

**www.e-rara.ch**

**Euclidis Elementa Geometrica, Novo Ordine Ac Methodo Fere,  
Demonstrata**

**Euclides**

**Londini, 1678**

**Zentralbibliothek Zürich**

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-52071>

Nicolai Mercatoris in geometriam introductio brevis.

---

**www.e-rara.ch**

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

---

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

T

Nicolai Mercatoris

I N

GEOMETRIAM

*Introductio brevis.*

**G** *Eometriæ* tradendæ metho-  
dus eadem debebat esse,  
quæ aliarum scientiarum;  
ubi Nomen exponitur pri-  
mum, tum definitio, genus, subjectum,  
objectum, principia, genesis, & affe-  
ctiones tam primæ, quàm secundæ.

*Nomen* Geometriæ dimensionem ter-  
ræ innuit; quòd ea, quæ plerunq; me-  
tiri solemus, vel terra sint, vel ex terr-  
aqueo globo producta.

Convenit igitur hoc nomen appri-  
mè scientiæ vel arti, quæ in dimetien-  
dis objectorum visibilium quantitatis  
occupatur: quales sunt itinerum di-  
stantiæ; altitudines montium & ædifi-  
ciorum; agrorum latifundia; vel mo-  
les corporum.

Postulabat ab industria mentis ipsa  
necessitas, ut inquireret in rationem

B

ista

ista definiendi. Voluit igitur sollicitata mens succurrere indigentia rei, & intellecto negotio, quæcunq; ad institutum facerent, examinare.

Ideóq; non dedignatur Geometria ortum suum, nec invidet nomen arti, quæ suis natalibus præfuerat. Quinimò inventis suis liberè uti jubet; dummodo luminibus suis acceptum feratur, quicquid illa circa materiales extensiones occupata machinatrix usquam pollet.

Dehinc opportunum est quærere, quænam sit illa, quam nos Geometriæ nomine indigitamus. Ne finis longus, accipe *definitionem*.

*Geometria* est scientia circa magnitudinum genesin & affectiones occupata.

*Genus* est *scientia*, cujus finis unicus & solus est scire.

*Subiectum inhæsionis* est *mens*, cujus facultates omnes in eruenda scientia occupantur.

*Mentis facultates* sunt *Voluntas*, *Intellectus*, *Judicium*.

*Objectum* est *magnitudo*, non illa quidem materiæ adhærens, sed ab omni materia abstracta. Quid sit abstractio Mathematica, docent Philosophi. Nobis sufficit, quòd possumus concipere lineam, vel extensionem in latum, aut solidum; quamvis illa nulli materiæ adhæ-

adhæreat. Atq; in hoc elucet discrimen inter Geometriam puram, & Practicam.

*Principia*, quæ magnitudinem constituunt, sunt Infinitum, Punctum, & Motus.

*Infinitum* est, quod omni termino & positione caret, nec proinde augeri vel minui potest.

Ab Infinito differt *Maximum*, quod augeri quidem nequit, at minui potest omnino.

*Punctum* nec augeri potest, nec minui, neq; aliud in se quicquam habet præter positionem.

A Puncto differt *Minimum*, quod minui quidem nequit, at augeri potest omnino.

Cæterùm Infinitum absolutè consideratum non est principium magnitudinis; sed cùm in Infinito ponitur Punctum, tum demum evadit ipsum Infinitum Campus maximus, qui est veluti matrix vel receptaculum magnitudinum gignendarum.

Sed nec Punctum absolutè consideratum, principium est magnitudinis; sed accedente motu fit terminus lineæ, & quasi semen omnium magnitudinum gignendarum.

Est autem *Terminus* magnitudinis cuiusq; extremum, nullam utiq; partem ipsius constituens, sed limites tantùm ponens.

Ita punctum terminat lineam, licet innumera puncta ne minimam quidem constituent lineam. Et linea terminat superficiem, licet innumera lineæ ne minimam quidem partem constituent superficiem. Denique superficies terminat corpus, licet innumera superficies ne minimam quidem partem constituent corporis.

Sic igitur Punctum terminus est terminorum, atque hoc nomine purum putum est principium magnitudinis. Reliqui termini, nimirum linea & superficies, certo respectu sunt quoque magnitudines, atque tum principii nomine haudquaquam veniunt. Ita linea absolute considerata, magnitudo est, constans partibus suis; at si moveatur linea in transversum, jam consideratur ut terminus & principium superficiem, quam generat, sed cuius tamen partem nullam constituit. Ita superficies absolute considerata, magnitudo est, partibus suis constans; at si moveatur superficies in transversum, jam consideratur ut terminus & principium corporis, quod motu suo generat, cuius tamen partem nullam constituit. Quare principium magnitudinis secundum, proprie loquendo, est *terminus*, quisque scilicet magnitudinis suæ. Cum vero à puncto reliqui termini trahant indivi-

fibi-

fibilitatem illam, cujus ratione vocantur termini, ita ut linea sit indivisibilis in latum, superficies indivisibilis in profundum; ideò puncto, ut termino terminorum, secundi principii locum haud ineptè tribui existimamus.

