli assi del medesimo. Ciascun punto p_1 , comune a questa cubica

(*) CREMONA *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*, 42.

(**) HESSE (G. di Crelle t. 49) — GEISER (Vierteljahrsschrift der Zürch. Naturf. Gesellschaft, t. 10, 1865). — *Preliminari* 106, 113.

(***) *Preliminari*, 99, 113.

ed all'ellissoide, sarà dunque un punto di contatto fra l'ellissoide ed una sfera di centro p , donde segue che pp_1 è una normale dell'ellissoide. Viceversa, se pp_1 è normale in p_1 all'ellissoide, questo sarà toccato in p_1 dalla sfera di centro p e raggio pp_1 , epperò p_1 sarà un punto della cubica gobba suaccennata.

È noto che i coni i quali proiettano una cubica gobba da un punto di essa sono di secondo grado; perciò le rette che, a cagion d'esempio, vanno dal centro ai piedi delle sei normali calate da p , insieme coi tre assi e colla retta Mp , sono situate in un cono quadrico. E similmente le rette che passano rispettivamente per i sei piedi e per p , e sono parallele ad un asse, giacciono in un cilindro (iperbolico-equilatero) che contiene anche l'asse nominato e le rette all'infinito de' piani principali pel detto asse.

Una cubica gobba, analoga a quella dianzi trovata, ossia passante pei quattro vertici del tetraedro degli assi, passi per un dato punto q . Allora sarà q il centro di una superficie quadrica Σ , segante l'ellissoide F_2 secondo una curva situata in una sfera S . I piani polari di q rispetto alle tre superficie F_2 , Σ , S passano per una stessa retta; cioè il piano polare di p rispetto ad F_1 è parallelo al piano polare relativo ad S . Ne segue che il centro della sfera S , (che è il punto a cui corrisponde la cubica gobba, cioè il punto dal quale partono le normali dell'ellissoide, aventi i piedi nella cubica gobba) è nella retta calata da q perpendicolarmente al piano polare di questo punto, relativo all'ellissoide. Cioè tutte le cubiche gobbe analoghe passanti per q corrispondono ai punti di questa retta; e fra esse quella che corrisponde al punto q è ivi toccata dalla retta medesima.

Il luogo dei centri delle superficie di un fascio (F' , F'') contiene anche i centri delle superficie della rete (F' , F'' , F''') ove F''' sia concentrica ed omotetica ad F' , cioè F''' e F' si tocchino lungo una conica nel piano all'infinito. Perciò la cubica gobba, sopra determinata come corrispondente al punto p , è anche il luogo dei centri delle superficie nella rete (F_2 , F_2' , S), dove F_2 è l'ellissoide dato, F_2' un altro ellissoide concentrico ed omotetico al dato, ed S una sfera di centro p . Se poi S' è un'altra sfera di centro p , lo stesso luogo conterrà anche i centri delle quadriche del sistema lineare determinato dalle quattro superficie F_2 , F_2' , S , S' , ossia la cubica gobba sarà il luogo dei punti di contatto fra le superficie del fascio (F_2 , F_2'), e quelle del fascio (S , S'). Ne risulta che i piedi delle normali abbassate dal punto p sull'ellissoide dato e su tutti gli ellissoidi concentrici ed omotetici ad esso sono situati nella medesima cubica gobba (corrispondente al punto

p) passante pel punto p e pei vertici del tetraedro degli assi; epperò le normali medesime sono le generatrici di un cono quadrico passante pei vertici nominati.

IV.

Assai più facile è la ricerca del numero delle normali contenute in un piano dato. Se e è un piano che seghi l'ellissoide, e p il suo polo, tutt'i piani tangenti all'ellissoide lungo la sezione K , fatta dal piano e , passano per p . Se poi n è una normale contenuta nel piano e , ed il cui piede sia p_1 , il piano tangente in p_1 sarà perpendicolare ad e , epperò passerà per la retta abbassata da p perpendicolarmente sopra e . Per questa retta passano in generale due piani tangenti all'ellissoide; i loro punti di contatto sono i piedi delle normali contenute nel piano e ; cioè in un piano vi sono in generale due normali dell'ellissoide. Queste normali si costruiscono facilmente conducendo alla conica K le tangenti pel piede della perpendicolare abbassata sul piano e dal polo p ; i punti di contatto saranno i piedi delle normali cercate. Da questa costruzione risulta che le due normali saranno reali distinte, o coincidenti, o immaginarie secondo che il piede della perpendicolare abbassata da p sia fuori della conica K o su di essa o entro la medesima.

