

www.e-rara.ch

Elementorum Euclidis libri XV ad graeci contextus ...

Euclides

Lipsiae, 1743

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5146

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3798>

Liber XII.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

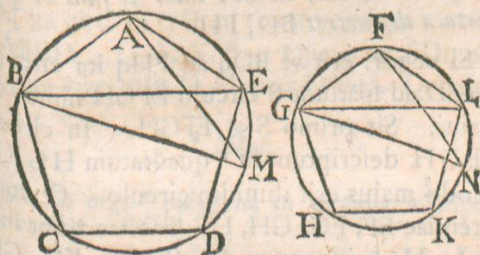
E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R X I I.

✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽ ✽

PROP. I. THEOR.



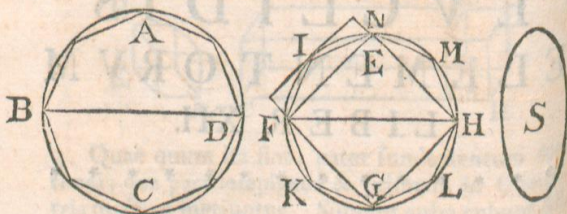
Similia polygona ABCDE, FGHKL circulis inscripta inter se sunt ut quadrata a diametris BM, GN.

Iungantur BE, AM, GL, FN. Quia polygona similia sunt: est ^a ang. BAE = GFL, ^a 1. def. 6. & BA: AE = GF: FL; ideoque ^b ang. AEB = FLG. ^b 6. 6. Ergo ang. AMB = FNG; Et, ^c 21. 3. & ^d FLG. ^d 1. ax. 1. Ergo ang. BAM = GFN, est BM: GN = BA: GF. ^e 31. 3. Hinc pol. ABCDE: pol. FGHKL = (BA: GF)² = (BM: GN)². ^f 4. 6. ^g 20. 6. ^h 1. sch. 22. 5. = BMq: GNq. Q. E. D.

ⁱ Schol. Et quia AB: GF = BC: GH &c. = BM: GN: patet ^j similibus polygonorum circulis ^j 12. 5. inscriptorum perimetros AB + BC + CD + DE + EA, & FG + GH + HK + KL + LF, esse in ratione diametrorum.

PROP.

PROP. II. THEOR.



Circuli ABCD, EFGH inter se sunt ut quadrata a diametris BD, FH.

v. 6. 4.

ξ. sch. 7. 4.

ε. 30. 3.

π. 1. 10.

ρ. 5. ax. 1.

σ. 1. 12.

τ. hyp.

Si negas: erit vt BDq ad FHq ita circulus ABCD ad spatium S circulo EFGH minus vel maius. Sit primo $S < EFGH$. In circulo EFGH descriptum fit ρ quadratum HGF E, quod ξ maius erit dimidio circulo. Circumferentiae EF, FG, GH, HE bisectae $\circ$ sint in I, K, L, M, & iungantur EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Erit similiter quodlibet $\Delta EIF > \frac{1}{2}$ segmento EIF, quoniam, ducta per I parallela ad EF & completo pgro. rectangulo NF, est $\Delta EIF = \frac{1}{2} NF$. Reliquis ergo circumferentiis semper bisectis, & talibus triangulis a reliquis segmentis semper ablati: relinquentur tandem segmenta, quae simul sumpta erunt $\pi < EFGH - S$. Sint reliqua haec segmenta, quae sunt super rectis EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Ergo polygonum EIFKGLHM $> \tau S$. Describe in circulo ABCD polygonum ABCD $\sim$ ipsi EIFKGLHM. Erit ergo illud polygonum ad hoc, vt σ BDq ad FHq, sive vt τ circulus ABCD ad spatium S. Minus autem est pol. AB CD

CD circulo in quo inscriptum est: ergo & polyg. EIFKGLHM $<$ v S. Q. E. A. Non v . 14. 5. ergo est vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad spatium minus circulo EFGH.

2. Si pōnis $S > EFGH$: quia sic erit vt FHq ad BDq ita S ad circ. ABCD, atque S ad circ. ABCD v vt circulus EFGH ad spatium minus circulo ABCD: erit vt FHq ad BDq ita circ. EFGH ad spatium minus circulo ABCD. Q. F. N. φ Quare vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad circ. EFGH. Q. E. D. ϕ . per part. 1.

* Schol.

Similia ergo σ polygona in circulis inscripta σ . 1. 12. sunt vt iidem circuli.

PROP. III. THEOR.

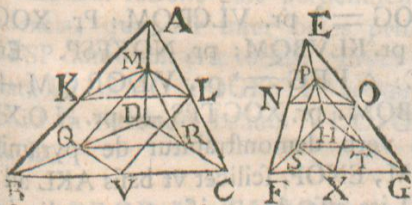
Omnis pyramis ABCD† triangularem habens basin ABC diuiditur in duas pyramides aequales & similes inter se, quae triangulares bases habent, earque similes toti, nec non in duo prismata aequalia, quae dimidio quidem totius pyramidis sunt maiora.

Biseca

† Nota, litterarum pyramidem designantium vltimam nobis semper eam esse, quae vertici est appositā, tres autem priores eas, quae ad basin pertinent. Contra, in angulo solido designando prima est quae ad verticem.