Tertium principium est *Motus*, qui est exspatiatio termini in campo libero.

Motus autem termini cujusq; talis sit oportet, ut si quas habet partes, singulae succedant novis vestigiis, nunquam antea pressis.

Punctum quidem, cum nullas habeat partes, quocunq; motu cieatur, necessariò lineam describit; at linea non quovis motu superficiem: etenim fieri potest, ut lineae rectae, vel circularis singulae partes pristino quidem excedant vestigio, at non ita tamen, ut non aliqua vel omnes succedant in vestigia jam antea pressa; quo motu nulla producitur superficies, sed tantum linea recta continuatur, vel circularis in seipsum revolvitur. Ideòq; dixi, oportere, ut singulae termini partes novis vestigiis, *nunquam antea pressis*, insistant. Ubi animadvertendum, licet omnes & singulae partes vestigio suo excedere debeant; non impedire hoc tamen, quò minus lineae rectae unus terminus, vel curvae lineae ambo termini maneant fixi, ut generetur superficies:

ficies : nam termini, uti diximus, non sunt partes ejus magnitudinis, cujus sunt termini.

Ut verò motâ superficie generetur corpus, omnes quoq; superficiiei partes nova vestigia occupare debent, nunquam antea pressa; nec tamen impedit hoc, quò minus unicus saltem superficiiei terminus, nempe qui sit linea recta, fixus maneat suo loco : quia linea non est pars superficiiei.

Corpus autem, licèt moveri possit ita, ut singulæ ejus partes novis vestigiis insistant; fieri tamen non potest, quin aliqua vestigia, quæ à succedentibus partibus occupantur, jam antè pressa fuerint ab aliis partibus, quæ inde excefferunt: ideòq; motus corporis non producit novam speciem magnitudinis.

Hinc liquet, non esse plures, quàm tres magnitudinis species, nimirum lineam, superficiem, corpus.

Jam verò, *Genesis* magnitudinis est productio extensionis ex termino movente in campo libero.

*Magnitudo* autem est moles determinata & continua.

*Affectiones* magnitudinis *primæ*, quæ illi semper insunt per sua principia, sunt moles, determinatio, & continuïtas. Nam ab Infinito habet molem; à  
Termino,

Termino circumscriptionem vel figuram; & à Motu continuitatem, extensionem, & partium extra partes positionem.

*Affectioes secundæ* oriuntur, cum vel una aliqua magnitudo comparatur cum suis partibus, respectu molis; etenim tota æqualis est omnibus suis partibus, eadēq; major qualibet sui parte: vel cum duæ pluresve magnitudines ejusdem speciei comparantur invicem; nam si termini unius congruant terminis alterius, æquales sunt; sin excurrant termini unius ultra limites alterius, inæquales. Itaq; comparatio molis facit *æqualitatem* vel *inæqualitatem*, quæ quidem nihil aliud est, quàm ipsa magnitudinum ratio. Et ratio quidem *æqualitatis* non nisi unica esse potest: at *inæqualitatis* ratio innumeris modis variat, dum magnitudinum comparandarum altera quidem constantem molis mensuram obtinet, altera verò à minima continuò excrescit in maximam; ubi tot oriuntur rationes diversæ, quot sunt in crescente momenta incrementi, & crescens ad constantem acquirit rationem continuò majorem atq; majorem; at constans ad crescentem, rationem continuò minorem atq; minorem. Contrarium accidit, cum alterâ quidem magnitudine

gnitudine molem obtinente constantem, altera à maxima continuò decrefcit ufq; ad minimam; ubi decrefcens ad constantem acquirit rationem continuò minorem atq; minorem; at constans ad decrefcentem, rationem continuò majorem atq; majorem. Ita magnitudo crefcens vel decrefcens ad constantem rationes omnes obit, quotcunq; funt à minima ufq; ad maximam, & constans itidem ad crefcentem vel decrefcentem.

Sed cùm duæ vel plures funt constantes, ad quas totidem crefcentes vel decrefcentes obeunt rationes continuò majores vel minores; tum oritur *rationum æqualitas vel inæqualitas*, quæ quidem melius explicari non poteft, quàm per ipfam magnitudinum genefin, dum fcilicet procreantur motu fucceffivo.

Hic autem *motus* eft vel *æquabilis*, cùm terminus movens æqualibus temporum momentis æqualia fpatia conficit: vel *inæqualis*, cùm velocitas intenditur fubinde vel remittitur.

