www.e-rara.ch

Fondamenti di geodesia

Pucci, Enrico

Milano, 1883-1887

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18744

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-77348

Volume secondo.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

L 7203
2
Rar 18744: 2

Geschenk
von Herrn Professor
Joh. Wild.

FONDAMENTI DI GEODESIA

FONDAMENTI

DI

GEODESIA

DI

ENRICO PUCCI

Professore nella R.ª Università di Roma

VOLUME SECONDO

CON 28 FIGURE INTERCALATE NEL TESTO.

Bibliothek des eidg. Polytechnikums

NAPOLI MILANO PISA

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA

1887.

PROPRIETÀ LETTERARIA.

Milano, 1887. — Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL SECONDO VOLUME.

CAPITOLO VII. — (*Continuazione*). *Teoria della combinazione delle osservazioni.*

3.ª Parte: Compensazione delle osservazioni.

Della compensazione. — Condizioni. — Correzioni. — Metodo generale per la compensazione delle osservazioni dirette . . . . *Pag.* 1
Riduzioni delle condizioni alla forma lineare. — Errori residuali di osservazione . . . . . » 5
Correlativi. — Equazioni correlate. — Equazioni normali correlanti . » 7
Errore medio dell'unità di peso. — Errore medio sistematico . . » 9
Errore medio e peso di una funzione delle osservazioni compensate » 12
Della compensazione delle costanti fisiche (*determinazioni indirette*). — Metodo diretto . . . . . » 17
Errore medio dell'unità di peso . . . . . » 21
Metodo indiretto di Bessel per la compensazione delle costanti fisiche » 22
Errore medio e peso di una funzione delle costanti fisiche compensate » 27
Dell'equivalenza assoluta delle osservazioni, e dei sistemi fittizii equivalenti a un sistema di equazioni generate effettive . . . . . » 28
Applicazione della teoria della equivalenza alla ricerca del peso di una funzione compensata . . . . . » 32
Della equivalenza parziale . . . . . » 33
Della equivalenza parziale rispetto a due funzioni compensate. — Ellisse di equivalenza . . . . . » 37
Compensazione delle costanti fisiche per mezzo della teoria dell'equivalenza . . . . . » 41
Applicazione della teoria dell'equivalenza alla ricerca dell'errore medio e del peso di una funzione di costanti fisiche compensate . » 45

4.ª Parte: Compensazione delle reti trigonometriche.

Delle condizioni geodetiche. — Loro numero complessivo e loro classificazione. — Numero delle condizioni azimutali, poligonali e lineari . . . . . *Pag.* 48
Compensazione (provvisoria) delle stazioni . . . . . » 51

Errore medio dell'unità di peso di ogni singola stazione . . . . *Pag.* 58
Formazione e riduzione delle condizioni . . . . . » 60
Compensazione di una rete geodetica per direzioni . . . . . » 67
Errore medio dell'unità di peso di una rete geodetica . . . . . » 73
Errore medio e peso di una funzione compensata . . . . . » 75
Compensazione per parti delle reti molto estese. — Metodo di approssimazione successiva (o metodo di *Gauss*) . . . . . » 78
Compensazione di una rete geodetica per angoli . . . . . » 80
Precisione della determinazione dei singoli punti delle reti compensate. — Teoria delle ellissi degli errori. — Media ellisse. — Ellisse probabile . . . . . » 83
Generalizzazione della teoria delle ellissi degli errori . . . . . » 94
Compensazione delle reti altimetriche . . . . . » 96
Errore medio unitario. — Teoremi relativi . . . . . » 97
Errore del trasporto di una lunghezza attraverso una catena geodetica semplice. — Teoremi relativi . . . . . » 100
Degli sviluppi delle basi geodetiche . . . . . » 104

CAPITOLO VIII. — *Coordinate geografiche, distanze ed azimut sull' ellissoide.*

Delle coordinate geografiche . . . . . *Pag.* 113
Trasporto della latitudine lungo una geodetica data (metedo di Legendre) . . . . . » 114
Influenze che gli errori negli elementi di calcolo hanno nel trasporto della latitudine . . . . . » 119
Trasporto della longitudine lungo una geodetica data (metodo di Legendre) . . . . . » 121
Formule per la longitudine relative alla sfera che ha per raggio la gran normale corrispondente alla latitudine di partenza . . . . » 124
Influenze che gli errori negli elementi di calcolo hanno nel trasporto della longitudine . . . . . » 126
Dell'azimut reciproco. — Trasporto dell'azimut lungo una geodetica data (metodo di Legendre) . . . . . » 127
Formule per l'azimut relative alla sfera che ha per raggio la gran normale corrispondente alla latitudine di partenza . . . . . » 128
Influenze che gli errori negli elementi di calcolo hanno nel trasporto dell'azimut . . . . . » 129
Trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo una geodetica data (metodo di Andrae) . . . . . » 130
Altro metodo di trasportare le coordinate geografiche e l'azimut lungo una geodetica data . . . . . » 138
Della latitudine ridotta. — Corrispondenze fra la latitudine ridotta e la latitudine geografica . . . . . » 144
Triangolo sferico ausiliario Besseliano. — Relazione fra l'arco di una geodetica e la sua immagine sferica. — Metodo generale (di Bessel) per trasportare la latitudine e l'azimut lungo una geodetica data » 145

Metodo generale (di Baeyer) per trasportare la longitudine lungo una geodetica data . . . . . *Pag.* 154
Formule di Bessel per il trasporto della longitudine lungo una geodetica data . . . . . » 159
Sviluppi in serie relativi ai precedenti metodi di calcolo . . . . . » 166
Metodo indiretto per calcolare la distanza e gli azimut reciproci di due punti, dati per mezzo delle loro coordinate geografiche . . . . » 168
Altri metodi indiretti più generali di calcolare le distanze e gli azimut di punti dati . . . . . » 173
Teorema di Dalby . . . . . » 177
Espressione della differenza fra un azimut astronomico e l'azimut geodetico corrispondente, rigorosa fino a termini in e^4, ed estensione del teorema di Dalby al caso di azimut geodetici reciproci » 182
Calcolo della convergenza dei meridiani . . . . . » 188
Metodo diretto di calcolare la distanza e gli azimut di due punti, dati per mezzo delle loro coordinate geografiche . . . . . » 189

CAPITOLO IX. — *Della rappresentazione di una superficie sopra un'altra.*

Corrispondenze ed immagini . . . . . *Pag.* 193
Superficie simili e superficie applicabili . . . . . » 196
Formule fondamentali delle rappresentazioni conformi. — Complesso di conformità. — Teoremi relativi ai doppii sistemi isotermi di linee » 199
Del modulo di trasformazione nelle rappresentazioni conformi . . » 203
Curvatura geodetica dell'immagine conforme di una linea qualunque della superficie rappresentata. — Teorema di Lagrange generalizzato pel caso di una superficie rappresentante qualunque . . . » 205
Rettificazioni e quadrature per mezzo di una rappresentazione conforme » 208
Formule generali delle rappresentazioni equivalenti . . . . . » 209
Del modulo di trasformazione in una rappresentazione qualunque. — Sua espressione in funzione dell'azimut. — Ricerca delle direzioni lungo le quali è massimo o minimo . . . . . » 213
Corrispondenza azimutale. — Linee principali di una rappresentazione. — Loro equazione differenziale . . . . . » 215
Espressione dei moduli di trasformazione principali. — Teoremi che se ne deducono . . . . . » 217
Ellisse indicatrice delle deformazioni lineari. — Costruzione degli azimut che si corrispondono. — Altro teorema sui moduli di trasformazione principali . . . . . » 220
Corrispondenza fra gli angoli. — Iperbole indicatrice. — Teoremi relativi . . . . . » 223
Espressione della deformazione degli angoli . . . . . » 225

CAPITOLO X. — *Riduzione dei problemi di Geodesia Ellissoidica alla sfera.*

Della latitudine isoterma . . . . . *Pag.* 227
Della sfera rappresentatrice più conveniente per la risoluzione dei problemi di geodesia ellissoidica . . . . . » 228
Ricerca delle costanti della rappresentazione sferica più conveniente, in funzione della latitudine normale . . . . . » 231

Deformazione della curvatura geodetica nella rappresentazione sferica Gaussiana . . . . . *Pag.* 234
Deviazione dell'immagine sferica di un arco di geodetica ellissoidica dal cerchio massimo corrispondente . . . . . » 236
Differenza fra la lunghezza di un arco di geodetica ellissoidica e l'arco di cerchio massimo corrispondente alla sua immagine sferica . . » 244
Risoluzione dei problemi di geodesia ellissoidica per mezzo della sfera rappresentatrice . . . . . » 245
Dimostrazione di alcune formole di trigonometria sferica, relative alla risoluzione dei triangoli che hanno un lato piccolo . . . . . » 249
Sviluppi più convenienti pel passaggio dalle latitudini sferoidiche alle sferiche, e dalle sferiche alle sferoidiche . . . . . » 251
Formule più convenienti pel calcolo del modulo di trasformazione . » 256

CAPITOLO XI. — *Ricerca delle costanti dell'ellissoide terrestre.*

Dell'ellissoide di riferimento e della sua determinazione in generale *Pag.* 260
Riduzione delle misure geodetiche lineari (basi) ed angolari all'ellissoide . . . . . » 265
Variazioni elementari delle coordinate geografiche e dell'azimut di arrivo in corrispondenza a date variazioni degli elementi di calcolo. — Espressioni delle componenti dell'attrazione locale nel caso di distanze geodetiche limitate . . . . . » 268
Dei centri di emanazione principali e secondarii . . . . . » 272
Espressioni rigorose delle variazioni elementari delle coordinate geografiche e dell'azimut di arrivo in corrispondenza ad una variazione dell'azimut di partenza . . . . . » 274
Del coefficiente fondamentale delle circonferenze geodetiche . . . » 280
Espressioni rigorose delle variazioni elementari delle coordinate geografiche e dell'azimut di arrivo in corrispondenza ad uno spostamento in latitudine del punto di partenza . . . . . » 286
Espressioni rigorose delle variazioni elementari delle coordinate geografiche e dell'azimut di arrivo in corrispondenza ad una variazione nell'asse maggior e nell'eccentricità dell'ellissoide di riferimento . . . . . » 290
Riassunto delle formule rigorose precedenti ed espressioni generali delle componenti dell'attrazione locale . . . . . » 297
Pesi e combinazione dei due valori della componente η provenienti l'uno dalle longitudini e l'altro dall'azimut. — Variazioni elementari delle coordinate geografiche e dell'azimut di arrivo in corrispondenza ad un accrescimento e ad una rotazione elementare dell'arco di geodetica . . . . . » 300
Del calcolo delle costanti dell'ellissoide di riferimento definitivo, delle attrazioni locali e delle precisioni dei risultati. — Discussione. — Risultati sperimentali . . . . . » 302
Calcolo delle coordinate geografiche definitive. — Precisione delle triangolazioni, dedotta dal confronto fra le longitudini e gli azimut astronomici . . . . . » 309

Del secondo metodo di determinare le costanti dell'ellissoide terrestre. — Procedimenti per calcolare la distanza fra due paralleli per mezzo di una triangolazione interposta, orientata con un solo azimut, o per mezzo della geodetica equivalente. — Precisione del risultati . . . . . *Pag.* 312
Metodo di Struve per calcolare la distanza fra due paralleli per mezzo dell'arco di una geodetica congiungente, orientato alle due estremità » 315
Metodo di Bessel per calcolare la distanza fra due paralleli per mezzo dell'arco di una geodetica congiungente, orientato alle due estremità » 317
Discussione comparativa dei metodi precedenti di calcolare le distanze fra i paralleli . . . . . » 322
Metodi di calcolare la lunghezza di un arco di parallelo per mezzo di una triangolazione orientata con un solo azimut, o della geodetica equivalente. — Precisione e discussione dei risultati . . . » 323
Metodo di calcolare la lunghezza di un arco di parallelo per mezzo di un arco di geodetica orientato alle due estremità . . . . . » 326
Espressioni fondamentali delle componenti dell'attrazione locale in funzione degli archi di meridiano e di parallelo geodeticamente misurati . . . . . » 332
Discussione delle equazioni generate definitive. — Calcolo delle costanti dell'ellissoide di riferimento . . . . . » 338
Condizione di indeformabilità di una rete geografica. — Trasformazione delle formule relative al primo metodo di calcolo, per renderle applicabili nel secondo metodo . . . . . » 341

CAPITOLO. XII. — *Del geoide.*

Coordinate astronomiche di una superficie qualunque. Equazioni differenziali delle geodetiche in coordinate astronomiche . . . . *Pag.* 343
Espressioni delle differenziali delle coordinate astronomiche in funzione dello spostamento elementare del punto della superficie e della direzione di questo spostamento . . . . . » 347
Relazioni fra le funzioni ausiliarie *M*, *N*, *P*, *W* e i raggi principali di curvatura della superficie pel caso di una geodetica . . . . » 349
Altra forma delle espressioni differenziali delle coordinate astronomiche in funzione dello spostamento del punto della superficie, e della direzione di questo spostamento . . . . . » 351
Espressioni delle coordinate cartesiane del geoide in funzione delle coordinate geografiche dell'ellissoide. Equazione del geoide in coordinate cartesiane . . . . . » 352
Relazione fra la variazione dell'altitudine ellissoidica in una direzione data e la componente dell'attrazione locale in questa direzione » 354
Corrispondenze fra le coordinate cartesiane e le coordinate astronomiche di un punto del geoide. — Espressioni delle differenziali delle coordinate astronomiche in funzione di queste coordinate, dell'azimut, e della differenziale dell'arco di curva . . . . . » 355
Integrazione delle equazioni delle geodetiche del geoide. — Espressioni degli errori che si commettono nelle coordinate astronomi-

che e nell'azimut eseguendo le integrazioni come se le geodetiche considerate appartenessero all'ellissoide di riferimento . . . . *Pag.* 357
Differenze in lunghezza ed orientamento fra un arco di geodetica geoidica e l'arco di geodetica ellissoidica corrispondente. — Riduzione delle basi geodetiche all'ellissoide . . . . . » 370
Espressione di un azimut astronomico geoidico in funzione delle coordinate astronomiche . . . . . » 372
Riduzione degli azimut astronomici osservati agli azimut geodetici ellissoidici corrispondenti . . . . . » 375
Dell'entità delle attrazioni locali e delle ondulazioni geoidiche continentali. — Risultati astronomico-geodetici. — L'onda misurata a Mosca. — Lavori del signor Pechmann. — Calcoli dell'arcidiacono Pratt. — Ipotesi di Airy e di Pratt sulla compensazione delle densità lungo ciascun raggio vettore. — Considerazioni di Faye sulla distribuzione del calore nell'interno della terra. — Conclusione . . . . . » 378
Sull'interpolazione delle componenti dell'attrazione locale in generale » 389
Rappresentazione grafica delle ondulazioni geoidiche per mezzo delle curve di eguale altitudine ellissoidica. — Metodo indiretto dei profili. — Metodo diretto. — Controlli . . . . . » 392
Rappresentazione analitica delle ondulazioni geoidiche per mezzo della espressione parabolica dell'altitudine ellissoidica in funzione delle coordinate geografiche . . . . . » 396
Rappresentazione analitica delle ondulazioni geoidiche per mezzo della doppia serie trigonometrica . . . . . » 398
Calcolo delle altitudini ellissoidiche fondamentali, per mezzo del confronto delle livellazioni trigonometriche colle geometriche corrispondenti . . . . . » 399

CAPITOLO VII.

(Continuazione.)

TEORIA DELLA COMBINAZIONE DELLE OSSERVAZIONI

3.ª PARTE. — *Compensazione delle osservazioni.*

49. Alle teorie sviluppate nella seconda parte di questo capitolo può essere data assai maggiore generalità enunciando il problema che esse risolvono, nel modo seguente, che comprende altresì il caso in cui si ha da considerare più di una funzione generatrice:*

Date le funzioni generatrici

$$F(x, y, z \ldots U, V \ldots) = 0$$
$$\varphi(x, y, z \ldots U, V \ldots) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

fra le costanti incognite $x, y, z \ldots$ *e le quantità variabili, ma coesistenti* $U, V, \ldots$ *osservabili, o, in parte, teoreticamente note, e dati i sistemi di valori* $U_1, V_1, \ldots$; $U_2, V_2 \ldots$; $U_3, V_3 \ldots$ *osservati ciascuno indipendentemente ed in circostanze diverse* (momenti fisici diversi) *dagli altri ed in numero più che sufficiente per la determinazione teoretica* (approssimativa) *delle incognite, trovare il più probabile sistema di correzioni da fare alle osservazioni, affinchè siano nulli i residui delle equazioni generate, dedotte dalle proposte funzioni generatrici.*

* Deve tenersi presente che il significato che qui si attribuisce all'espressione *funzione generatrice* è quello stesso stabilito nella seconda parte del capitolo, ed è quindi affatto diverso dal significato che le ha attribuito LAPLACE nella *Teoria analitica delle probabilità.*

Lo spirito del metodo che si presenta ovvio per la risoluzione di un tale problema non differisce da quello seguito precedentemente (vedi 2.ª parte), che consiste, in ultima analisi, nel ridurre la ricerca dei valori delle incognite x, y, z, ..., per la quale si ha un numero sovrabbondante di osservazioni, ad un caso di indeterminazione, introducendo come nuove incognite gli errori di osservazione, e nel togliere quindi l'indeterminazione applicando i principii del calcolo delle probabilità. Ma lo svolgimento di questo concetto può esser condotto in guisa da abbracciare ancora una nuova classe molto estesa di quistioni, che si presentano quando fra le quantità osservabili esistono delle relazioni analitiche rigorose di forma nota, che le fanno dipendere mutuamente ciascuna dalle altre. I valori ottenuti dall'osservazione non soddisfanno, in generale, a tali relazioni, e quindi debbono esser considerati come più o meno contraddittorii fra loro; in conseguenza sorge spontanea l'idea di togliere ogni contraddizione correggendo le osservazioni, e siccome i sistemi di correzioni compatibili colle relazioni rigorose suddette sono in numero infinito, ma ciascuno ha una probabilità diversa di coincidere cogli errori effettivamente fatti nelle misure, ci troviamo condotti alla ricerca di quello fra tali sistemi per cui la ora detta probabilità è massima. A una siffatta ricerca si dà il nome di *compensazione,* e le osservazioni corrette nel modo più probabile sono dette *osservazioni compensate.*

Quantunque in tutte le scienze esperimentali si presentino numerose quistioni, alle quali può essere applicato il calcolo di compensazione, la teoria che imprendiamo ad esporre è considerata come esclusivamente geodetica, a causa forse della sua origine e delle estese applicazioni che se ne fanno in Geodesia; perciò, fino ad oggi, essa è stata svolta completamente soltanto per quelle classi di quantità osservabili per cui può essere accettata come legge di distribuzione degli errori la funzione esponenziale

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

che si accorda assai bene, come abbiamo veduto, con tutte le osservazioni geodetiche sia di angoli sia di lunghezze, e che noi prenderemo ora a base delle ulteriori ricerche.

50. Sieno V_1, V_2, V_3, ... V_ν delle quantità fisiche in numero di ν, che debbono essere esperimentalmente determinate subordi-

natamente alle n relazioni rigorose seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(V_1, V_2, V_3, \ldots V_\nu) = 0 \\ &\varphi_2(V_1, V_2, V_3, \ldots V_\nu) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(V_1, V_2, V_3, \ldots V_\nu) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (105)$$

A queste daremo il nome di *equazioni di condizione,* o soltanto di *condizioni,* ed evidentemente è da supporre che il loro numero n sia minore del numero ν delle quantità V da misurare, giacchè, altrimenti, le (105) essendo rigorose e coesistenti, sarebbe possibile di determinare i veri valori dei V senza ricorrere all'esperienza, o, con questa, i veri errori delle osservazioni. Nel caso in cui le (105) contenessero delle costanti fisiche ignote non suscettibili di misura diretta, eliminando tante di esse quante è possibile fra le (105) medesime, o verrebbero tutte a sparire, o rimarrebbe una sola equazione di condizione che conterrebbe una o più incognite oltre le quantità direttamente osservabili, e, se queste fossero suscettibili di momenti fisici diversi, saremmo ricondotti al caso già studiato di un' unica funzione generatrice. Del resto si vedrà in seguito il modo di trattare tale quistione in tutta la sua generalità.

Sieno $O_1, O_2, O_3, \ldots O_\nu$ dei valori esperimentali osservati rispettivamente per le quantità $V_1, V_2, V_3, \ldots V_\nu$ coi pesi $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\nu$ e con le misure di precisione $h_1, h_2, h_3, \ldots h_\nu$; se si pone

$$V_1 = O_1 + v_1, \quad V_2 = O_2 + v_2, \quad V_3 = O_3 + v_3, \ldots V_\nu = O_\nu + v_\nu$$

le quantità $v_1, v_2, v_3, \ldots v_\nu$ rappresentano i veri errori di osservazione, legati fra loro dalle condizioni (105), le quali danno:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(O_1 + v_1, O_2 + v_2, O_3 + v_3, \ldots O_\nu + v_\nu) = 0 \\ &\varphi_2(O_1 + v_1, O_2 + v_2, O_3 + v_3, \ldots O_\nu + v_\nu) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(O_1 + v_1, O_2 + v_2, O_3 + v_3, \ldots O_\nu + v_\nu) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (106)$$

Il numero di queste condizioni è per ipotesi minore di quello delle quantità $v_1, v_2, \ldots v_\nu$, che ci sono ignote, perciò non è possibile di risalire ai veri valori di queste, ma se ne possono solo determinare, come è detto più sopra, i valori più probabili.

Ammettendo ora che

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

rappresenti la legge di distribuzione degli errori nella classe di osservazioni caratterizzato dalla misura di precisione h, la probabilità che un dato sistema di correzioni $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_\nu$ coincida col sistema dei veri errori di osservazione fatti nella misura delle quantità $V_1, V_2, V_3, \ldots V_\nu$ è data da:

$$P = \frac{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \ldots h_\nu}{(\sqrt{\pi})^\nu} e^{-[h h \delta \delta]} d x^\nu,$$

Sia H la misura di precisione corrispondente all'unità di peso: avremo, come è noto (Vol. I, pag. 367):

$$h_1 = H\sqrt{p_1}, \quad h_2 = H\sqrt{p_2}, \ldots, h_\nu = H\sqrt{p_\nu}$$

e, perciò, alla precedente espressione di P può esser data la forma

$$P = \frac{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \ldots h_\nu}{(\sqrt{\pi})^\nu} e^{-H^2 [p \delta \delta]} d x^\nu,$$

da cui si vede che il massimo valore di P si ha per

$$[p \delta \delta] = minimo,$$

i δ essendo subordinati alle condizioni (106), e che, in conseguenza, il sistema di correzioni che ha la massima probabilità di coincidere col sistema dei veri errori di osservazione è determinato dalle condizioni coesistenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(O_1 + \delta_1, O_2 + \delta_2, O_3 + \delta_3, \ldots O_\nu + \delta_\nu) = 0 \\
&\varphi_2(O_1 + \delta_1, O_2 + \delta_2, O_3 + \delta_3, \ldots O_\nu + \delta_\nu) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varphi_n(O_1 + \delta_1, O_2 + \delta_2, O_3 + \delta_3, \ldots O_\nu + \delta_\nu) = 0 \\
&p_1 \delta_1 d\delta_1 + p_2 \delta_2 d\delta_2 + p_3 \delta_3 d\delta_3 + \ldots p_\nu \delta_\nu d\delta_\nu = 0
\end{aligned}\right\} \quad (107)$$

che sono $n + 1$ e contengono ν incognite delle quali $\nu - n$ vanno considerate come variabili indipendenti.

Se per mezzo delle prime n delle (107) differenziate rispetto alle variabili δ, si esprimono gli n differenziali $d\delta_1, d\delta_2, \ldots d\delta_n$ in funzione degli altri $\nu - n$ e di $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_\nu$ e si sostitui-

scono quindi tali espressioni nell'ultima delle (107) medesime, si ottiene un'equazione della forma

$$M\,d\,\delta_{n+1} + N\,d\,\delta_{n+2} + \ldots Q\,d\,\delta_{\nu} = 0 \qquad (108)$$

ove M, N,... Q rappresentano delle funzioni note di δ_1, δ_2, δ_3,... δ_ν ed i differenziali $d\,\delta_{n+1}$, $d\,\delta_{n+2}$, ... $d\,\delta_\nu$ debbono esser considerati come indipendenti, dacchè tutte le condizioni del problema espresse dalle (106) sono già state introdotte: perciò la (108) equivale al sistema di equazioni

$$M = 0, \quad N = 0, \ldots Q = 0$$

che sono $\nu - n$, e che, unite alle n condizioni (106) determinano le ν correzioni più probabili cercate.

51. Analiticamente parlando il problema della compensazione resta così risoluto; ma quando il numero delle condizioni è grande la scelta del metodo da tenere nella eliminazione indicata alla fine del § 50 non è indifferente, e conviene cercare altresì il procedimento generale di calcolo più comodo e più breve.