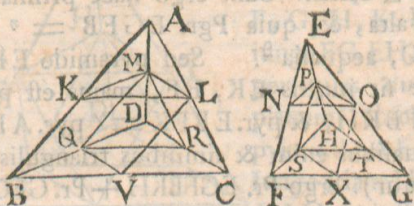
habet basin Pgr. EGFB, & lineam basi oppositam HK, alterum basin $\triangle$ GFC & oppositam basin $\triangle$ HKL. Sunt ergo haec prismata aequae alta, &, quia Pgr. EGFB = $\approx$ 2 $\triangle$ i GFC, aequalia ^{9.}. Sed pyramide EFBK, ^{7. 41. I.} quae fit iunctis EK, EF, maius est prisma ^{9. 40. II.} EGFBKH; & pyr. EFBK = γ pyr. AEGH (aequalibus enim & similibus triangulis continentur): ergo Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH > pyr. AEGH + pyr. HKLD. Est autem Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH + pyr. AEGH + pyr. HKLD = pyr. ABCD. Ergo pr. EGFBKH + pr. GFCLKH > $\frac{1}{2}$ pyr. ABCD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Si sint duae pyramides aequae altae ABCD, EFGH, quae triangulares bases habent ABC, EFG; diuidatur autem utraque ipsarum & in duas pyramides AKLM, MQRD, ENOP, PSTH, aequales inter se similesque toti, & in duo prismata aequalia KLVBQM, LVCRQM, NOXFSP, OXGTSP; atque ortarum pyramidum utraque eodem modo diuidatur, idque semper fiat: erit et unius pyramidis basis ABC ad basin EFG alterius, ita prismata omnia in

una pyramide ABCD ad prismata omnia in altera pyramide EFGH numero aequalia.



α. 15. 5.

κ. 22. 6.

λ. Lemma
sequens.

μ. 7. 5.

ν. 12. 5.

Quia $BC = 2 CV$, & $FG = 2 GX$: erit $BC : CV = FG : GX$. Sed quum, ut in praecedenti propositione, constet, $\triangle ABC \sim \triangle o VLC$, & $\triangle FEG \sim \triangle o XOG$: erit $\triangle ABC : \triangle VLC = \triangle FEG : \triangle XOG$, & alternando $\triangle ABC : \triangle FEG = \triangle VLC : \triangle XOG$. Sed $\triangle LVC : \triangle XOG = \text{pr. VLCRQM} : \text{pr. XOGTPS} = \text{pr. KLVBQM} : \text{pr. NOXFSP}$. Ergo $\triangle ABC : \triangle FEG = \text{pr. VLCRQM} + \text{pr. KLVBQM} : \text{pr. XOGTPS} + \text{pr. NOXFSP}$. Idem vero demonstrabitur de pyramidibus AKLM, ENOP, scilicet ut basis AKL ad basin ENO ita esse duo prismata aequalia in pyr. AKLM ad duo prismata aequalia in pyr. ENOP. Itaque, quia eodem, quo modo usi sumus, argumento, patet esse $\triangle ABC : \triangle EFG = \triangle AKL : \triangle ENO$: erunt ut $\triangle ABC$ ad $\triangle EFG$ sic 4 prismata in pyr. ABCD ad 4 prismata in pyr. EFGH. Et similiter procedit demonstratio ad quotcunque paria prismatum in utraque pyramide. Q. E. D.

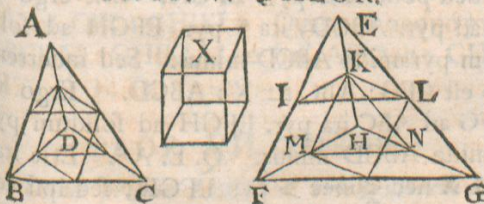
LEM.

L E M M A.

Ostendendum est, vti $\triangle LVC$ ad $\triangle XOG$ ita esse prisma $VLCRQM$ ad prisma $OXGTPS$.

Intelligentur enim ex punctis D, H in bases VLC, XOG demissa perpendiculara, quae σ . hyp. & 4. def. 6. aequalia erunt. Iam quia perpendicularis ex D demissa, & recta DC secantur a planis QMR, VLC , quae ob parallelas π $MR \& AC$, π . dem. 3. 12. $RQ \& CV$ parallela ϵ sunt: erit pars perpendicularis inter D & planum MQR ad partem reliquam σ , vt DR ad RC . Sed $DR = \tau$ RC : σ . 17. II. τ . hyp. quare pars perpendiculi inter basin VLC & basin oppositam QMR prismatis $VLCRMQ$ erit dimidium perpendiculi totius ex D demissi. Eadem ratione pars perpendiculi ex H cadentis, quae est inter bases prismatis $OXGTSP$ dimidium erit totius. Erunt ergo prismata $VLCRMQ$ & $OGXSTP$ aequae alta, σ . 7. ax. I. ac ob id in ratione ϕ basium VLC, OXG . ϕ . 32. II. Q. E. D.

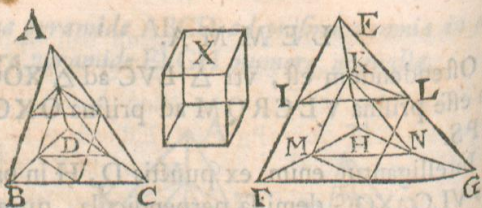
PROP. V. THEOR.



Pyramides $ABCD, EFGH$, quae in eadem sunt altitudine, & triangulares bases ABC, EFG habent, inter se sunt vt bases ABC, EFG .