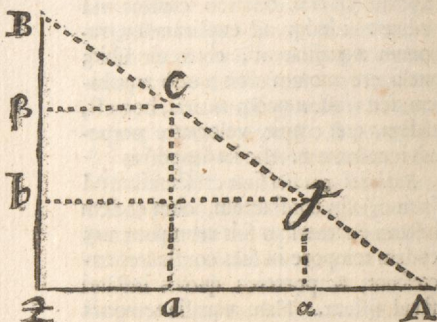
Et cùm fieri poffit, ut terminus aliquis ad certum tempus incedat quidem motu æquabili; at mox velut ex abrupto mutet tenorem velocitatis in citatiorem vel tardiozem; ubi rurfus fieri poteft, ut novus ille velocitatis tenor

tenor sit quidem in se æquabilis, at respectu prioris omninò citatior vel tardior: ideóq; ad explicandam rationum æqualitatem, convenit ubiq; intelligere motum non modò æquabilem, sed *eiusdem* quoq; *tenoris*, hoc est, eâdem, quâ coëpit, velocitate perpetuò incedentem. Hic ita suppositis

*Rationes æquales* sunt crescentium ad suam cuiusq; constantem, cùm eodem instanti è carceribus suis erumpunt, atq; eodem tempore in suas constantes excrescunt, & præterea quovis instanti simul sistunt. Nam æqualia tempora producunt æquales rationes crescentium ad suam cuiusq; constantem.

Ubi non est opus, ut crescentes sint *eiusdem* speciei, neq; ut sint æquæ veloces; sed sufficit crescentem quamlibet *eiusdem* esse speciei cum sua constante; & motum uniuscuiusq; crescentis in se esse æquabilem, & *eiusdem* tenoris.

Hinc jam perfacile est demonstrare sex illos argumentandi modos Geometris usitatos, qui sunt rationis alternæ, inversæ, divisæ, compositæ, conversæ, & ex æquali.



Exponantur enim duæ constantes  
 $Z A$  &  $Z B$ , quas duo puncta à  $Z$   
 erumpentia versus  $A$  &  $B$  producant  
 eodem tempore, ita ut, cum unum  
 pervenit à  $Z$  ad  $a$ , alterum pervene-  
 rit à  $Z$  ad  $b$ ; & cum illud pervenit ad  
 $\alpha$ , hoc pervenerit ad  $\beta$ ; deniq; cum  
 illud ad  $A$ , hoc ad  $B$ . Dico, per de-  
 finitionem superiorem; cum crescen-  
 tes  $Z a$ ,  $Z b$  eodem tempore pro-  
 ductæ sint, & constantes  $Z A$ ,  $Z B$ .  
 in idem eodem tempore; rationem  $Z a$   
 ad  $Z A$  æqualem esse rationi  $Z b$   
 ad  $Z B$ : Atq; ob hoc etiam, alternan-  
 do terminos duos medios, esse ratio-  
 nem  $Z a$  ad  $Z b$  æqualem rationi  $Z A$   
 ad

ad  $\frac{t}{a}$  B. Nam si ab æqualibus temporibus  $\frac{t}{a}$  A &  $\frac{t}{b}$  B, auferantur æqualia  $\frac{t}{a}$  &  $\frac{t}{b}$ ; restant æqualia tempora a A & b B. Maneant jam velocitates ipsarum  $\frac{t}{a}$  A &  $\frac{t}{b}$  B eadem, quæ fuerant; at ipsis  $\frac{t}{a}$  &  $\frac{t}{b}$  gignendis præter ea, quæ habebant tempora, concedantur insuper ipsarum a A & b B tempora; ita fiet, ut velocitas ipsarum  $\frac{t}{a}$  &  $\frac{t}{b}$  retardetur, & ut producantur nunc quidem eodem tempore, quo  $\frac{t}{a}$  A &  $\frac{t}{b}$  B. Quod si igitur considerentur  $\frac{t}{b}$  &  $\frac{t}{b}$  B, ut constantes; at  $\frac{t}{a}$  &  $\frac{t}{a}$  A, ut crescentes. Jam crescentes  $\frac{t}{a}$  &  $\frac{t}{a}$  A eodem tempore producantur, & constantes  $\frac{t}{b}$  &  $\frac{t}{b}$  B itidem eodem tempore. Ergo ratio crescentis  $\frac{t}{a}$  ad constantem  $\frac{t}{b}$ , æqualis est rationi crescentis  $\frac{t}{a}$  ad constantem  $\frac{t}{b}$  B. q. e. d.