Perciò osserveremo anzitutto che le condizioni (105) possono in pratica esser supposte lineari; ed infatti i valori prossimi

$$X_1, X_2, X_3 \ldots X_\nu$$

delle quantità V_1, V_2, V_3 ... V_ν sono sempre conosciuti, se non altro dopo fatte le osservazioni O_1, O_2, O_3, ... O_ν che si tratta di compensare: ponendo quindi:

$$V_1 = X_1 + \omega_1, \quad V_2 = X_2 + \omega_2, \quad V_3 = X_3 + \omega_3, \ldots V_\nu = X_\nu + \omega_\nu$$

dalle (105), per mezzo di sviluppi in serie, si trae

$$\varphi_1(X_1, X_2, \ldots X_\nu) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1}\right)_0 \omega_1 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2}\right)_0 \omega_2 + \ldots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_\nu}\right)_0 \omega_\nu + \Omega_1 = 0$$

$$\varphi_2(X_1, X_2, \ldots X_\nu) + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1}\right)_0 \omega_1 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial X_2}\right)_0 \omega_2 + \ldots \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial X_\nu}\right)_0 \omega_\nu + \Omega_2 = 0$$

. . . . . .

$$\varphi_n(X_1, X_2, \ldots X_\nu) + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial X_1}\right)_0 \omega_1 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial X_2}\right)_0 \omega_2 + \ldots \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial X_\nu}\right)_0 \omega_\nu + \Omega_n = 0$$

ove i resti Ω_1, Ω_2, ... Ω_n sono dell'ordine degli ω^2. Ma le quantità ω possono esser considerate come quantità dell'ordine degli errori di

osservazione; perciò, secondo lo spirito del metodo dei minimi quadrati, i resti sopraddetti possono essere trascurati. Se, a compensazione fatta, risultasse che i valori X non erano abbastanza approssimati per permettere di trascurare negli sviluppi in serie i termini dell'ordine degli ω^2, dalle osservazioni compensate si trarrebbero dei nuovi valori più degli X prossimi ai V, per ripetere quindi il calcolo di compensazione.

Adottando le seguenti notazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi_1(X_1, X_2, \ldots X_\nu) = A_0, \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1}\right)_0 = A_1, \\
\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2}\right)_0 = A_2, \ldots, \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_\nu}\right)_0 = A_\nu \\
\varphi_2(X_1, X_2, \ldots X_\nu) = B_0, \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1}\right)_0 = B_1, \\
\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial X_2}\right)_0 = B_2, \ldots, \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial X_\nu}\right)_0 = B_\nu \\
\varphi_3(X_1, X_2, \ldots X_\nu) = C_0, \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1}\right)_0 = C_1, \\
\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2}\right)_0 = C_2, \ldots, \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial X_\nu}\right)_0 = C_\nu \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
O_1 = X_1 + o_1,\ O_2 = X_2 + o_2,\ O_3 = X_3 + o_3, \ldots O_\nu = X_\nu + o_\nu \\
A_0 + A_1 o_1 + A_2 o_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_\nu o_\nu = L_1 \\
B_0 + B_1 o_1 + B_2 o_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_\nu o_\nu = L_2 \\
C_0 + C_1 o_1 + C_2 o_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_\nu o_\nu = L_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (109)$$

le quantità $o_1, o_2, o_3, \ldots o_\nu$ vengono a rappresentare i valori osservati rispettivamente per $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_\nu$ che ora tengono luogo dei V, e le equazioni di condizione del problema analoghe alle (105), prendono la forma lineare:

$$\left.\begin{array}{l}
A_0 + A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 + \ldots + A_\nu \omega_\nu = 0 \\
B_0 + B_1 \omega_1 + B_2 \omega_2 + \ldots + B_\nu \omega_\nu = 0 \\
C_0 + C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 + \ldots + C_\nu \omega_\nu = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}. \quad (110)$$

È utile notare il significato analitico delle quantità $L_1, L_2, L_3, \ldots$: che mettono in evidenza la discordanza fra le osservazioni, giacchè se queste fossero esatte si avrebbe evidentemente

$$L_1 = L_2 = L_3 = \ldots = 0:$$

perciò sono dette *errori residuali di osservazione.*

52. Introducendo le notazioni (109) nelle equazioni (107) si trae:

$$\left.\begin{aligned} &A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + A_3\delta_3 + \ldots + A_\nu\delta_\nu + L_1 = 0 \\ &B_1\delta_1 + B_2\delta_2 + B_3\delta_3 + \ldots + B_\nu\delta_\nu + L_2 = 0 \\ &C_1\delta_1 + C_2\delta_2 + C_3\delta_3 + \ldots + C_\nu\delta_\nu + L_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

da cui, differenziando rispetto alle variabili δ, otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} &A_1 d\delta_1 + A_2 d\delta_2 + A_3 d\delta_3 + \ldots + A_\nu d\delta_\nu = 0 \\ &B_1 d\delta_1 + B_2 d\delta_2 + B_3 d\delta_3 + \ldots + B_\nu d\delta_\nu = 0 \\ &C_1 d\delta_1 + C_2 d\delta_2 + C_3 d\delta_3 + \ldots + C_\nu d\delta_\nu = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}. \quad (112)$$

Rappresentiamo con *I, II, III,* ... delle costanti indeterminate in numero di n, e, moltiplicata la prima delle (112) per *I,* la seconda per *II,* la terza per *III,* ecc., sommiamo i risultati: si avrà identicamente:

$$(A_1 I + B_1 II + C_1 III + \ldots)\, d\delta_1 + (A_2 I + B_2 II + C_2 III + \ldots)\, d\delta_2 + (A_3 I + B_3 II + C_3 III + \ldots)\, d\delta_3 + \ldots = 0$$

donde risulta che la condizione del minimo relativo, espressa dall'ultima delle (107), equivale a porre

$$\begin{aligned} &(A_1 I + B_1 II + C_1 III \ldots\ldots - p_1\delta_1)\, d\delta_1 + \\ &+ (A_2 I + B_2 II + C_2 III \ldots\ldots - p_2\delta_2)\, d\delta_2 + \\ &+ (A_3 I + B_3 II + C_3 III \ldots\ldots - p_3\delta_3)\, d\delta_3 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (A_n I + B_n II + C_n III \ldots\ldots - p_n\delta_n)\, d\delta_n + \\ &+ (A_{n+1} I + B_{n+1} II + C_{n+1} III \ldots - p_{n+1}\delta_{n+1})\, d\delta_{n+1} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (A_\nu I + B_\nu II + C_\nu III \ldots\ldots - p_\nu\delta_\nu)\, d\delta_\nu = 0, \end{aligned}$$

e che l'eliminazione indicata alla fine del § 50 può esser fatta determinando le ausiliarie *I, II, III*... in modo da annullare i primi n coefficienti dei differenziali che compariscono nella precedente equazione. Ma per determinare le correzioni $v_1, v_2, \ldots v_\nu$ più probabili cercate, ossia i valori dei δ che corrispondono al minimo di $[p\,\delta\,\delta]$, si debbono porre le condizioni

$$M = 0, \quad N = 0, \ldots Q = 0$$

(vedi § 50); quindi si debbono annullare anche i coefficienti dei $\nu - n$ differenziali che rimangono nella equazione precedente dopo che la suddetta eliminazione è stata fatta, ponendo complessivamente:

$$\left.\begin{aligned} p_1 v_1 &= A_1 I + B_1 II + C_1 III + \ldots \\ p_2 v_2 &= A_2 I + B_2 II + C_2 III + \ldots \\ p_3 v_3 &= A_3 I + B_3 II + C_3 III + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\nu v_\nu &= A_\nu I + B_\nu II + C_\nu III + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

che sono ν equazioni, le quali, unite alle n condizioni date, determinano e le n costanti ausiliarie *I, II, III*,... e le ν correzioni $v_1, v_2, v_3, \ldots v_\nu$. Queste correzioni risultano dunque espresse dalle (113) in funzione delle quantità *I, II, III*,... alle quali, perciò si dà il nome di *correlativi,* mentre le (113) stesse sono dette *equazioni correlate.*

Se si moltiplica la prima delle equazioni correlate per $\frac{A_1}{p_1}$, la seconda per $\frac{A_2}{p_2}$, la terza per $\frac{A_3}{p_3}$ e così di seguito, e si sommano i resultati si ottiene:

$$\left[\frac{AA}{p}\right] I + \left[\frac{AB}{p}\right] II + \left[\frac{AC}{p}\right] III + \ldots = A_1 v_1 + A_2 v_2 + \ldots A_\nu v_\nu .$$

Così, sommando le (113) dopo averne moltiplicata ciascuna per il corrispondente valore di $\frac{B}{p}$, si trova:

$$\left[\frac{AB}{p}\right] I + \left[\frac{BB}{p}\right] II + \left[\frac{BC}{p}\right] III + \ldots = B_1 v_1 + B_2 v_2 + \ldots B_\nu v_\nu ,$$

e in modo analogo si avrebbe:

$$\left[\frac{AC}{p}\right] I + \left[\frac{BC}{p}\right] II + \left[\frac{CC}{p}\right] III + \ldots = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \ldots C_\nu v_\nu .$$

. . . . . .

Ma il sistema dei v è uno dei sistemi dei δ compatibili colle condizioni (110), perciò i secondi membri delle equazioni precedenti si riducono rispettivamente a $-L_1, -L_2, -L_3, \ldots -L_n$, e queste divengono:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{AA}{p}\right] I + \left[\frac{AB}{p}\right] II + \left[\frac{AC}{p}\right] III \ldots + L_1 = 0 \\ \left[\frac{AB}{p}\right] I + \left[\frac{BB}{p}\right] II + \left[\frac{BC}{p}\right] III \ldots + L_2 = 0 \\ \left[\frac{AC}{p}\right] I + \left[\frac{BC}{p}\right] II + \left[\frac{CC}{p}\right] III \ldots + L_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

e formano così un sistema di equazioni normali che chiameremo *correlanti* perchè determinano i correlativi $I, II, III \ldots$

53. Dacchè le correzioni $v_1, v_2, v_3, \ldots v_\nu$ così ricavate costituiscono il sistema più probabile di errori commessi in $O_1, O_2, O_3, \ldots O_\nu$, si può per loro mezzo risalire all'errore medio m corrispondente all'unità di peso, e dedurre successivamente gli errori medii delle singole osservazioni. Tale deduzione è tanto più interessante in quanto che questi tengono anche conto, almeno in parte, degli errori sistematici d'osservazione, dei quali può, in media, essere apprezzata l'entità confrontando gli errori medii provenienti dal calcolo di compensazione con quelli determinati in modo diretto nel fare reiteratamente le sopra indicate misure.

Osserviamo pertanto che il peso da ascrivere a ciascuna correzione v considerata come un errore di osservazione, è quello stesso della osservazione corrispondente, e quindi il sistema di valori

$$v_1\sqrt{p_1},\ v_2\sqrt{p_2},\ v_3\sqrt{p_3}, \ldots v_\nu\sqrt{p_\nu}$$

formerebbe un sistema di errori comparabili tra loro, ed appartenenti ad un'unica classe di osservazioni, se i v non fossero vincolati dalle condizioni (107). Ci troviamo qui in un caso analogo a quello considerato nel § 44, perocchè è chiaro che se nelle relazioni

$$\begin{aligned} \sqrt{p_1}(\omega_1 - o_1) &= v_1\sqrt{p_1} \\ \sqrt{p_2}(\omega_2 - o_2) &= v_2\sqrt{p_2} \\ \sqrt{p_3}(\omega_3 - o_3) &= v_3\sqrt{p_3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt{p_\nu}(\omega_\nu - o_\nu) &= v_\nu\sqrt{p_\nu} \end{aligned}$$

per mezzo delle n equazioni di condizioni date si eliminassero n degli ω, per esempio $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, si otterrebbero ν equazioni generate, fra le $\nu - n$ incognite indipendenti $\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \omega_{n+3}, \ldots \omega_\nu$; e queste equazioni risolute coi criterii esposti nella seconda parte del Capitolo, condurrebbero evidentemente allo stesso sistema di correzioni più probabili v a cui si giunge col calcolo di compensazione. Un tale metodo di dedurre le correzioni più probabili può anzi qualche volta essere adottato con vantaggio, specialmente se il numero delle equazioni di condizione è assai grande rispetto al numero delle osservazioni da compensare, ed è conosciuto sotto il nome di *riduzione delle osservazioni subordinate a condizione, al caso delle determinazioni indirette.*

Si può adunque applicare anche nel caso della compensazione la formula generale (90) del § 44, facendovi $n = \nu$ ed $\omega = \nu - n$, cosicchè avremo:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n}} \qquad (115)$$

ed in conseguenza, rappresentando con $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\nu$ gli errori medii corrispondenti alle osservazioni compensate, sarà:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{P_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{P_2}}, \ldots \quad m_\nu = \frac{m}{\sqrt{P_\nu}},$$

ove i pesi $P_1, P_2, P_3, \ldots$ delle quantità compensate s'intendono calcolati col metodo che sarà esposto nel paragrafo seguente.

Per il calcolo della quantità $[p\,v\,v]$ è utile poi dedurre una formula analoga alla (97^{bis}) del § 47 (vedi Vol. I, pag. 398). Moltiplicando per ciò ciascuna delle correlate (113) per la relativa correzione v e sommando i resultati membro a membro si trova

$$[p\,v\,v] = [A\,v]\,I + [B\,v]\,II + [C\,v]\,III + \ldots$$

mentre le condizioni (111) danno:

$$[A\,v] = -L_1, \quad [B\,v] = -L_2, \quad [C\,v] = -L_3 \ldots$$

Quindi avremo

$$[p\,v\,v] = -L_1\,I - L_2\,II - L_3\,III - \ldots$$

relazione dalla quale i correlativi possono essere eliminati per mezzo delle equazioni correlanti (114). Seguendo un metodo di eliminazione analogo a quello adoperato nel § 47, e ponendo per con-

formità di notazione:

$$L_2 - \frac{\left[\frac{AB}{p}\right]}{\left[\frac{AA}{p}\right]} L_1 = [L_2, 1] \quad \Big| \quad [L_3, 1] - \frac{\left[\frac{BC}{p}, 1\right]}{\left[\frac{BB}{p}, 1\right]} [L_2, 1] = [L_3, 2]$$

$$L_3 - \frac{\left[\frac{AC}{p}\right]}{\left[\frac{AA}{p}\right]} L_1 = [L_3, 1] \quad \Big| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Big| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si ottiene senza difficoltà:

$$[p\,v\,v] = \frac{L_1^2}{\left[\frac{AA}{p}\right]} + \frac{[L_2, 1]^2}{\left[\frac{BB}{p}, 1\right]} + \frac{[L_2, 2]^2}{\left[\frac{CC}{p}, 2\right]} + \ldots \qquad (116)$$

Questa formula merita speciale attenzione, perocchè può servire di riprova all'intero calcolo di compensazione per mezzo del confronto del valore di $[p\,v\,v]$ dato da essa con quello che può venire calcolato direttamente.

Sia ancora M l'errore medio dell'unità di peso dedotto in via diretta dalle osservazioni reiteratamente fatte per le quantità ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots \omega_\nu$, e rappresentiamo con μ il valore più probabile dell'errore medio sistematico di una qualunque osservazione di peso uno; avremo ancora

$$\mu = \sqrt{m^2 - M^2}, \qquad (117)$$

giacchè rappresentando rispettivamente con v', v'' l'errore casuale e l'errore sistematico di una osservazione o di peso uno, si ha in generale

$$\omega = o + v' + v''.$$

È necessario tener presente che i criterii esposti in questo ultimo paragrafo non sono applicabili che quando il numero delle quantità da compensare e quello delle condizioni sono grandi abbastanza da rendere trascurabile nel calcolo della (115) la differenza fra $[p\,v\,v]$ ed il limite cui tende questa quantità col crescere del numero dei v, e da porre in evidenza la parte sistematica dell'errore di osservazione. Quando ν ed n sono troppo piccoli conviene assumere per m il valore che ascrivono a questa quantità le osservazioni non compensate.

54. Sia

$$U = U_0 + F_1 V_1 + F_2 V_2 + F_3 V_3 + \dots F_\nu V_\nu \qquad (118)$$

una funzione lineare delle quantità V_1, V_2, V_3, $\dots V_\nu$ subordinate a condizioni, per le quali l'osservazione ed il calcolo di compensazione hanno dato i valori più probabili

$$O_1 + v_1,\ O_2 + v_2,\ O_3 + v_3, \dots O_\nu + v_\nu.$$

Le notazioni U_0, F_1, F_2, F_3, $\dots F_\nu$ rappresentano qui delle costanti teoreticamente note, suscettibili in parte anche del valore *zero*. La quantità U_m che deve essere assunta come il più probabile valore di U è evidentemente data da:

$$\left.\begin{aligned} U_m = U_0 + F_1 O_1 + F_2 O_2 + F_3 O_3 + \dots F_\nu O_\nu \\ + F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 + \dots F_\nu v_\nu, \end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

e trattandosi di un valore esperimentale è necessario saperne determinare *la precisione*, ossia il peso P_u e l'errore medio m_u: ma in questo caso non è direttamente applicabile il procedimento indicato al § 26, giacchè le quantità v_1, v_2, v_3, $\dots v_\nu$ sono bensì, in ultima analisi, determinate coll'esperienza, ma subordinatamente alle condizioni (111). È dunque anzitutto necessario di eliminare queste quantità dalla (119), esprimendole in funzione delle osservazioni dirette O_1, O_2, O_3, $\dots O_\nu$ dalle quali dipendono per mezzo dei correlativi e delle equazioni normali correlanti.

Sostituendo nella (119) ai v i loro valori dati dalle equazioni correlate (113) si ottiene

$$U_m = U_0 + F_1 O_1 + F_2 O_2 + F_3 O_3 + \dots F_\nu O_\nu +$$

$$+ \left[\frac{FA}{p}\right] I + \left[\frac{FB}{p}\right] II + \left[\frac{FC}{p}\right] III + \dots$$

relazione da cui debbono essere eliminati i correlativi per mezzo delle equazioni normali correlanti (114). In tale eliminazione è anche qui conveniente di seguire il metodo dei coefficienti indeterminati; moltiplichiamo dunque ciascuna delle (114) per una quantità indeterminata, e rappresentiamo rispettivamente con N_1, N_2, N_3, $\dots N_n$ tali n ausiliarie: sommando membro a membro le conse-

guenti equazioni e l'ultima soprascritta avremo:

$$U_m = U_0 + F_1 O_1 + F_2 O_2 + F_3 O_3 + \ldots F_\nu O_\nu +$$
$$+ I \left\{\left[\frac{AA}{p}\right] N_1 + \left[\frac{AB}{p}\right] N_2 + \left[\frac{AC}{p}\right] N_3 + \ldots + \left[\frac{FA}{p}\right]\right\} +$$
$$+ II \left\{\left[\frac{AB}{p}\right] N_1 + \left[\frac{BB}{p}\right] N_2 + \left[\frac{BC}{p}\right] N_3 + \ldots + \left[\frac{FB}{p}\right]\right\} +$$
$$+ III \left\{\left[\frac{AC}{p}\right] N_1 + \left[\frac{BC}{p}\right] N_2 + \left[\frac{CC}{p}\right] N_3 + \ldots + \left[\frac{FC}{p}\right]\right\} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ N_1 L_1 + N_2 L_2 + N_3 L_3 + \ldots N_n L_n$$

relazione che si riduce a

$$U_m = U_0 + [FO] + [NL] \qquad (120)$$

se le ausiliarie $N_1, N_2, N_3, \ldots N_n$ sono determinate per mezzo del seguente sistema di equazioni normali:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{AA}{p}\right] N_1 + \left[\frac{AB}{p}\right] N_2 + \left[\frac{AC}{p}\right] N_3 + \ldots + \left[\frac{FA}{p}\right] = 0 \\
&\left[\frac{AB}{p}\right] N_1 + \left[\frac{BB}{p}\right] N_2 + \left[\frac{BC}{p}\right] N_3 + \ldots + \left[\frac{FB}{p}\right] = 0 \\
&\left[\frac{AC}{p}\right] N_1 + \left[\frac{BC}{p}\right] N_2 + \left[\frac{CC}{p}\right] N_3 + \ldots + \left[\frac{FC}{p}\right] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

In tal caso le $N_1, N_2, N_3, \ldots N_n$ rappresentano delle costanti affatto indipendenti dal sistema di osservazioni $O_1, O_2, O_3, \ldots O_\nu$, giacchè le quantità $A, B, C, \ldots F, p$, che entrano nella costituzione delle (121), sono per ipotesi teoreticamente note. Confrontando poi la relazione (120) colla (119) si trova

$$[NL] = [Fv]$$

che ci darebbe un altro modo di calcolare il valore più probabile di U insieme al suo peso.

Se nella (120) agli errori residuali ed alle osservazioni effettive si sostituiscono i loro valori in funzione delle osservazioni

ipotetiche o dati dalle (109), raccogliendo i termini in $o_1, o_2, o_3 \ldots$ si deduce:

$$\begin{aligned} U_m = U_0 &+ F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 + \ldots + \\ &+ N_1 A_0 + N_2 B_0 + N_3 C_0 + \ldots + \\ &+ o_1 (N_1 A_1 + N_2 B_1 + N_3 C_1 + \ldots + F_1) \\ &+ o_2 (N_1 A_2 + N_2 B_2 + N_3 C_2 + \ldots + F_2) \\ &+ o_3 (N_1 A_3 + N_2 B_3 + N_3 C_3 + \ldots + F_3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ o_\nu (N_1 A_\nu + N_2 B_\nu + N_3 C_\nu + \ldots + F_\nu) \end{aligned}$$

e da questa espressione di U_m si ottiene senz'altro l'errore medio m_u cercato, perocchè, le osservazioni $o_1, o_2, \ldots o_\nu$ essendo indipendenti l'una dall'altra, e tutte le altre quantità che concorrono a costituire il valore esperimentale U_m essendo delle costanti note, diviene applicabile il procedimento generale esposto nel § 26 [formula (34)] e si ha quindi:

$$\begin{aligned} m_u^2 = m_1^2 &(N_1 A_1 + N_2 B_1 + N_3 C_1 + \ldots + F_1)^2 \\ &+ m_2^2 (N_1 A_2 + N_2 B_2 + N_3 C_2 + \ldots + F_2)^2 \\ &+ m_3^2 (N_1 A_3 + N_2 B_3 + N_3 C_3 + \ldots + F_3)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ m_\nu^2 (N_1 A_\nu + N_2 B_\nu + N_3 C_\nu + \ldots + F_\nu)^2 \end{aligned}$$

$$m_u = m \sqrt{\left[\frac{(N_1 A + N_2 B + N_3 C + \ldots + F)^2}{p}\right]}$$

$$\frac{1}{P_u} = \left[\frac{(N_1 A + N_2 B + N_3 C + \ldots + F)^2}{p}\right].$$

Queste due ultime formule risolvono in teoria la questione che ci eravamo proposta, ma per la pratica conviene cercare anche un processo relativamente breve per il calcolo della quantità

$$\left[\frac{(N_1 A + N_2 B + N_3 C + \ldots + F)^2}{p}\right].$$

Perciò poniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{p_1}}(N_1 A_1 + N_2 B_1 + N_3 C_1 + \ldots + F_1) = \Delta_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{p_2}}(N_1 A_2 + N_2 B_2 + N_3 C_2 + \ldots + F_2) = \Delta_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{p_3}}(N_1 A_3 + N_2 B_3 + N_3 C_3 + \ldots + F_3) = \Delta_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{p_\nu}}(N_1 A_\nu + N_2 B_\nu + N_3 C_\nu + \ldots + F_\nu) = \Delta_\nu$$

ed osserviamo che le quantità $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_\nu$ possono essere considerate come i residui corrispondenti ad un sistema di equazioni generate ideali, dedotte dalla forma generatrice

$$\frac{A}{\sqrt{p}} N_1 + \frac{B}{\sqrt{p}} N_2 + \frac{C}{\sqrt{p}} N_3 + \ldots + \frac{F}{\sqrt{p}} = 0.$$

Se si applica quindi l'algoritma del § 47 [formula (97^{bis})] si ottiene:

$$\left[\frac{(A N_1 + B N_2 + C N_3 + \ldots + F)^2}{p}\right] = [\Delta\,\Delta] = \left[\frac{FF}{p}, \nu\right] =$$

$$= \left[\frac{FF}{p}\right] - \frac{\left[\frac{AF}{p}\right]^2}{\left[\frac{AA}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{BF}{p}, 1\right]^2}{\left[\frac{BB}{p}, 1\right]} - \frac{\left[\frac{CF}{p}, 2\right]^2}{\left[\frac{CC}{p}, 2\right]} - \ldots$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned} = m\sqrt{\left[\frac{FF}{p}, \nu\right]} &= m\sqrt{\left[\frac{FF}{p}\right] - \frac{\left[\frac{AF}{p}\right]^2}{\left[\frac{AA}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{BF}{p}, 1\right]^2}{\left[\frac{BB}{p}, 1\right]} - \frac{\left[\frac{CF}{p}, 2\right]^2}{\left[\frac{CC}{p}, 2\right]} - \ldots} \\ = \left[\frac{FF}{p}, \nu\right] &= \left[\frac{FF}{p}\right] - \frac{\left[\frac{AF}{p}\right]^2}{\left[\frac{AA}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{BF}{p}, 1\right]^2}{\left[\frac{BB}{p}, 1\right]} - \frac{\left[\frac{CF}{p}, 2\right]^2}{\left[\frac{CC}{p}, 2\right]} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

Queste stesse formule valgono naturalmente anche per il caso in cui si tratta di determinare il peso di una qualunque delle qu an-

tità compensate, per esempio, $o_s + v_s$, dovendosi allora nelle (122) fare $F_s = 1$ e supporre nulle tutte le altre quantità F.