Che in un piano non si trovino in generale più di due normali dell'ellissoide, risulta del resto anche da ciò che, come si può dimostrare facilmente, se un piano reale e contiene tre (epperò infinite) normali, esso è una delle facce del tetraedro degli assi. Infatti, in questo caso tre, epperò tutt'i piani tangenti passanti pel polo p sono perpendicolari al piano e ; onde p sarà o il centro dell'ellissoide o uno dei punti all'infinito sugli assi.

Merita ancora d'essere notato che, se il piano e passa per uno spigolo del tetraedro degli assi, le due normali contenute nel piano coincidono nello spigolo medesimo; e se il piano e passa pel centro dell'ellissoide, le due normali sono parallele ed equidistanti dal centro.

Analoghe considerazioni speciali si possono facilmente istituire pei teoremi che abbiamo dimostrati circa le normali passanti per un punto dato. Noi ci limiteremo a ciò che segue. Delle sei normali che si possono abbassare da un punto p , se questo giace in una faccia del tetraedro degli assi, quattro

sono situate in questo piano. La cubica gobba, che interseca l'ellissoide nei piedi delle normali, ed a un tempo passa pei vertici del tetraedro degli assi e per p , si decompone in un'iperbole equilatera, situata nella faccia accennata del tetraedro, ed in una retta perpendicolare a questa faccia e segante l'iperbole nel punto p (*). Se il punto p è preso in uno spigolo del tetraedro, due delle sei normali coincidono in questo spigolo, e le altre giacciono a due a due nelle due facce passanti per lo spigolo. La cubica gobba è in questo caso costituita dallo spigolo predetto, il quale contiene cinque degli undici punti suaccennati, e da due rette segantisi ad angolo retto, nelle quali sono situati gli altri sei punti, a tre a tre.

V.

I piedi di tutte quelle normali dell'ellissoide F_2 , che incontrano una data normale, il cui piede sia p , sono situati in una curva gobba del quart'ordine C_4 , per la quale p è un punto doppio (II). Dunque se partendo da p , si cammina su F_2 , in tutte le direzioni possibili, descrivendo archi infinitamente piccoli, e se nel termine di ciascuno di questi s'innalza la normale, questa in generale non segnerà la normale in p ; ma ciò accadrà solamente in due speciali direzioni, determinate dalle tangenti di C_4 in p . Queste tangenti possono essere facilmente determinate; infatti esse sono l'intersezione di un certo cono quadrico K , di vertice p , col piano e che tocca F_2 in p . Il cono K è il luogo di tutte le rette passanti per p e perpendicolari alle rispettive polari relative a F_2 . Se una retta così fatta g è situata in e , anche la sua polare g' giace nello stesso piano, epperò le due rette g, g_1 non sono altro che l'intersezione del cono K col piano e : esse sono le sole rette situate in K , che giacciono colle loro polari nel piano e : ciascuna di esse corrisponde all'altra. Perciò l'angolo gg' è retto, cioè le tangenti della curva gobba C_4 in p sono ortogonali fra loro. Si ha così il teorema: Ogni normale dell'ellissoide è incontrata da due normali infinitamente vicine, ed i due piani, che quella determina rispettivamente con queste, sono fra loro perpendicolari.

(*) Di qui si ricava facilmente il teorema planimetrico: Da un punto dato nel piano di una ellisse, si possono in generale condurre a questa quattro normali; i piedi si trovano, insieme col centro dell'ellisse e col punto dato, in un'iperbole equilatera i cui assintoti sono paralleli agli assi dell'ellisse. Cfr. the Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics 1863, p. 88.

