

www.e-rara.ch

Elementorum Euclidis libri XV ad graeci contextus ...

Euclides

Lipsiae, 1743

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5146

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3798>

Liber XIII.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

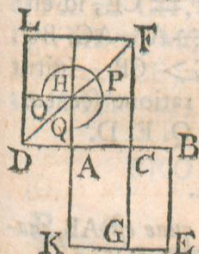
Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

LIBER XIII.

PROP. I. THEOR.



Si recta linea AB extrema
ac media ratione secta fuerit:
maior portio AC assumens di-
midiam AD totius AB quin-
tuplum potest eius, quod a di-
midia AD totius sit, quadrati.

Describantur ex AB, DC
quadrata AE, DF. Deinde

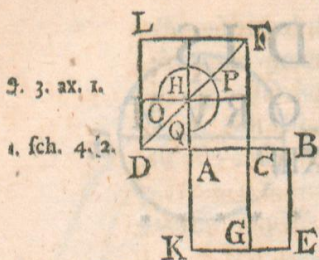
In DF describatur figura, & producat^r FC
 ad G. Est ergo $CE = AB \times BC = {}^{\alpha} ACq$ α . 3. def. &
 $= {}^{\gamma} HF$. Iam quia $AK = AB = {}^{\beta} AD =$ 17. 6.
 γ 2. AH, & $AK : AH = {}^{\delta} AG : CH$: erit AG β . hyp.
 $= {}^{\epsilon} CH = {}^{\epsilon} CH + HL$, ideoque $AE = {}^{\zeta}$ γ . 1. cor. 4. 2.
 gnomoni OPQ. Sed $AE = ABq = {}^{\eta} ADq$ δ . 1. 6.
 $= {}^{\theta} DH$. Ergo gn. OPQ $= {}^{\theta} DH$, & pro- ϵ . 43. 1.
 inde ζDF , id est $CDq = {}^{\iota} DH$ vel ιADq . ζ . 2. 3x. 1.
 Q. E. D. η . sch. 4. 1.

PROP. II. THEOR.

Si recta linea CD partis sui ipsius AD quin- Fig. prop.
tuplum possit, atque duplum AB dictae partis praec.
AD extrema ac media ratione secetur: maior
portio est pars reliqua CA eius quae a principio
rectae lineae CD.

A a s

De-



2. 3. 2X. 1.

1. sch. 4. 2.

κ. constr.

λ. 17. 6.

μ. lem. seq.

ν. 3. def. 6.

Descriptis enim iisdem, quae antea, quia $DF = CDq = 5 ADq = 5 DH$: erit g gnomon $OPQ = 4 DH$. Sed $4 DH = 4 ADq = ABq = AE$. Ergo gn. $OPQ = AE$. Deinde quia ut in praec. ostenditur $AG = CH$

+ HL : erit g quadratum $HF = CE$, id est *

$ACq = AB \times BC$. Quare $^{\wedge} \div AB, AC, BC$;

& quia $^{\kappa} AB > AC$, erit $AC > CB$. Igitur

si recta AB extrema ac media ratione secatur:

$^{\nu}$ maior eius portio est CA . Q. E. D.

L E M M A.

At vero duplam ipsius AD , quae est AB , maiorem esse quam AC , sic demonstrabitur.

Si negas: sit $AC = 2 AD$. Erit ergo ACq

$= 4 ADq$, & $ACq + ADq = 5 ADq =$

CDq , pars tota. Q. E. A. Si ponas $2 AD$

$< AC$, similiter ostendemus, totum esse parte

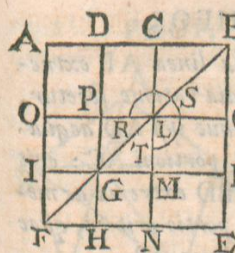
sua minus. Q. E. A. Ergo $2 AD > AC$.

Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea AB extrema ac media ratione secta fuerit: portio minor CB assumens dimidiam CD maioris portionis AC quintuplum potest eius, quod a dimidia CD maioris portionis fit, quadrati.

Describatur enim ex AB quadratum AE , & figura compleatur. Ergo, quia $AC = 2 CD$:



CD: erit $ON = ACq$
 $= 4 CDq = 4 PM.$

Et quia $AB \times BC = 4 PM.$ $\phi. 3. def. 6.$

Q. ACq, & $AB \times BC =$
 CE : erit $CE = 4 PM.$

Rurfus quoniam $AD =$
 DC , & proinde $IG =$

πGM : erit $PM = \frac{1}{2} HI,$ $\pi. 34. 1.$

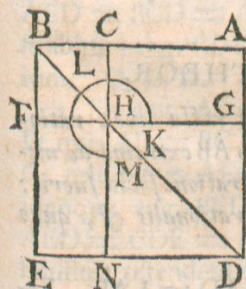
& $PG = GH$, vel $\pi QK = KE.$ Quare $\sigma. 1. cor. 4. 2.$

Pgr. $ME = MQ = \tau LD$, ideoque gnomon $\sigma. 36. 1.$

$RST = \nu CE = 4 PM$, ac ob id ν totum DK $\tau. 43. 1.$

id est $DBq = 5 CDq.$ Q. E. D. $\nu. 2. 2x. 1.$

PROP. IV. THEOR.



Si recta linea AB extrema ac media ratione secta fuerit: totius AB & minoris portionis BC utraque simul quadrata tripla sunt quadrati eius, quod a maiori fit portione AC.

Descripto enim ex AB quadrato AE, & completa figura: erit ut antea $AF = \phi GN.$ $\phi. 3. def. 6.$

Sed $AF = \pi CE$, ideoque $AF + CE$ id est $\pi. 43. 1.$

gnom. $KLM + CF = 2 AF = 2 GN.$ Ergo addito communi GN , erit $AE + CF = 3 GN$, id est, $ABq + BCq = 3 ACq.$ Q. E. D.