Z 3

Si

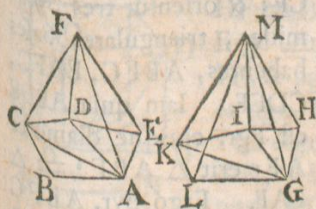


Si negas: sit $ABC: EFG = ABCD: X$, sitque primo $X < \text{pyr. } EFGH$. Diuidatur pyr. $EFGH$ vt in prop. III. & rursus pyramides ortae eodem modo diuidantur, fiatque hoc semper, vsque dum $\approx$ duae reliquae pyramides $EILK + KMNH < \text{pyr. } EFGH - X$. Erunt itaque reliqua duo prismata in pyr. $EFGH > \psi$ solido X . Diuidatur etiam pyr. $ABCD$ similiter & in totidem partes ac pyr. $EFGH$. Ergo prismata in pyr. $ABCD$ erunt ad prismata in pyr. $EFGH = \omega$ $ABC: EFG = ABCD: X$. Quare quum pyr. $ABCD$ sit maior prismatis quae in ipsa sunt: erit & solidum X maius ω quam prismata in pyr. $EFGH$, & ergo quam ipsa pyramis $EFGH$; contra hypothesin.

Sed pone $X > \text{pyr. } EFGH$. Erit ergo vt X ad pyr. $ABCD$, ita ω pyr. $EFGH$ ad solidum pyramide $ABCD$ minus. Sed inuertendo est $EFG: ABC = X: ABCD$. Ergo vt EFG ad ABC ita pyr. $EFGH$ ad solidum pyramide $ABCD$ minus. Q. E. A⁸. Erit itaque X nec $<$ nec $>$ pyr. $EFGH$, sed ipsi aequale. Ergo $ABC: EFG = ABCD: EFGH$. Q. E. D.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

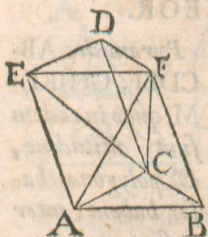


*Pyramides AB-
CDEF, GHIKL-
M, quae in eadem
sunt altitudine,
& polygonas ba-
ses habent, inter
se sunt vt bases.*

Bases diuidantur in triangula ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL, super quibus intelligantur pyramides aequae altae ipsis ABCDEF, GHIKLM. Iam quia pyr. ABCF : ACDF $\propto \Delta ABC : \Delta ACD$: erit componendo γ . 5. 12. pyr. ABCDF : pyr. ACDF = ABCD : ACD. Sed pyr. ACDF : ADEF $\propto \Delta ACD : \Delta ADE$. Ergo ex aequo pyr. ABCDF : ADEF = bas. ABCD : ADE, & componendo pyr. ABCDEF : ADEF = bas. ABCDE : ADE. Eadem ratione pyr. GHIKLM : GKLM = bas. GHIKL : GKL. Sed pyr. ADEF : GKLM $\propto$ bas. ADE : GKL. Ergo ex aequo pyr. ABCDEF : GKLM = bas. ABCDE : GKL. Atqui est inuertendo pyr. GKLM : GHIKLM = bas. GKL : GHIKL. Quare ex aequo pyr. ABCDEF : GHIKLM = bas. ABCDE : GHIKL. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma ABCDEF triangularem habens basin ABC diuiditur in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares bases habent.



7. 34. 1.

2. 5. 12.

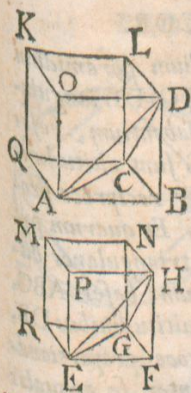
Iungantur enim AF, CE, CF: & orientur tres pyramides, triangulares bases habentes, ABFC, EAFC, CDEF. Iam quia ABFE est Pgr. eiusque diameter AF: erit $\triangle ABF = \triangle EAF$. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC. Sed pyr. EAFC eadem est quae pyr. AECF; atque pyramides AECF, CDEF, aequales bases ACE, CDE & eundem verticem F habentes, aequales sunt. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC = pyr. CDEF. Q. E. D.

Cor. Et quia pyr. ABFC eadem est cum pyr. ABCF: manifestum est pyramidem ABCF, quae cum prisma ABCDEF eandem habet triangularem basin ABC & eandem altitudinem, tertiam partem esse prismatis. Ergo ⁷ omnis pyramis recta pars est prismatis basin habentis eandem, & altitudinem aequalem: quoniam, si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, dividitur in prismata, quae triangulares habent bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides ABCD, EFGH, quae triangulares bases ABC, EFG habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum AB, EF.

3. 9. def. 11. Compleantur solida Ppda ABKL, EFMN. Et quia pyr. ABCD ~ pyr. EFGH: erit ang. ABD = EFH, & ang. ABC = EFG, & ang.



ang. DBC = HFG, & DB:

HF = BA: FE = BC: FG.

Ergo erit Pgr. BO $\sim$ pgr. ^{1.} I. def. 6.

FP, & pgr. BL $\sim$ pgr. FN,

& pgr. BQ $\sim$ pgr. FR.

Tria ergo reliqua pgra. KC,

AK, KD tribus reliquis

pgris MG, EM, MH simi-

lia ^{2.} erunt. Hinc Ppd. BK ^{3.} sch. 24. II.

$\sim$ Ppd. FM, ac ergo

Ppd. BK: Ppd. FM = ^{4.} 33. II.

(AB: EF)³. Sed quia py-

ramides ABCD, EFGH sunt sextae partes ^{5.} cor. 7. 12.

Ppdorum BK, FM: erit ^{6.} & sch. 28. II.