Questo teorema conduce facilmente alla teoria delle linee di curvatura dell'ellissoide, se alle cose fin qui dedotte si associno gli sviluppi, che appoggiandosi alla teoria, dovuta a PONCELET (*), del tetraedro coniugato comune a due superficie di secondo grado, il sig. CHASLES ha fatti conoscere intorno alle superficie omofocali (**). Siccome i relativi risultati sono in generale già noti, e la loro esposizione sintetica è affatto ovvia, così non ci arresteremo più oltre su quest'argomento.

I due punti s, s_1 , nei quali la normale in p è incontrata da due normali infinitamente vicine, diconsi i centri di curvatura di p . Il luogo dei centri di curvatura per tutti i punti di F_2 dicesi superficie dei centri di curvatura dell'ellissoide; essa è costituita da due falde, l'una delle quali può concepirsi generata dal continuo variare di s (insieme con p), e l'altra dal continuo variare di s_1 . Questa superficie può essere definita o come luogo di un punto pel quale due delle sei normali coincidano, o anche come inviluppo di un piano nel quale le due normali coincidano. L'ultima definizione è quella che meglio conviene alle nostre investigazioni.

Affinchè le due normali contenute in un piano e coincidano, è necessario (IV) che la perpendicolare abbassata dal polo p di e sopra questo piano incontri la conica comune al piano medesimo e all'ellissoide, o con altre parole, questa perpendicolare dev'essere una tangente di F_2 (qui si osservi potersi supporre in generale che p non si trovi su F_2 , perchè in tal caso la ricerca dovrebb'essere alquanto modificata). Allora noi possiamo facilmente trovare il numero di quei punti p di una data retta g , pei quali si verifica la condizione ora stabilita. I punti p formano in g una punteggiata proiettiva al fascio dei piani polari dei punti medesimi, rispetto a F_2 . Perciò tutte le perpendicolari abbassate dai punti p sui rispettivi piani polari sono (per un noto teorema) le generatrici di un'iperboloide I_2 , che contiene g come direttrice. Il problema è ora ridotto alla ricerca del numero di generatrici di un'iperboloide che toccano un ellissoide; e si risolve come segue.

Una generatrice di I_2 , che tocchi F_2 , è evidentemente una tangente della curva C_4 , intersezione di I_2 e F_2 . La sviluppabile formata dalle tangenti di C_4 è dell'ottavo ordine; epperò, la retta g (o qualunque altra direttrice dell'iperboloide) avendo due punti comuni con C_4 , incontrerà la sviluppabile in altri quattro punti. Ciascuna delle quattro tangenti di C_4 , passanti per

(*) *Traité des propriétés projectives* t. 1, supplément.

(**) *Compte rendu* 11 juin 1860.

questi punti, è una generatrice di I_2 , perchè tocca questa superficie in un punto (situato su C_4) e la incontra in un altro punto (situato su g). Sono adunque quattro i punti p in g che soddisfanno alla condizione proposta: e conseguentemente per la retta g_1 , polare di g rispetto all'ellissoide, passano quattro piani in ciascun de' quali le due normali coincidono. Allo stesso risultato si arriverebbe anche colla diretta deduzione del teorema: il luogo di quelle tangenti di una superficie quadrica che incontrano due rette fisse (non situate in uno stesso piano) è una superficie di quarto grado.

Così è provato che l'inviluppo del piano e , ossia la superficie dei centri di curvatura di un'ellissoide è della quarta classe. La ricerca e la discussione dei suoi piani tangenti singolari conducono per via sintetica alla determinazione dell'ordine della superficie, e nominatamente mettono in evidenza le curve che essa ha in comune colle facce del tetraedro degli assi (*).

VI.

Siccome in generale un piano contiene due normali dell'ellissoide, e per un punto passano sei normali della medesima superficie, così le normali dell'ellissoide nella loro totalità formano un sistema di raggi di seconda classe e sesto ordine. A questo sistema si possono applicare a dirittura tutti i teoremi che, colla reciprocità polare, si deducono da quelli stabiliti dal sig. KUMMER nella sua memoria *Die algebraischen Strahlensysteme erster und zweiter Ordnung* (**). La superficie focale di questo sistema è, come abbiamo sopra dimostrato indipendentemente dal concetto di sistema di raggi, della quarta classe, poichè essa coincide colla superficie dei centri di curvatura dell'ellissoide. Oltre alle quattro facce del tetraedro degli assi, essa possiede altri otto piani tangenti singolari (imaginari), ciascuno de' quali contiene infiniti raggi del sistema, e l'inviluppo di questi è una conica. Questi otto piani singolari si ottengono come segue. I raggi contenuti in una qualunque delle quattro facce del tetraedro inviluppano una curva di quarta classe (con tre tangenti doppie) ed una conica: le quattro coniche analoghe hanno otto piani tangenti comuni, che sono gli otto piani singolari cercati. Sia i uno

(*) CLEBSCH l. c. Cfr. KUMMER nel Monatsb. Akad. Berl., 1862, p. 426.