Rursus, supponendo ut prius, rationem  $\frac{t}{a}$  ad  $\frac{t}{a}$  A æqualem esse rationi  $\frac{t}{b}$  ad  $\frac{t}{b}$  B: dico, *invertendo terminos*, esse quoque rationem  $\frac{t}{a}$  ad  $\frac{t}{a}$  æqualem rationi  $\frac{t}{b}$  ad  $\frac{t}{b}$ . Sint enim  $\frac{t}{a}$  &  $\frac{t}{b}$  constantes, &  $\frac{t}{a}$  A &  $\frac{t}{b}$  B crescentes. Cum  $\frac{t}{a}$  &  $\frac{t}{b}$  gignantur eodem tempore; &  $\frac{t}{a}$  A,  $\frac{t}{b}$  B itidem eodem tempore: erit per definitionem, ratio  $\frac{t}{a}$  ad  $\frac{t}{a}$  æqualis rationi  $\frac{t}{b}$  ad  $\frac{t}{b}$ .

Tertio; si sit ratio  $\frac{t}{a}$  ad  $\frac{t}{a}$  æqualis.

æqualis rationi  $\frac{b}{a}$  ad  $\frac{B}{A}$ ; erit etiam *dividendo* terminos ratio  $\frac{a}{a}$  ad  $\frac{A}{A}$  æqualis rationi  $\frac{b}{b}$  ad  $\frac{B}{B}$ . Sint enim constantes  $a$  &  $b$ ; harum tempora sunt æqualia, quippe quæ restant, cùm ab æqualibus ipsarum  $\frac{a}{A}$  &  $\frac{b}{B}$  temporibus auferuntur æqualia tempora ipsarum  $\frac{a}{a}$  &  $\frac{b}{b}$ : sed & crescentium  $\frac{a}{A}$  &  $\frac{b}{B}$  tempora sunt æqualia: Ergo sequitur per definitionem, quòd ratio crescentis  $\frac{a}{a}$  ad constantem  $\frac{A}{A}$  æqualis sit rationi crescentis  $\frac{b}{b}$  ad constantem  $\frac{B}{B}$ .

*Quartò*; si sit ratio  $\frac{a}{a}$  ad  $\frac{A}{A}$  æqualis rationi  $\frac{b}{b}$  ad  $\frac{B}{B}$ ; erit etiam *componendo* terminos, ratio  $\frac{A}{a}$  ad  $\frac{A}{a}$  æqualis rationi  $\frac{B}{b}$  ad  $\frac{B}{b}$ ; item ratio  $\frac{A}{a}$  ad  $\frac{a}{a}$  æqualis rationi  $\frac{B}{b}$  ad  $\frac{b}{b}$ .

*Quintò*; si sit ratio  $\frac{A}{a}$  ad  $\frac{a}{a}$  æqualis rationi  $\frac{B}{b}$  ad  $\frac{b}{b}$ ; erit etiam *convertendo* ratio  $\frac{a}{A}$  ad  $\frac{a}{a}$  æqualis rationi  $\frac{b}{B}$  ad  $\frac{b}{B}$ .

*Sextò*; si sit ratio  $\frac{a}{a}$  ad  $\frac{a}{A}$  æqualis rationi  $\frac{b}{b}$  ad  $\frac{b}{B}$ ; & porrò ratio  $\frac{a}{a}$  ad  $\frac{a}{A}$  æqualis rationi  $\frac{b}{b}$  ad  $\frac{b}{B}$ : erit etiam *ex æquali* ratio  $\frac{a}{a}$  ad  $\frac{a}{A}$  æqualis rationi  $\frac{b}{b}$  ad  $\frac{b}{B}$ .

Quæ quidem omnia demonstrantur ex ipsa temporum æqualitate, nec ulteriorem explicationem postulant.

Dicitur

Dicitur autem ista, de qua hæcenus egimus, rationum æqualitas, *proportio*; & magnitudines ipsæ rationum æqualitate affectæ, vocantur *proportionales*. Verùm ad intelligendam *rationem duplicatam*, vel *triplicatam*, quæq; hanc sequitur, figurarum *similitudinem*; descendendum nunc est ad singularum magnitudinum genesin, quo pacto nimirum *linea recta* procreetur, & *angulus rectilineus*, nec non *superficies plana*, atque in hac *circulus*, & *linea perpendicularis*, item *figuræ trilateræ* & *quadrilateræ*, tandemq; *lineæ parallele*, & *figuræ similes tam planæ, quàm solidæ*. Itaq; jam

*Linea recta* generatur, cùm punctum movetur ita, ut singulorum vestigiorum à singulis elongationes cum ipsis lineæ incrementis paria faciant.

Cùm verò magnitudines ex iisdem principiis, atque eodem modo genitæ; congruant inter se; rectæ autem omnes generentur ex puncto, eodem illo, quo diximus, modo: ideóq; omnes rectæ sibi mutuò congruunt.

*Congruere* autem dicuntur magnitudines, cùm, applicatione factâ, singula puncta unius incidunt in totidem puncta alterius. *Congruentia* autem cum æqualitate conjungitur, cùm singula puncta unius incidunt in singula puncta alterius.