55. La ricerca del peso e dell'errore medio di una funzione U qualunque delle osservazioni compensate si riduce al caso precedente, in cui la funzione è supposta lineare, introducendo al solito, in luogo delle quantità $V_1, V_2, V_3, \ldots V_\nu$ che compariscono nella funzione data, le loro espressioni

$$X_1 + \omega_1,\ X_2 + \omega_2,\ X_3 + \omega_3, \ldots X_\nu + \omega_\nu$$

in cui le quantità X rappresentano dei valori prossimi dei V, e gli ω sono delle incognite per le quali l'osservazione ha dato [§ 51, formule (109)] i valori:

$$o_1 = O_1 - X_1,\ o_2 = O_2 - X_2,\ o_3 = O_3 - X_3, \ldots o_\nu = O_\nu - X_\nu.$$

In tal modo si trova:

$$V = U(X_1 + \omega_1, X_2 + \omega_2, X_3 + \omega_3, \ldots X_\nu + \omega_\nu) =$$

$$= U(X_1, X_2, \ldots X_\nu) + \omega_1\left(\frac{\partial U}{\partial X_1}\right)_o + \omega_2\left(\frac{\partial U}{\partial X_2}\right)_o + \ldots \omega_\nu\left(\frac{\partial U}{\partial X_\nu}\right)_o + \Omega$$

dove nel calcolo del valore U_m più probabile di U, il resto Ω può essere trascurato (vedi § 51), cosicchè avremo:

$$U_m = U(X_1, X_2, X_3, \ldots X_\nu) +$$

$$+ o_1\left(\frac{\partial U}{\partial X_1}\right)_o + o_2\left(\frac{\partial U}{\partial X_2}\right)_o + \ldots + o_\nu\left(\frac{\partial U}{\partial X_\nu}\right)_o +$$

$$+ v_1\left(\frac{\partial U}{\partial X_1}\right)_o + v_2\left(\frac{\partial U}{\partial X_2}\right)_o + \ldots + v_\nu\left(\frac{\partial U}{\partial X_\nu}\right)_o,$$

essendo $v_1, v_2, \ldots v_\nu$ le correzioni dedotte dalla compensazione. Analiticamente tale espressione non differisce dalla (119), e quindi per avere il peso e l'errore medio della determinazione U_m si possono anche qui applicare le formule (122) del numero precedente se in esse si pone:

$$F_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial X_1}\right)_o,\quad F_2 = \left(\frac{\partial U}{\partial X_2}\right)_o, \ldots\quad F_\nu = \left(\frac{\partial U}{\partial X_\nu}\right)_o,$$

solo che i valori che ne conseguono per m_u, e P_u non sono in que-

sto caso che approssimativi, restando al solito trascurate le quantità dell'ordine dei v^2.

56. La teoria esposta nei numeri precedenti può essere ancora generalizzata considerando il caso in cui le equazioni di condizione vincolano non le quantità direttamente osservate, ma degli altri enti fisici od analitici che le osservazioni stesse debbono determinare, ossia, delle costanti ignote $x, y, z \ldots$, delle quali i valori più probabili debbono essere ricavati da un sistema di equazioni generate; è evidente che questa nuova quistione comprende anche quella della compensazione delle osservazioni dirette, già sopra considerata. Per meglio rendere chiaro lo spirito del nuovo problema che ci proponiamo di risolvere ricorreremo ad un esempio, supponendo che si tratti di comparare le quattro spranghe geodetiche di un apparato di base del tipo *Bessel* [Capitolo IV, § 7 formule (6)], allo scopo di determinare le costanti m_1, m_2, m_3, m_4 dei loro termometri metallici e le differenze x_1, x_2, x_3, x_4 fra le lunghezze di ciascuna di esse e la lunghezza media fondamentale L dell'apparato. Un numero n di comparazioni fatte in momenti fisici (temperature) diversi danno, come fu mostrato altrove, le $4n$ equazioni generate

$$\left.\begin{array}{l|l}
X' - I_1' + x_1 - a_1' m_1 = v_1 & X'' - I_1'' + x_1 - a_1'' m_1 = v_5 \\
X' - I_2' + x_2 - a_2' m_2 = v_2 & X'' - I_2'' + x_2 - a_2'' m_2 = v_6 \\
X' - I_3' + x_3 - a_3' m_3 = v_3 & X'' - I_3'' + x_3 - a_3'' m_3 = v_7 \\
X' - I_4' + x_4 - a_4' m_4 = v_4 & X'' - I_4'' + x_4 - a_4'' m_4 = v_8 \\
\hline
X''' - I_1''' + x_1 - a_1''' m_1 = v_9 & \ldots\ldots\ldots \\
X''' - I_2''' + x_2 - a_2''' m_2 = v_{10} & \ldots\ldots\ldots \\
X''' - I_3''' + x_3 - a_3''' m_3 = v_{11} & \ldots\ldots\ldots \\
X''' - I_4''' + x_4 - a_4''' m_4 = v_{12} & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

ove compariscono le $n + 8$ incognite

$$X', X'', X''', \ldots X^{(n)}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \quad m_1, m_2, m_3, m_4,$$

mentre tutte le altre notazioni, astrazion fatta dai residui v, corrispondono a quantità direttamente misurate. Però le x_1, x_2, x_3, x_4 non possono esser considerate come indipendenti fra di loro, ma sono rigorosamente legate dalla condizione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad (\beta)$$

che esprime che gli x rappresentano le differenze fra le lunghezze fondamentali delle spranghe ed il loro medio valore. Non si usa introdurre altre condizioni fra le incognite delle (α) perchè si ammette che le diversità possibili fra i valori calcolati per m_1, m_2, m_3, m_4 corrispondano a peculiari irregolarità di ciascuna spranga, ma, teoreticamente parlando, anche questi coefficienti sono legati in modo conosciuto fra di loro, e si possono immaginare dei sistemi di comparazione che permettano di porre delle equazioni rigorose anche fra i diversi valori che il calcolo assegna agli X. Stabilite dunque tutte le condizioni, analoghe alla (β), che vincolano le incognite delle (α), la compensazione in questo caso consiste nel cercare il sistema di residui v che compatibilmente colle (β) ha la massima probabilità di rappresentare il sistema degli errori residuali delle equazioni generate (α) medesime.

Ciò posto siano in generale

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 &= v_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + l_3 &= v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n &= v_n \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

n equazioni generate, ridotte lineari ed allo stesso peso coi metodi già indicati precedentemente (§§ 38 e 39 Vol. I, pag. 375), nelle quali v_1, v_2, v_3, ... v_n rappresentino i residui corrispondenti ai valori x, y, z, ... qualunque delle incognite, ma subordinati alle σ condizioni:

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + A_2 y + A_3 z + \ldots + L_1 &= 0 \\ B_1 x + B_2 y + B_3 z + \ldots + L_2 &= 0 \\ C_1 x + C_2 y + C_3 z + \ldots + L_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Si tratta, non più di correggere direttamente le quantità osservate, ma di trovare fra tutti i sistemi di valori $x, y, z \ldots$ delle incognite, compatibili colle (124), quello che introdotto nelle (123) dà per i v il sistema di valori δ_1, δ_2, δ_3, ... δ_n che più probabilmente di ogni altro sistema coincide coi veri errori residuali delle equazioni generate. Del resto ottenuto questo sistema si risale, se fa d'uopo,

alle correzioni più probabili delle osservazioni dirette applicando i principii già esposti nei numeri precedenti.

È chiaro che il numero ω delle costanti incognite $x, y, z, \ldots$ deve essere supposto maggiore del numero σ delle equazioni di condizione e minore del numero complessivo $n + \sigma$ delle equazioni proposte (123) e (124), perocchè altrimenti o dalle equazioni di condizione resterebbero determinati i veri valori delle incognite stesse, e quindi non sarebbe il caso di ricercarne i valori più probabili, o le osservazioni fatte non sarebbero sufficienti a determinare queste costanti.

Colla solita ipotesi sulla distribuzione degli errori di osservazione e con un ragionamento analogo a quello dei §§ 40 e 50 di questo capitolo la ricerca indicata si riduce a trovare il sistema $x_0, y_0, z_0, \ldots$ di valori di $x, y, z, \ldots$ che rende

$$[v\,v] = \textit{minimo}$$

subordinatamente però alle condizioni (124). Seguendo il procedimento del § 52, moltiplichiamo ciascuna equazione di condizione per una quantità ausiliaria (*correlativo*), e rappresentiamo le σ ausiliarie con $I, II, III, \ldots$; differenziando i risultati rispetto alle incognite $x, y, z \ldots$, che debbono esser considerate come le variabili del problema, e sommando membro a membro colla condizione del *minimo*

$$v_1\,dv_1 + v_2\,dv_2 + v_3\,dv_3 + \ldots + v_n\,dv_n = 0$$

si vede che questa equivale a porre:

$$\begin{aligned} 0 = [v\,dv] &+ dx\,(I\,A_1 + II\,B_1 + III\,C_1 + \ldots) + \\ &+ dy\,(I\,A_2 + II\,B_2 + III\,C_2 + \ldots) + \\ &+ dz\,(I\,A_3 + II\,B_3 + III\,C_3 + \ldots) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Delle incognite $x, y, z \ldots$, dalle quali dipendono qui i v, a causa delle equazioni di condizione solo $\omega - \sigma$ possono esser considerate come indipendenti. Ma si ha identicamente:

$$\begin{aligned} [v\,dv] &= dx\ [a\,v] + dy\,[b\,v] + dz\,[c\,v] + \ldots \\ &= dx\,\{[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \ldots [a\,l]\} + \\ &+ dy\,\{[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + \ldots [b\,l]\} + \\ &+ dz\,\{[a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + \ldots [c\,l]\} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

quindi alla precedente condizione del minimo relativo di $[v\,v]$ può esser data la forma:

$$\begin{aligned} 0 = {} & dx\{[a\,a]x + [a\,b]y + [a\,c]z + \ldots + \\ & + A_1 I + B_1 II + C_1 III + \ldots + [a\,l]\} + \\ & + dy\{[a\,b]x + [b\,b]y + [b\,c]z + \ldots + \\ & + A_2 I + B_2 II + C_2 III + \ldots + [b\,l]\} + \\ & + dz\{[a\,c]x + [b\,c]y + [c\,c]z + \ldots + \\ & + A_3 I + B_3 II + C_3 III + \ldots + [c\,l]\} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Per ridurre la quistione alla ricerca di un minimo assoluto è necessario eliminare da questa ultima relazione, per mezzo delle (124), tanti differenziali dx, dy, $dz\ldots$ quante sono le condizioni (124) stesse, ed a ciò si giunge subito determinando i σ correlativi I, II, III, $\ldots$ per modo che i coefficienti dei differenziali suddetti si annullino: ciò fatto, la condizione del minimo conduce ad annullare anche i coefficienti di tutte gli altri $\omega - \sigma$ differenziali, che debbono esser considerati come indipendenti; dimodochè si ottengono in tutto ω relazioni, che, unite alle σ condizioni (124), determinano le $\omega + \sigma$ quantità x_0, y_0, z_0, $\ldots$ I, II, III, $\ldots$ cercate. Complessivamente si trovano così le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} & [a\,a]x + [a\,b]y + [a\,c]z + \ldots\ldots + \\ & \quad + A_1 I + B_1 II + C_1 III + \ldots + [a\,l] = 0 \\ & [a\,b]x + [b\,b]y + [b\,c]z + \ldots\ldots + \\ & \quad + A_2 I + B_2 II + C_2 III + \ldots + [b\,l] = 0 \\ & [a\,c]x + [b\,c]y + [c\,c]z + \ldots\ldots + \\ & \quad + A_3 I + B_3 II + C_3 III + \ldots + [c\,l] = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & A_1 x + A_2 y + A_3 z + \ldots\ldots\ldots + L_1 = 0 \\ & B_1 x + B_2 y + B_3 z + \ldots\ldots\ldots + L_2 = 0 \\ & C_1 x + C_2 y + C_3 z + \ldots\ldots\ldots + L_3 = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (125)$$

che formano un sistema di equazioni normali e possono essere risolute coi metodi già altrove indicati.

57. L'algoritmo del § 47 mostra che, dato un sistema di equazioni normali, la ricerca del peso delle incognite e delle loro funzioni è indipendente dalle equazioni generate che hanno dato origine alle equazioni normali proposte, e che in corrispondenza a queste si può immaginare un infinito numero di sistemi di quelle, per modo che i pesi delle incognite e delle loro funzioni restino gli stessi anche se varia l'errore medio dell'unità di peso. Da ciò risulta che, considerando i correlativi *I, II, III* ... come delle nuove costanti da determinare per mezzo delle osservazioni fatte, si possono dedurre anche i pesi delle determinazioni

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \ldots\ I,\ II,\ III,$$

e quelli delle loro funzioni applicando alle equazioni (125) sopra dedotte i procedimenti generali esposti nei §§ 45 e 47 di questo capitolo.

In quanto alla ricerca dell'errore medio corrispondente all'unità di peso, è da osservare che il metodo di compensazione esposto sopra equivale evidentemente ad una eliminazione diretta di σ incognite $x, y, z \ldots$ dalle n equazioni generate (123), fatta per mezzo delle σ condizioni (124). Con tale eliminazione le (123) stesse darebbero un sistema di n equazioni generate, fra $\omega - \sigma$ incognite non subordinate a veruna condizione, e questo sistema, risoluto col metodo dei minimi quadrati (seconda parte del capitolo), ricondurebbe agli stessi valori più probabili delle incognite ed ai residui $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \ldots \delta_n$ che sono dati dalla compensazione eseguita coll'algoritmo del numero precedente. Perciò l'errore medio corrispondente all'unità di peso, ossia alla classe di errori alla quale appartengono i suddetti residui, può essere calcolato da questi applicando la solita formola (90) del § 44, coll'avvertenza che, in questo caso, il numero delle costanti incognite, che rimangono nelle equazioni generate dopo aver tenuto conto delle condizioni, è $\omega - \sigma$. In conseguenza si deve porre:

$$m = \sqrt{\frac{[\delta\,\delta]}{n - \omega + \sigma}} \qquad (126)$$

essendo $[\delta\,\delta]$ la somma dei quadrati dei residui che si ottengono sostituendo nelle equazioni generate (123) ad $x, y, z, \ldots$ i loro più probabili valori dedotti dalla compensazione.

Il valore della quantità $[\delta\,\delta]$ si può ottenere con una formula completamente analoga alla (97^{bis}) del § 47 e può allora servire di

riprova al calcolo dei valori più probabili delle incognite, quando sia stato anche direttamente calcolato sostituendo questi valori nelle equazioni generate. Infatti si ha in generale, come nel paragrafo sopra citato:

$$[vv] = [(ax + by + cz + \ldots + l)^2] = [v.(ax + by + cz + \ldots l)] =$$
$$= x[av] + y[bv] + z[cv] + \ldots [lv]$$
$$= x[av] + y[bv] + z[cv] + \ldots x[al] + y[bl] + z[cl] + \ldots + [ll]$$

di dove, ricordando le identità (72), (73) e le relazioni (125), si trae:

$$[\delta\delta] = [ll] + x_0[al] + y_0[bl] + z_0[cl] + \ldots$$
$$- I\ (x_0 A_1 + y_0 A_2 + z_0 A_3 + \ldots)$$
$$- II\ (x_0 B_1 + y_0 B_2 + z_0 B_3 + \ldots)$$
$$- III\ (x_0 C_1 + y_0 C_2 + z_0 C_3 + \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

od anche, tenendo conto delle condizioni (124):

$$[\delta\delta] = [ll] + x_0[al] + y_0[bl] + z_0[cl] + \ldots +$$
$$+ I L_1 + II L_2 + III L_3 + \ldots$$

Eliminando x_0, y_0, z_0, ... I, II, III, ... per mezzo delle equazioni normali (125) con un procedimento identico a quello già adoperato nel § 47 si ottiene

$$[\delta\delta] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]} \ldots \qquad (127)$$

come nel paragrafo suddetto, se non che in questo caso si deve tener presente come le notazioni dei termini che si riferiscono alle ultime quantità eliminate I, II, III, ... corrispondono ai coefficienti delle equazioni ridotte (risolventi) degli ultimi ordini, che determinano i correlativi.

53. Il lavoro di calcolo necessario per la risoluzione di un sistema di equazioni cresce molto rapidamente col crescere del nu-

mero delle incognite: ne consegue che se il numero delle condizioni è rilevante l'introduzione dei correlativi *I, II, III*... come nuove incognite da determinare insieme alle costanti $x, y, z \ldots$ viene a rendere la risoluzione delle (125) assai malagevole, e conviene in questa seguire allora un procedimento diverso dall'algoritmo generale sopra indicato, determinando anzitutto, per mezzo delle equazioni generate (123), col metodo dei minimi quadrati, i valori più probabili delle incognite senza tener conto delle condizioni (124), e cercando quindi le correzioni più probabili da farsi a tali valori perchè le condizioni (124) sieno soddisfatte. Il metodo teoreticamente più diretto per questo calcolo è il seguente, dovuto a *Bessel*.

Sieno $x_0, y_0, z_0 \ldots$ i valori di $x, y, z, \ldots$ che risolvono il sistema di equazioni normali corrispondenti alle generate (123) fatta astrazione dalle condizioni (124): ritenendo le notazioni della seconda parte di questo capitolo si hanno le relazioni [§ 43 formule (87)]

$$\begin{aligned} x - x_0 &= [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \ldots \\ y - y_0 &= [\alpha\beta]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \ldots \\ z - z_0 &= [\alpha\gamma]\xi + [\beta\gamma]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

nelle quali, come è noto, $\xi, \eta, \zeta \ldots$ rappresentano identicamente i primi membri delle equazioni normali suddette qualunque siano $x, y, z \ldots$ Ma i valori compensati di queste ultime quantità debbono soddisfare il sistema (125), quindi i corrispondenti valori di $\xi, \eta, \zeta \ldots$ in funzione dei correlativi *I, II, III*, ... possono esser tratti dalle (125) medesime e sono:

$$\begin{aligned} \xi' &= -A_1 I - B_1 II - C_1 III - \ldots \\ \eta' &= -A_2 I - B_2 II - B_2 III - \ldots \\ \zeta' &= -A_3 I - B_3 II - B_3 III - \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

In conseguenza, se chiamiamo con $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ le correzioni da farsi rispettivamente ad $x_0, y_0, z_0, \ldots$ per dedurne i valori

compensati di $x, y, z, \ldots$, le precedenti equazioni (α) danno

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x = &-\{[\alpha\alpha]A_1 + [\alpha\beta]A_2 + [\alpha\gamma]A_3 + \ldots\}\,I\\
&-\{[\alpha\alpha]B_1 + [\alpha\beta]B_2 + [\alpha\gamma]B_3 + \ldots\}\,II\\
&-\{[\alpha\alpha]C_1 + [\alpha\beta]C_2 + [\alpha\gamma]C_3 + \ldots\}\,III\\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta y = &-\{[\alpha\beta]A_1 + [\beta\beta]A_2 + [\beta\gamma]A_3 + \ldots\}\,I\\
&-\{[\alpha\beta]B_1 + [\beta\beta]B_2 + [\beta\gamma]B_3 + \ldots\}\,II\\
&-\{[\alpha\beta]C_1 + [\beta\beta]C_2 + [\beta\gamma]C_3 + \ldots\}\,III\\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta z = &-\{[\alpha\gamma]A_1 + [\beta\gamma]A_2 + [\gamma\gamma]A_3 + \ldots\}\,I\\
&-\{[\alpha\gamma]B_1 + [\beta\gamma]B_2 + [\gamma\gamma]B_3 + \ldots\}\,II\\
&-\{[\alpha\gamma]C_1 + [\beta\gamma]C_2 + [\gamma\gamma]C_3 + \ldots\}\,III\\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (128)$$

Ciò posto sieno $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\sigma$ gli errori residuali delle equazioni di condizione (124) ottenuti sostituendo nei primi membri di queste ad $x, y, z, \ldots$ i loro valori prossimi $x_0, y_0, z_0 \ldots$ in modo che si abbia:

$$\begin{aligned}
&A_1 x_0 + A_2 y_0 + A_3 z_0 + \ldots + L_1 = w_1\\
&B_1 x_0 + B_2 y_0 + B_3 z_0 + \ldots + L_2 = w_2\\
&C_1 x_0 + C_2 y_0 + C_3 z_0 + \ldots + L_3 = w_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Con queste notazioni, introducendo nelle (124) in luogo di $x, y, z \ldots$ le nuove incognite del problema $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots$, si ottengono le nuove condizioni

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + A_3 \Delta z + \ldots + w_1 = 0\\
&B_1 \Delta x + B_2 \Delta y + B_3 \Delta z + \ldots + w_2 = 0\\
&C_1 \Delta x + C_2 \Delta y + C_3 \Delta z + \ldots + w_3 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

che equivalgono alle (124) medesime, e che, sostituendovi a Δx, $\Delta y, \Delta z, \ldots$ i loro valori dati dalle (128) in funzione dei σ cor-

relativi *I, II, III,...* incogniti, formano un sistema di σ equazioni, dalle quali questi ultimi rimangono determinati.

Eseguendo la suddetta sostituzione e ponendo per semplicità di notazione:

$$
\begin{aligned}
[A\,A] &= -A_1A_1[\alpha\alpha] - 2A_1A_2[\alpha\beta] - 2A_1A_3[\alpha\gamma] - \dots \\
&\quad - A_2A_2[\beta\beta] - 2A_2A_3[\beta\gamma] - \dots \\
&\quad - A_3A_3[\gamma\gamma] - \dots \\
&\quad - \dots \\
[A\,B] &= -A_1B_1[\alpha\alpha] - (A_1B_2+A_2B_1)[\alpha\beta] - (A_1B_3+A_3B_1)[\alpha\gamma] - \dots \\
&\quad - A_2B_2[\beta\beta] - (A_2B_3+A_3B_2)[\beta\gamma] - \dots \\
&\quad - A_3B_3[\gamma\gamma] - \dots \\
&\quad - \dots \\
[A\,C] &= -A_1C_1[\alpha\alpha] - (A_1C_2+A_2C_1)[\alpha\beta] - (A_1C_3+A_3C_1)[\alpha\gamma] - \dots \\
&\quad - A_2C_2[\beta\beta] - (A_2C_3+A_3C_2)[\beta\gamma] - \dots \\
&\quad - A_3C_3[\gamma\gamma] - \dots \\
&\quad - \dots \\
[B\,B] &= -B_1B_1[\alpha\alpha] - 2B_1B_2[\alpha\beta] - 2B_1B_3[\alpha\gamma] - \dots \\
&\quad - B_2B_2[\beta\beta] - 2B_2B_3[\beta\gamma] - \dots \\
&\quad - B_3B_3[\gamma\gamma] - \dots \\
&\quad - \dots \\
[B\,C] &= -B_1C_1[\alpha\alpha] - (B_1C_2+B_2C_1)[\alpha\beta] - (B_1C_3+B_3C_1)[\alpha\gamma] - \dots \\
&\quad - B_2C_2[\beta\beta] - (B_2C_3+B_3C_2)[\beta\gamma] - \dots \\
&\quad - B_3C_3[\gamma\gamma] - \dots \\
&\quad - \dots \\
[C\,C] &= -C_1C_1[\alpha\alpha] - 2C_1C_2[\alpha\beta] - 2C_1C_3[\alpha\gamma] - \dots \\
&\quad - C_2C_2[\beta\beta] - 2C_2C_3[\beta\gamma] - \dots \\
&\quad - C_3C_3[\gamma\gamma] - \dots \\
&\quad - \dots \\
&\dots\dots\dots

si trova il seguente sistema di equazioni normali correlanti:

$$\left.\begin{aligned} &[AA]\,I + [AB]\,II + [AC]\,III + \ldots + w_1 = 0 \\ &[AB]\,I + [BB]\,II + [AC]\,III + \ldots + w_2 = 0 \\ &[AC]\,I + [BC]\,II + [CC]\,III + \ldots + w_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

Riepilogando, il procedimento del calcolo di compensazione col metodo di *Bessel* è il seguente:

1.° Dalle equazioni generate (123) si deducono e si risolvono le equazioni normali e le corrispondenti equazioni del peso, senza tener conto delle condizioni (124).