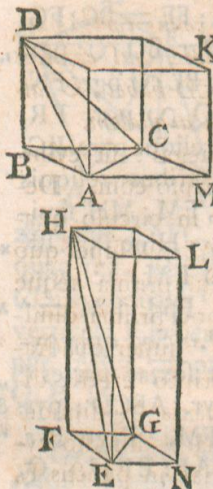
Pyr. ABCD: pyr. EFGH = Ppd. BK: Ppd. FM. Ergo Pyr. ^{7.} 15. 5.

ABCD: pyr. EFGH = (AB: EF)³. Q.

E. D.

Coroll. Ex hoc perspicuum est, similes pyra-
mides, quae polygonas habent bases, inter se esse
in triplicata ratione homologorum laterum. Iplis
enim diuisis in pyramides triangulares bases ha-
bentes; quoniam & similia polygonas basium in
triangula numero aequalia & homologa totis ^{8.} 20. 6.
uiduntur: erit ^{9.} ut vna pyramis in altera pyramide
triangularem basin habens ad vnā pyramidem in
altera triangularem basin habentem, ita tota illa py-
ramis polygonam basin habens ad totam hanc. Sed
pyramides istae triangularium basium sunt in tripli-
cata ratione laterum homologorum: Ergo & pyra-
mides polygonarum basium. ^{10.} 6. 12. & 11.
^{11.} 5. & 16. 5.

PROP. IX. THEOR.



Aequalium pyramidum
 ABCD, EFGH triangula-
 res bases habentium, bases
 ABC, EFG sunt altitudini-
 bus DB, HF reciproce pro-
 portionales. Et quarum py-
 ramidum, triangulares ba-
 ses habentium, bases ABC,
 EFG sunt altitudinibus DB,
 HF reciproce proportiona-
 les, illae inter se aequales
 sunt.

Hyp. 1. Compleantur
 enim solida parallelepipe-
 da BK, FL pyramidibus
 aequae alta. Et quia Ppd. BK = 6 pyr. ABCD
 = 6 pyr. EFGH = Ppd. FL: erit vt HF:
 DB = π BM: FN = ϵ ABC: EFG. Q. E. D.

π . 34. II.
 ϵ . 34. I.

Hyp. 2. Quia vt HF: DB = ABC: EFG
 = ϵ BM: FN: erit Ppd. BK = π Ppdo FL,
 ergo Pyr. ABCD = σ Pyr. EFGH. Q. E. D.

ϵ . 6. 2X. I.

* *Schol. 1.* Idem de pyramidibus polygonarum
 basium valet (per cor. 7. 12. & sch. 34. II): quia in
 pyramides triangularium basium dividi possunt.

* 2. Quae de pyramidibus demonstrata sunt in
 prop. 6. 8. 9, ea & quibuscunque prismatis con-
 veniunt, quippe quae tripla sunt pyramidum eas-
 dem bases & altitudines habentium.

* 3. Hinc autem per se patet ex sch. 40. II. di-
 mensio quorumvis prismatum & pyramidum.

PROP.

PROP. X. THEOR.



Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basin ABCD habet, & altitudinem aequalem.

1. Si negas: sit cylindrus $>$ triplo coni. Describatur in circulo quadratum ABCD, super quo intelligatur prisma aequale cylindro. Et quia hoc prisma dimidium est prismatis aequae alti τ super quadrato circa circulum circumscripto erecti; dimidium autem huius prismatis $>$ dimidio cylindro: erit & illud prisma $>$ dimidio cylindro. Bisecentur peripheriae in punctis E, F, G, H, quae connectantur rectis, atque a Δ is AEB, BFC, CGD, DHA intelligantur erecta prismata cylindro aequae alta. Et quoniam vnumquodque horum prismatum dimidium est ν Ppdi aequae alti erecti super Pgro. rectangulo trianguli duplo; hoc autem Ppdum $>$ respectiuo segmento cylindri: patet, vnumquodque horum prismatum $>$ esse dimidio respectiuo segmenti cylindri. Igitur reliquas circumferentias bisecantes, & super singulis, quae orientur, triangulis prismata erigentes, & hoc semper facientes, relinquemus tandem ϕ . I. 10. segmenta cylindri, quae simul sumta minora erunt excessu cylindri supra triplum coni. Sint reliqua haec segmenta, quae super segmentis circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA



κ. cor. 7. 12.

Q. E. A.

HA consistunt. Igitur prisma, quod basin polygonam AEBFCGDH habet, & cylindro aequale altum est, erit $>$ triplo coni; ideoque pyramis, cuius basis est AEBFCGDH, & vertex idem qui coni, $\propto >$ erit cono; pars toto.

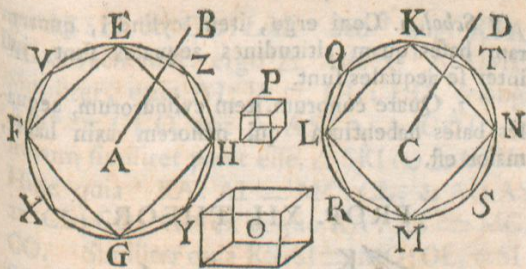
ψ. 6. 12.

2. Sit cylindrus $<$ triplo coni: erit conus $> \frac{1}{3}$ cylindri. Sed quia iisdem, quibus modo vti sumus, argumentis ψ, euincitur, pyramidem cono aequale altam & cuius basis est quadratum ABCD $>$ esse dimidio coni, & vnamquamque pyramidum cono aequale altarum super triangulis AEB, BFC &c. $>$ esse dimidio respectui segmenti coni: iterum patet, circumferentias semper bisecando, & super ortis sic triangulis pyramides semper erigendo, relictum iri segmenta coni minora excessu coni supra $\frac{1}{3}$ cylindri. Sint haec segmenta, quae sunt super segmentis circuli AE, EB, BF &c. Quare quum reliqua pyramis, cuius basis est polyg. AEBFCGDH, & vertex idem qui coni $>$ sit $\frac{1}{3}$ cylindri: erit prisma cono vel cylindro aequale altum & basin polyg. AEBFCGDH habens maius $\propto$ quam cylindrus; pars quam totum. Q. E. A.

PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem AB, CD, inter se sunt ut bases EFGH, KLMN.

1. Sit



1. Sit vt circ. EFGH ad circ. KLMN ita
 conus FB ad aliud solidum O, quod sit $<$ co-
 no LD; & sit $LD - O = P$. Supposita
 praeparatione & argumentatione praecedentis
 propositionis, erunt segmenta coni, quae
 in ipsis QL, LR, RM &c. $<$ P. Ergo pyr.
 KQLRMSNTD $>$ O. Fiat in circ. EFGH
 simile polygonum EVFXGYHZ. Iam quia
 pyr. EVFXGYHZB: pyr. KQLRMSNTD $=^{\omega}$ ω . 6. 12.
 polyg. EVFXGYHZ: pol. KQLRMSNT $=^{\alpha}$ α . sch. 2. 12.
 circ. EFGH: circ. KLMN $=^{\beta}$ conus FB: O; β . hyp.
 atque pyr. EVFXGYHZB $<$ γ cono FB: erit γ . 9. ax. 1.
 & pyr. KQLRMSNTD $<$ δ solido O; quod δ . 14. 5.
 repugnat ostensis. Non ergo est vt basis A
 ad basin C ita conus A ad solidum cono C
 minus.

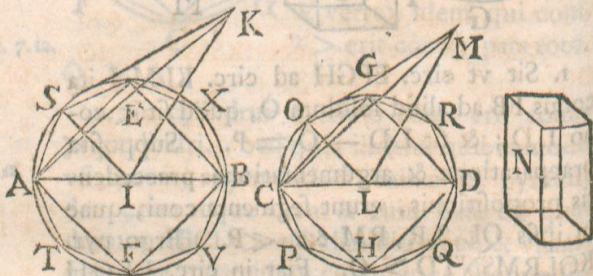
2. Si ponas $O >$ cono LD: erit vt O ad
 conum FB, ita conus LD ad solidum δ minus
 cono FB, & ergo vt circ. KLMN ad circ. EF-
 GH, ita conus LD ad solidum minus cono
 FB. Q. F. N.^e Itaque coni aequae alti, & ϵ . part. 1.
 proinde cylindri ζ aequae alti, sunt inter se vt ζ . 10. 12.
 bases. Q. E. D.

* Schol.

* *Schol.* 1. Coni ergo, item cylindri, quorum
tam bases quam altitudines aequales sunt, ipsi
inter se aequales sunt.

* 2. Quare conorum, item cylindrorum, aequa-
les bases habentium, qui maiorem axin habet,
maior est.

PROP. XII. THEOR.



*Similes coni & cylindri inter se sunt in tri-
plicata ratione diametrorum basium AB, CD.*

Sint bases circuli AEBF, CGDH, & axes
IK, LM; & fit conus AEBFK ad solidum quod-
dam N in triplicata ratione ipsius AB ad CD.

1. Pone $N < \text{cono CGDHM}$. Factis iis-
dem quae in praecedentibus, eodem modo
ostendemus esse aliquam pyramidem GOC-
HQDRM in cono CDM, quae maior sit quam
N. Fiat in circ. I simile polygonum ASEX-
BVFT, quod sit basis pyramidis verticem cum
cono ABK communem habentis. Sint in his
duabus pyramidibus triangula CMO, AKS
quaedam ex iis quae pyramides continent, &
iunctae sint LO, IS. Iam quia conus ABK ~
cono CDM, est $AB:CD = IK:LM$, ac er-

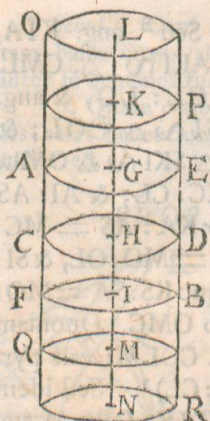
go $AI:IK = CL:LM$. Sed ⁹ ang. KIA, 9. II. def. II.
 MLC recti sunt: ergo Δ . AKI $\sim$ Δ . CML. ^{1. 6. 6.}
 Similiter, quia $AI:IS = CL:LO$, & ang.
 $AIS^* = CLO$, erit Δ . ASI $\sim$ Δ . COL; & ^{11. 2. sch.}
 iterum similiter patet esse, Δ SKI $\sim$ Δ OML. ^{33. 6.}
 Hinc quia ¹ KA: AI = MC: CL, & AI: AS ^{11. 1. def. 6.}
 $= CL:CO$: erit ex aequo KA: AS = MC:
 CO. Similiter quia KS: SI = MO: OL, & SI:
 SA = OL: OC: erit ex aequo KS: SA = MO:
 OC. Ergo Δ ASK $\sim$ Δ OMC. Quoniam ^{11. sch. 5. 6.}
 igitur pyr. ASIK $\sim$ pyr. COLM: erit pyr. ^{11. 9. def. II.}
 ASIK: pyr. COLM = ^{5. 8. 12.} $(AI:CL)^3$. Sed idem
 de reliquis pyramidibus A TIK, CPLM &c.
 ostendemus. Ergo ⁹ pyr. ASEXBVFT: pyr. ^{9. 12. 5.}
 GOCPHQDRM = $(AI:CL)^3 = \pi$ (AB: ^{11. 1. sch.}
 CD)³ = ^{22. 5.} e con. AEBFK: N. Quare pyr. GO- ^{9. hyp.}
 CPHQDRM < ⁹ solido N; contra modo ^{9. 14. 5.}
 dicta.