Præ-

Præterea, cum quævis pars rectæ eodem generetur modo, quo & tota: ideoque, si quævis duo puncta partis incidant in duo puncta totius; congruent & singula reliqua puncta partis totidem punctis totius, nec ullum partis punctum existet extra totam. Quia, dum generatur recta, non nisi uno modo proceditur à puncto ad punctum.

Unde patet; si duæ rectæ diversæ sibi mutuò occurrant, eas non posse nisi in unico puncto convenire. Quæ enim rectæ in pluribus, quàm uno, punctis conveniunt, non sunt diversæ, sed eadem recta.

Patet item; si pars rectæ moveatur per vestigia totius, vel si recta aliqua sua ipsius vestigia legat; non nisi eandem rectam continuari.

Et si recta convertatur, itidem ut axis sphaeræ, atq; inter convertendum duo quævis illius puncta hæreant suo vestigio: nullum omninò reliquorum punctorum vestigio suo excedet. Quia, ut diximus, per duo puncta non nisi unica recta continuari potest.

Et vicissim; si alicujus lineæ, dum circa duo puncta fixa convertitur, singula puncta hæreant suo vestigio; illa linea erit recta. Nam si aliquod ejus punctum distaret à recta circa eadem puncta conversâ; fieret, ut conversis ambabus,

ambabus, revolutionibus æquabilibus & synchronis, ipsum punctum distans eandem semper servaret distantiam, eum ambæ lineæ situm inter se eundem servant: ideóq; punctum distans, quod initio revolutionis erat infra rectam, post dimidiam revolutionem foret supra. Et cum recta locum non mutet; oporteret, ut punctum distans locum mutasset, quod tamen suo vestigio hæ-  
rere supposueramus.

Deinde, si in linea recta sumatur punctum aliquod, quod ab ipsa digre-  
diendo describat aliam rectam à priori  
diversam; tum generatur *angulus recti-*  
*lineus*, qui nihil est aliud, quam dua-  
rum rectarum diversarum ad se invi-  
cem inclinatio.

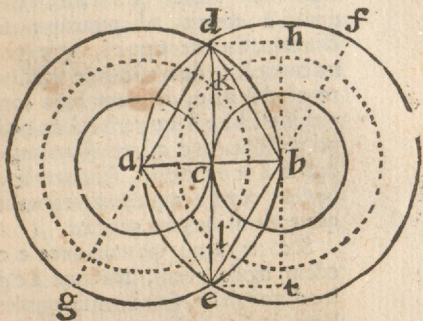
Facto autem angulo rectilineo, si  
tertia quædam recta moveatur super  
ambabus angulum intercipientibus, ita  
ut tertia illa nunquam non stringat am-  
bas; tum generatur *superficies plana*, &  
ubicunq; tandem sistat tertia illa linea,  
ibi triangulum terminat rectilineum,  
quæ est figura plana tribus istis rectis  
inclusa.

Quod si porrò in superficie plana  
ponatur recta linea, quæ altero suo  
extremo figatur, dum ipsa, circumgy-  
rando in orbem, redeat ad situm pri-  
stinum; figura sic generata in plano  
vocatur.

vocatur *circulus*; & linea, quam extremum mobile describit, est *peripheria*; & punctum fixum est *centrum*. Ceterum ex ipsa genesi innotescit differentia circuli specifica, quæ consistit in æqualitate omnium rectarum à centro ad peripheriam eductarum.

Est verò & alia circuli genesis, quam concipies, si lapidem fingas naturaliter descensu incidere in stagnum quietum. Etenim à puncto, ubi incidit lapis, tanquam centro, emicabit in superficie stagni circulus quidam initio minimus, qui paulatim excurrentibus undiq; radiis excrescet in maximum. Ubi meminervis, me in hac delineatione uti lapide pro puncto, & superficie stagni pro plana (licet reverà sit sphaerica) & motu radiorum, quasi esset æquabilis, licet fortasse incitator sit initio, & tardior in fine. Neque aliter faciunt Geometræ, cum per figuras in charta vel pulvere exaratas subjiciunt oculis, quæ mente concipi volunt.

Quod



Quòd si verò duo lapides eodem instanti & impetu incidant in duo diversa stagni puncta; generabuntur duo circuli, quos æqualiter crescere putemus. Hi sibi mutuò occurrent primùm in puncto c, quod ab utriusq; centro a & b æqualiter distat; cùm radios æqualiter crescere statuamus. Postquam verò se mutuò attigerint isti duo circuli, jam quoq; incipient se invicem secare in aliis subinde atque aliis punctis, quæ sectiones tam supra quàm infra primum contactum excurrent in lineam, cujus singula puncta à centris circulorum æqualiter absunt. Et dum pergunt crescere circuli, tandem illorum peripheriæ simul appellant utraque ad alterius cen-

centrum; atque tum radii, continuati à centrīs ad utramque sectionem, faciunt cum eâ, quæ centra connectit, duo triangula æquilatèra  $abd$  &  $abe$ , quorum basis communis est  $ab$ : lineæ verò  $cd$  &  $ce$ , à primo contactu  $c$  ad utriusq; trianguli apices  $d$  &  $e$  extensæ, sunt inter se æquales; quippe æqualibus motibus atque eodem tempore genitæ.