PROP.

PROP. V. THEOR.

D A C B



Si recta linea AB extrema ac media ratione secetur, adjiciaturque ipsi AD aequalis maiori portioni AC: erit tota linea BD extrema ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quae a principio posita est, recta linea AB.

ψ. 3. def. 6. Descripto enim ex AB quadrato AE, & completa figura: erit $CE = \psi CG$. Sed $CE = GE$, & $CG = \omega GD$. Ergo $GD = GE$, & hinc $HB = AE$, id est $BD \times DA = ABq$. Quare $\omega BD : AB = AB : DA$, & $AB > AD$, quia $BD > AB$. Hinc patet ψQ . E. D.

PROP. VI. THEOR.

D A C B

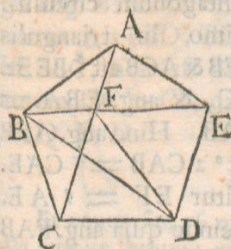


Si recta linea rationalis AB extrema ac media ratione secta fuerit: utraque portio AC, CB irrationalis est, quae apotome appellatur.

β. 1. 13. Producat CA, & sit $AD = \frac{1}{2} AB$. Ergo $CDq = \beta ADq$. Hinc, quia AD est β, erit γ CDq β, ac ergo ipsa CD β. Sed δ CD non ≤ AD. Ergo CD, DA erunt β ε, ideoque AC apotome ε erit. Deinde quia AB $\times BC = \zeta ACq : ACq$ ad β AB applicatum latitudinem faciet BC, quae proinde ε erit apotome prima. Q. E. D.

PROP.

PROP. VII. THEOR.



Si pentagoni aequilateri ABCDE tres anguli, siue deinceps siue non deinceps, inter se fuerint aequales: aequiangulum erit pentagonum.

1. Sint anguli deinceps

A, B, C aequales. Iungantur AC, BE, FD. In

Δ is BAE, ABC erit $\angle$ BE = AC, & ang. AEB = ACB, & ang. ABE = BAC. Ergo BF = AF, & FE = FC. Sed praeterea ED = DC. Ergo $\angle$ ang. FED = FCD, ideoque ang. AED = BCD = A = B. Similiter demonstrabitur, ang. CDE = B = cuique reliquorum. Q. E. D.

2. Sit ang. A = C = D. Iungatur BD.

Et quia AB = BC & AE = CD, & ang. A = C: erit $\angle$ ang. AEB = CDB, & BE = BD, ideoque ang. BED = BDE. Hinc totus AED = CDE = A = C. Idem de ang. B similiter ostendetur. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

Si pentagoni aequilateri & aequianguli ABCDE duos, qui deinceps sunt, angulos A, B subtendunt rectae lineae BE, AC: extrema ac media ratione se mutuo secant; & maiores ipsarum portiones EF, FC pentagoni lateri AE sunt aequales.

Descri-

v. 14. 4.

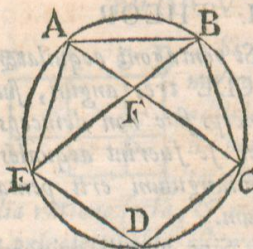
ξ. 4. 1.

α. 32. 1.

π. 33. 6.

ε. 6. 1.

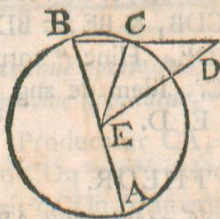
σ. 8. 1.



Describatur $\circ$ circa pentagonum circulus. Primo in triangulis AEB & ACB est $\angle$ BE = AC, & ang. EBA = CAB. Hinc ang. AFE = 2 CAB = π CAE. Igitur EF = $\frac{1}{2}$ AE.

Deinde quia ang. FAB = FBA = σ AEB, & ang. B communis Δ is AFB, AEB: erunt Δ a ista aequiangula, & erit EB: BA = BA: BF, id est ob AB = AE = EF, EB: EF = EF: FB. Est vero EF > FB, quia EB > EF. Ergo BE in F secatur extrema ac media ratione, & maior portio EF aequalis est lateri pentagoni AE. Idem similiter de recta AC ostendemus. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



Si latera hexagoni DC & decagoni CB in eodem circulo ACB descriptorum componantur: erit tota recta BD extrema ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus CD.

π. 33. 6.

v. 32. 1.

φ. 5. 1.

x. cor. 15. 4.

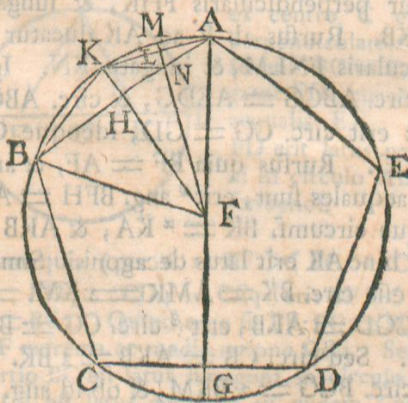
Sit centrum circuli E. Quia BC est latus decagoni aequilateri: erit circumf. ACB = 5 BC, ergo AC = 4 CB. Hinc & ang. AEC = 4 BEC. Sed ang. AEC = σ BGE + CBE = 2 BCE; &, ob DC = CE, est ang. BCE = 2

$\equiv 2 \text{ CDE}$: quare $\text{AEC} \equiv 4 \text{ CDE}$. Est ergo ang. $\text{BDE} \equiv \text{BEC}$. Sed ang. B est communis $\triangle$ is BED , BEC . Quare $\angle \text{BD} : \text{BE} \equiv \angle \text{4. 6.}$ $\text{BE} : \text{BC}$, hoc est $\text{BD} : \text{DC} \equiv \text{DC} : \text{CB}$. Est autem $\text{DC} > \text{CB}$, quia $\text{BD} > \text{DC}$. Ergo patet Q. E. D.