2. Si ponas $N >$ cono CGDHM: quia N:
 AEBFK = ⁹ $(CD:AB)^3$, & ⁹ N ad AEBFK
 vti conus; CGDHM ad solidum cono AEBFK
 minus: erit conus CGDHM ad solidum quod-
 dam cono AEBFK minus in triplicata ratione
 ipsius CD ad AD. Q. F. N. ^{7. part. 1.} Ergo tam co- ^{10. 12.}
 ni, quam ⁹ cylindri, sunt in triplicata ratione
 diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

*Si cylindrus AB plano CD secetur, oppositis
 planis AE, FB parallelo, erit ut cylindrus AD
 ad cylindrum DF ita axis GH ad axem HI.*

Pro-



Producatur vtrinque axis GI, & fiant ipsi GH aequales quotcunque GK, KL, & ipsi HI aequales quotuis IM, MN. Per puncta L, K, M, N ducantur plana ipsis AE, CD parallela, in quibus fiant circa centra L, K, M, N circuli ipsis AE, FB aequales; & inter hos circulos intelligentur cylindri OP, PA, R BQ, QR constituti. Quia

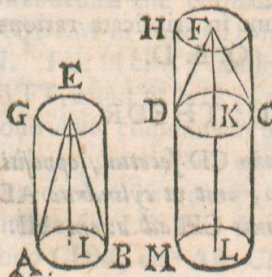
φ. 1. sch.
11. 12.

cylindri OP, PA, AD inter se^φ, aequales sunt; quotuplex est axis LH ipsius GH, totuplex est cyl. OD ipsius AD. Similiter, quotuplex est axis HN ipsius HI, totuplex est cyl. CR cylindri DF. Praeterea si axis LH $> = <$ HN: erit $\propto$ & cyl. OD $> = <$ cyl. CR. Ergo cyl. AD: cyl. DF $= \psi$ ax. GH: ax. HI. Q. E. D.

κ. 2. sch.
11. 12.

ψ. 4. def. 5.

PROP. XIV. THEOR.



Aequalibus basibus AB, CD insistentes coni ABE, CDF aut cylindri BG, CH inter se sunt ut altitudines EI, FK.

Producatur axis FK, ut fiat $KL = EI$, & circa axem KL in basi

bas. CD fit cyl. CM, qui erit $\equiv^{\omega}$ cyl. BG. ω . 1. sch.
 Ergo cyl. BG : cyl. CH $\equiv$ cyl. CM : cyl. CH. 11. 12.
 $\equiv^{\alpha}$ KL : FK $\equiv$ EI : FK. Quare & conus α . 13. 12.
 ABE : con. CDF $\equiv$ EI : FK. β . 15. 5. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

Aequalium cono-
rum ABC, DEF aut
cylindrorum AG,
DH bases AB, DE
sunt altitudinibus
CI, FK reciproce
proportionales. Item
quorum conorum aut
cylindrorum bases
AB, DE altitudi-
bus CI, FK recti-
proce proportionales
sunt, illi inter se sunt aequales.

Cas. 1. Si altitudines aequales sunt: patet in vtraque hypothesi etiam bases aequales esse, & constat ergo propositio.

Cas. 2. Sit $CI > FK$. Fiat $LI = FK$, & per L secetur cylindrus AG plano MN basibus parallelo.

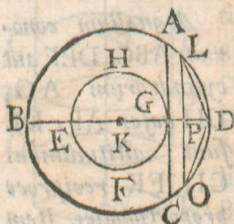
Hyp. 1. Et quia cyl. AG $\equiv$ DH: erit cyl. AN : cyl. AG $\equiv$ cyl. AN : cyl. DH $\equiv^{\gamma}$ bas. γ . 11. 12.
 AB : DE. Sed cyl. AN : cyl. AG $\equiv^{\delta}$ LI : δ . 13. 12. &
 CI = FK : CI. Ergo AB : DE $\equiv$ FK : CI. 18. 5.
 Q. E. D.

Hyp. 2. Sit bas. AB : bas. DE $\equiv$ alt. FK : alt. CI. Est autem bas. AB : bas. DE $\equiv$ cyl. AN :
 Aa AN

AN: cyl. DH, & FK: CI = LI: CI = cyl.
 6. 9. 5. AN: cyl. AG. Ergo cyl. DH = cyl. AG.
 Q. E. D.

Similiter autem & in conis.

PROP. XVI. PROBL.



Duobus circulis ABCD, EFGH circa idem centrum K consistentibus, in maiori ABCD polygonum aequalium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum EFGH non tangat.

2. 30. 3. Duc diametrum BEGD, & per G ipsi perpendiculararem AGC. Biseca semicirculum BAD, ac eius semissem, atque ita perge donec relinquatur circumferentia LD minor ipsa AD. Ab L in BD duc perpendiculararem LPO. Iunge LD, DO, quae aequales erunt.
 7. 1. 10.
 9. 3. 3. & 4. 1.
 4. cor. 16. 3.
 11. 1. 4.
 Iam quia AC circulum EFGH tangit, LO vero ipsi AC parallela est extra hunc circulum: LO eum non tanger; multoque minus rectae LD, DO eundem tangent. Si ergo ipsi LD aequales deinceps in circulo ABC aptauerimus: fiet polygonum aequalium & parium laterum (quia circumf. LD est pars aliquota semicirculi), circulum EFGH non tangens.
 Q. E. F.