Sed & anguli quatuor circa  $c$  eodem modo geniti, nimirum  $acd$ ,  $bcd$ ,  $ace$ ,  $bce$ , sunt inter se æquales. Ergo inclinatio lineæ  $ac$  ad lineam  $cd$  æqualis est inclinationi ipsius  $bc$ , ad  $ce$ ; et porrò lineæ  $cd$  ad lineam  $eb$  inclinatio æqualis est inclinationi ipsius  $ce$  ad  $ca$ . Quæ igitur ex æqualibus inclinationibus componuntur *vergentiæ*, nimirum lineæ  $ac$  ad  $cb$  per inclinationes  $acd$  &  $dc b$ , & lineæ  $bc$  ad  $ca$  per inclinationes  $bce$  &  $eca$  sunt æquales. Ergo radii contingentium  $ac$  &  $bc$  sunt *in directum* siti; & recta centra connectens  $ab$  transit per contactum  $c$ .

Sunt verò &  $cd$  &  $ce$  lineæ propter eandem rationem *in directum* sitæ; eademque deprehenduntur quoque esse *rectæ*, si triangula  $bcd$ ,  $bce$ , fixis punctis  $c$  &  $d$ , item  $c$  &  $e$ , convertantur, donec incidant in plana tri-  
angu-

angulorum  $a c d$ ,  $a c e$ . Nam angulus  $b c d$  congruet angulo  $a c d$ , item angulus  $b c e$  angulo  $a c e$ , & recta  $c b$  rectæ  $c a$ . Ubi non solum puncta  $d$  &  $e$  manent suo loco, ut erat suppositum, sed & quæcunq; alia in linea  $d e$  puncta à circularum sectionibus genita fuerant, veluti  $K$  &  $l$ , singula suis vestigiis hærent, dum triangula  $b c K$ ,  $b c l$ , & reliqua simul genita, convertuntur. Ergo, inquam,  $d c e$  est linea recta, quæ cum ad rectam  $a c b$  æquales habeat inclinationes siue angulos  $d c a$  &  $d c b$ , dicitur ob hoc *perpendicularis*, & anguli ipsi æquales  $d c a$ ,  $d c b$  vocantur *recti*.

Cæterum recta  $d e$  non tangit peripherias contingentium circularum nisi in unico puncto  $c$ . Nam quæcunque magnitudines non possunt ex iisdem principiis eodem modo produci, & nec possunt sibi mutuò congruere. Non possunt autem circuli occurrentes in  $c$ , & recta  $d e$  eodem modo produci: quia recta cum æqualibus incrementis pares facit elongationes à puncto  $c$ ; circuli verò contingentes in se redeunt. Ergo recta  $d e$ , & circuli contingentes non possunt sibi mutuò congruere. Enimverò, si vel in duobus punctis congruerent, etiam totâ longitudine congruerent.

Ex

Ex eâdem porrò scaturigine manat omnium omninò *triangulorum isoscelium* pariter ac *rectangulorum* genesis, omnium item *rhomborum* & *parallelogrammorum rectangulorum*, nec non singulorum *affectiones inseparabiles*.

Nam in isoscelibus quidem unâ cum æqualibus lateribus generantur æquales anguli. In rhombis verò opposita latera & anguli fiunt æquales. In rectangulis autem triangulis, quale est  $bcd$ , duo anguli acuti  $cbd$  &  $cdb$  semper æquipollent uni recto. Applicetur enim trianguli  $ace$  hypotenusâ  $a$   $e$  hypotenusâ  $db$  trianguli  $dcb$ ; componetur ex ambobus triangulis figura rectilinea  $bcdh$ . Et eodem modo ex triangulis  $acd$  &  $bce$  componetur figura  $bcei$ . Cum verò  $dc, ce, hb, bi$  sint æquales; item  $dh, cb, ei$  æquales; & rectæ  $dc, ce$  in directum sitæ: poterunt  $d$  &  $h$  puncta æquali motu descendere, & simul appellere  $d$  quidem ad  $c$ ,  $h$  verò ad  $b$ ; & tum linea  $dc$  congruet lineæ  $ce$ , &  $hb$  ipsi  $bi$ , & figura  $bcdh$  figuræ  $bcei$ , & angulus  $hdc$  angulo  $bce$ : & cum  $bce$  sit rectus; erit &  $hdc$  rectus. Sed  $hdb$  æqualis est ipsi  $cbd$ . Ergo  $cbd$  cum  $cdb$  æquipollet uni recto.  $q. e. d.$  Sunt ergo etiam figurarum rectangularum, qualis est  $bcdh$ , & la-  
tera

tera & anguli oppositi æquales; & diameter d b illas dividit in duas partes æquales.