* Schol.

Et conuersim, si qua recta BD extrema ac media ratione fecerur: erit minor portio BC latus decagoni in eo circulo, in quo maior CD est latus hexagoni. Nam, eadem descripta figura, quia ang. $\text{AEC} \equiv 2 \text{ BCE}$, & ang. $\text{BCE} \equiv 2 \text{ CDE} \equiv 2 \text{ BEC}$ (per 6. 6): erit circumf. $\text{AC} \equiv 4 \text{ BC}$, ideoque recta BC latus decagoni.

PROP. X. THEOR.



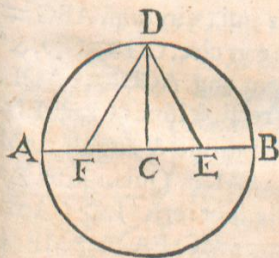
Si in circulo ABCDE pentagonum aequilaterum describatur: latus pentagoni AB potest & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.

Suma.

$BN = {}^9 BFq$. Rursus quia ang. ad L recti 9. 17. 6.
 sunt, & $AL = LK$: erit* ang. $LAN = LKN$. ^{1. 3. 3.}
 Sed quia recta $AK \lambda = KB$, est ang. $LAN =$ ^{2. 4. 1.}
 $\frac{2}{3} KBA$. Ergo ang. $KBA = AKN$. Quare
 in $\triangle$ is aequiangulis ANK , ABK erit $BA: AK$
 $= {}^n KA: AN$, & hinc $AB \times AN = {}^9 AKq$.
 Ergo $ABq = {}^n AB \times BN + AB \times AN =$ ^{11. 2. 2.}
 $BFq + AKq$. Est autem BF latus* hexagoni,
 & AK decagoni. Q. E. D. ^{v. cor. 15. 4}

* Schol.

Hic praxin faciliorem trademus problematis
 11. 4: In dato circulo pentagonum aequilaterum &
 aequiangulum describere.

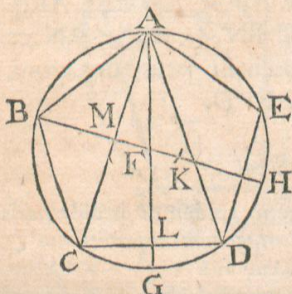


Super diametro AB
 ex centro C erigatur
 perpendicularis CD. Bi-
 secetur BC in E, & iun-
 gatur ED, cui capiatur
 aequalis EF. Iuncta
 FD erit latus pentago-
 ni in circulo ABD de-
 scribendi.

Nam quia (per 6. 2) $BF \times FC + CEq =$
 $EFq = EDq = CDq + CEq$: erit $BF \times FC =$
 $CDq = BCq$. Quum ergo sit $BF:BC = BC:CF$:
 erit BF extrema ac media ratione secta. Sed ma-
 ior portio BC est latus hexagoni in circulo ABD.
 Ergo CF est latus decagoni in eodem (per sch.
 praec.); & hinc $DF = \sqrt{(DCq + CFq)}$ latus
 pentagoni. Q. E. F.

PROP. XI. THEOR.

Si in circulo ABCDE, rationalem diametrum habente, pentagonum aequilaterum describatur: pentagoni latus AB est linea irrationalis, quae minor appellatur.



Sumatur enim circuli centrum F, & ducantur diametri AG, BH, & iungatur AC, & capiatur $FK = \frac{1}{2} AF$, quae erit ρ , quia AF ρ . Sed & BF est rationalis.

§. 16. 10.

o. 27. 3.

π. 32. 1.

g. 3. 3.

σ. 4. 6.

τ. sch. 4. 5.

ε. 15. 5.

υ. 22. 6.

φ. 8. 13.

χ. 1. 13.

ψ. sch. 12. 10.

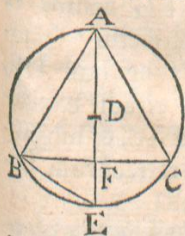
ω. 9. 10.

lis. Ergo $\frac{1}{2} BK$ est ρ . Et quia circumf. $ABG = AEG$, & $ABC = AED$: erit circ. $CG = GD$, & $\circ$ ang. $CAG = GAD$, item ang. $ACL = \circ ADL$. Ergo π anguli ad L sunt recti, & hinc $\circ CL = LD$, & $CD = 2 CL$. Eadem ratione & anguli ad M recti sunt, & AC est $= 2 CM$. Quia igitur $\Delta^a ALC$, AFM aequiangula sunt: erit $\circ LC : CA = MF : FA$, & τ $2 LC : CA = 2 MF : FA$, $= \sigma$ $MF : \frac{1}{2} FA$; ideoque $2 LC : \frac{1}{2} CA = MF : \frac{1}{4} FA$, id est $CD : CM = MF : FK$. Hinc componendo $DC + CM : CM = MK : KF$, & ν $(DC + CM)q : CMq = MKq : KFq$. Iam si AC extrema ac media ratione secetur, erit maior eius portio $\phi = CD$; ideoque erit $\propto (DC + CM)q = 5 CMq$. Hinc & $MKq = 5 KFq$; ideoque ψ MKq est ρ , & MK ρ . Et quoniam $BF = 4 FK$: erit $BK = 5 FK$, & $BKq = 25 FKq$. Hinc $5 MKq = BKq$, & ob id ω BK non

non $\leq$ MK. Vtraque tamen p existente, erunt BK, KM p E. Quare MB est apotome & ipsi congruens MK. Dico & MB esse α . 74. 10. apotomen quartam. Sit enim $\sqrt{BKq - KMq} = N$. Et quia KF $\leq$ FB, erit KB $\leq^{\beta}$ 16. 10. FB $\leq$ BH rationali expositae. Deinde quia BKq : KMq = 5 : 1, & conuertendo BKq : Nq = 5 : 4 : erit ω N non $\leq$ BK. Ergo γ MB γ . 4. def. tert. 10. erit apotome quarta. Hinc, quum sit ABq δ . cor. 8. 6. = δ MB $\times$ BH, erit ϵ AB α quae vocatur & 31. 3. minor. Q. E. D. ϵ . 95. 10.