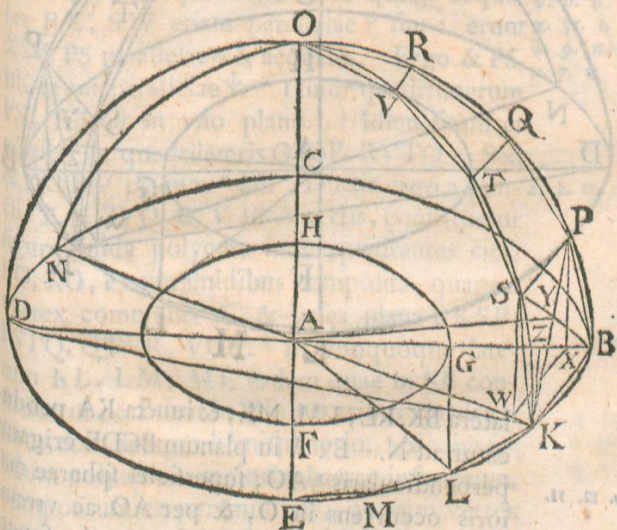
* Coroll.

Ergo recta KG < KP.

PROP.

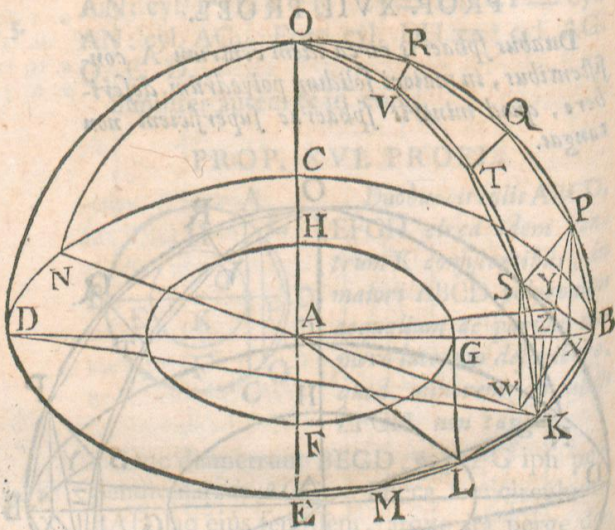
PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphaeris circa idem centrum A consistentibus, in maiori solidum polyedrum describere, quod minoris sphaerae superficiem non tangat.



Secentur sphaerae plano aliquo per centrum.
 Quia $\wedge$ semicirculi sphaeram generantis planum productum in superficie sphaerae circum efficit maximum, siue qui diametrum sphaerae habet: sectiones erunt circuli maximi. Sint illi BCDE, FGHF, & eorum diametri ad rectos angulos ducantur BD, CE. In maiori circulo BCDE polygonum aequalium & parium laterum μ describatur, non tangens μ . 16. 12.
 minorem FGH. Sint in quadrante BE ea
 A a 2 latera

μ . 14. def. 11.
 & sequ.
 & 15. 3.

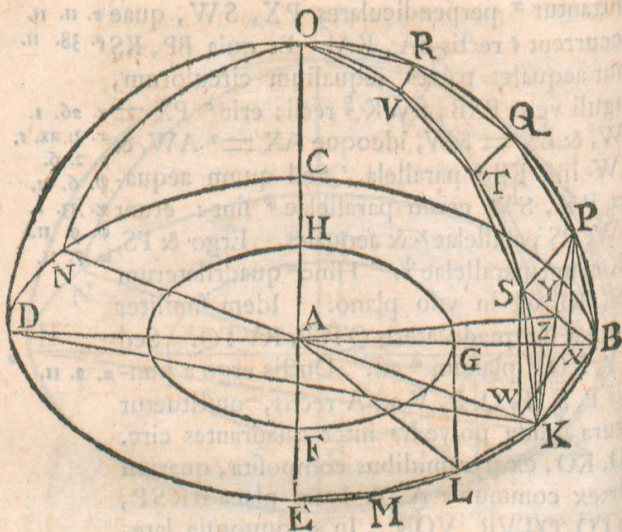


v. 12. 11.

latera BK, KL, LM, ME, & iuncta KA producatur ad N. Ex A in planum BCDE erigatur perpendicularis AO, superficiei sphaerae maioris occurrens in O, & per AO ac vtramque BD, KN ducantur plana, quae in superficiei sphaerae efficient maximos circulos, quorum semisses sint DOB, NOK. Quia AO ipsis BD, KN ad rectos est: erunt OB, OK quadrantes circulorum, & aequales; quia circuli aequales diametros BD, KN habent. Quot ergo latera polygoni sunt in quadrante BE, tot aptari possunt illis aequalia in quadrante BO, quae sint BP, PQ, QR, RO, & in quadrante KO, quae sint KS, ST, TV, VO. Iungantur SP, TQ, VR. Ex P, S in planum BCDE demit-