2.° Si sostituiscono nelle (124) i valori prossimi $x_0, y_0, z_0, \ldots$ delle incognite e si deducono gli errori residuali $w_1, w_2, w_3, \ldots$.

3.° Si formano e si risolvono le equazioni normali correlanti (130) per ottenere i valori dei correlativi.

4.° Si introducono finalmente i valori dei correlativi nelle (128) e si calcolano le correzioni Δx, Δy $\Delta z, \ldots$ cercate.

59. L'errore medio corrispondente all'unità di peso si ottiene applicando, come nel metodo generale, la formula (126) del § 57, ed il calcolo di $[\delta\,\delta]$ può anche in questo caso essere semplificato, risparmiando di fare la sostituzione dei valori corretti delle incognite nelle equazioni generate a meno che non si voglia avere una riprova dell'esattezza dei calcoli già compiuti. Infatti ricordiamo che si ha identicamente, in generale (vedi n.° 44):

$$[v\,v] = [\lambda\,\lambda] + (x - x_0)\,\xi + (y - y_0)\,\eta + (z - z_0)\,\zeta + \ldots$$

essendo $[\lambda\,\lambda]$ la somma dei quadrati dei residui delle equazioni generate corrispondenti ai valori delle incognite dedotti dalle equazioni normali: tale quantità può esser nel caso nostro calcolata facilmente facendo astrazione dalle condizioni, ed applicando la solita formula (97^{bis}) del § 47. Introducendo in luogo di $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ i valori $\xi', \eta', \zeta', \ldots$ che corrispondono ai valori compensati delle incognite si avrà pertanto:

$$[\delta\,\delta] = [\lambda\,\lambda] + \Delta x \,.\, \xi' + \Delta y \,.\, \eta' + \Delta z \,.\, \zeta' + \ldots$$

È facile vedere come, a questa relazione, sostituendovi a Δx, Δy, $\Delta z, \ldots \xi', \eta', \zeta', \ldots$ le loro espressioni in funzione dei correlativi dedotte già al principio del precedente paragrafo, può esser

data la forma

$$\begin{aligned}[\delta\,\delta] = [\lambda\,\lambda] &- I\ \{[A\,A]\,I + [A\,B]\,II + [A\,C]\,III + \ldots\} \\ &- II\ \{[A\,B]\,I + [B\,B]\,II + [B\,C]\,III + \ldots\} \\ &- III\{[A\,C]\,I + [B\,C]\,II + [C\,C]\,III + \ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

da cui, tenendo conto delle equazioni correlanti (130), si trae finalmente:

$$[\delta\,\delta] = [\lambda\,\lambda] + I\,w_1 + II\,w_2 + III\,w_3 + , \ldots \qquad (131)$$

formula molto semplice e conveniente pel calcolo considerato.

Si può del resto anche ottenere per $[\delta\,\delta]$ un'altra espressione, indipendente dai correlativi ed analoga alla (97^{bis}) ed alla (127), eliminando i correlativi dalla (131) per mezzo delle (130) col solito metodo che è superfluo di ricordare. Per tal modo si ottiene

$$[\delta\,\delta] = [\lambda\,\lambda] - \frac{w_1^2}{[A\,A]} - \frac{[w_2,1]^2}{[B\,B,1]} - \frac{[w_3,2]^2}{[C\,C,2]} - \ldots \qquad (132)$$

60. *Bessel* non ha date le formule per ottenere i pesi delle incognite e delle loro funzioni, però è facile trovare il procedimento di calcolo conveniente al sistema di doppia risoluzione sopra esposto. Sia infatti la funzione lineare compensata

$$\begin{aligned}U_m = U_0 &+ F_1 x_0 + F_2 y_0 + F_3 z_0 + \ldots + \\ &+ F_1 \Delta x + F_2 \Delta y + F_3 \Delta z + \ldots\end{aligned}$$

Se in essa alle correzioni Δx, Δy, Δz, ... si sostituiscono i loro valori dati dalle correlate (128), e, per semplificare, si rappresentano con $[F\,A]$, $[F\,B]$, $[F\,C]$ le quantità costituite in modo analogo a $[A\,B]$, $[A\,C]$, $[B\,C]$, ... delle formule (129), si trova

$$\begin{aligned}U_m = U_0 &+ F_1 x_0 + F_2 y_0 + F_3 z_0 + \ldots + \\ &+ I\,[F\,A] + II\,[F\,B] + III\,[F\,C] + \ldots\end{aligned}$$

ove conviene eliminare i correlativi per mezzo delle equazioni correlanti (130), col metodo dei coefficienti indeterminati. Chiamando questi con R_1, R_2, R_3, ..., per le equazioni che li determinano si ottiene senza difficoltà:

$$\left.\begin{aligned}&[A\,A]\,R_1 + [A\,B]\,R_2 + [A\,C]\,R_3 + \ldots + [A\,F] = 0 \\ &[A\,B]\,R_1 + [B\,B]\,R_2 + [B\,C]\,R_3 + \ldots + [B\,F] = 0 \\ &[A\,C]\,R_1 + [B\,C]\,R_2 + [C\,C]\,R_3 + \ldots + [C\,F] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

per mezzo delle quali alla precedente espressione di U_m può esser data la forma:

$$U_m = U_0 + F_1 x_0 + F_2 y_0 + F_3 z_0 + \ldots [Rw] .$$

Esprimendo i w in funzione di x_0, y_0, z_0, ... avremo facilmente:

$$\begin{aligned} U_m = U_0 &+ x_0 (A_1 R_1 + B_1 R_2 + C_1 R_3 + \ldots + F_1) + \\ &+ y_0 (A_2 R_1 + B_2 R_2 + C_2 R_3 + \ldots + F_2) + \\ &+ z_0 (A_3 R_1 + B_3 R_2 + C_2 R_3 + \ldots + F_3) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ove non compariscono più che le quantità x_0, y_0, z_0, ... direttamente determinate da un sistema di equazioni normali. Evidentemente siamo quindi nel caso trattato nei §§ 45 e 47 di questo capitolo, e possono venire applicate senza più le formule generali quivi dedotte. Esporremo in seguito (quarta parte), il procedimento che conviene adottare nel calcolo, e le modificazioni che è vantaggioso di fare in questo caso alle formule suddette.

61. Siano date le n equazioni generate

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n &= v_n \end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

contenenti ω incognite, ed immaginiamo $(\omega + 1)\, n_1$ osservazioni ipotetiche $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{n_1}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_{n_1}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_{n_1}, \ldots \mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_{n_1}$ (che possono comprendere anche $\omega\, n_1$ quantità note, da esser considerate come osservazioni di peso infinitamente grande) tali che, costituendo le n_1 equazioni

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y + \mathfrak{c}_1 z + \ldots + \mathfrak{l}_1 &= \mathfrak{v}_1 \ldots \text{peso } \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{a}_2 x + \mathfrak{b}_2 y + \mathfrak{c}_2 z + \ldots + \mathfrak{l}_2 &= \mathfrak{v}_2 \ldots \text{» } \mathfrak{p}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathfrak{a}_{n_1} x + \mathfrak{b}_{n_1} y + \mathfrak{c}_{n_1} z + \ldots + \mathfrak{l}_{n_1} &= \mathfrak{v}_{n_1} \text{ » } \mathfrak{p}_{n_1} \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

e considerando queste come delle equazioni generate dalla forma

$$\mathfrak{a} x + \mathfrak{b} y + \mathfrak{c} z + \ldots . \mathfrak{l} = 0 ,$$

risolute col metodo dei minimi quadrati, diano le equazioni normali stesse che corrispondono alle (134), e supponiamo inoltre che anche gli errori medii corrispondenti all'unità di peso nei due sistemi (134),

(135) sieno eguali. In tal caso è chiaro che, quantunque i pesi delle singole equazioni ipotetiche possano esser diversi da quelli delle equazioni effettivamente generate, per la ricerca dei valori delle incognite, delle loro funzioni, e delle fiducie corrispondenti il sistema ipotetico (135) può sostituire completamente il sistema (134) e perciò essi possono esser detti *assolutamente equivalenti*. Le condizioni dell'equivalenza assoluta sono le seguenti:

$$\left.\begin{array}{lll} [\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}]_{n_1} = [a\,a]_n, & [\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]_{n_1} = [a\,b]_n, & [\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]_{n_1} = [a\,c]_n, \ldots \\ & [\mathfrak{p}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}]_{n_1} = [b\,b]_n, & [\mathfrak{p}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]_{n_1} = [b\,c]_n, \ldots \\ & & [\mathfrak{p}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}]_{n_1} = [c\,c]_n, \ldots \\ [\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{l}]_{n_1} = [a\,l]_n, & [\mathfrak{p}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{l}]_{n_1} = [b\,l]_n, & [\mathfrak{p}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{l}]_{n_1} = [c\,l]_n, \ldots \\ (n-\omega)\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]_{n_1} = (n_1-\omega)\,[v\,v] & & \end{array}\right\} \quad (136)$$

delle quali l'ultima è una relazione implicita fra le suddette osservazioni ipotetiche $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{l}$ e le osservazioni effettive $a, b, c, \ldots l$, come apparisce dalla formula generale (97^{bis}) del § 47 di questo capitolo. Le relazioni (136) sono in numero di $\frac{(\omega+1)\,\omega}{2}+\omega+1$ mentre le osservazioni ipotetiche sono $n_1(\omega+1)$; da ciò si conclude che dato un sistema qualunque di equazioni generate, si può sempre trovare un infinito numero di sistemi assolutamente equivalenti ad esso composti di un dato numero di equazioni, purchè questo numero sia maggiore di quello delle incognite. Quelli che sono composti di un numero $\omega+1$ equazioni possono essere chiamati sistemi di *massima precisione,* giacchè corrispondono al minimo valore che può prendere la quantità $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]$.

Il concetto di equivalenza assoluta può venire però anche esteso al caso in cui il numero delle equazioni ipotetiche (135) è eguale al numero delle incognite, perocchè, quantunque effettivamente sia allora impossibile di dedurre dalle osservazioni ipotetiche considerate l'errore medio corrispondente all'unità di peso delle (134), l'ultima delle condizioni (136), che si riferisce appunto all'eguaglianza degli errori medii unitarii dei due sistemi (134), (135) resta identicamente soddisfatta, mentre le altre condizioni (136) sono in numero minore delle osservazioni ipotetiche da considerare. Fa eccezione il caso di una sola incognita, nel quale per $n_1=\omega$ non vi ha che un unico sistema assolutamente equivalente ad un sistema osservato.

Per $n_1 = \omega$ i residui delle equazioni ipotetiche (135) divengono naturalmente tutti nulli; e il sistema di queste, che prende la forma

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y + \mathfrak{c}_1 z + \ldots \mathfrak{l}_1 = 0 \quad \text{peso } \mathfrak{p}_1 \\ &\mathfrak{a}_2 x + \mathfrak{b}_2 y + \mathfrak{c}_2 z + \ldots \mathfrak{l}_2 = 0 \quad \text{» } \mathfrak{p}_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathfrak{a}_\omega x + \mathfrak{b}_\omega y + \mathfrak{c}_\omega z + \ldots \mathfrak{l}_\omega = 0 \quad \text{» } \mathfrak{p}_\omega \end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

vien detto *totalmente equivalente* * al relativo sistema di equazioni generate, *rispetto alle quantità* x, y, z... I coefficienti $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,... delle incognite sogliono esser poi considerati come delle costanti teoretiche conosciute, ritenendo solo i termini noti $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, ... $\mathfrak{l}_\omega$ come delle osservazioni ipotetiche fatte coi pesi $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ... $\mathfrak{p}_\omega$ rispettivamente eguali a quelli da ascrivere alle corrispondenti equazioni.

62. È facile vedere come le equazioni risolventi di un dato sistema di equazioni generate costituiscono un sistema totalmente equivalente a questo ove se ne determinino convenientemente i pesi. Infatti se si pone:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]} y + \frac{[a\,c]}{[a\,a]} z + \ldots \frac{[a\,l]}{[a\,a]} &= 0 \ldots \quad \textit{peso} \quad [a\,a] \\ y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z + \ldots \frac{[bl.1]}{[bb.1]} &= 0 \ldots \quad \text{»} \quad [bb.1] \\ z + \ldots \frac{[cl.2]}{[cc.2]} &= 0 \ldots \quad \text{»} \quad [cc.2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \qquad (138)$$

e si considerano a loro volta queste relazioni come delle equazioni generate, ricostituendo le relative equazioni normali e tenendo conto del significato delle notazioni Gaussiane (vedi vol. I, pag. 380), si ricade nelle equazioni normali corrispondenti alle (134). Così ad esempio il coefficiente della z nella prima delle equazioni normali provenienti dalle (138) è dato da:

$$\frac{[a\,c]^2}{[a\,a]} + \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]} + [cc.2] = \frac{[a\,c]^2}{[a\,a]} + [cc.1] = [c\,c].$$

* In questa denominazione ed in quelle fra le successive che si riferiscono alla teoria della equivalenza delle osservazioni seguiamo HELMERT (V. *Die Ausgleichunghsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Leipzig, 1872) cui tale teoria è dovuta.

I termini noti delle (138) formano quindi un sistema di ω quantità che possono esser considerate come ω osservazioni dirette, fatte indipendentemente l'una dall'altra, ed equivalenti totalmente al sistema (134). Per semplicità di notazione rappresenteremo sempre con $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots \chi_\omega$ tali quantità ritenendo le lettere $l_1, l_2, l_3, \ldots l_\omega$ per indicare in generale ω osservazioni ipotetiche qualunque equivalenti alle (134) medesime, o, piuttosto, equivalenti in generale rispetto ad ω quantità determinate esperimentalmente in un modo qualsiasi. Le χ non sono dunque per noi che un sistema particolare di valori degli l.

Le espressioni delle incognite $x, y, z, \ldots$ in funzione delle osservazioni ipotetiche indipendenti $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots \chi_\omega$ si deducono dalle (138) per mezzo di sostituzioni successive. Se alle consuete notazioni Gaussiane, indicate nel § 41 di questo capitolo si aggiungono le analoghe

$$\left.\begin{array}{l}
[a\,c] - \dfrac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}[a\,b] = [a\,c.1] \\
[a\,d] - \dfrac{[b\,d.1]}{[b\,b.1]}[a\,b] = [a\,d.1] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[a\,d.1] - \dfrac{[c\,d.2]}{[c\,c.2]}[a\,c.1] = [a\,d.2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[b\,d.1] - \dfrac{[c\,d.2]}{[c\,c.2]}[b\,c.1] = [b\,d.2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (139)$$

le (138) danno infatti senza difficoltà:

$$\left.\begin{array}{rl}
x = & -\chi_1 + \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}\chi_2 + \dfrac{[a\,c.1]}{[a\,a]}\chi_3 + \dfrac{[a\,d.2]}{[a\,a]}\chi_4 + \ldots \\
y = & -\chi_2 + \dfrac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}\chi_3 + \dfrac{[b\,d.2]}{[b\,b.1]}\chi_4 + \ldots \\
z = & -\chi_3 + \dfrac{[c\,d.2]}{[c\,c.2]}\chi_4 + \ldots \\
t = & -\chi_4 + \ldots \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (140)$$

ove si ha

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{[a\,l\,]}{[a\,a\,]}\cdots \quad peso \quad [a\,a\,] \\
\chi_2 &= \frac{[b\,l.1]}{[b\,b.1]}\cdots \quad » \quad [b\,b.1] \\
\chi_3 &= \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]}\cdots \quad » \quad [c\,c.2] \\
\chi_4 &= \frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}\cdots \quad » \quad [d\,d.3] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

63. Per comprendere quale grandissimo vantaggio si trae dalla considerazione dell'equivalenza nella soluzione della maggior parte dei problemi in cui si hanno da determinare indirettamente coll'esperienza i valori di certe quantità e delle fiducie analitiche che, dietro le osservazioni fatte, debbono essere loro accordate, basta osservare che esprimendo siffatte quantità in funzione di osservazioni ipotetiche equivalenti totalmente alle effettive, i suddetti problemi si possono risolvere coi soli criterii esposti nella prima parte di questo capitolo. A mostrare quanto ciò semplifichi non solo i calcoli, ma anche il metodo deduttivo da applicare, ci varremo di un esempio che può in pari tempo chiarire sempre più il concetto di equivalenza.

Sia da determinare, come nel § 47 di questo capitolo, il peso della funzione lineare

$$U_m = U_0 + L_1 x_0 + L_2 y_0 + L_3 z_0 + \cdots$$

ove x_0, y_0, z_0, ... rappresentano i valori più probabili delle quantità x, y, z ..., determinati da un sistema di equazioni generate corrispondente alle ridotte (138). Sostituendo ad x_0, y_0, z_0 ... i loro valori (140) in funzione delle χ_1, χ_2, χ_3 ... e tenendo conto delle notazioni (99) stabilite nel § 47 suddetto, si trova dopo facili riduzioni:

$$U_m = U_0 - L_1\chi_1 - [L_2,1]\chi_2 - [L_3,2]\chi_3 - [L_4,3]\chi_4 \cdots$$

Le quantità L_1, $[L_2,1]$, $[L_3,2]$ ... dietro quanto abbiamo sopra esposto debbono essere considerate come delle costanti note e le χ_1, χ_2, χ_3, ... come delle osservazioni ipotetiche indipendenti fatte

rispettivamente coi pesi $[a\,a]$, $[b\,b.1]$, $[c\,c.2]$, ... Se rappresentiamo, al solito, con m l'errore medio corrispondente all'unità di peso, gli errori medii delle sopraddette osservazioni saranno:

$$\frac{m}{\sqrt{[a\,a]}},\quad \frac{m}{\sqrt{[b\,b.1]}},\quad \frac{m}{\sqrt{[c\,c.2]}},\ldots$$

e perciò l'errore medio m_u della determinazione U_m si otterrà [§ 26, formula (34)] per mezzo dell'espressione:

$$m_u = m\sqrt{\frac{L_1^2}{[a\,a]} + \frac{[L_2,1]^2}{[b\,b.1]} + \frac{[L_3,2]^2}{[c\,c.2]} + \frac{[L_4,3]^2}{[d\,d.3]} + \ldots}$$

ed il peso P_u dalla:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{L_1^2}{[a\,a]} + \frac{[L_2,1]^2}{[b\,b.1]} + \frac{[L_3,2]^2}{[c\,c.2]} + \frac{[L_4,3]^2}{[d\,d.3]} + \ldots,$$

formule che già abbiamo altrove dedotte con un metodo molto più complicato (§ 47).

64. Il concetto di equivalenza può venire generalizzato considerando, anzichè tutte le incognite x, y, z, ... indirettamente determinate, un numero ν qualunque di esse, o di loro funzioni, ed in corrispondenza a queste un ugual numero di osservazioni ipotetiche, le quali, per mezzo di un sistema di equazioni analoghe alle (137), diano per le dette incognite o funzioni gli stessi valori e gli stessi pesi che ad esse ascrivono le osservazioni effettivamente fatte per determinarle. In tal caso le ν osservazioni ipotetiche sono dette *parzialmente equivalenti* alle osservazioni effettive rispetto alle ν incognite o funzioni speciali considerate. Le equazioni analoghe alle (137) che debbono dare l'equivalenza parziale rispetto alle ν funzioni qualunque U_1, U_2, U_3, ... U_ν delle ω incognite x, y, z, ... determinate esperimentalmente per mezzo delle equazioni generate (134) sono dunque, supposte le già ridotte all'unità di peso, della forma:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 U_1 + b_1 U_2 + c_1 U_3 + \ldots l_1 = o \quad \text{peso } 1\\
&a_2 U_1 + b_2 U_2 + c_2 U_3 + \ldots l_2 = o \quad \text{»}\\
&a_3 U_1 + b_3 U_2 + c_3 U_3 + \ldots l_3 = o \quad \text{»}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_\nu U_1 + b_\nu U_2 + c_\nu U_3 + \ldots l_\nu = o \quad \text{»}
\end{aligned}\right\} \qquad (142)$$

ove i coefficienti delle U debbono esser considerati come delle costanti, ed i termini noti come le osservazioni equivalenti al dato

sistema (134). Per dedurre le condizioni di equivalenza alle quali tutte queste quantità debbono essere subordinate si può partire* dalla funzione lineare

$$F = \theta_0 + \theta_1 U_1 + \theta_2 U_2 + \theta_3 U_3 + \ldots \theta_\nu U_\nu + \ldots \qquad (143)$$

considerando in essa le quantità $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\nu$ come dei coefficienti indeterminati, ed osservare che per la equivalenza parziale considerata è necessario e sufficiente che, qualunque siano i valori di questi coefficienti, il valore ed il peso ottenuto per F introducendo nella precedente espressione le osservazioni ipotetiche l in luogo delle funzioni U, siano eguali rispettivamente al valore ed al peso che ad F assegnano le equazioni generate (134).

Eliminando per mezzo delle (142) le funzioni U dalla (143) col metodo dei coefficienti indeterminati e rappresentando questi con $K_1, K_2, K_3, \ldots K_\nu$, si ottiene per il sistema di equazioni che determinano tali ausiliarie:

$$\left.\begin{aligned} a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 + \ldots a_\nu K_\nu + \theta_1 &= 0 \\ b_1 K_1 + b_2 K_2 + b_3 K_3 + \ldots b_\nu K_\nu + \theta_2 &= 0 \\ c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 + \ldots c_\nu K_\nu + \theta_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \qquad (144)$$

mentre dalla (143) si deduce:

$$F = \theta_0 + K_1 l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3 + \ldots K_\nu l_\nu .$$

Di qui risulta che il peso P_F della determinazione di F, fatta per mezzo delle osservazioni ipotetiche l, delle quali, dietro le nostre premesse, i pesi sono tutti eguali all'unità, è dato da:

$$P_F = \frac{1}{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + \ldots K_\nu^2} .$$

Per altro è chiaro che colla risoluzione algebrica delle (144) rispetto alle ausiliarie K si possono esprimere queste linearmente rispetto alle quantità indeterminate θ, dimodochè si avrà

$$\begin{aligned} K_1 &= M_1' \theta_1 + M_1'' \theta_2 + M_1''' \theta_3 + \ldots \\ K_2 &= M_2' \theta_1 + M_2'' \theta_2 + M_2''' \theta_3 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_\nu &= M_\nu' \theta_1 + M_\nu'' \theta_2 + M_\nu''' \theta_3 + \ldots \end{aligned}$$

* Vedi F. R. Helmert, *Die Ausgleichungsrechnung*, ecc. Leipzig, 1872.

i coefficienti M rappresentando delle funzioni di forma nota delle costanti di equivalenza a, b, c, ... Ciò posto, dalla precedente espressione del peso P_F si trae

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{P_F} = {} & \theta_1^2 (M_1'^2 + M_2'^2 + M_3'^2 + \ldots\ldots M_\nu'^2) + \\
& + \theta_2^2 (M_1''^2 + M_2''^2 + M_3''^2 + \ldots\ldots M_\nu''^2) + \\
& + \theta_3^2 (M_1'''^2 + M_2'''^2 + M_3'''^2 + \ldots\ldots M_\nu'''^2) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2\,\theta_1\theta_2 (M_1' M_1'' + M_2' M_2'' + M_3' M_3'' + \ldots) + \\
& + 2\,\theta_1\theta_3 (M_1' M_1''' + M_2' M_2''' + M_3' M_3''' + \ldots) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2\,\theta_2\theta_3 (M_1'' M_1''' + M_2'' M_2''' + M_3'' M_3''' + \ldots) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (145)$$

e d'altra parte se si rappresentano con F_1, F_2, F_3, ... F_ω i valori che assumono le derivate parziali di primo ordine della funzione F prese rispetto alle incognite x, y, z, ... per $x = y = z = \ldots = 0$, e si applica la formula (100) del § 47 di questo capitolo alla ricerca del peso di P_F si trova

$$\frac{1}{P_F} = \frac{F^2}{[a\,a]} + \frac{[F_2, 1]^2}{[b\,b.1]} + \frac{[F_3, 2]^2}{[c\,c.2]} + \ldots$$