* Cor. Diameter circuli AG ex angulo A pentagoni regularis ducta & arcum CD a latere opposito subtensum, & latus ipsum oppositum CD ad angulos rectos bifecat.

PROP. XII. THEOR.



Si in circulo ABC triangulum aequilaterum ABC describatur: trianguli latus AB potentia triplum est eius DA quae ex circuli centro D.

Nam, producta AD in E, quia circumf. BEC est tertia pars circuli, & BE = $\frac{2}{3}$ EC: erit BE sexta pars $\frac{2}{3}$. 3. ax. 1. circuli, ideoque recta BE latus hexagoni = $\frac{1}{3}$ cor. 15. 4. DA. Et quia ABq + BEq = $\frac{1}{3}$ AEq = 4 $\frac{2}{3}$. 31. 3. DAq: erit ABq = $\frac{2}{3}$ DAq. Q. E. D.

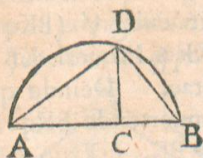
* Schol.

1. AEq : ABq = 4 : 3.
2. ABq : AFq = 4 : 3. Nam ϵ AEq : ABq = ϵ . cor. 8. 6. & 22. 6.
3. DF = FE. Nam Δ . EBD aequilaterum est, α . 4. 1. & ADF ad BC perpendicularis α . Ergo λ DF = FE. λ . cor. 3. 3.
4. Hinc AF = 3 FD.

B b 2

PROP.

PROP. XIII. PROBL.



Pyramidem † constituere, & sphaera comprehendere data; atque etiam demonstrare, quod sphaerae diameter AB est potentia sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

¶ 9. 6.

¶ 2. 4.

Secetur AB in C^o ita, ut $AC = 2 CB$. Super AB describatur semicirculus ADB, & ex C ad AB ducatur perpendicularis CD, & iungatur AD. Fiat circulus EFG centro H intervallo CD, & in eo describatur^o triangulum aequilaterum EFG. Iungantur HE, HF, HG. Ex H plano huius circuli excutetur ad rectos HK, quae fiat $= AC$, & iungantur KE, KF, KG. EFGK erit tetraedrum consideratum.

§. 3. def. 11.

o. 4. 1.

π. lemma sequens.

q. constr.

σ. 12. 13.

1. Etenim quia ang. KHE est $\frac{1}{2}$ rectus, ideoque $= ACD$, & $KH = AC$, $HE = CD$: erit^o $KE = AD$. Similiter $KF = AD = KG$. Et quoniam $AB = 3 BC$, & $AB:BC = \pi ADq$: DCq : erit $ADq = 3 DCq = \frac{1}{3} HEq = EFq$. Hinc $EF = AD$; & ergo $FG = GE = EF = AD = KE = KF = KG$. Sunt ergo Δ a EFG, EKG, FKG, EKF aequilatera & aequalia. Ergo EFGK est^π tetraedrum.

2. Pro-

† Vel potius tetraedrum; quod & in sequentibus intellige.

2. Producatur KH in L vt sit HL = CB.

Quia ν AC : CD = CD : CB : erit KH : HE ν . cor. 8. 6.
 = EH : HL. Ergo semicirculus super KL
 descriptus ϕ transibit per E, &, manente KL, ϕ . sch. 13. 6.
 conuersus transibit etiam per G & F, quod eo-
 dem modo ostendetur. Ergo $\propto$ sphaera data, $\propto$. 14. def. 11.
 cuius diameter est AB = KL, comprehendet
 tetraedrum EFGK. Q. E. F.

3. Quia AB : BC = ϵ 3 : 1: erit conuertendo
 AB : AC = 3 : 2. Est vero BA : AD ν =
 AD : AC, & hinc AB : AC = ψ ABq : ADq. ψ . 2. cor.
 Ergo ABq = $\frac{3}{2}$ ADq = $\frac{3}{2}$ KEq. Q. E. D. 20. 6.

L E M M A.

Demonstrandum autem est, esse AB : BC =
ADq : DCq.

Nam quia BA : AD = ν AD : AC : erit BA
 $\times$ AC = ADq. Et quia AC : CD = ν CD :
 BC : erit AC $\times$ CB = CDq. Hinc AB : BC
 = ω AB $\times$ AC : AC $\times$ BC = ADq : CDq. ω . 1. 6.
 Q. E. D.

* *Coroll.* Diameter sphaerae KL est sesquial-
 tera altitudinis KH tetraedri inscripti.

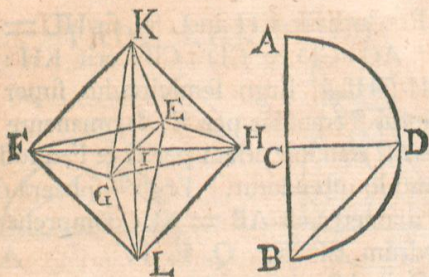
* *Schol.* Latus tetraedri FG potentia est sesqui-
 alteram altitudinis tetraedri HK. Nam FGq :
 HKq = ADq : ACq = ABq : ADq = 3 : 2.

PROP. XIV. PROBL.