mittantur π perpendiculares PX, SW, quae τ . 11. 11.
 occurrent ϵ rectis BA, KA. Et quia BP, KS ϵ . 38. 11.
 sunt aequales partes aequalium circularum,
 anguli vero PXB, SWK ϵ recti: erit σ PX = σ . 26. 1.
 SW, & BX = KW, ideoque AX = τ AW, & τ . 3. ax. 1.
 XW ipsi KB ν parallela. Sed quum aequa- ν . 2. 6.
 les PX, SW etiam parallelae ϕ sint: erunt ϕ . 6. 11.
 XW, PS parallelae χ & aequales. Ergo & PS, χ . 33. 1.
 BK erunt parallelae ψ . Hinc ω quadrilaterum ψ . 9. 11.
 PS, KB est in vno plano. Idem similiter ω . 7. 11.
 constat de quadrilateris QTSP, RVTQ. Sed
 & Δ ROV planum α est. Ductis ergo a pun- α . 2. 11.
 ctis P, S, T, Q, R, V ad A rectis, constituetur
 figura solida polyedra inter quadrantes circ.
 BO, KO, ex pyramidibus composita, quarum
 vertex communis A, & bases plana BKSP,
 PSTQ, QTVR, VOR. In vnoquoque late-
 rum KL, LM, ME eadem quae in KB con-
 struantur, & etiam in reliquis tribus quadran-
 tibus, & in reliquo hemisphaerio. Sic fiet so-
 lidum polyedrum maiori sphaerae inscriptum,
 compositum ex pyramidibus, quarum vertex
 communis A. Dico huius solidi superficiem
 non tangere superficiem minoris sphaerae.

Ducatur enim in planum PSKB ex A per-
 pendicularis AY, & KY, BY iungantur. Et
 quoniam ob ang. AYB, AYK rectos ϵ , BYq +
 AYq = β ABq = AKq = KYq + AYq: β . 47. 1.
 erit BY = KY. Similiter patet esse SY =
 PY = BY. Ergo PSKB est quadrilaterum in
 circulo γ centro Y internallo YB descripto. γ . 15. def. 1.
 Et quia BK $>$ δ XW, ideoque $>$ PS; BK δ . 2. sch. 4. &
 & 14. 5.



2. 28. 3.
 3. 33. 6.
 4. 12. 2.

2. 1. 6.
 1. cor. 8. 6.

1. cor. 16. 12.

vero $= KS = PB$: erit circumferentia huius
 circuli, quam recta BK subtendit, quadrante
 maior, hinc ang. KYB recto $\angle$ maior, & KBq
 $> 2 BYq$. Ducatur a K ad BD perpendicularis
 KZ, & iungatur DK. Quoniam $AB <$
 $AB + 2 AZ$: erit $DB < 2 DZ$. Hinc quia
 $DB : 2 DZ = \angle DB \times BZ : 2 DZ \times BZ =$
 $BKq : 2 KZq$: erit $BKq < 2 KZq$, & ergo KZq
 $> BYq$. Sed $KZq + AZq = AKq = BYq$
 $+ AYq$. Ergo $AZ < AY$, & a potiori
 $AG < AY$. Ergo polyedri superficies non
 tangit minoris sphaerae superficiem. Q. E. F.

Aliter.

Et brevius ostendemus esse $AG < AY$, ex-
 citato ex G in AB perpendiculo GL, & iuncta
 AL.

AL. Nam bisecta circ. BE, & huius semisse, & sic porro, relinquetur tandem circumferentia minor ea, quam recta ipsi GL aequalis in circulo BCE subtendit. Sit illa BK. Ergo recta $BK < GL$. Sed ut antea patet esse $BK > BY$. Ergo $GL > BY$. Sed $GLq + AGq = ALq = ABq = BYq + AYq$. Quare $GA < AY$. Q. E. D.

Corollar.

Si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum praedicto polyedro in sphaera BCDEO simile: habebunt haec duo solida polyedra tripliatam rationem eius quam diametri sphaerarum habent. Diuisis enim solidis in pyramides numero aequales & eiusdem ordinis: erunt hae pyramides similes. Ergo pyr. BPSKA erit ad pyramidem eiusdem ordinis in altera sphaera in triplicata ratione [^] eius λ. cor. 8. 12. quam latus homologum ad homologum habet, id est, quam habet semidiameter sphaerae A ad semidiametrum alterius sphaerae. Idem de quibusvis duabus pyramidibus in vtraque sphaera eiusdem ordinis intelligendum est. Sed ^u ut vna pyramis u. 12. 5. in sphaera A ad vnam in altera, ita solidum polyedrum in sphaera A ad solidum polyedrum in altera sphaera. Ergo solida polyedra sunt in triplicata ratione semidiametrorum, vel diametrorum. Q. E. D.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphaerae ABC, DEF inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum BC, EF.

1. Si enim non: fit sph. ABC ad sphaeram GHK ipsa DEF minorem in triplicata ratione BC ad EF. In sph. DEF describatur solidum v. 17. 12.

Aa 4 polye-



polyedrum, quod non tangat minorem GHK, circa commune cum illa centrum constitutam, & in sph. ABC huic polyedro simile describitur, quod erit $\propto$ ad polyedrum in sph. DEF in triplicata ratione BC ad FE, ideoque in eadem ratione in qua sph. ABC ad sph. GHK, Igitur sph. GHK $>$ polyedro in sphaera DEF descripto, pars toto. Q. E. A.

2. Si ponas, sph. ABC ad sph. LMN ipsa DEF maiorem esse in triplicata ratione BC ad EF; erit sph. LMN: sph. ABC $= (EF: BC)^3$. Sed sph. LMN ad sph. ABC vt sph. DEF ad sphaeram $\propto$ ipsa ABC minorem. Ergo sph. DEF erit ad sphaeram ipsa ABC minorem in triplicata ratione diametri EF ad diametrum BC. Q. F. N^r.

* Corollar.

Hinc vt sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum solidum in illa ad polyedrum in hac simile & similiter descriptum,