Ponendo ancora

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_0 = L_1', \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_0 = L_1'', \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_0 L_1''', \ldots$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_0 = L_2', \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)_0 = L_2'', \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)_0 = L_2''', \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

nella ipotesi che l'indice alle parentesi significhi che nelle derivate indicate si è fatto $x = y = z = \ldots 0$, e facendo uso di notazioni analoghe alle (99), è facile vedere che si ha:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \theta_1 L_1' + \theta_2 L_2' + \theta_3 L_3' + \ldots \\
[F_2, 1] &= \theta_1 [L_1'', 1] + \theta_2 [L_2'', 1] + \theta_3 [L_3'', 1] + \ldots \\
[F_3, 1] &= \theta_1 [L_1''', 2] + \theta_2 [L_2''', 2] + \theta_3 [L_3''', 2] + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ed in conseguenza:

$$\frac{1}{P_F} = \theta_1^2 \left\{ \frac{L_1'^2}{[aa]} + \frac{[L_1'',1]^2}{[bb.1]} + \frac{[L_1''',2]^2}{[cc.2]} + \dots \right\} +$$

$$+ \theta_2^2 \left\{ \frac{L_2'^2}{[aa]} + \frac{[L_2'',1]^2}{[bb.1]} + \frac{[L_2''',2]^2}{[cc.2]} + \dots \right\} +$$

$$+ \theta_3^2 \left\{ \frac{L_3'^2}{[aa]} + \frac{[L_3'',1]^2}{[bb.1]} + \frac{[L_3''',2]}{[cc.2]} + \dots \right\} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ 2\theta_1\theta_2 \left\{ \frac{L_1'L_2'}{[aa]} + \frac{[L_1'',1][L_2'',1]}{[bb.1]} + \frac{[L_1''',2][L_2''',2]}{[cc.2]} + \dots \right\} +$$

$$+ 2\theta_1\theta_3 \left\{ \frac{L_1'L_3'}{[aa]} + \frac{[L_1'',1][L_3'',1]}{[bb.1]} + \frac{[L_1''',2][L_3''',2]}{[cc.2]} + \dots \right\} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ 2\theta_2\theta_3 \left\{ \frac{L_2'L_3'}{[aa]} + \frac{[L_2'',1][L_3'',1]}{[bb.1]} + \frac{[L_2''',2][L_3''',2]}{[cc.2]} + \dots \right\} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si può osservare che in questa formula i coefficienti dei termini quadratici rispetto ai θ sono le inverse dei pesi che in conseguenza delle equazioni generate (134) si ottengono per le determinazioni di U_1, U_2, U_3, ... rispettivamente, dalla solita formula (100). Per semplicità di notazione rappresenteremo sempre in quanto segue con Q l'inversa del peso P_u di una funzione qualunque U, in modo che sarà:

$$\frac{1}{P_{u_1}} = Q_1, \quad \frac{1}{P_{u_2}} = Q_2, \dots \frac{1}{P_{u_\nu}} = Q_\nu,$$

e, per analogia, porremo inoltre:

$$Q_{1,2} = \frac{L_1'L_2'}{[aa]} + \frac{[L_1'',1][L_2'',1]}{[bb.1]} + \frac{[L_1''',2][L_2''',2]}{[cc.2]} + \dots$$

$$Q_{1,3} = \frac{L_1'L_3'}{[aa]} + \frac{[L_1'',1][L_3'',1]}{[bb.1]} + \frac{[L_1''',2][L_3''',2]}{[cc.2]} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_{2,3} = \frac{L_2'L_3'}{[aa]} + \frac{[L_2'',1][L_3'',1]}{[bb.1]} + \frac{[L_2''',2][L_3''',2]}{[cc.2]} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Così l'espressione precedente di $\frac{1}{P_F}$ diviene:

$$Q_F = \frac{1}{P_F} = \theta_1^2 Q_1 + \theta_2^2 Q_2 + \theta_3^2 Q_3 + \ldots +$$

$$+ 2\theta_1\theta_2 Q_{1\cdot 2} + 2\theta_1\theta_3 Q_{1\cdot 3} + \ldots + 2\theta_2\theta_3 Q_{2\cdot 3} + \ldots$$

e questa deve dare per $\frac{1}{P_F}$, qualunque siano le costanti indeterminate $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, identicamente lo stesso valore della (145). Ne consegue che devesi avere separatamente

$$\left.\begin{aligned}
&M_1'^2 + M_2'^2 + M_3'^2 + \ldots M_\nu'^2 \ldots\ldots = Q_1 \\
&M_1''^2 + M_2''^2 + M_3''^2 + \ldots M_\nu''^2 \ldots\ldots = Q_2 \\
&M_1'''^2 + M_2'''^2 + M_3'''^2 + \ldots M_\nu'''^2 \ldots\ldots = Q_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&M_1' M_1'' + M_2' M_2'' + M_3' M_3'' + \ldots = Q_{1\cdot 2} \\
&M_1' M_1''' + M_2' M_2''' + M_3' M_3''' + \ldots = Q_{1\cdot 3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&M_1'' M_1''' + M_2'' M_2''' + M_3'' M_3'' + \ldots = Q_{2\cdot 3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (146)$$

e queste sono le $\frac{\nu^2 + \nu}{2}$ condizioni di equivalenza cercate, le quali legano i ν^2 coefficienti $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ alle osservazioni dirette che compariscono implicitamente nelle equazioni generate (134). Scelto poi un sistema di costanti $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ compatibile colle (146), restano pure, dalle equazioni fondamentali (142), determinati i valori delle osservazioni l parzialmente equivalenti rispetto alle $U_1, U_2, \ldots U_\nu$.

65. Speciale interesse, per le importanti applicazioni delle quali è suscettibile, presenta la teoria dei sistemi di osservazioni ipotetiche parzialmente equivalenti rispetto a due sole funzioni U_1, U_2. Le formule generali (146) di corrispondenza si riducono in questo caso alle seguenti:

$$\begin{aligned}
M_1'^2 \quad + M_2'^2 \quad &= Q_1 \\
M_1''^2 \quad + M_2''^2 \quad &= Q_2 \\
M_1' M_1'' + M_2' M_2'' &= Q_{1\cdot 2}
\end{aligned}$$

mentre, risolvendo le (144) per dedurre i valori degli M, si trae:

$$M_1' = \frac{-b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \quad M_1'' = \frac{a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2},$$

$$M_2' = \frac{b_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \quad M_2'' = \frac{-a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

Se si pone per brevità

$$\Delta = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$$

si ottengono quindi le condizioni:

$$[a\,a] = \Delta\, Q_2, \quad [a\,b] = -\Delta\, Q_{1\cdot 2}, \quad [b\,b] = \Delta\, Q_1.$$

È facile vedere come la quantità Δ è costante qualunque sia il sistema equivalente rispetto ad U_1, U_2 prescelto: si ha infatti

$$\begin{aligned}\Delta &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2\, a_1 a_2 b_1 b_2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - 2\, a_1 a_2 b_1 b_2 \\ &= [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]^2,\end{aligned}$$

dalla quale relazione, introducendo in luogo di $[a\,a]$, $[b\,b]$, $[a\,b]$ i loro valori in funzione di Q_1, Q_2, $Q_{1\cdot 2}$, si deduce:

$$\Delta = \frac{1}{Q_1 Q_2 - Q_{1\cdot 2}^2}.$$

Perciò le precedenti formule di equivalenza si riducono a:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= \frac{Q_2}{Q_1 Q_2 - Q_{1\cdot 2}^2} \\ b_1^2 + b_2^2 &= \frac{Q_1}{Q_1 Q_2 - Q_{1\cdot 2}^2} \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 &= -\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_1 Q_2 - Q_{1\cdot 2}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (147)$$

Se per mezzo di queste relazioni si eliminano a_2, b_2 dalla

$$\Delta = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = \frac{1}{Q_1 Q_2 - Q_{1\cdot 2}^2}$$

si trova l'equazione:

$$a_1^2 Q_1 + b_1^2 Q_2 + 2 a_1 b_1 Q_{1\cdot 2} - 1 = 0$$

e questa risoluta rispetto a b_1 dà:

$$b_1 = \frac{-a_1 Q_{1\cdot 2} \pm \sqrt{a_1^2 Q^2_{1\cdot 2} - Q_2 (a_1^2 Q_1 - 1)}}{Q_2}$$

espressione alla quale, osservando come dalla prima delle (147) si ha

$$a_1^2 Q_1 Q_2 - a_1^2 Q^2_{1\cdot 2} - Q_2 = a_2^2 (Q^2_{1\cdot 2} - Q_1 Q_2),$$

può esser data la forma seguente:

$$b_1 = -\frac{a_1 Q_{1\cdot 2}}{Q_2} \pm \frac{a_2}{Q_2} \sqrt{Q_1 Q_2 - Q^2_{1\cdot 2}}.$$

Analogamente si troverebbe

$$b_2 = -\frac{a_2 Q_{1\cdot 2}}{Q_2} \mp \frac{a_1}{Q_2} \sqrt{Q_1 Q_2 - Q^2_{1\cdot 2}}:$$

però è da porre mente che al segno superiore del secondo membro di questa ultima relazione corrisponde il segno superiore della precedente e reciprocamente, poichè se si sostituiscono i valori trovati per b_1 e b_2 nella terza delle equazioni (147) si trova:

$$-\frac{[a\,a]\,.\,Q_{1\cdot 2}}{Q_2} + \frac{a_1 a_2}{Q_2}\left(\pm\sqrt{Q_1 Q_2 - Q^2_{1\cdot 2}} \mp \sqrt{Q_1 Q_2 - Q^2_{1\cdot 2}}\right) = -\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_1 Q_2 - Q^2_{1\cdot 2}}$$

che mostra come la prima delle (147) non rimane soddisfatta, a meno che non si presupponga la corrispondenza di segni sopra indicata.

Si ha dunque:

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_2} = \pm \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\sqrt{Q_1 Q_2 - Q^2_{1\cdot 2}}}{Q_2}$$

$$\frac{b_2}{a_2} + \frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_2} = \mp \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{\sqrt{Q_1 Q_2 - Q^2_{1\cdot 2}}}{Q_2}$$

e quindi:

$$\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_2}\right)\left(\frac{b_2}{a_2} + \frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_2}\right) = \left(\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_2}\right)^2 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

da cui si ricava:

$$\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2} + \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}\right)\frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_2} + \frac{Q_1}{Q_2} = 0. \qquad (A)$$

Questa relazione conduce a un teorema importante: ed infatti se nelle equazioni fondamentali di equivalenza (142), che, nel caso di due sole funzioni qui considerato, si riducono alle

$$a_1 U_1 + b_1 U_2 + l_1 = 0$$
$$a_2 U_1 + b_2 U_2 + l_2 = 0,$$

si considerano U_1, U_2 come le coordinate correnti di due rette in un piano riferite a due assi ortogonali e determinate dalle equazioni sopra scritte, le quantità $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ vengono a rappresentare i loro coefficienti angolari, per modo che, indicando con α, β gli angoli formati rispettivamente dalle due rette coll'asse lungo cui sono contate le coordinate U_1, sarà

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{b_1}{a_1}, \quad \operatorname{cotg} \beta = -\frac{b_2}{a_2}.$$

La relazione (A) può dunque esser scritta come segue

$$\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta) \frac{Q_{1\cdot 2}}{Q_2} + \frac{Q_1}{Q_2} = 0$$

che è l'equazione caratteristica fra gli angoli α e β formati coll'asse delle ascisse da una coppia di diametri coniugati relativi ad un'ellisse, in cui gli assi principali formano cogli assi coordinati gli angoli Θ_1, Θ_2 dati dalla relazione

$$\operatorname{cotg} 2\Theta = \frac{Q_1 - Q_2}{2 Q_{1\cdot 2}}$$

e stanno fra loro nel rapporto

$$\frac{\sqrt{Q_2 + Q_1 \operatorname{cotg} \Theta_1}}{\sqrt{Q_2 + Q_1 \operatorname{cotg} \Theta_2}}.$$

Ciascuna di siffatte ellissi fornisce un numero infinito di coppie di rette che possono dirsi *parzialmente equivalenti al sistema* di funzioni U_1, U_2, giacchè ciascuna coppia considerata isolatamente dà un sistema di osservazioni ipotetiche parzialmente equivalenti rispetto ad U_1, U_2, per mezzo delle relazioni

$$\cos \alpha = \pm \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$\cos \beta = \pm \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \operatorname{sen} \beta = \pm \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$L_1 = \pm \frac{l_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \qquad L_2 \pm \frac{l_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

essendo L_1, L_2 le distanze fra l'origine delle coordinate e le due rette della coppia che si considera.

66. Premessi questi elementi della teoria dell'equivalenza torniamo ora alla compensazione delle determinazioni indirette e, più specialmente, al metodo di calcolo esposto nel § 58 trattando della risoluzione delle equazioni fondamentali (125). Ritenendo le notazioni stabilite nel paragrafo suddetto si ha:

$$\left.\begin{aligned} x_0 + \frac{[ab]}{[aa]} y_0 + \frac{[ac]}{[aa]} z_0 + \ldots + \frac{[al]}{[aa]} &= 0 \\ y_0 + \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z_0 + \ldots + \frac{[bl.1]}{[bb.1]} &= 0 \\ z_0 + \ldots + \frac{[cl.2]}{[cc.2]} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (148)$$

mentre, per quanto abbiamo esposto nel § 62, le quantità

$$\frac{[al]}{[aa]} = \gamma_1, \quad \frac{[bl.1]}{[bb.1]} = \gamma_2, \quad \frac{[cl.2]}{[cc.2]} = \gamma_3, \ldots$$

possono esser considerate, rispetto ad $x_0, y_0, z_0, \ldots$ e subordinatamente alle equazioni soprascritte, come ω osservazioni ipotetiche fatte coi pesi rispettivi $[aa]$, $[bb.1]$, $[cc.2]$,... e totalmente equivalenti al sistema delle equazioni generate (123). I valori x_0, y_0, z_0,... introdotti nelle equazioni (124) danno gli errori residuali $w_1, w_2, w_3 \ldots$ che sono legati alle correzioni più probabili $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ (vedi § 58) per mezzo delle condizioni

$$\left.\begin{aligned} A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + A_3 \Delta z + \ldots + w_1 &= 0 \\ B_1 \Delta x + B_2 \Delta y + B_3 \Delta z + \ldots + w_2 &= 0 \\ C_1 \Delta x + C_2 \Delta y + C_3 \Delta z + \ldots + w_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (149)$$

Se ora in luogo di $x_0, y_0, z_0 \ldots$ si introducono nelle (148) i valori corretti $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$, $z_0 + \Delta z \ldots$, queste non restano più soddisfatte, ma per i secondi membri si ottengono dei residui che rappresenteremo con $r_1, r_2, r_3, \ldots$, ed è evidente che le quantità

$$\gamma_1 - r_1, \quad \gamma_2 - r_2, \quad \gamma_3 - r_3, \ldots$$

considerate come osservazioni ipotetiche fatte coi rispettivi pesi $[aa]$, $[bb.1]$, $[cc.2]$, ... costituiscono un sistema totalmente equivalente rispetto alle determinazioni $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$, $z_0+\Delta z$, ... medesime. Le equazioni (148) danno frattanto

$$\left.\begin{aligned} \Delta x+\frac{[ab]}{[aa]}\Delta y+\frac{[ac]}{[aa]}\Delta z+\ldots &= r_1 \quad peso \quad [aa] \\ \Delta y+\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\Delta z+\ldots &= r_2 \quad » \quad [bb.1] \\ \Delta z+\ldots &= r_3 \quad » \quad [cc.2] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (150)$$

dalle quali, analogamente a quanto si è visto nel § 62 [formula (140)], si trae:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= r_1-\frac{[ab]}{[aa]}r_2-\frac{[ac.1]}{[aa]}r_3-\ldots \\ \Delta y &= r_2-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}r_3-\ldots \\ \Delta z &= r_3-\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (151)$$

Combinando queste colla (149) e facendo uso delle solite notazioni Gaussiane è facile ottenere

$$\left.\begin{aligned} A_1r_1+[A_2,1]r_2+[A_3,2]r_3+\ldots+w_1 &= 0 \\ B_1r_1+[B_2,1]r_2+[B_3,2]r_3+\ldots+w_2 &= 0 \\ C_1r_1+[C_2,1]r_2+[C_3,2]r_3+\ldots+w_3 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} * (152)$$

ed è chiaro che queste equivalgono alle condizioni fondamentali (124) date, se non che le r_1, r_2, r_3, ... rappresentano qui delle correzioni da farsi alle osservazioni ipotetiche dirette χ_1, χ_2, χ_3, ...

---

* Ad esempio, dalla prima delle (149) per il coefficiente di r_3 si trova:

$$A_3-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}A_2-\frac{[ac.1]}{[aa]}A_1=A_3-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}A_2-\frac{[ac]}{[aa]}A_1+\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\frac{[ab]}{[aa]}A_1=$$

$$=A_3-\frac{[ac]}{[aa]}A_1-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\left(A_2-\frac{[ab]}{[aa]}A_1\right)=[A_3,1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[A_2,1]=[A_3\ 2]$$

dietro il calcolo di compensazione, ed alla loro ricerca possono essere quindi applicati i criterii già esposti nel paragrafo 52. Le formule generali (113), in questo caso in cui si ha

$$p_1 = [a\,a], \quad p_2 = [b\,b\,.\,1], \quad p_3 = [c\,c\,.\,2], \ldots$$

danno le equazioni correlate:

$$\left.\begin{aligned} r_1\,[a\,a] &= A_1 I + B_1 II + C_1 III + \ldots \\ r_2\,[b\,b\,.\,1] &= [A_2,1]\,I + [B_2,1]\,II + [C_2,1]\,III + \ldots \\ r_3\,[c\,c\,.\,2] &= [A_3,2]\,I + [B_3,2]\,II + [C_3,2]\,III + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (153)$$

Ponendo poi, per uniformità di notazione,

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{[A]\,[A]}{p}\right] &= \frac{A_1 A_1}{[a\,a]} + \frac{[A_2,1]\,[A_2,1]}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[A_3,2]\,[A_3,2]}{[c\,c\,.\,2]} + \ldots \\ \left[\frac{[A]\,[B]}{p}\right] &= \frac{A_1 B_1}{[a\,a]} + \frac{[A_2,1]\,[B_2,1]}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[A_3,2]\,[B_3,2]}{[c\,c,2]} + \ldots \\ \left[\frac{[A]\,[C]}{p}\right] &= \frac{A_1 C_1}{[a\,a]} + \frac{[A_2,1]\,[C_2,1]}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[A_3,2]\,[C_3,2]}{[c\,c,2]} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{[B]\,[B]}{p}\right] &= \frac{B_1 B_1}{[a\,a]} + \frac{[B_2,1]\,[B_2,1]}{[b\,b,1]} + \frac{[B_3,2]\,[B_3,2]}{[c\,c,2]} + \ldots \\ \left[\frac{[B]\,[C]}{p}\right] &= \frac{B_1 C_1}{[a\,a]} + \frac{[B_2,1]\,[C_2,1]}{[b\,b,1]} + \frac{[B_3,2]\,[C_3,2]}{[c\,c.2]} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

si ottengono le equazioni normali correlanti analoghe alle (114):

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{[A]\,[A]}{p}\right] I + \left[\frac{[A]\,[B]}{p}\right] II + \left[\frac{[A]\,[C]}{p}\right] III + \ldots + w_1 &= 0 \\ \left[\frac{[A]\,[B]}{p}\right] I + \left[\frac{[B]\,[B]}{p}\right] II + \left[\frac{[B]\,[C]}{p}\right] III + \ldots + w_2 &= 0 \\ \left[\frac{[A]\,[C]}{p}\right] I + \left[\frac{[B]\,[C]}{p}\right] II + \left[\frac{[C]\,[C]}{p}\right] III + \ldots + w_3 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (155)$$

che determinano i correlativi *I, II, III,* ... Ottenuti questi, dalle (153) si possono calcolare le correzioni ausiliarie $r_1, r_2, r_3, \ldots$ che introdotte nelle (151) o nelle (150) danno le correzioni Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ più probabili cercate.

67. Per calcolare l'errore medio corrispondente all'unità di peso si potrebbe fare uso della solita formula (126) del § 57 perocchè, ottenuti i valori compensati delle incognite, i residui δ corrispondenti a questi possono essere ricavati dalle equazioni generate (123): ma vi ha un'espressione assai più della (126) conveniente al procedimento di calcolo esposto più sopra. Rappresentiamo infatti con δ_0', δ_0'', δ_0''', ... i residui che si ottengono dalle (123) sostituendovi alle incognite i loro valori x_0, y_0, z_0, ... non compensati, e, ritenute le notazioni stabilite nella seconda parte di questo capitolo, siano ξ', η_1', ζ_2', ... i valori che assumono ξ, η_1, ζ_2, ... (vedi vol. I, pag. 381) per

$$x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y,\ z = z_0 + \Delta z, \ldots$$

Applicando la formula generale (97) (vedi vol. I, pag. 397) e ricordando che, per la (97^{bis}), si ha $[\delta_0\,\delta_0] = [ll.\omega]$, si trova:

$$[\delta\,\delta] = [\delta_0\,\delta_0] + \frac{\xi'^2}{[aa]} + \frac{\eta_1'^2}{[bb.1]} + \frac{\zeta_2'^2}{[cc.2]} + \ldots$$

mentre dalle relazioni (148) e (150) del numero precedente si ricava:

$$\frac{\xi'}{[aa]} = r_1, \quad \frac{\eta_1'}{[bb.1]} = r_2, \quad \frac{\zeta_2'}{[cc.2]} = r_3$$

Se per semplicità di notazione poniamo

$$\mathfrak{p}_1 = [aa], \quad \mathfrak{p}_2 = [bb,1], \quad \mathfrak{p}_3 = [cc,2], \ldots \qquad (156)$$

[pesi delle osservazioni ipotetiche χ_1, χ_2, χ_3, ... totalmente equivalenti al sistema generato (123)], potremo quindi scrivere:

$$[\delta\,\delta] = [\delta_0\,\delta_0] + [\mathfrak{p}\,r\,r]$$

ed in conseguenza, per l'errore medio m corrispondente all'unità di peso, si avrà:

$$m = \sqrt{\frac{[\delta_0\,\delta_0] + [\mathfrak{p}\,r\,r]}{n - \omega + \sigma}}. \qquad (157)$$

È superfluo ricordare come il valore $[\delta_0\,\delta_0]$ può essere calcolato indipendentemente dai singoli valori δ_0', δ_0'', δ_0''', ... (vedi vol. I, pag. 398), e si può avere in tal modo una riprova dell'esattezza del calcolo di x_0, y_0, z_0, ... Per ottenere poi $[\mathfrak{p}\,r\,r]$ conviene far uso della formula

$$[\mathfrak{p}\,r\,r] = \frac{w_1^2}{\left[\frac{[A][A]}{\mathfrak{p}}\right]} + \frac{[w_2,1]^2}{\left[\frac{[B][B]}{\mathfrak{p}},1\right]} + \frac{[w_3,2]^2}{\left[\frac{[C][C]}{\mathfrak{p}},2\right]} + \ldots \qquad (158)$$

che si deduce dalla (116) del § 53, e può servire anche di riprova al calcolo dei correlativi, e delle correzioni r.

68. Ci rimane solo da vedere come applicando la teoria dell'equivalenza si possa calcolare il peso e quindi l'errore medio di una funzione lineare dei valori compensati delle incognite, giacchè il caso generale di una funzione qualunque si riduce, come abbiamo vednto più volte, al caso di una funzione lineare per mezzo di uno sviluppo in serie. Sia dunque

$$U = U_0 + F_1 x + F_2 y + F_3 z + \dots$$

la funzione lineare data: naturalmente è qui da seguire un metodo di deduzione analogo a quello tenuto nel § 63 pel caso in cui le incognite non erano soggette a condizione, sostituendo nella U ad $x, y, z, \dots$ i loro valori in funzione delle osservazioni ipotetiche per poi applicare le formule della compensazione delle osservazioni dirette.