Octaedrum constituere, & eadem sphaera
comprehendere, qua & pyramidem; atque de-
monstrare, sphaerae diametrum AB potentia
duplam esse lateris ipsius octaedri.

Bb 3

Data



Data diameter AB bisecetur in C, & describatur super AB semicirculus, & ex C in AB ducatur perpendicularis CD, & DB iungatur. Fiat quadratum EFGH, cuius latus = BD. Ex puncto I intersectionis diametrorum EG, FH plano EFGH ad rectos ducatur KIL, & fiat $KI = IL = IE$, & iungantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH.

α. 9. 4.

β. 17. 1.

γ. 3. def. II.

1. Nam quia $\angle EI = IH$ & ang. EIH rectus: erit $\angle EHq = 2 \angle Elq$. Et quum $KI = IE$, ac ang. KIE rectus γ : erit & $\angle KEq = 2 \angle Elq$. Hinc $EH = KE$. Similiter $KH = HE$. Ergo $\triangle EKH$ est aequilaterum. Eodem modo ostendamus, reliqua triangula, quorum bases sunt EF, FG, GH, HE & vertices K, L, esse aequilatera. Et patet omnia haec $\triangle$ a inter se aequalia δ esse. Ergo KEFGHL est δ octaedrum.

δ. 2. sch. 8. 1.

ε. 27. def. II.

Q. E. F.

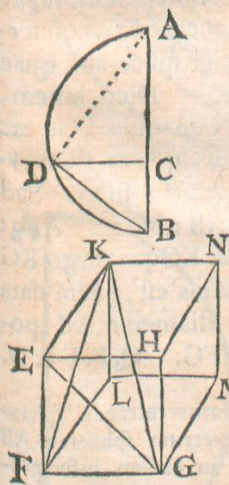
2. 3. Quia $KI = IE = IL$: semicirculus super KL descriptus transibit per E. Et manente KL conuersus hic semicirculus transibit etiam per F, G, H. Ergo sphaera diametri KL comprehendet hoc octaedrum. Sed & data sphaera. Nam quia $KE = EL$, & ang. in semi-

femicirculo KEL $\angle$ rectus est, erit $KLq = \beta \zeta$ 31. 3.
 $2 KEq$. Est vero $AB = 2 BC$, & $AB:BC$ η cor. 8. &
 $= ABq:BDq$. Ergo $ABq = 2 BDq = 2$ 20. 6.
 $KEq = KLq$. Hinc diametro datae AB ae-
 qualis est ipsa KL , ideoque octaedrum sphae-
 ra data comprehenditur; & AB potentia du-
 pla est lateris octaedri KE . Q. E. F. & D.

* *Coroll.* Octaedrum constat ex duabus pyrami-
 dibus aequalibus, basin quadratam habentibus, &
 altitudinem aequalem semidiametro sphaerae cir-
 cumscriptae.

PROP. XV. PROBL.

*Cubum constituere, &
 eadem sphaera comprehen-
 dere, qua & priores; at-
 que demonstrare, sphaerae
 diametrum AB lateris po-
 tentia triplam esse.*



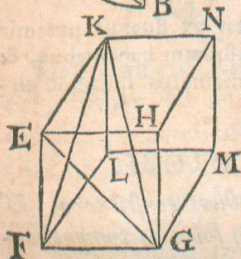
Ex AB auferatur pars
 tertia BC , &, super AB
 descripto semicirculo, du-
 catur ad AB perpendicularis
 CD , & iungatur DB .

Fiat quadratum $EFGH$
 habens latus $= DB$. Ex
 punctis E, F, G, H plano
 $EFGH$ ad rectos 9 exci- 9. 12. 11.
 tentur EK, FL, GM, HN , quarum quaeque fiat
 $= EF$. Iungantur KL, LM, MN, KN .

1. Quidem ex constructione satis patet so-
 lidum genitum esse 'cubum. Q. E. F. 11. 25. def. 11.

κ. 3. def. 11.
λ. sch. 13. 6.
μ. constr.

ν. 4. 11.



2. 3. Iungantur EG, KF, KG. Et quia ang. KEG rectus * est : semicirculus super KG transibit ^λ per E. Rursus quia ^κ anguli GFE, GFL recti sunt, ideoque GF plano EL recta ^ν est, & hinc * ang. GFK rectus : alius semicirculus super KG transibit ^λ per F. Idem de reliquis punctis H, N, M, L ostendetur. Quare semicirculus super KG, manente KG, conuersus faciet sphaeram, quae

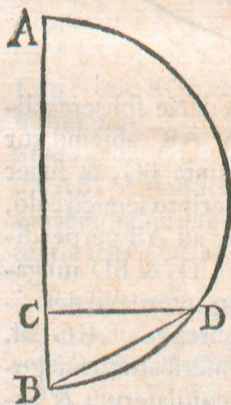
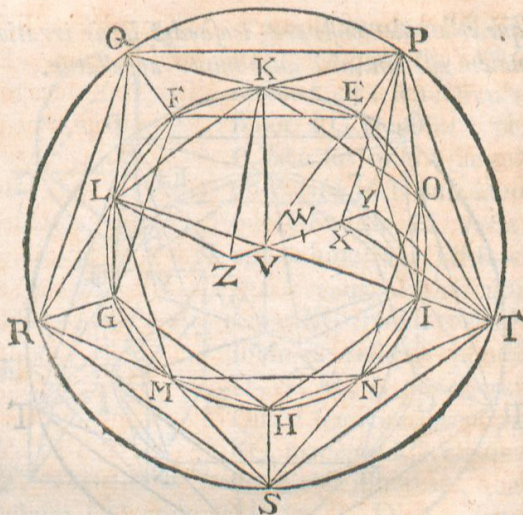
cubum EM comprehendit. Dico autem, diametrum KG = AB. Nam quia EGq = ^ξ 2 EFq = 2 EKq : & KGq ^ξ = EGq + EKq : erit KGq = 3 EKq = ^κ 3 BDq. Sed quum sit AB = 3 BC, & AB : BC = ° ABq : BDq : erit ABq = 3 BDq = KGq. Ergo KG = AB. Itaque cubus factus est, quem data sphaera comprehendit, & diameter AB potentia tripla est lateris eius FG. Q.E.F & D.