Jam verò, cùm ic faciat cum d e duos angulos ice, icd duobus rectis æquales; idem valebit in triangulis a cl & b c K eodem modo compositis, & per descensum aptatis; idem quoque in omnibus aliis triangulis & circularum crescentium sectionibus simul productis. Quapropter recta rectæ insistens semper facit duos angulos duobus rectis æquales.

Rursus, cùm alterni d a b & a b e sint æquales, & eorum complementa a b f & b a g itidem æqualia; sequitur, quòd inclinatio lineæ da ad a b, & hujus a b porrò ad b f, æquales sint inclinationibus ipsius c b ad b a, & hujus b a porrò ad a g: quare a d non magis annuit ad b f, quàm b e ad a g, nec a d producta citius occurret b f productæ, quàm b e occurrat ipsi a g. Cùm verò e b f & d a g sint rectæ, non possunt sibi mutuò bis occurrere: ergo e b f & d a g nunquam concurrent, ideoque vocantur *Parallelæ*, quarum affectio inseparabilis est, quòd habeant angulos alternos d a b & a b e æquales.

Figuræ autem a d b e, & b c d h, parallelis lineis contentæ vocantur *parallelogramma*. Possunt

Possunt verò ex jam dictis perfacile derivari reliquæ triangulorum quorumcunq; affectiones. Et primò quidem, quòd cujusq; trianguli tres anguli æquales sint duobus rectis. Cùm enim trianguli rectanguli tres anguli æquipolleant duobus rectis, & nullum non triangulum dividi possit in duo rectangula; æquipollebunt utriusq; trianguli rectanguli duo acuti uni recto, & cùm trianguli obliquanguli omnes anguli æquipolleant duorum rectangulorum acutis; patet cujusque trianguli tres angulos æquales esse duobus rectis.

Patet quoque; si trianguli alicujus singula latera æqualia sint singulis alterius trianguli lateribus; etiam angulos congruere, & esse æquales. Nam si basis unius applicetur basi alterius, & intervallo unius lateris trianguli, ad quod fit applicatio, describatur unus circulus, & intervallo alterius lateris alter circulus: oportet, ut applicati trianguli latera sibi mutuò occurrant in communi circulorum sectione. Quoniam omnes rectæ, quæ æquales sunt trianguli applicati lateribus, terminantur in peripheria sui quæque circuli; quare non possunt sibi mutuò occurrere, nisi in communi circulorum sectione. Congruentibus autem lateribus, non possunt non congruere anguli.

Patet

Patet denique, cujusque trianguli duo latera majora esse tertio. Nam si recta connectens centra circulorum contingentium sumatur pro basi; liquet, quod super ista basi constirui possit triangulum cujuscunq; figuræ. Atqui illa latera nunquam concurrere possunt in ullo puncto, quod sit utriq; peripheriæ commune, cum non tangant se in pluribus punctis, quàm uno. Ergo vel in unius tantum circuli peripheria concurrent, vel in neutrius. Si in unius tantum; jam unum quidem latus æquale est dimidiæ basi, at alterum majus; ergo ambo simul majora totâ basi. Sin in neutrius peripheria concurrant; vel erit punctum concursus extra utrumq; circum, & jam utrumque latus majus dimidiâ basi; vel fiet occurfus intra alterutrum æqualium circulorum, & tum poterant describi alii duo circuli, ita ut unus transeat per punctum concursus, alter verò eum tangat in aliquo puncto baseos; atque sic erit illud punctum rursus extra hunc alterum circum, cum non tangant se nisi in uno puncto.

Quod si Problemata sectari lubeat, habemus hîc lineæ & anguli bisectionem, erectionem & demissionem perpendicularis, angulorum æqualium & linearum parallelarum descriptionem, quæ

que in Geometria utramq; paginam faciunt. Sed properandum est nobis ad finem.

Interim tacendum non est, posse & parallelogramma & triangula cujuscunque generis etiam alio modo produci. Nam si recta insistat rectæ perpendiculariter, incipiatq; moveri in transversum, ita ut singula ejus puncta æqualiter recedant à pristinis vestigiis; describetur isto motu parallelogrammum rectangulum. Nam apex lineæ insistentis, à linea subjecta semper æqualiter distat, ideóq; motu suo lineam describit parallelam. Et ad quemcunque situm pervenerit linea mota, semper tota æqualiter abest à quovis relictorum vestigiorum, hoc est, semper parallela manet primo termino, unde excesserat. Quòd si jam tantundem promoveat in transversum, quantum ipsa longitudine pollet; fit *quadratum*: sin plus, vel minus; fit *rectangulum alterâ parte longius*.