Ora dalle equazioni (148) e (150) del § 66 si ricava:

$$x_0 + \Delta x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(y_0 + \Delta y) + \frac{[a\,c]}{[a\,a]}(z_0 + \Delta z) + \dots + \chi_1 - r_1 = 0$$

$$y_0 + \Delta y + \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}(z_0 + \Delta z) + \dots + \chi_2 - r_2 = 0$$

$$z_0 + \Delta z + \dots + \chi_3 - r_3 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

quindi, applicando le (140) a questo caso, potremo porre:

$$x_0 + \Delta x = -(\chi_1 - r_1) + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(\chi_2 - r_2) + \frac{[a\,c.1]}{[a\,a]}(\chi_3 - r_3) + \dots$$

$$y_0 + \Delta y = -(\chi_2 - r_2) + \frac{[b\,c,1]}{[b\,b.1]}(\chi_3 - r_3) + \dots$$

$$z_0 + \Delta y = -(\chi_3 - r_3) + \dots$$

Per il valore più probabile U_m di U si ha d'altra parte:

$$U_0 + F_1(x_0 + \Delta x) + F_2(y_0 + \Delta y) + F_3(z_0 + \Delta z) + \dots$$

espressione che, eliminandovi $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$, $z_0 + \Delta z, \dots$ per mezzo delle relazioni precedenti ed introducendo al solito le notazioni (99) stabilite al § 47, dà:

$$\left.\begin{aligned} U_m = U_0 &- F_1 \chi_1 - [F_2, 1]\,\chi_2 - [F_3, 2]\,\chi_3 - \dots \\ &+ F_1 r_1 + [F_2, 1]\, r_2 + [F_3, 2]\, r_3 + \dots \end{aligned}\right\}. \quad (159)$$

Dacchè le quantità $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ debbono essere considerate come osservazioni dirette soggette a condizioni, e le $r_1, r_2, r_3 \ldots$ come le corrispondenti correzioni provenienti dalla loro compensazione, la soprascritta relazione è analoga alla (119) del § 54: e nella ricerca del peso P_u di U_m possiamo perciò seguire il procedimento tenuto quivi. Ponendo

$$\left[\frac{[A][F]}{\mathfrak{p}}\right] = \frac{A_1 F_1}{[a\,a]} + \frac{[A_2,1][F_2,1]}{[b\,b,1]} + \frac{[A_3,2][F_3,2]}{[c\,c,2]} + \ldots$$

$$\left[\frac{[B][F]}{\mathfrak{p}}\right] = \frac{B_1 F_1}{[a\,a]} + \frac{[B_2,1][F_2,1]}{[b\,b,1]} + \frac{[B_3,2][F_3,2]}{[c\,c,2]} + \ldots$$

$$\left[\frac{[C][F]}{\mathfrak{p}}\right] = \frac{C_1 F_1}{[a\,a]} + \frac{[C_2,1][F_2,1]}{[b\,b,1]} + \frac{[C_3,2][F_3,2]}{[c\,c,2]} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dopo avere eliminate dalla (159) le correzioni r per mezzo delle equazioni correlate (153), si ottiene:

$$U_m = U_0 - F_1\chi_1 - [F_2,1]\chi_2 - [F_3,2]\chi_3 - \ldots + \left[\frac{[A][F]}{\mathfrak{p}}\right] I + \left[\frac{[B][F]}{\mathfrak{p}}\right] II + \left[\frac{[C][F]}{\mathfrak{p}}\right] III + \ldots$$

nella quale rimane da esprimere i correlativi in funzione delle osservazioni ipotetiche dirette, in modo analogo a quello tenuto nel già citato § 54, per mezzo delle equazioni normali correlanti (155). In tal guisa, introducendo le ausiliarie $N_1, N_2, N_3, \ldots$ determinate da un sistema di equazioni normali analogo al sistema (121) si trae:

$$\left.\begin{aligned} U_m = U_0 - F_1\chi_1 - [F_2,1]\chi_2 - [F_3,2]\chi_3 - \ldots \\ + N_1 w_1 + \quad N_2 w_2 + \quad N_3 w_3 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (160)$$

Ma si ha per ipotesi (pag. 24)

$$\begin{aligned} w_1 &= A_1 x_0 + A_2 y_0 + A_3 z_0 + \ldots + L_1 \\ w_2 &= B_1 x_0 + B_2 y_0 + B_3 z_0 + \ldots + L_2 \\ w_3 &= C_1 x_0 + C_2 y_0 + C_3 z_0 + \ldots + L_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

mentre i valori $x_0, y_0, z_0, \ldots$ non compensati delle incognite sono legati alle corrispondenti osservazioni ipotetiche $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ dalle (140): se per mezzo di queste si eliminano tali valori dalle pre-

cedenti relazioni si trova, analogamente a quanto abbiamo visto più volte:

$$w_1 = L_1 - A_1\chi_1 - [A_2,1]\chi_2 - [A_3,2]\chi_3 - \dots$$
$$w_2 = L_2 - B_1\chi_1 - [B_2,1]\chi_2 - [B_3,2]\chi_3 - \dots$$
$$w_3 = L_3 - C_1\chi_1 - [C_2,1]\chi_2 - [C_3,2]\chi_3 - \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ne consegue che alla (160) si può dare la forma seguente:

$$U_m = U_0 + N_1 L_1 + N_2 L_2 + N_3 L_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$- \chi_1 (\quad A_1 N_1 + \quad B_1 N_2 + \quad C_1 N_3 + \dots + F_1 \quad)$$
$$- \chi_2 ([A_2,1] N_1 + [B_2,1] N_2 + [C_2,1] N_3 + \dots + [F_2,1])$$
$$- \chi_3 ([A_3,2] N_1 + [B_3,2] N_2 + [C_3,2] N_3 + \dots + [F_3,2])$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e che quindi, le χ essendo osservazioni indipendenti fatte coi pesi

$$[a\,a],\quad [b\,b,1],\quad [c\,c,2],\dots,$$

la reciproca del peso della determinazione U_m è data da:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{(A_1 N_1 + B_1 N_2 + C_1 N_3 + \dots + F_1)^2}{[a\,a]} +$$
$$+ \frac{([A_2,1] N_1 + [B_2,1] N_2 + [C_2,1] N_3 + \dots + [F_2,1])^2}{[b\,b.1]} +$$
$$+ \frac{([A_3,2] N_1 + [B_3,2] N_2 + [C_3,2] N_3 + \dots + [F_3,2])^2}{[c\,c.2]} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Di qui, aggiungendo la seguente notazione a quelle già stabilite:

$$\left[\frac{[F][F]}{p}\right] = \frac{F_1 F_1}{[a\,a]} + \frac{[F_2,1][F_2,1]}{[b\,b.1]} + \frac{[F_3,2][F_3,2]}{[c\,c.2]} + \dots \quad (161)$$

ed applicando la solita formula (97^{bis}) del § 47, si trae finalmente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_u} &= \left[\frac{[F][F]}{p}\right] - \frac{\left[\frac{[A][F]}{p}\right]^2}{\left[\frac{[A][A]}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{[B][F]}{p},1\right]^2}{\left[\frac{[B][B]}{p},1\right]} - \frac{\left[\frac{[C][F]}{p},2\right]^2}{\left[\frac{[C][C]}{p},2\right]} - \dots \\ m_u &= m\sqrt{\left[\frac{[F][F]}{p}\right] - \frac{\left[\frac{[A][F]}{p}\right]^2}{\left[\frac{[A][A]}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{[B][F]}{p},1\right]^2}{\left[\frac{[B][B]}{p},1\right]} - \frac{\left[\frac{[C][F]}{p},2\right]^2}{\left[\frac{[C][C]}{p},2\right]} - \dots} \end{aligned}\right\} . \quad (162)$$

4.ª PARTE. — *Compensazione delle reti trigonometriche.*

69. Le teorie esposte nella 1.ª, 2.ª e 3.ª parte di questo Capitolo trovano un largo campo di applicazione in Geodesia, ove le osservazioni astronomiche e geodetiche reiteratamente fatte per avere gli elementi necessarii al calcolo delle reti trigonometriche sono sempre ed in numero maggiore di quelle strettamente necessarie alla determinazione teoretica dei vertici, e vincolate da condizioni geometriche.

È superfluo il fermarci al modo di dedurre gli errori medii ed i pesi delle osservazioni dirette e delle basi geodetiche, giacchè in tali ricerche l'applicazione delle formule generali non dà luogo a particolari considerazioni, nè presenta difficoltà veruna. Ma la natura dei procedimenti che conviene seguire nel fare la compensazione di una rete dipende invece dalla ampiezza di questa e dalla natura degli istrumenti goniometrici adottati; i calcoli sono poi sempre così lunghi e complicati che dalla simmetria delle formule e dalle semplificazioni teoreticamente meno importanti si può ottenere in pratica un grande risparmio di fatica e di tempo. Finalmente alla ricerca della precisione dei risultati si riannodano considerazioni così importanti e generali, che questo argomento merita uno studio ulteriore.

È evidente che ciascuno degli elementi di una rete trigonometrica misurati oltre quelli strettamente necessarii al calcolo di essa, dà origine ad una equazione di condizione, e ad una sola, fra il suo valore osservato e le altre misure, e che, introdotto in calcolo insieme a queste, accresce il peso matematico dei risultati che se ne traggono. Nella compensazione di una rete si hanno dunque tante condizioni quanti sono gli elementi osservati superflui; ma, nello stabilirle, è necessario tener ben presente che il loro numero è perfettamente determinato, e che, mentre tutte le possibili debbono essere considerate affinchè non restino incertezze nè duplicazioni di valori, dall'altra parte, se ne venisse stabilito un numero maggiore di quello che la quistione comporta le formule finali assumerebbero delle forme indeterminate. È dunque importante di conoscere a priori il numero delle condizioni da stabilire.

70. Facciamo astrazione dall'orientamento e dalla posizione geografica della rete da compensare, *che supporremo costituita da triangoli succedentisi senza interruzione:* rappresentiamo con P il numero

dei suoi vertici, con L quello delle linee di congiungimento (*lati*), con M il numero degli angoli osservati e con B il numero delle basi geodetiche misurate. I due vertici che formano gli estremi di una base restano determinati da questa l'uno rispetto all'altro: per la determinazione relativa di ogni altro vertice si richiede poi la misura o di due angoli o di due linee, o di un angolo e di una linea, per modo che i P punti restano determinati da una base e da $2(P-2)$ altre misure geodetiche. Dunque si hanno

$$B+M-2P+3$$

elementi osservati superflui ed in conseguenza altrettante equazioni di condizione relative alla rete geodetica considerata. Rimane però da esprimere inoltre la dipendenza mutua degli angoli misurati in ogni vertice di stazione fra i vertici del poligono geodetico che lo circonda, giacchè le visuali che vanno a questi vertici debbono essere considerate come direzioni azimutali appartenenti ad un *giro di orizzonte:* così se P' è il numero delle stazioni geodetiche in cui o il giro di orizzonte è completo o vi ha sovrapposizione di angoli misurati, si dovranno porre ancora P' equazioni di natura speciale, alle quali daremo il nome di *condizioni azimutali.* Le suddette

$$B+M-2P+3$$

altre condizioni poi vanno suddivise in due classi, distinguendo quelle che vincolano fra loro gli angoli di un poligono chiuso, e che possono dirsi *condizioni poligonali,* da quelle che debbono togliere ogni possibile duplicazione nei valori calcolati dei lati, alle quali daremo il nome di *condizioni lineari.* * È da osservare che nel costituire questa ultima classe di condizioni, nelle quali sole compariscono a volte le misure lineari direttamente fatte (*basi*), dovrebbero esser considerate come quantità correggibili da compensare e le osservazioni angolari e le basi stesse: ma il peso di una base geodetica è sempre così grande rispetto a quello delle direzioni azimutali, che è logico il correggere soltanto queste ultime ritenendo le prime come delle quantità esattamente conosciute, lo che semplifica assai il calcolo di compensazione di una rete geodetica, sempre di per sè molto complicato. Dobbiamo notare ancora come, per la natura stessa della quistione, non si hanno mai da considerare due ele-

* Comunemente le *condizioni poligonali e lineari* sono dette rispettivamente *condizioni agli angoli ed ai lati;* molti autori fanno poi astrazione dalla moltiplicità delle basi.

menti lineari adiacenti in una rete direttamente misurati, tolto il caso in cui essi sono parti distinte di una stessa base.

Per ottenere il numero di condizioni poligonali da stabilire, riteniamo le notazioni più sopra indicate e rappresentiamo inoltre con L' il numero delle linee di congiungimento, le cui direzioni azimutali sono state osservate da ambedue le estremità. Se si nota che in un poligono chiuso, composto da un numero qualunque delle linee ora specificate, la somma degli angoli è geometricamente nota e si ha quindi una condizione, ma una sola, è facile concludere che qualunque altra linea condotta fra due qualunque dei vertici del poligono ed osservata alle due estremità, spezzandolo in due, dà origine ad una nuova condizione, e ad una sola. Così se P'' è il numero dei punti in cui è stata fatta stazione (compresi quelli nei quali il giro di orizzonte non è completo) il numero delle condizioni poligonali diverse cui dà luogo la rete considerata è

$$L' - P'' + 1.$$

Il numero delle condizioni lineari poi si deduce osservando che data la lunghezza (*base*) che congiunge due punti, per la determinazione geodetica di ogni altro punto si richiedono due nuove linee osservate almeno ad una estremità, e quindi per la determinazione di P vertici sono necessarie $1 + (P - 2)\,2 = 2P - 3$ linee. In conseguenza se si hanno nella rete L linee osservate almeno ad una estremità fra P punti, vi saranno $L - 2P + 3$ lati che restano perfettamente determinati dagli altri, e che possono essere anche calcolati introducendo le corrispondenti misure angolari dirette: quindi si dovranno porre

$$L - 2P + 3$$

condizioni per togliere ogni possibile duplicazione di lunghezza. Ciò nel caso di una sola linea misurata direttamente, e siccome ogni altra base dà luogo ad una nuova condizione lineare, così, essendo B il numero delle basi, si avranno in tutto

$$B + L - 2P + 2$$

condizioni lineari da stabilire.

Riepilogando si otterranno, fatta astrazione dall'orientamento e dalla posizione geografica della rete, i seguenti numeri di condizioni

P'	*equazioni azimutali*
$L' - P'' + 1$	*equazioni poligonali*
$B + L - 2P + 2$	*equazioni lineari,*

in tutto

$$P' + M + B - 2P + 3 = P' + L' + B + L - P'' - 2P + 3$$

condizioni.* È facile constatare che questa ultima relazione è un'identità; ed infatti le L' linee fra P'' punti, osservate alle due estremità, corrispondono evidentemente a $2L' - P''$ osservazioni angolari, e ad altri $L - L'$ angoli osservati corrispondono le $L - L'$ linee osservate ad una estremità soltanto: si ha dunque

$$M = L + L' - P''.$$

Vedremo tra breve per altro come introducendo la vantaggiosissima considerazione delle *direzioni* in luogo di quella degli angoli osservati le P' condizioni azimutali possono essere trattate a parte, lo che semplifica molto il calcolo di compensazione.

È superfluo poi l'osservare che nella formazione delle equazioni di condizione si deve badare che esse siano indipendenti l'una dall'altra.

71. Cogli istrumenti reiteratori la misura degli angoli di un giro di orizzonte si fa puntando successivamente alcuni dei vertici chiaramente visibili del poligono geodetico circostante, e leggendo coi microscopii *rispetto all'origine del cerchio goniometrico le direzioni dei punti osservati.* L'insieme delle letture

$$L_1, L_2, L_3, \ldots$$

fatte di seguito ed una sola volta per *le direzioni relative* delle visuali che vanno ai punti osservati *I, II, III,* ... costituisce ciò che si dice *uno strato,* e, per solito, tali letture si considerano come dello stesso peso: ma, per ciò che dovremo esporre in seguito, conviene generalizzare la questione ascrivendo a ciascuna osservazione elementare (direzione) un peso speciale. Rappresentiamo in generale con p il peso della direzione relativa L, e con v il valore più probabile dell'errore commesso nell'apprezzarla: siano inoltre $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$ gli angoli veri rispettivamente compresi fra la direzione vera che corrisponde al punto *I* e le direzioni vere che corrispondono agli altri punti *II, III,* ... osservati nello stesso strato, e sia

* Lo spirito del metodo qui esposto di dedurre i numeri delle condizioni necessarie e sufficienti per la compensazione di una rete geodetica è dovuto a GAUSS: un altro metodo, che poggia sul sistema di osservazione angolare *per direzioni* può vedersi descritto nella classica opera di BESSEL, *Gradmessung in Ostpreussen.*

finalmente X la distanza angolare ignota compresa fra il punto I e l'origine degli angoli azimutali (zero del cerchio). Naturalmente dietro le osservazioni fatte si conoscono dei valori approssimati $\{1\}_0$, $\{2\}_0$, $\{3\}_0$, ... di $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, ...: poniamo dunque:

$$\{1\} = \{1\}_0 + K_1, \quad \{2\} = \{2\}_0 + K_2, \quad \{3\} = \{3\}_0 + K_3, \ldots$$

È chiaro che per ogni strato si avranno delle relazioni analoghe alle seguenti:

$$\begin{aligned}
\sqrt{p_1}\,(X - L_1) &= \sqrt{p_1}\,v_1 \\
\sqrt{p_2}\,(X + \{1\}_0 + K_1 - L_2) &= \sqrt{p_2}\,v_2 \\
\sqrt{p_3}\,(X + \{2\}_0 + K_2 - L_3) &= \sqrt{p_3}\,v_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sqrt{p_n}\,(X + \{n-1\}_0 + K_{n-1} - L_n) &= \sqrt{p_n}\,v_n
\end{aligned}$$

le quali debbono esser considerate come delle equazioni generate già ridotte all'unità di peso.

Operando nella stessa guisa su tutti gli strati di una stazione, e, per semplificare, ponendo in generale

$$L_1 = l_1', \quad \{1\}_0 - L_2 = l_2, \quad \{2\}_0 - L_3 = l_3, \quad \{3\}_0 - L_4 = l_4, \ldots$$

si ottiene quindi complessivamente il seguente sistema di equazioni generate dello stesso peso:

$$\left.\begin{array}{l|l}
v_1'\sqrt{p_1'} = \sqrt{p_1'}\,(X' + l_1') & v_1''\sqrt{p_1''} = \sqrt{p_1''}\,(X'' + l_1'') \\
v_2'\sqrt{p_2'} = \sqrt{p_2'}\,(X' + K_1 + l_2') & v_2''\sqrt{p_2''} = \sqrt{p_2''}\,(X'' + K_1 + l_2'') \\
v_3'\sqrt{p_3'} = \sqrt{p_3'}\,(X' + K_2 + l_3') & v_3''\sqrt{p_3''} = \sqrt{p_3''}\,(X'' + K_3 + l_3'') \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n'\sqrt{p_n'} = \sqrt{p_n'}\,(X' + K_{n-1} + l_n) & v_n''\sqrt{p_n''} = \sqrt{p_n''}\,(X'' + K_{n-1} + l_n'') \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots & v_1^{(\nu)}\sqrt{p_1^{(\nu)}} = \sqrt{p_1^{(\nu)}}\,(X^{(\nu)} + l_1^{(\nu)}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & v_2^{(\nu)}\sqrt{p_2^{(\nu)}} = \sqrt{p_2^{(\nu)}}\,(X^{(\nu)} + K_1 + l_2^{(\nu)}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & v_3^{(\nu)}\sqrt{p_3^{(\nu)}} = \sqrt{p_3^{(\nu)}}\,(X^{(\nu)} + K_2 + l_3^{(\nu)}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & v_n^{(\nu)}\sqrt{p_n^{(\nu)}} = \sqrt{p_n^{(\nu)}}\,(X^{(\nu)} + K_{n-1} + l_n^{(\nu)})
\end{array}\right\} \quad (163)$$

ove gli indici ai piedi delle lettere si riferiscono alla numerazione delle direzioni in uno strato, e gli accenti alla successione degli strati: è inutile aggiungere che nelle equazioni che si riferiscono a direzioni non osservate in uno strato qualunque si deve supporre nullo il peso, lo che fa scomparire le equazioni stesse. Le incognite del problema sono le ν quantità X', X'', X''', ... e le $n-1$ correzioni K_1, K_2, K_3, ... Ottenuti le K si hanno i valori più probabili degli angoli $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, ... che rappresentano le direzioni azimutali dei punti *II*, *III*, *IV*, ... riferite alla direzione del punto *I*, e che soddisfanno implicitamente alla condizione azimutale corrispondente alla stazione considerata.

Tuttavia si deve notare che le correzioni K debbono esser tratte dalle (163) compatibilmente alle condizioni della compensazione della rete in guisa che ci troviamo qui nel caso che abbiamo trattato nel § 56 e seguenti della 3.ª parte di questo capitolo. L'applicazione del metodo diretto di compensazione esposto nel § 56 suddetto riuscirebbe però estremamente complicata perocchè le equazioni normali corrispondenti alle (125) verrebbero a contenere un numero di incognite straordinariamente grande e la loro risoluzione, anche per una rete assai ristretta, riuscirebbe pressochè impossibile. È necessario pertanto ricorrere ad uno dei due procedimenti di doppia risoluzione che abbiamo sviluppati nei paragrafi 58, 59, 60, 66, 67 e 68, risolvendo anzitutto col metodo dei minimi quadrati le equazioni generate analoghe alle (163) per ciascuna stazione della rete da compensare, astrazion fatta dalle condizioni rigorose cui questa dà luogo. Costituendo le equazioni normali corrispondenti alle (163) ed introducendo per brevità le seguenti notazioni

$$\left.\begin{aligned}
[p' s']_n &= p_1' s_1' + p_2' s_2' + p_3' s_3' + \ldots + p_n' s_n' \\
[p'' s'']_n &= p_1'' s_1'' + p_2'' s_2'' + p_3'' s_3'' + \ldots + p_n'' s_n'' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[p_1 s_1]^{(\nu)} &= p_1' s_1' + p_1'' s_1'' + p_1''' s_1''' + \ldots + p_1^{(\nu)} s_1^{(\nu)} \\
[p_2 s_2]^{(\nu)} &= p_2' s_2' + p_2'' s_2'' + p_2''' s_2''' + \ldots + p_2^{(\nu)} s_2^{(\nu)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (164)$$

si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
[p']_n X' \quad &+ \quad p_2' K_1 + p_3' K_2 + \ldots p_n' K_{n-1} + [p' l']_n = 0 \\
[p'']_n X'' \quad &+ \quad p_2'' K_1 + p_3'' K_2 + \ldots p_n'' K_{n-1} + [p'' l'']_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[p^{(\nu)}]_n X^{(\nu)} \quad &+ \quad p_2^{(\nu)} K_1 + p_3^{(\nu)} K_2 + \ldots p_n^{(\nu)} K_{n-1} + [p^{(\nu)} l^{(\nu)}]_n = 0
\end{aligned}\right\} \quad (165)$$

$$\left.\begin{aligned}
p_2' X' + p_2'' X'' + \ldots + p_2^{(\nu)} X^{(\nu)} + [p_2]^{(\nu)} K_1 \quad &+ [p_2 l_2]^{(\nu)} = 0 \\
p_3' X' + p_3'' X'' + \ldots + p_3^{(\nu)} X^{(\nu)} + [p_3]^{(\nu)} K_2 \quad &+ [p_3 l_3]^{(\nu)} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n' X' + p_n'' X'' + \ldots + p_n^{(\nu)} X^{(\nu)} \quad &+ [p_n]^{(\nu)} K_{n-1} + [p_n l_n]^{(\nu)} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (166)$$

d'onde, sostituendo nelle (166) ad X', X'', $\ldots X^{(\nu)}$ i loro valori tolti dalle (165), avremo:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{[p_2]^{(\nu)} - \left[\frac{p_2 p_2}{[p]_n}\right]^{(\nu)}\right\} K_1 \quad - \left[\frac{p_2 p_3}{[p]_n}\right]^{(\nu)} K_2 \quad - \left[\frac{p_2 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)} K_3 - \ldots + \\
&\qquad + [p_2 l_2]^{(\nu)} - \left[\frac{p_2 [p l]_n}{[p]_n}\right]^{(\nu)} = 0 \\
&- \left[\frac{p_2 p_3}{[p]_n}\right]^{(\nu)} K_1 + \left\{[p_3]^{(\nu)} - \left[\frac{p_3 p_3}{[p]_n}\right]^{(\nu)}\right\} K_2 \quad - \left[\frac{p_3 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)} K_3 - \ldots + \\
&\qquad + [p_3 l_3]^{(\nu)} - \left[\frac{p_3 [p l]_n}{[p]_n}\right]^{(\nu)} = 0 \\
&- \left[\frac{p_2 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)} K_1 \quad - \left[\frac{p_3 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)} K_2 + \left\{[p_4]^{(\nu)} - \left[\frac{p_4 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)}\right\} K_3 - \ldots + \\
&\qquad + [p_4 l_4]^{(\nu)} - \left[\frac{p_4 [p l]_n}{[p]_n}\right]^{(\nu)} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (167)$$

Queste $n - 1$ relazioni formano un sistema di equazioni normali che determina i valori più probabili dei K corrispondenti alle equazioni generate (163), astrazione fatta dalla compensazione cui debbono poi andare soggetti. Ottenuti i K si possono dalle (165) calcolare gli X e dalle (163) dedurre quindi i residui v, che rappresentano le correzioni più probabili da farsi alle singole letture dietro la considerazione di ciascuna stazione separatamente dalle

altre. Per semplicità di notazione, porremo, come si suole:

$$\left.\begin{aligned}
[a\,a] &= [p_2]^{(\nu)} - \left[\frac{p_2 p_2}{[p]_n}\right]^{(\nu)}, \quad [a\,b] = -\left[\frac{p_2 p_3}{[p]_n}\right]^{(\nu)}, \quad [a\,c] = -\left[\frac{p_2 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)}, \ldots \\
&\ldots [a\,l] = [p_2 l_2]^{(\nu)} - \left[\frac{p_2 [p\,l]_n}{[p]_n}\right]^{(\nu)} \\
[b\,b] &= [p_3]^{(\nu)} - \left[\frac{p_3 p_3}{[p]_n}\right]^{(\nu)}, \quad [b\,c] = -\left[\frac{p_3 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)}, \ldots \\
&\ldots [b\,l] = [p_3 l_3]^{(\nu)} - \left[\frac{p_3 [p\,l]_n}{[p]_n}\right]^{(\nu)} \\
[c\,c] &= [p_4]^{(\nu)} - \left[\frac{p_4 p_4}{[p]_n}\right]^{(\nu)}, \ldots \\
&\ldots [c\,l] = [p_4 l_4]^{(\nu)} - \left[\frac{p_4 [p\,l]_n}{[p]_n}\right]^{(\nu)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (168)$$

in modo da dare alle (167) la forma consueta seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&[a\,a]\,K_1 + [a\,b]\,K_2 + [a\,c]\,K_3 + \ldots + [a\,l] = 0 \\
&[a\,b]\,K_1 + [b\,b]\,K_2 + [b\,c]\,K_3 + \ldots + [b\,l] = 0 \\
&[a\,c]\,K_1 + [b\,c]\,K_2 + [c\,c]\,K_3 + \ldots + [c\,l] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (169)$$

Oltre i valori delle correzioni non compensate K_1, K_2, K_3... è necessario, come vedremo, determinare i loro pesi e perciò nel calcolo dei K conviene far uso del procedimento esposto al § 43 (vedi vol. I, pag. 387); ritenendo le notazioni stabilite nella seconda parte di questo capitolo, avremo quindi:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= -[\alpha\,\alpha]\,[a\,l] - [\alpha\,\beta]\,[b\,l] - [\alpha\,\gamma]\,[c\,l] - \ldots \\
K_2 &= -[\alpha\,\beta]\,[a\,l] - [\beta\,\beta]\,[b\,l] - [\beta\,\gamma]\,[c\,l] - \ldots \\
K_3 &= -[\alpha\,\gamma]\,[a\,l] - [\beta\,\gamma]\,[b\,l] - [\gamma\,\gamma]\,[c\,l] - \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (170)$$

le ausiliarie $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]$, ... $[\beta\,\beta]$, $[\beta\,\gamma]$, ... $[\gamma\,\gamma]$... essendo dedotte dalle equazioni del peso (88).