π. 13. 13.

* Schol. Quia AD erat ^π latus tetraedri sphaerae datae inscripti : patet diametrum sphaerae AB posse latera tetraedri & cubi in eadem inscriptorum.

PROP. XVI. PROBL.

Icosaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere, qua & praedictas figuras ; atque

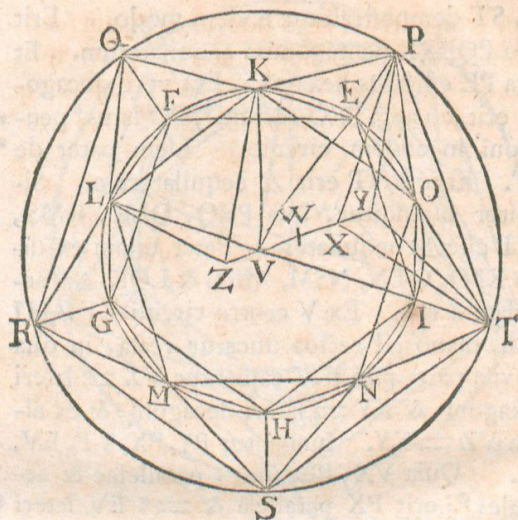


g. 6. II.
c. 33. I.

HN, NI, IO, OE, EK, item
KL, LM, MN, NO, OK.
Erit ergo KLMNO pen-
tagonum aequilaterum &
aequiangulum, & EO de-
cagoni latus. A punctis
E, F, G, H, I ipsi circuli
plano ad rectos erigantur
EP, FQ, GR, HS, IT, semi-
diametro VK fingillatim
aequales, & iungantur PQ,
QR, RS, ST, TP, PK, KQ,
QL, LR, RM, MS, SN,
NT, TO, OP. Iam quia EP, IT parallelae
sunt, erit $PT = EI$, & hinc PT erit latus
pentagoni aequilateri in circulo QRSTP ipsi
EFGHI aequali. Idem de reliquis PQ, QR,
RS,

RS, ST demonstrabitur eodem modo. Erit ergo PQRST pentagonum aequilaterum. Et quia PE est latus hexagoni, EO vero decagoni: erit, ob ang. PEO rectum τ , PO latus ν pentagoni in eodem circulo. Idem patet de OT. Ergo POT erit Δ aequilaterum. Similiter ostenditur, ipsa PKQ, QLR, RMS, SNT esse Δ a aequilatera. Patet etiam ex dictis KPO, OTN, NSM, MRL & LQK Δ a aequilatera esse. Ex V centro circuli EFGHI ipsius plano ad rectos ducatur recta, in qua ex vna parte puncti V capiantur VX = lateri hexagoni, & XY = lateri decagoni, & ex altera VZ = XY. Iungantur PY, PX, YT, EV, KZ. Quia VX, PE, sunt $\parallel$ & aequales ϕ : erit PX parallela & = σ EV lateri ϕ . constr. hexagoni, & ang. PXV rectus κ , hinc & PXY κ . sch. 29. 1. rectus. Quare, quum XY sit decagoni latus, erit PY = lateri pentagoni = PT. Idem iunctis TX, VI patet de recta YT. Ergo PYT est Δ . aequilaterum. Similiter aequilatera sunt Δ a reliqua, quorum vertex est Y, & bases sunt TS, SR, RQ, QP. Rursus quia ϕ KZq = KVq + VZq: erit KZ = lateri pentagoni = KL. Eodem modo, iunctis LV, LZ ostendetur LZ = KL. Ergo Δ . LZK aequilaterum est. Idem ostendetur de singulis Δ is, quorum bases sunt LM, MN, NO, OK & vertex communis est Z. Constitutum ergo est solidum viginti triangulis aequilateris contentum, quorum aequalitas etiam patet. Q. E. F.

2. Quia



ψ. 9. 13.
φ. contr.

ω. sch. 13. 6.

2. Quia VX , XY sunt latera hexagoni & decagoni: erit ψ $YV : VX = VX : XY$. Hinc ϕ $YV : VK = KV : VZ$. Ergo super YZ descriptus semicirculus ω transibit per K . Similiter quia $ZX = YV$, & $PX = VX$, erit $ZX : XP = PX : XY$, & hinc, ob ang. ad X rectos, semicirculus super ZY transibit etiam per P . Quare quum idem similiter de reliquis verticibus angulorum icosaedri ostendi possit; constat, semicirculum circa ZY manentem rotatum transiturum esse per vertices omnium angulorum

rum icosaedri, & ergo hoc icosaedrum comprehensum iri sphaera diametri ZY. Et quoniam, bisecta VX in W, $WYq^{\alpha} = 5 WXq$; α . 3. & 9. 13. ZY vero $= 2 WY$, ac $VX = 2 WX$: erit β . 15. 5. $ZYq = 5 VXq$. Est autem $AB = 5 BC$, & $ABq : BDq = 7 AB : BC$. Ergo quia ABq^{γ} cor. 8. & $= 5 BDq = 5 VXq = ZYq$: sphaera diametri ZY icosaedrum comprehendens erit datae sphaerae aequalis. Q. E. F.

3. Denique quia diameter data AB est ρ , & $ABq = 5 BDq$: erit δ & BD ideoque tota δ . 6. def. 10. diameter circuli EFGHI rationalis. Hinc quum latus pentagoni KL sit ϵ minor; & eadem KL sit quoque latus icosaedri: patet latus icosaedri esse irrationalem quae minor vocatur. Q. E. D.