(**) Abhandl. der Berl. Akad., 1866; veggasi specialmente il § 11.

de' quattro punti ne' quali la sezione all'infinito della quadrica data incontra il circolo immaginario k_∞ ; h, h' le generatrici rettilinee della quadrica, passanti per i ; t la tangente a k_∞ in i : saranno th, th' due degli otto piani di cui si tratta. Gli altri sei piani si ricavano nello stesso modo dagli altri tre punti analoghi ad i . Siccome l'ordine della superficie focale di quarta classe, che appartiene ad un sistema di raggi di seconda classe, è sempre il doppio dell'ordine del sistema, così la superficie dei centri di curvatura dell'ellissoide è del dodicesimo ordine. Essa ha in comune con ciascuna faccia del tetraedro una curva di sesto ordine (e quarta classe, con tre tangenti doppie), ed una conica, che è da contarsi tre volte.

Tutte le normali dell'ellissoide, che incontrano una data normale n , formano una superficie F_9 del nono grado, come si ricava dalla memoria del sig. KUMMER; per questa superficie gobba, la normale data è una retta ottupla, perchè ogni piano passante per essa sega la superficie secondo una sola generatrice. La medesima superficie contiene la curva gobba di quart'ordine, secondo la quale l'ellissoide F_2 è intersecata dal cono K_1 già considerato (II); questa curva gobba ha sopra n un punto doppio ed un punto semplice. La curva piana, comune intersezione della superficie gobba con una faccia del tetraedro è composta di una curva di quint'ordine e di quattro rette, le quali sono le normali che dalla traccia di n si possono condurre alla sezione dell'ellissoide colla suddetta faccia. Si dimostra facilmente che la curva piana di quint'ordine non ha alcun punto comune colla curva gobba del quart'ordine, ma ha bensì un punto doppio sopra n .

Si può senza difficoltà determinare l'ordine della superficie formata dalle normali, i cui piedi sono i punti di una sezione piana E dell'ellissoide. In virtù di un teorema enunciato da STEINER (*), le normali lungo una sezione piana di una superficie quadrica sono ordinatamente parallele alle generatrici di un cono di secondo grado, cioè quelle normali incontrano il piano all'infinito in punti di una conica. Questa conica e la conica E sono incontrate dalle normali, che si considerano, in punti formanti due serie proiettive; perciò il luogo cercato è una superficie di quarto grado (**). Il piano E e ciascuna delle facce del tetraedro degli assi contengono due generatrici di questa superficie.

In modo consimile si possono trattare sinteticamente anche alcuni altri

(*) *Systematische Entwicklung u. s. w.* p. 304.

(**) CHASLES, *Compte rendu* 3 juin 1861.

problemi sulle normali dell'ellissoide, p. e., quello che conduce al teorema: se i piedi di tutte le normali ugualmente inclinate ad uno de' piani principali si proiettano sul piano principale medesimo, il luogo delle proiezioni è una conica. Noi non entreremo in queste quistioni; soltanto concluderemo col fare osservare, che se non si vuol ricorrere (come qui si è fatto) alla considerazione di elementi imaginari, si può servirsi della teoria dell'angolo retto, data da STEINER e poi da STAUDT. Di tali principii, abbastanza noti, affatto scevri da imaginari, si sono serviti fra gli altri i sig.ⁱ ZECH (*) e REYE (**) per dedurre alcuni teoremi relativi ai fuochi ed alle normali.

Zurigo, 9 luglio 1867.

(*) *Die höhere Geometrie*, Stuttgart 1857.

(**) *Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten* (Zeitschrift f. Math. u. Ph. t. 10).