Le quantità K così ottenute rappresentano le correzioni provvisorie da fare alle direzioni approssimative $\{1\}_0$, $\{2\}_0$, $\{3\}_0$, ..., e debbono venire modificate in seguito alla compensazione della rete geodetica cui appartiene la stazione considerata. Seguendo il co-

mune sistema di notazione rappresenteremo con $K_1+(1)$, $K_2+(2)$, $K_3+(3)$, ... le correzioni definitive, ed introdurremo fin d'ora delle nuove quantità ausiliarie [1], [2], [3], ..., corrispondenti alle ξ, η, ζ, ... della formula (α) del § 58, ponendo:

$$\left.\begin{aligned} [1] &= [a\,a]\,(1) + [a\,b]\,(2) + [a\,c]\,(3) + \dots \\ [2] &= [a\,b]\,(1) + [b\,b]\,(2) + [b\,c]\,(3) + \dots \\ [3] &= [a\,c]\,(1) + [b\,c]\,(2) + [c\,c]\,(3) + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (171)$$

Per ottenere le espressioni delle correzioni (1), (2), (3), ... in funzione di queste quantità osserveremo poi che dalle (169) e (171) si trae

$$[aa]\big(K_1+(1)\big)+[ab]\big(K_2+(2)\big)+[ac]\big(K_3+(3)\big)+\dots+[al]-[1]=0$$

$$[ab]\big(K_1+(1)\big)+[bb]\big(K_2+(2)\big)+[bc]\big(K_3+(3)\big)+\dots+[bl]-[2]=0$$

$$[ac]\big(K_1+(1)\big)+[bc]\big(K_2+(2)\big)+[cc]\big(K_3+(3)\big)+\dots+[cl]-[3]=0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e che queste relazioni, formano un nuovo sistema di equazioni normali, che può essere algebricamente risoluto col procedimento del § 43 (formule 88). Se, scritti i valori di $K_1+(1)$, $K_2+(2)$, $K_3+(3)$, ..., si nota che nelle equazioni del peso che determinano le corrispondenti ausiliarie

$$[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma], \dots [\beta\beta], [\beta\gamma], \dots [\gamma\gamma]$$

non compariscono i termini noti delle dette equazioni normali, e che quindi i valori di tali ausiliarie sono quegli stessi delle formule (170), mentre le quantità $K_1, K_2, K_3, \dots$ soddisfanno alle (170) medesime, è facile vedere che si ha:

$$\left.\begin{aligned} (1) &= [\alpha\,\alpha]\,[1] + [\alpha\,\beta]\,[2] + [\alpha\,\gamma]\,[3] + \dots \\ (2) &= [\alpha\,\beta]\,[1] + [\beta\,\beta]\,[2] + [\beta\,\gamma]\,[3] + \dots \\ (3) &= [\alpha\,\gamma]\,[1] + [\beta\,\gamma]\,[2] + [\gamma\,\gamma]\,[3] + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (172)$$

Riassumendo il sin qui detto concluderemo che nella compensazione di una rete geodetica ogni stazione dà luogo ai seguenti calcoli preparatorii:

1.° *Formazione delle equazioni normali* che determinano le direzioni più probabili della stazione, astrazione fatta dalle condizioni poligonali e lineari della rete [formule (168) e (169)].

2.° *Formazione e risoluzione delle corrispondenti equazioni del peso.*

3.° *Formazione delle equazioni definitive* che determinano le ausiliarie della stazione [1], [2], [3] in funzione delle correzioni compensate, e reciprocamente [formule (171) e (172)].

Dopo ciò resta a determinare l'errore medio relativo all'unità di peso della stazione considerata.

È utile notare che il procedimento sopra esposto condotto fino alla risoluzione delle equazioni normali (169) serve in generale anche a dedurre le direzioni più probabili delle stazioni isolate nel caso in cui le osservazioni non debbano venir poi sottoposte a compensazione come succede in lavori trigonometrici di poca importanza.

72. La cosidetta *compensazione di una stazione,* ossia l'insieme dei calcoli sopra riepilogati, riesce di solito assai complicata se non si segue nell'osservazione degli angoli qualche sistema speciale che permetta di semplificare le formule generali del paragrafo precedente. È facile vedere come la massima semplicità si otterrebbe nel caso in cui in tutti gli strati fossero osservati tutti i punti del giro d'orizzonte colla stessa precisione: ma, per lo più, non tutti i segnali od elioscopii intorno alla stazione sono contemporaneamente visibili e, d'altra parte, è facile comprendere come le ultime direzioni osservate in un giro di orizzonte con molti puntamenti non meritino la stessa fiducia delle prime, perocchè durante il tempo assai notevole, necessario all'osservazione dello strato sempre più si alterano le condizioni di visibilità dei punti e di aggiustamento dell'istrumento e diviene sensibile l'influenza della deformazione dei sostegni.

Per aver poche osservazioni di egual peso da introdurre in calcolo, è molto conveniente il sistema delle osservazioni binarie ora esclusivamente adottato in Italia. In tale sistema ogni singolo strato non si compone che di due direzioni osservate, ed ogni angolo che è possibile di considerare fra le n direzioni del giro di orizzonte vien misurato un egual numero di volte. Questo numero si determina antecedentemente per modo che tutti gli angoli delle reti da compensare vengano ad avere un dato peso ed un dato errore medio, e tale determinazione si può fare approssimativamente

in base all'errore medio che corrisponde ad una singola osservazione di un dato operatore con un dato istrumento, errore medio che si suppone costante, e conosciuto in precedenza. Naturalmente i diversi valori ottenuti per ciascun angolo del giro di orizzonte (e misurati sopra diverse parti successive del cerchio determinate coi criterii della teoria della reiterazione) si raggruppano in un' unica media. Si possono allora considerare tanti strati ipotetici dello stesso peso quante sono le combinazioni due a due dei punti del giro di orizzonte, lo che rende semplicissima l'applicazione delle formule (168), (169), (170), (171), (172) e la risoluzione delle equazioni del peso: inoltre in queste formule i coefficienti hanno sempre gli stessi valori per tutte le stazioni in cui i giri di orizzonte hanno lo stesso numero di direzioni.

73. L'errore medio corrispondente ad ogni singola osservazione di una stazione, comunemente detto *errore medio della stazione,* si deduce applicando la solita formula (90) del § 44 in corrispondenza alle equazioni generate (163), ed osservando che in questo caso il numero delle incognite dalle quali dipendono i residui v è $n - 1 + \nu$, essendo n il numero dei punti del giro d'orizzonte, e ν quello degli strati. In tal modo rappresentando con N il numero delle equazioni generate e con m_s l'errore medio cercato, si avrà:

$$m_s = \sqrt{\frac{[p\,\lambda\,\lambda]}{N - n - \nu + 1}}. \qquad (173)$$

È necessario per altro ricordare che quanto maggiore è il numero dei residui N tanto maggiore è la precisione del valore di m_s che ne risulta. Ora, in generale, nella cosidetta compensazione di una stazione anzichè introdurre in calcolo le singole osservazioni fatte per gli angoli misurati, per semplificare la ricerca delle direzioni più probabili si raggruppano i diversi strati che contengono gli stessi punti osservati dando alle medie corrispondenti i pesi che loro competono in modo che il numero delle equazioni generate diventa spesso molto piccolo. Per una stazione in cui tutti gli strati contenessero tutti i punti del giro d'orizzonte raggruppandoli in uno strato unico si avrebbe $\nu = 1$, $n = N$, e il secondo membro della (173) si ridurrebbe alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Per ottenere l'errore medio m_s con sufficiente precisione è dunque indispensabile di risalire dai residui λ delle equazioni ge-

nerate (163) relativi ai varii gruppi di osservazione introdotti in calcolo ai residui relativi alle singole osservazioni, lo che del resto non presenta veruna difficoltà.

Il calcolo del valore di $[p\lambda\lambda]$ riuscirebbe molto laborioso se dovesse esser fatto per mezzo della sostituzione dei valori più probabili di $X', X'', \ldots X^{(\nu)}, \ldots \{1\}, \{2\}, \{3\} \ldots$ nelle equazioni generate: perciò in pratica si suole spesso adoperare la (97^{bis}) del § 47 della quale l'applicazione è assai semplice, giacchè i ν termini che seguono il primo nel secondo membro si riducono rispettivamente, come è facile constatare, a

$$\frac{[p'\,l'\,]_n^2}{[p\,]_n}, \quad \frac{[p''\,l''\,]_n^2}{[p'\,]_n}, \ldots \quad \frac{[p^{(\nu)}\,l^{(\nu)}]_n^2}{[p^{(\nu)}]_n}$$

ed i successivi provengono dalla risoluzione delle (167), le quali evidentemente sono le equazioni ridotte di ν^{esimo} ordine del sistema complessivo (165) e (166).

Più brevemente può ottenersi il valore $[p\lambda\lambda]$ anche tenuto conto di tutte le singole osservazioni, considerando le sole equazioni normali (167) anzichè le (165) e (166). Infatti ricordiamo come, dato un sistema di equazioni generate dalla forma generatrice

$$\sqrt{p}\,v = ax + by + cz + \ldots + l,$$

si ha in generale [§ 47 formule (97) e (97^{bis})]

$$[pvv] = [p\lambda\lambda] + \frac{\xi^2}{[aa\,]} + \frac{\eta_1^{\,2}}{[bb.1]} + \frac{\zeta_2^{\,2}}{[cc.2]} + \ldots$$

qualunque siano i valori adottati per le incognite, e quindi anche per

$$x = y = z = \ldots = 0,$$

ossia per

$$\xi = [al\,], \quad \eta_1 = [bl.1], \quad \zeta_2 = [cl.2], \ldots$$

Rappresentando con $[VV]$ il valore che prende $[pvv]$ in questo caso, si potrà dunque porre:

$$[p\lambda\lambda] = [VV] - \frac{[al\,]^2}{[aa\,]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]} \ldots \qquad (174)$$

relazione che è identica alla (97^{bis}) sopra citata. Ciò posto, per applicare questa formula alle (167), che corrispondono alle (165) e (166), tratte dalle (168) le quantità

$$[al\,], \quad [aa\,], \quad [bl.1], \quad [bb.1] \ldots$$

rimane da determinare il valore che prende in questo caso $[VV]$.

Ma per $K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = 0$ le (165) danno:

$$X' = -\frac{[p'\,l']_n}{[p']_n}, \quad X'' = -\frac{[p''\,l'']_n}{[p'']_n}, \ldots X^{(\nu)} = -\frac{[p^{\nu}\,l^{(\nu)}]_n}{[p^{(\nu)}]_n}$$

e, sostituendo nelle (163) tali valori delle incognite si ottiene:

$$[p'\,v_o'\,v_o']_n = [p'\,l'\,l']_n - \frac{[p'\,l']_n^2}{[p']_n}$$

$$[p''v_o''\,v_o'']_n = [p''\,l'\,l'']_n - \frac{[p''\,l'']_n^2}{[p']_n}$$

. . . . . .

In conseguenza si ha:

$$[V\,V] = \left[[p^{(s)}\,l^{(s)}\,l^{(s)}]_n - \frac{[p^{(s)}\,l^{(s)}]_n^2}{[p^{(s)}]_n}\right]_{s=1}^{s=\nu}. \qquad (175)$$

L'errore medio calcolato con uno dei procedimenti sopra esposti si riferisce al complesso della stazione, e non dovrebbe differire da quello che si può dedurre in via diretta confrontando separatamente fra loro i singoli valori osservati per ciascun angolo del giro di orizzonte. Le possibili differenze mettono in evidenza gli errori costanti o periodici peculiari all'istrumento ed alle circostanze ed al metodo di osservazione.

74. Ottenute le direzioni più probabili di tutte le stazioni, gli errori medii corrispondenti e le varie equazioni finali necessarie per il calcolo di compensazione, è necessario formare le equazioni di condizione.

Le $L' - P'' + 1$ condizioni poligonali si stabiliscono senza veruna difficoltà scegliendo arbitrariamente $L' - P'' + 1$ triangoli indipendenti fra loro in quanto agli angoli, e con tutti gli angoli misurati. La forma da dare alle equazioni dipende dal sistema adottato nelle misure azimutali. Seguitando a considerare il caso della misura *per direzioni,* e ritenendo in generale (come nel § 71) i simboli (1), (2), (3)... per le correzioni che in conseguenza della compensazione debbono essere fatte alle direzioni più probabili {1}, {2}, {3}... di ciascuna stazione, supporremo successivamente numerate le stazioni di una rete, e porremo come indice al piede dei simboli di direzione e di correzione suddetti il numero della stazione cui questi si riferiscono. Così, per esempio, $(3)_4$ indicherà la correzione da farsi nella stazione 3 alla direzione del punto IV del giro di orizzonte.

Ciò posto consideriamo un qualunque triangolo della rete scelto per fornire una condizione poligonale, per esempio il triangolo formato dalle stazioni (vertici) 1, 2, 3; sia ε il suo eccesso sferoidico, e supponiamo che la disposizione dei punti 1, 2, 3 relativamente alla rete sia tale che si abbiano le seguenti notazioni degli angoli.

$$\sphericalangle\, 3 . 1 . 2 = \{1\}_1$$
$$\sphericalangle\, 2 . 3 . 1 = \{4\}_3 - \{3\}_3$$
$$\sphericalangle\, 1 . 2 . 3 = \{2\}_2 - \{1\}_2 .$$

I corrispondenti angoli compensati saranno:

$$\{1\}_1 + (1)_1$$
$$\{4\}_3 - \{3\}_3 + (4)_3 - (3)_3$$
$$\{2\}_2 - \{1\}_2 + (2)_2 - (1)_2$$

e la somma di questi dovrà dare rigorosamente $180° + \varepsilon$. Sia Δ la differenza fra questa quantità e la somma degli angoli più probabili non compensati: per la condizione poligonale cui dà origine il triangolo considerato avremo evidentemente

$$(1)_1 + (4)_3 + (2)_2 - (1)_2 - (3)_3 + \Delta = 0.*$$

Generalizzando concluderemo che alle condizioni poligonali può esser data la forma

$$\left.\begin{aligned} A_1'(1)_1 + A_2'(2)_1 + \ldots A_n'(n)_1 + A_1''(1)_2 + \\ + A_2''(2)_2 + \ldots + L_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (176)$$

intendendo che i coefficienti A_1, A_2, A_3 ... siano suscettibili soltanto dei valori 0 e ± 1, e che gli accenti e gli indici coi quali sono distinti corrispondano rispettivamente al numero d'ordine delle stazioni, ed alla successione dei punti nel giro d'orizzonte.

75. In quanto alle condizioni lineari, abbiamo veduto come esse provengano dalle linee superflue nella determinazione dei vertici della rete: è quindi naturale che le corrispondenti equazioni siano tratte dai poligoni chiusi in cui queste linee sono collocate. Astrazione fatta per il momento dal caso di più basi misurate, è

---

* Bessel nella compensazione delle reti geodetiche prussiane introdusse una correzione anche per l'origine delle direzioni. Si vedrà in seguito quale è il significato analitico che a tale correzione deve essere attribuito, e la cagione per cui oggidì viene per solito trascurata.

facile vedere come le due figure geometriche elementari che comprendono tutti i casi che è possibile di considerare sono le seguenti

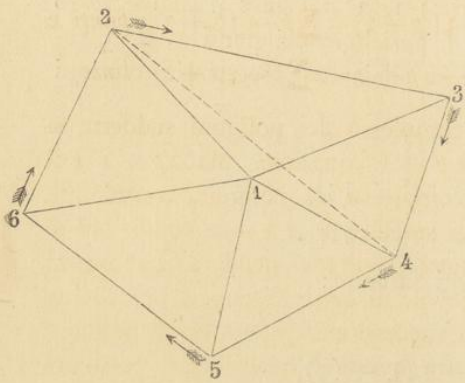

Fig. 53.

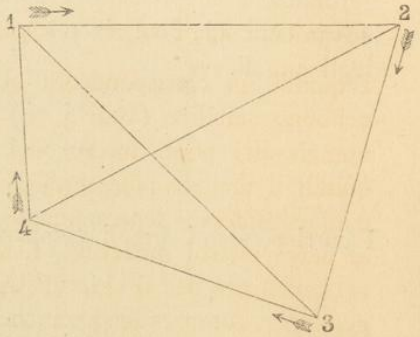

Fig. 54.

NB. Le freccie indicano le origini delle stazioni.

intendendo che nella fig. 53 il poligono esterno intorno al punto 1 possa essere di un numero qualunque di lati, tutti legati al centro 1 stesso. La prima di queste figure si riferisce per solito alle *reti* propriamente dette, la seconda alle *catene geodetiche* (vedi Capitolo V). Le reti si compongono in realtà di una serie di poligoni circoscritti ciascuno intorno a un punto e suddivisi in tanti triangoli successivi ed adiacenti, come nella fig. 53; alle figure analoghe ad essa daremo, come si suole, il nome di *poligoni geodetici;* il punto interno geodeticamente parlando è il *centro* del poligono, e solo per eccezione si conducono in un poligono geodetico delle diagonali come la 2—4. Invece per le catene, che debbono allontanarsi il meno possibile da una geodetica determinata è molto conveniente la successione di *quadrilateri geodetici* (fig. 54), ossia di quadrilateri in cui sono osservate le direzioni delle due diagonali da ambe le estremità: questa forma geometrica conduce infatti al massimo numero di equazioni di condizione col minimo numero di triangoli tracciati fra i punti estremi della catena.

Il numero delle linee che compongono un poligono geodetico di p punti, intendendo compreso fra questi il punto centrale, è $2p - 2$ (vedi fig. 53) giacchè il perimetro ha $p - 1$ vertici collegati col centro da $p - 1$ linee; da ciò risulta che ogni poligono geodetico considerato per sè stesso dà luogo (vedi § 70) ad una condizione lineare e ad una sola. Se si considera poi un poligono geodetico di p punti, rinchiuso entro $p - 1$ poligoni geodetici circon-

vicini collegati e rispettivamente contenenti $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{p-1}$ punti, è facile vedere che in tutto si hanno

$$p + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_{p-1} - 3(p-1) = \sum p - 3p + 3 \quad \textit{punti} \text{ e}$$

$$2p + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + \ldots 2p_{p-1} - 4p + 2 = 2\sum p - 4p + 2 \quad \textit{linee}$$

e quindi, in corrispondenza al complesso dei poligoni suddetti, si debbono stabilire (vedi § 70) $2p - 1$ equazioni. Ma $2p - 1$ è il numero dei punti interni del complesso di poligoni considerati, quindi il metodo più semplice di stabilire le $2p - 1$ condizioni si è di considerare separatamente tutti i poligoni geodetici circoscritti ai punti interni medesimi. È agevole di generalizzare il precedente ragionamento per il caso di una successione qualunque di poligoni geodetici comprendendo anche fra questi i quadrilateri geodetici (fig. 54): quindi concluderemo che nelle reti formate da figure elementari cosiffatte le condizioni lineari possono esser stabilite senza veruna difficoltà man mano che con le osservazioni si chiude un poligono od un quadrilatero geodetico. Di solito nelle reti non vi sono altre linee superflue da considerare, se vi fossero dovrebbero essere considerate a parte come diagonali di un nuovo quadrilatero geodetico introducendo per ciascuna una nuova condizione indipendente da tutte quelle stabilite colla regola sopra indicata.

Per dedurre la forma analitica da dare alle condizioni lineari nel caso della fig. 53 supponiamo come precedentemente numerate le stazioni, e nelle varie stazioni scegliamo come origine delle direzioni più probabili $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$ rispettivamente le direzioni che vanno da 2 in 3, da 3 in 4, ecc., lasciando arbitraria l'origine della stazione centrale 1; indicando inoltre con 1.2, 2.3, 3.4, ... ecc., i lati geodetici che congiungono le stazioni 1,2; 2,3; 3,4; ecc., dalla fig. 53 si trae successivamente:

$$\frac{1.2}{1.3} = \frac{sen\left(\{2\}_3 - \{1\}_3 + (2)_3 - (1)_3\right)}{sen\left(\{1\}_2 + (1)_2\right)}$$

$$\frac{1.3}{1.4} = \frac{sen\left(\{2\}_4 - \{1\}_4 + (2)_4 - (1)_4\right)}{sen\left(\{1\}_3 + (1)_3\right)}$$

$$\frac{1.4}{1.5} = \frac{sen\left(\{2\}_5 - \{1\}_5 + (2)_5 - (1)_5\right)}{sen\left(\{1\}_4 + (1)_4\right)}$$

$$\frac{1.5}{1.6} = \frac{sen\left(\{2\}_6 - \{1\}_6 + (2)_6 - (1)_6\right)}{sen\left(\{1\}_5 + (1)_5\right)}$$

$$\frac{1.6}{1.2} = \frac{sen\left(\{2\}_2 - \{1\}_2 + (2)_2 - (1)_2\right)}{sen\left(\{1\}_6 + (1)_6\right)}$$

La legge di formazione di questi successivi rapporti è indipendente dal numero dei vertici del poligono geodetico; se ne conclude che, in generale, alla condizione lineare corrispondente ad un poligono geodetico qualunque, di cui il centro è il punto 1 e i vertici esterni sono i punti 2, 3, 4, ... può esser data la forma

$$1 = \frac{sen\left(\{2\}_2 - \{1\}_2 + (2)_2 - (1)_2\right)}{sen\left(\{1\}_2 + (1)_2\right)} \times$$

$$\frac{sen\left(\{2\}_3 - \{1\}_3 + (2)_3 - (1)_3\right)}{sen\left(\{1\}_3 + (1)_3\right)} \times$$

$$\frac{sen\left(\{2\}_4 - \{1\}_4 + (2)_4 - (1)_4\right)}{sen\left(\{1\}_4 + (1)_4\right)} \times \ldots$$

Analogamente per il caso della figura 54, si deduce

$$\frac{1.2}{2.3} = \frac{sen\left(\{2\}_3 - \{1\}_3 + (2)_3 - (1)_3\right)}{sen\left(\{1\}_1 + (1)_1\right)}$$

$$\frac{2.3}{3.4} = \frac{sen\left(\{2\}_4 - \{1\}_4 + (2)_4 - (1)_4\right)}{sen\left(\{1\}_2 + (1)_2\right)}$$

$$\frac{3.4}{1.4} = \frac{sen\left(\{2\}_1 - \{1\}_1 + (2)_1 - (1)_1\right)}{sen\left(\{1\}_3 + (1)_3\right)}$$

$$\frac{1.4}{1.2} = \frac{sen\left(\{2\}_2 - \{1\}_2 + (2)_2 - (1)_2\right)}{sen\left(\{1\}_4 + (1)_4\right)}$$

da cui si trae una forma di condizione già compresa in quella ottenuta più sopra.