Corollar.

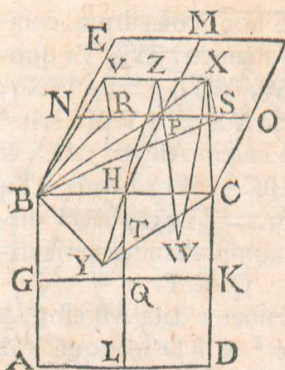
Sphaerae diameter potest quintuplum eius quae ex centro circuli quinque icosaedri latera ambientis. Et diameter sphaerae icosaedro circumscriptae composita est ex latere hexagoni & duplo latere decagoni, quae in eodem circulo describuntur.

PROP. XVII. PROBL.

Dodecaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere qua & praedictas figuras; atque etiam demonstrare, dodecaedri latus esse irrationalem, quae apotome appellatur.

1. Exponentur praedicti cubi ξ duo plana ζ . 15. 13. ABCD, BCFE, quae sibi inuicem recta sunt, & eorum singula latera bisecentur, & iungantur

7. 30. 6.



tur GK, HL, HM, NO. Rectae NP, PO, HQ secantur extremaⁿ & media ratione in R, S, T punctis, in quibus ad plana cubi & ad exteriores eius partes excitentur perpendiculares RV, SX, TY, quae fiant aequales ipsis RP, PS,

QT. Iungantur VB, BY, YC, CX, VX, quae terminabunt pentagonum dodecaedri. Nam, iuncta RB, quiaⁿ $PNq + NRq = 3 RPq$, & $BN = PN$, ac $RP = RV$: est $BRq = BNq + NRq = 3 RVq$, ideoque $BVq = BRq + RVq = 4 RVq$. Hinc $BV = 2 RV$. Sed quia $PN = PO$, ac ob id $RP = PS$: est $VX = RS = 2 PR = 2 RV$. Ergo $BV = VX$. Similiter BY, YC, & CX ipsis BV, VX aequales ostendentur. Sunt autem hae quinque rectae in vno plano. Nam ipsi RV vel SX ducatur parallela PZ ad exteriores cubi partes, & iungantur ZH, HY. Et quia^a $HQ: QT = QT: TH$, & $HQ = HP$, ac $TY = QT = PZ$; est $HP: PZ = YT: TH$. Sed HP, YT, eidem plano BD ad rectos insistentes, sunt^b parallelae. Ergo ZHY est^c vna recta, & proinde^d in vno plano. Pentagonum^e ergo est BYCXV, & aequilaterum. Dico etiam aequiangulum esse. Iungantur enim BX, BS. Quoniam NP secta est in R extrema ac media ratione,

3. 4. 13.

6. 47. 1.

5. 7. 14.

10. 33. 1.

11. 3. def. 6.

12. 6. 11.

13. 32. 6.

14. 1. 11.

15. 2. & 7. 11.

tionem, & $SP = PR$: erit $\pi NSq + SPq = 3 \pi$. 5. 13. &
 PNq . Hinc $NSq + SXq = 3 NBq$, & $NSq +$ 4. 13.
 $SXq + BNq = 4 NBq$, id est $SBq + SXq =$
 $BXq = 4 NBq$. Ergo $BX = 2 NB = BC$.
 Quare in Δ is BVX , BYC erit $\angle$ ang. $BVX =$ g. 8. 1.
 BYC . Similiter ostendetur ang. $VXC = BYC$.
 Ergo pentagonum $BYCXV$ est σ aequiangulum. σ . 7. 13.
 Si igitur ita ad vnumquodque duodecim la-
 terum cubi eadem construantur, quae hic ad
 latus BC : figura solida constituetur, duode-
 cim pentagonis aequilateris & aequiangulis
 & aequalibus contenta. Q. E. F.

2. Producat ZP intra cubum. Occurrer
 ergo diametro cubi, & ambae se bifecabunt τ , τ . 39. 11.
 quod fiat in W . Est ergo W centrum ν sphae- ν . 15. 13.
 rae cubum comprehendens, & dupla $PW =$
 ϕ lateri cubi, ideoque $PW = PN$. Et quia ϕ . 34. 1.
 $PZ = PS$, erit $ZW = NS$. Iam quum prae-
 terea $ZX = PS$, & $NSq + SPq = 3 PNq$: erit
 $3 PNq = ZWq + ZXq = XWq$. Sed se- ν . 47. 1.
 midiameter sphaerae cubum comprehendens
 potest etiam ν triplum dimidii lateris cubi PN .
 Ergo XW est semidiametro sphaerae cubo cir-
 cumscriptae aequalis. Quare quia W est cen-
 trum: erit X in superficie sphaerae. Simili-
 ter vertex cuiuslibet reliquorum angulorum
 dodecaedri in superficie sphaerae esse demon-
 stratur. Ergo dodecaedrum sphaera com-
 prehensum est data. Q. E. F.

3. Quoniam $\lambda NP : PR = PR : RN$, ideo- λ . 3. def. 6
 que $\propto NO : RS = RS : 2 RN = RS : RN + SO$; $\propto$. 15. 5.
 NO autem $> RS$, ideoque $RS > NR + SO$:
 erit λ rectae NO extrema ac media ratione se-
 ctae

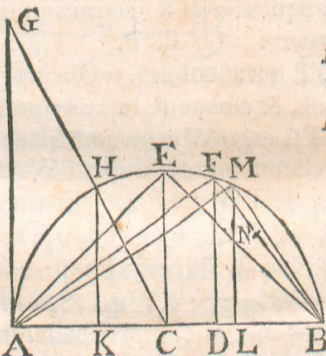
ψ. 6. 13. ctæ maior portio ipsa $RS = VX$. Et quia sphaerae diameter, quæ ψ potest triplum ipsius NO , est ρ : erit & $NO \rho$; ergo ψVX apotome. Q. E. D.