Sin recta rectæ insistens non faciat quidem angulum rectum, attamen motu suo singula puncta æqualiter provehat, & tantundem excurrat in latum, quantum ipsa longitudine pollet; fit *Rhombus*: sin plus, vel minus; *Rhomboides*.

Eodem modo, si plana superficies, insi-

inſiſtens planæ, moveatur ita, ut ſingula ejus puncta æqualiter procedant; fit *prisma*. Et ſi figura inſiſtens ſit parallelogrammum; corpus, quod generatur, eſt *parallelepipedon*, hoc eſt, parallelis ſuperficiebus incluſum.

*Coni* & *Cylindri* geneſin habetis apud Euclidem, ubi motu trianguli vel parallelogrammi, gyrante circa latuſ perpendicularẽ, producuntur: ne fortè ſoli videamur motum ad generandas magnitudines accerſere.

Poſſunt verò & Conus & Cylinder aliter quoque produci; hic quidem, ſi circuluſ mergatur in profundum; ille verò, ſi inter mergendum à minimo continuò augeatur in maximum.

De parallelogrammiſ, priſmaribuſ, parallelepipedis, Cylindriſ unum idemque eſt Theorema, quòd ſint in eadem ratione cum lineiſ, quã ſingula puncta, dum generantur ipſæ magnitudines, motu ſuo deſcribunt. Id quod ex definitione æqualium rationum manifeſtum eſt.

Redeundo verò ad Figuram Primam, ſi punctum quoddam incipiat moveri ab A verſuſ Z, & ſimul ex movente excreſcat linea ſuſſum, quæ ſemper ad A Z obtineat eundem anguluſ, atq; interea dum pervenit ad Z, ipſa creſcat ad altitudinem Z B; jam deſcribetur

C

betur

betur duplici illo motu superficies  $A \mathcal{Z} B$ , quæ vocetur constans, & crescentes sint  $A a \gamma$ ,  $A a c$ : Dico, crescentem  $A a \gamma$  ad constantem  $A \mathcal{Z} B$  habere *duplicatam rationem* ejus, quam habet crescens  $A a$  ad constantem  $A \mathcal{Z}$ ; ideò, quia eodem tempore bis crescit in ratione  $A a$  ad  $A \mathcal{Z}$ ; etenim, dum crescit in longum in ratione  $A a$  ad  $A \mathcal{Z}$ , simul etiam crescit in latum in ratione  $a \gamma$  ad  $\mathcal{Z} B$  (quæ eadem est cum ratione  $A a$  ad  $A \mathcal{Z}$ .) Eodem modo ratio  $A a c$  ad  $A \mathcal{Z} B$  duplicata est rationis  $A a$  ad  $A \mathcal{Z}$ .

Quòd si verò à singulis lineæ crescentis in altitudinem  $\mathcal{Z} B$  vestigiis descendant inter movendum totidem parallelogramina, crescentia simul in latum & profundum; jam describetur motu transverso istorum parallelogramorum corpus solidum, quod vocatur *pyramis*. Oportet autem non modò lineam, quæ crescit in altitudinem  $\mathcal{Z} B$ , interea dum movetur, eundem semper ad  $A \mathcal{Z}$  angulum obtinere; sed & parallelogramina crescentia eodem semper modo inclinari ad superficiem  $A \mathcal{Z} B$ . Et quocunq; articulo sistatur motus pyramidis crescentis, semper habebit pyramis sistens ad constantem *triplicatam rationem* ejus, quam habet latus sistens ad latus constantis.

stantis. Dico; pyramidem, cujus summitas est  $A \alpha \gamma$ , ad eam, cujus summitas est  $A \mathfrak{Z} B$  esse in ratione lineæ  $A \alpha$  ad  $A \mathfrak{Z}$  ter repetitâ. Dum enim latus, movente puncto, crescit in ratione  $A \alpha$  ad  $A \mathfrak{Z}$ ; ipsa pyramis  $A \alpha \gamma$  crescit ter in eâdem ratione, nimirum in longum in ratione  $A \alpha$  ad  $A \mathfrak{Z}$ , in latum in ratione  $\alpha \gamma$  ad  $\mathfrak{Z} B$ , deniq; in profundum in ratione quâ demerguntur parallelogramma.

Figuræ autem, quæ sic crescunt in ratione duplicata, vel triplicata, vocantur *similes*.

Hactenus igitur derivavimus ortum magnitudinum ex genuinis principiis, & ortarum affectiones ex ipsa genesi demonstravimus. Quam methodum, si, quibus vacat, persequi libuerit; habebimus aliquando Geometriam scientiam suo nomine dignam.