1. Coroll. Ergo latere cubi extrema ac media ratione secto, eius portio maior est dodecaedri latus.

* 2. Coroll. Liquet etiam, rectam subtendentem angulum pentagoni in dodecaedro esse latus cubi in eadem sphaera inscripti.

PROP. XVIII. PROBL.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.



ω. 9. 6.

α. cor. 19. 5.

β. cor. 8. &

20. 6.

γ. 13. 13.

δ. 15. 13.

ε. 14. 13.

A K C D L B semicirculus AEB, & in AB perpendiculares ducantur CE, DF, & AF, FB iungantur. Et quia $AB = 3 BD$: est $\alpha AB = \frac{3}{2} AD$. Hinc quia $AB: AD = \beta ABq: AFq$: est $ABq = \frac{3}{2} AFq$. Ergo AF est γ latus tetraedri.

2. Quia $ABq: BFq = \beta AB: BD = 3:1$: BF est latus cubi δ .

3. Iunctis AE, EB, est $ABq: BEq = \beta AB: BC = 2:1$. Ergo BE est latus octaedri ϵ .

4. In AB ducatur perpendicularis AG = AB. Iuncta GC, a puncto H ducatur in AB per-

perpendicularis HK. Iam quia $HK:KC = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7}$.
 $GA:AC = 2:1$: erit $HKq = 4 KCq$, ideo-
 que $5 KCq = CHq = CBq$. Et quoniam
 $AB = 2 BC$, & $AD = 2 DB$: erit $DB^{\eta} = 2 \frac{4}{5} \frac{5}{7}$.
 CD , ideoque $CB = 3 CD$, & $CBq = 9 CDq$.
 Ergo $KC > CD$. Fac $CL = KC$, & in AB
 duc perpendicularem LM , iunge MB . Quia
 $CBq = 5 KCq$; est $^{\eta} ABq = 5 KLq$. Ergo $^{\eta} \frac{9}{15} \frac{5}{7}$.
 KL est latus hexagoni in circulo quinque $^{\eta} \text{cor. 16. 13.}$
 icosaedri latera ambientis, ideoque $AK =$
 $LB =$ lateri decagoni in eodem circulo. Sed
 $ML = \frac{2}{3} HK = 2 KC = KL =$ lateri hexa- $\frac{2}{3} \frac{14}{15} \frac{3}{7}$.
 goni. Ergo MB est $^{\lambda}$ latus pentagoni in eo- $^{\lambda} \frac{10}{15} \frac{13}{7}$.
 dem circulo, ideoque latus $^{\mu}$ icosaedri. $^{\mu} \frac{16}{15} \frac{13}{7}$.

5. Secetur BF extrema ac media ratione:
 erit maior eius portio BN latus dodecaedri. $^{\nu} \text{I. cor. 17. 13.}$

6. Ex his liquet, latera tetraedri, octaedri
 & cubi esse p $\in$ diametro AB sphaerae. Nam
 quarum partium 6 est ABq , earum 4 est AFq ,
 trium BEq , & duarum BFq . Ergo $\frac{2}{3} AFq = \frac{2}{3} \frac{22}{25} \frac{5}{7}$.
 $\frac{4}{3} BEq = 2 BFq$, & $BEq = \frac{2}{3} BFq$. Icosa-
 edri vero & dodecaedri latera nec inter se nec
 ad praedictarum figurarum latera sunt in ra-
 tionibus rationalibus: quia illius latus $^{\mu}$ est
 minor, huius apotome^o. $^{\circ} \frac{17}{15} \frac{13}{7}$.

7. Dico MB icosaedri latus maius esse latere
 dodecaedri BN . Nam $^{\beta} FBq:BDq = AB:$
 $BD = 3:1$. Sed $ADq = 4 BDq$. Ergo $^{\beta} \text{cor. 8. \& 20. 6.}$
 $AD > FB$, ideoque $AL > FB$. Iam AL se-
 cta est extrema ac media ratione $^{\pi}$, & maior $^{\pi} \frac{9}{15} \frac{13}{7}$.
 eius portio est KL ; hinc quia & FB extrema ac
 media ratione secta est, & eius maior portio

Cc

BN

6. 3. def. 6. BN est: erit $KL^s > BN$. Ergo $ML = KL$
 vel 7. 14. $> BN$, ideoque $MB > BN$. Q. E. F.
 8. 19. I.

Schol.

Dico praeter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram †, quae sub figuris aequilateris & aequiangulis, inter se aequalibus, contineatur.

6. II. def. II. Ex duobus enim angulis planis σ non constituitur angulus solidus. Ex tribus autem triangulis aequilateris & aequalibus constituitur angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icosaedri: ex sex autem pluribus nullus constituetur τ , quia sex anguli Δ aequilateri $=^v 4$ Rectis. Porro sub tribus quadratis continetur angulus cubi. Sub quatuor autem pluribusue τ nullus angulus solidus contineri potest. Sub tribus pentagonis aequilateris & aequiangulis ac aequalibus continetur angulus dodecaedri. Sub quatuor autem pluribusue nullus comprehendetur τ angulus solidus: quia eorum summa $\phi > 4$ rectis. Ob eandem rationem ex aliis figuris polygonis aequilateris & aequiangulis nullus solidus angulus constitui potest. Ergo nec fieri potest figura solida ex figuris planis aequilateris & aequiangulis praeter quinque dictas. Q. E. D.

† Talem autem intelligit figuram, cuius singuli solidi anguli sub aeque multis planis angulis continentur.