Consideriamo per ultimo il caso di due basi legate fra loro per mezzo di una catena semplice di triangoli come indica schematicamente la fig. 55, ove i lati 1-2, 5-6, segnati con tratti più

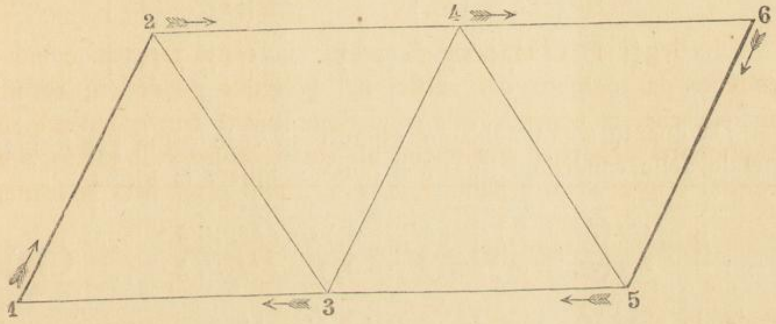

Fig. 55.

grossi, indicano le due basi; si avrà:

$$\frac{1\,.\,2}{2\,.\,3} = \frac{sen\left(\{1\}_3 + (1)_3\right)}{sen\left(\{1\}_1 + (1)_1\right)}$$

$$\frac{2\,.\,3}{3\,.\,4} = \frac{sen\left(\{3\}_4 - \{2\}_4 + (3)_4 - (2)_4\right)}{sen\left(\{1\}_2 + (1)_2\right)}$$

$$\frac{3\,.\,4}{4\,.\,5} = \frac{sen\left(\{1\}_5 + (1)_5\right)}{sen\left(\{3\}_3 - \{2\}_3 + (3)_3 - (2)_3\right)}$$

$$\frac{4\,.\,5}{5\,.\,6} = \frac{sen\left(\{1\}_6 + (1)_6\right)}{sen\left(\{1\}_4 + (1)_4\right)}.$$

Chiamando con R il rapporto $\frac{1\,.\,2}{5\,.\,6}$ fra le due basi, quantità che è

da ritenere come nota, dalle relazioni soprascritte si ricava:

$$R = \frac{sen\left(\{1\}_3 + (1)_3\right)}{sen\left(\{1\}_1 + (1)_1\right)} \times \frac{sen\left(\{3\}_4 - \{2\}_4 + (3)_4 - (2)_4\right)}{sen\left(\{1\}_2 + (1)_2\right)} \times$$

$$\times \frac{sen\left(\{1\}_5 + (1)_5\right)}{sen\left(\{3\}_3 - \{2\}_3 + (3)_3 - (2)_3\right)} \times \frac{sen\left(\{1\}_6 + (1)_6\right)}{sen\left(\{1\}_4 + (1)_4\right)} \cdot *$$

Da quanto sopra abbiamo esposto si vede come per forma generale delle condizioni lineari si possa scegliere la forma

$$R = \frac{sen\,(M_1 + \delta_1)\, sen\,(M_2 + \delta_2)\, sen\,(M_3 + \delta_3) \ldots}{sen\,(N_1 + \delta_1')\, sen\,(N_2 + \delta_2')\, sen\,(N_3 + \delta_3') \ldots} \qquad (177)$$

intendendo che $M_1, M_2, M_3, \ldots N_1, N_2, N_3, \ldots$ rappresentino degli angoli misurati, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_1', \delta_2', \delta_3', \ldots$ le corrispondenti correzioni [che per lo più vengono ad essere costituite dalla differenza di due delle correzioni cercate (1), (2), (3), ecc.], ed R una quantità nota che differisce dall'unità soltanto nelle condizioni dipendenti dalla pluralità delle basi.

Per ridurre la (177) lineare rispetto alle correzioni (1), (2), (3),..., come è necessario per far uso dei procedimenti di compensazione sviluppati nella 3.ª parte di questo capitolo, è utile di porla anzitutto sotto forma logaritmica, per seguire poi il metodo generale esposto nel § 51. Per tal guisa, indicando con μ il modulo dei logaritmi neperiani, la condizione (177) diventa

$$\left.\begin{array}{r} \mu\, sen\, 1'' \left\{\sum \delta\, cotg\, M - \sum \delta'\, cotg\, N\right\} - \log R + \sum \log sen\, M - \\ - \sum \log sen\, N = 0 \end{array}\right\} \qquad (178)$$

ove i logaritmi sono i comuni e la somma dei termini noti, indipendenti cioè dalle correzioni, non è altro che l'errore residuale della condizione geometrica relativa alla chiusura del poligono cui la (177) si riferisce. Per introdurre poi le notazioni che abbiamo adottate

---

* Si sarebbe ottenuta una forma simmetrica rispetto ai numeri considerando la successione di rapporti $\frac{1\cdot2}{1\cdot3}, \frac{1\cdot3}{2\cdot3}, \frac{2\cdot3}{2\cdot4}, \frac{2\cdot4}{3\cdot4}, \frac{3\cdot4}{3\cdot5}, \frac{3\cdot5}{4\cdot5}, \frac{4\cdot5}{4\cdot6}, \frac{4\cdot6}{5\cdot6}$ e scegliendo convenientemente le origini degli angoli.

nella 3.ª parte del capitolo basta porre in generale

$$\left.\begin{aligned} \rho'' \,.\, sen\ 1''\ cotg\ M &= B \\ \sum \log sen\, M - \sum \log sen\, N - \log R &= L_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (179)$$

Così, sostituendo ai δ i loro valori in funzione delle correzioni cercate (1), (2), (3), ..., potremo dare alla (178) la solita forma

$$\left.\begin{aligned} B_1'(1)_1 + B_2'(2)_1 + \ldots B'_{n-1}(n-1)_1 + B''(1)_2 + \\ + B''(2)_2 + \ldots + L_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (180)$$

sotto la quale si introduce nel calcolo di compensazione ed ove si suppongono nulli i B corrispondenti alle correzioni che non debbono comparire nella condizione considerata.

76. Sieno dunque in generale

$$\left.\begin{aligned} A_1'(1)_1 + A_2'(2)_1 + \ldots A'_{n-1}(n-1)_1 + A_1''(1)_2 + A_2''(2)_2 + \ldots + L_1 = 0 \\ B_1'(1)_1 + B_2'(2)_1 + \ldots B'_{n-1}(n-1)_1 + B_1''(1)_2 + B_2''(2)_2 + \ldots + L_2 = 0 \\ C_1'(1)_1 + C_2'(2)_2 + \ldots C'_{n-1}(n-1)_1 + C_1''(1)_2 + C_2''(2)_2 + \ldots + L_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (181)$$

le equazioni provenienti sia dalla forma (176), sia dalla forma (180), e che esprimono tutte le condizioni poligonali e lineari cui dà luogo la rete trigonometrica da compensare. Come nel § 56, qui fra le correzioni (1), (2), (3), ... esistono altri vincoli oltre i soprascritti, giacchè esse, introdotte nelle direzioni più probabili osservate nelle varie stazioni, debbono, subordinatamente alle (181), render minime separatamente le somme dei quadrati dei residui corrispondenti ai varii gruppi di equazioni generate della forma (163).

Rappresentiamo, come più sopra, con λ il valore che prende in generale nelle (163) il residuo $v\sqrt{p}$ di un'equazione generata qualunque quando si introducono in essa i valori più probabili non compensati dei K e degli X, calcolati col metodo esposto nel § 71, e con δ ciò che diviene $v\sqrt{p}$ se invece si sostituiscono alle suddette incognite i loro valori compensati. Se x', x'', x''', ... sono le correzioni che ricevono i valori più probabili di X', X'', X''', ...

in conseguenza della compensazione, dalle (163) si ottiene:

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{p_1'}\,x' = \delta_1' - \lambda_1' & \sqrt{p_1''}\,x'' = \delta_1'' - \lambda_1'' \\
\sqrt{p_2'}\,\big(x' + (1)\big) = \delta_2' - \lambda_2' & \sqrt{p_2''}\,\big((x'' + (1)\big) = \delta_2'' - \lambda_2'' \\
\sqrt{p_3'}\,\big(x' + (2)\big) = \delta_3' - \lambda_3' & \sqrt{p_3''}\,\big((x'' + (2)\big) = \delta_3'' - \lambda_3'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sqrt{p_n'}\,\big(x' + (n-1)\big) = \delta_n' - \lambda_n' & \sqrt{p_n''}\,\big(x'' + (n-1)\big) = \delta_n'' - \lambda_n'' \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sqrt{p_1^{(\nu)}}\,x^{(\nu)} = \delta_1^{(\nu)} - \lambda_1^{(\nu)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sqrt{p_2^{(\nu)}}\,\big(x^{(\nu)} + (1)\big) = \delta_2^{(\nu)} - \lambda_2^{(\nu)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sqrt{p_3^{(\nu)}}\,\big(x^{(\nu)} + (2)\big) = \delta_3^{(\nu)} - \lambda_3^{(\nu)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sqrt{p_n^{(\nu)}}\,\big(x^{(\nu)} + (n-1)\big) = \delta_n^{(\nu)} - \lambda_n^{(\nu)}
\end{array}
\qquad (182)
$$

Ciascuna stazione dà luogo a un gruppo di equazioni di questa forma e tali equazioni possono evidentemente a lor volta esser considerate come delle equazioni generate dalla forma generatrice

$$a\,x' + b\,x'' + c\,x''' + \ldots + e\,(1) + f\,(2) + g\,(3) + \ldots = 0$$

la quale, mancando del termine noto, acquista un significato esperimentale solo dalle condizioni (181) che legano parte delle incognite alle quantità note $L_1, L_2, L_3, \ldots$. È da notare poi che le correzioni incognite x', x'', x''',... (1), (2), (3),... che compariscono in un gruppo (182) relativo ad una stazione non compariscono negli altri gruppi analoghi, per modo che le equazioni normali di tutte le equazioni generate in tutte le stazioni si ottengono senza difficoltà costituendo separatamente quelle corrispondenti a ciascuna stazione.

Da tutto ciò risulta chiaramente che ci troviamo qui nel caso del § 56, e che quindi le equazioni generate dedotte dalla forma (182) e le condizioni (181) possono esser trattate con uno qualunque dei procedimenti di compensazione che convengono al caso suddetto.

Le equazioni normali cui danno origine le generate (182) considerate a parte, si ottengono subito dalle (165) e (166), sostituendo in esse ai simboli delle incognite X, K_s i simboli delle corrispondenti correzioni x, (s), ed omettendo i termini noti, giacchè

il gruppo (163) non differisce analiticamente dal gruppo (182) se non perchè in questo i termini noti sono nulli. I valori più probabili delle nuove incognite x, (s), corrispondenti ad x_0, y_0, z_0... del § 56, astrazion fatta dalla compensazione, sono dunque tutti nulli; inoltre fra le equazioni fondamentali di compensazione analoghe alle (125) le prime ν non contengono in questo caso i termini dipendenti dai correlativi, perchè le prime ν incognite, cioè x', x'', x''', ... non compariscono nelle equazioni di condizione. Per ultimo è facile vedere che ricavando dalle prime ν equazioni suddette i valori di x', x'', x''', ... e sostituendoli nelle altre, le parti di queste indipendenti dai correlativi si riducono rispettivamente ai primi membri delle equazioni (167) o (169).

Da ciò si vede come per la determinazione delle correzioni (1), (2), (3),... e dei correlativi *I, II, III*... si ottenga complessivamente il seguente sistema di equazioni normali

$$\left.\begin{array}{ll}
[a'](1)_1+[a'b'](2)_1+\ldots & +A_1'\,I+B_1'\,II+C_1'\,III+\ldots=0\\
[b'](1)_1+[b'\,b'](2)_1+\ldots & +A_2'\,I+B_2'\,II+C_2'\,III+\ldots=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[a''a''](1)_2+[a''b''](2)_2+\ldots & +A_1''\,I+B_1''\,II+C_1''\,III+\ldots=0\\
[a''b''](1)_2+[b''\,b''](2)_2+\ldots & +A_2''\,I+B_2''\,II+C_2''\,III+\ldots=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(1)_1+A_2'(2)_1+\ldots+A_1''(1)_2+A_2''(2)_2\ldots & +L_1=0\\
(1)_1+B_2'(2)_1+\ldots+B_1''(1)_2+B_2''(2)_2\ldots & +L_2=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\quad(183)$$

ove gli accenti delle lettere minuscole corrispondono alla numerazione delle stazioni. Introducendo le notazioni convenute nel § 71 tali equazioni si riducono alla semplice forma seguente:

$$\left.\begin{array}{ll}
[1]' & +A_1'\,I+B_1'\,II+C_1'\,III+\ldots=0\\
[2]' & +A_2'\,I+B_2'\,II+C_2'\,III+\ldots=0\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[1]'' & +A_1''\,I+B_1''\,II+C_1''\,III+\ldots=0\\
[2]'' & +A_2''\,I+B_2''\,II+C_2''\,III+\ldots=0\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\\
A_1'(1)_1+A_2'(2)_1+\ldots\ldots\ldots\ldots & +L_1=0\\
B_1'(1)_1+B_2'(2)_1+\ldots\ldots\ldots\ldots & +L_2=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots
\end{array}\right\}\quad(184)$$

77. Abbiamo già notato come il numero delle incognite (1), (2), (3), ... che entrano implicitamente nel soprascritto sistema fondamentale di equazioni compensanti sia così numeroso, anche per una rete molto limitata, che la risoluzione diretta (§ 56) riesce ineseguibile: fa d'uopo pertanto ricorrere ad uno dei due sistemi di doppia risoluzione esposti nei §§ 58 e 66 della terza parte. Noi seguiremo ora il sistema del § 58 (*sistema di Bessel*) e supporremo quindi risolute le equazioni del peso che corrispondono al sistema (183) omessi i termini dipendenti dai correlativi *I, II, III* ... In tal caso il detto sistema si scinde in tanti gruppi indipendenti quante sono le stazioni, e ciascun gruppo dà origine allo stesso sistema di equazioni del peso che deve essere stato risoluto nel ricercare le direzioni più probabili della stazione cui il gruppo considerato si riferisce (vedi § 71). Se nelle relazioni (172), che legano le ausiliarie [1], [2], [3], ... di ciascuna stazione alle corrispondenti correzioni cercate (1), (2), (3), ..., si introducono i valori che per tali ausiliarie si possono dedurre dalle (184), e per semplicità si pone, in generale:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= [\alpha\alpha]\,A_1 + [\alpha\beta]\,A_2 + [\alpha\gamma]\,A_3 + \dots \\
\mathfrak{A}_2 &= [\alpha\beta]\,A_1 + [\beta\beta]\,A_2 + [\beta\gamma]\,A_3 + \dots \\
\mathfrak{A}_3 &= [\alpha\gamma]\,A_1 + [\beta\gamma]\,A_2 + [\gamma\gamma]\,A_3 + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{B}_1 &= [\alpha\alpha]\,B_1 + [\alpha\beta]\,B_2 + [\alpha\gamma]\,B_3 + \dots \\
\mathfrak{B}_2 &= [\alpha\beta]\,B_1 + [\beta\beta]\,B_2 + [\beta\gamma]\,B_3 + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{C}_1 &= [\alpha\alpha]\,C_1 + [\alpha\beta]\,C_2 + [\alpha\gamma]\,C_3 + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

per ciascuna stazione, si ottengono delle equazioni della forma seguente

$$\left.\begin{aligned}
(1) &= \mathfrak{A}_1 I + \mathfrak{B}_1 II + \mathfrak{C}_1 III + \dots \\
(2) &= \mathfrak{A}_2 I + \mathfrak{B}_2 II + \mathfrak{C}_2 III + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(n-1) &= \mathfrak{A}_{n-1} I + \mathfrak{B}_{n-1} II + \mathfrak{C}_{n-1} III + \dots
\end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

che costituiscono le *equazioni correlate* analoghe alle (128) del § 58, e servono a calcolare le correzioni (1), (2), (3), ... relative alle

direzioni della stazione considerata. Le *equazioni correlanti* analoghe alle (130) si trovano poi, come sappiamo, esprimendo nelle condizioni (181) le correzioni (1), (2), (3), ... in funzione dei correlativi per mezzo delle relazioni (186). Per tal modo, osservando che si ha

$$[A\mathfrak{B}] = [B\mathfrak{A}],\ [A\mathfrak{C}] = [C\mathfrak{A}], \ldots [B\mathfrak{C}] = [C\mathfrak{B}], \ldots,$$

come è facile constatare per mezzo delle (185), si ottengono le equazioni cercate:

$$\left.\begin{aligned} &[A\mathfrak{A}]\,I + [A\mathfrak{B}]\,II + [A\mathfrak{C}]\,III + \ldots + L_1 = 0 \\ &[A\mathfrak{B}]\,I + [B\mathfrak{B}]\,II + [B\mathfrak{C}]\,III + \ldots + L_2 = 0 \\ &[A\mathfrak{C}]\,I + [B\mathfrak{C}]\,II + [C\mathfrak{E}]\,III + \ldots + L_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (187)$$

dalle quali si calcolano i valori dei correlativi *I*, *II*, *III*...

Il problema della compensazione propriamente detta di una rete trigonometrica rimane così risoluto: il procedimento del calcolo, dopo aver costituite le equazioni normali di ciascuna stazione (vedi § 71), può essere riepilogato come segue:

1.° *Formazione delle condizioni poligonali e lineari* (§§ 74, 75).

2.° *Calcolo delle ausiliarie* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, *per le varie stazioni* (formule 185).

3.° *Formazione delle equazioni normali correlanti* (187) *e calcolo dei correlativi.*

4.° *Formazione delle equazioni correlate* (186) *e calcolo delle correzioni* (1), (2), (3)... *e delle direzioni compensate delle varie stazioni.*

78. È da notare che, seguendo il metodo di compensazione sopra esposto, la direzione scelta arbitrariamente in ciascuna stazione come origine degli angoli azimutali non viene corretta quantunque sia stata osservata al pari delle altre direzioni. Per concepire come analiticamente, a meno di ricorrere a qualche postulato più o meno arbitrario, sia impossibile di determinare una correzione anche per l'origine degli angoli, basta riflettere che l'osservazione effettiva di una sola direzione non ha un senso fisico determinato e che nelle misure azimutali non possono esser considerati che degli angoli. Perciò le correzioni (1), (2), (3), ... si riferiscono in realtà agli angoli e non alle semplici direzioni, e la correzione dell'origine degli angoli non ha verun significato geometrico nè veruna importanza nella ricerca degli elementi compensati di una rete.

Tuttavia in certe quistioni speciali, come, ad esempio, quando si vuole desumere quali sono le direzioni che riescono maggiormente infirmate dalla compensazione, sia per ripeterne la misura relativa se le corrispondenti correzioni eccedono certi limiti, sia per indagare le cause anormali e sistematiche di errore, diventa necessario il fare qualche ipotesi razionalmente accettabile che permetta di risalire dalle correzioni (1), (2), (3), ... degli angoli, agli errori elementari più probabili di ogni singola direzione considerata come un ente fisico osservabile, o di ricercare questi direttamente invece delle suddette correzioni angolari. L'autorità di BESSEL ci induce ad indicare il metodo per ciò seguito nel *Gradmessung in Ostpreussen* (*paragrafo* 34).

Riprendiamo a considerare le equazioni (165) del § 71, le quali, risolute rispetto agli X, danno:

$$X' = -\frac{[p'l']_n + p_2' K_1 + p_3' K_2 + \ldots + p_n' K_{n-1}}{[p']_n}$$

$$X'' = -\frac{[p''l'']_n + p_2'' K_1 + p_3'' K_2 + \ldots + p_n'' K_{n-1}}{[p'']_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X^{(\nu)} = -\frac{[p^{(\nu)} l^{(\nu)}]_n + p_2^{(\nu)} K_1 + p_3^{(\nu)} K_2 + \ldots + p_n^{(\nu)} K_{n-1}}{[p^{(\nu)}]_n}$$

ed osserviamo che alle determinazioni di X', X'', X''', ... debbono essere assegnati rispettivamente i pesi $[p']$, $[p'']$, $[p''']$, ..., come risulta del resto dalle equazioni generate (163), se si riflette che le quantità X sono della stessa natura delle osservazioni l. Rappresentando con Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... Δ_ν le differenze incognite fra i veri valori di X'', X''', ... ed il vero valore di X', è chiaro che il valore O, più probabile di X', sarà dato dalla media aritmetica delle seguenti quantità

X'	*peso* $[p']_n$
$X'' - \Delta_1$	» $[p'']_n$
$X''' - \Delta_2$	» $[p''']_n$
.....	
$X^{(\nu)} - \Delta_{\nu-1}$	» $[p^{(\nu)}]_n$

fatta tenendo conto dei pesi. Introducendo per X', X'', X''', ... i

loro valori in funzione di $K_1, K_2, \ldots K_{n-1}$, e ponendo

$$[p\,l] = [p'\,l']_n + [p''\,l'']_n + [p'''\,l''']_n + \ldots + [p^{\nu}\,l^{\nu}]_n$$

$$[p] = [p']_n + [p'']_n + [p''']_n + \ldots + [p^{(\nu)}]_n$$

avremo dunque:

$$= -\frac{[pl] + [p_2]^{(\nu)} K_1 + [p_3]^{(\nu)} K_2 + \ldots [p_n]^{(\nu)} K_{n-1} + [p']_n \Delta_1 + [p'']_n \Delta_2 + \ldots + [p^{(\nu)}]_n \Delta_{\nu-1}}{[p]} \quad (188)$$

È facile vedere come a questa stessa espressione del valore più probabile O di X' si giunge anche partendo dalle equazioni generate (163) se vi si considerano $K_1, K_2, \ldots K_{n-1}$, come quantità note, quindi essa vale qualunque siano i valori assunti per queste quantità. Perciò si può ottenere il valore compensato $O + (o)$ di O introducendo nella (188) in luogo dei K i loro valori compensati $K_1 + (1)$, $K_2 + (2)$, $K_3 + (3), \ldots$, ed in conseguenza la correzione (o) che, dietro il calcolo di compensazione, si può fare alla direzione scelta come origine degli azimut è data da:

$$(o) = -\frac{[p_2]^{(\nu)}(1) + [p_3]^{(\nu)}(2) + \ldots [p_n]^{(\nu)}(n-1)}{[p]} \quad (189)$$

e gli errori più probabili commessi nell'osservazione delle singoli direzioni considerate come enti fisici determinati sono:

$$(o) + (1), \quad (o) + (2), \quad (o) + (3), \ldots (o) + (n-1).$$

L'ipotesi sulla quale riposa implicitamente questo procedimento è che dato l'errore complessivo delle due osservazioni necessarie per misurare un angolo, i valori più probabili dei due errori elementari di osservazione sieno di segno contrario ed eguali alla metà dell'errore complessivo suddetto: e questa ipotesi non può essere accettata se non si fa astrazione dall'influenza degli errori sistematici, che possono esser diversi in diverse direzioni.

79. Fatta la compensazione di una rete coi metodi esposti più sopra, importa calcolare l'errore medio corrispondente all'unità di peso, cioè ad ogni singola osservazione coniugata di una direzione; giacchè dal confronto del valore ottenuto per esso in conseguenza della compensazione, con quello calcolato direttamente nelle singole stazioni (§ 73) viene posta in evidenza, come è noto, l'entità degli errori sistematici d'osservazione considerati complessivamente.

Il procedimento che conviene di seguire in questo caso è quello già esposto in generale nel § 59, tanto più che la quantità

$[p\,\lambda\,\lambda]$, ossia la somma dei quadrati dei residui corrispondenti alle equazioni generate delle varie stazioni ed ai valori non compensati delle direzioni deve supporsi già calcolata insieme a questi valori.

Nell'applicare al caso nostro la formula generale (126), ossia la

$$m = \sqrt{\frac{[p\,\delta\,\delta]}{n - \omega + \sigma}} \quad * \qquad (190)$$

si deve assumere evidentemente per n il numero totale delle equazioni generate di tutte le stazioni, per ω il numero totale delle incognite, cioè il numero complessivo delle direzioni della rete escluse le origini, aumentato del numero di tutti gli strati introdotti separatamente nei calcoli preparatorii delle stazioni, e per σ il numero delle condizioni. In quanto al calcolo della quantità $[p\,\delta\,\delta]$, abbiamo già visto al § 59 come partendo dalla nota identità

$$[p\,v\,v] = [p\,\lambda\,\lambda] + (x - x_0)\,\xi + (y - y_0)\,\eta + (z - z_0)\,\zeta + \ldots$$

(ove $\sqrt{p}\,\lambda$ rappresenta in generale il residuo di un'equazione generata ridotta all'unità di peso, corrispondente ai valori più probabili non compensati delle incognite) e sostituendo ad $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$, ... ξ, η, ζ, ... i valori che queste quantità assumono nel caso della compensazione, si trova

$$[p\,\delta\,\delta] = [p\,\lambda\,\lambda] + I\,L_1 + II\,L_2 + III\,L_3 + \ldots \qquad (191)$$

Infatti nel caso nostro si ha

$$x - x_0 = (1),\ (y - y_0) = (2),\ (z - z_0) = (3), \ldots$$
$$\xi = -[1],\ \eta = -[2],\ \zeta = -[3], \ldots$$

e quindi

$$[p\,\delta\,\delta] = [p\,\lambda\,\lambda] + (1)_1[1]_1 + (2)_1[2]_1 + \ldots (n-1)_1[n-1]_1$$
$$+ (1)_2[1]_2 + (2)_2[2]_2 + \ldots (n-1)_2[n-1]_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

le somme essendo estese a tutte le stazioni. Se in luogo delle correzioni (1), (2), (3), ... e delle ausiliarie [1], [2], [3], ... si introducono i correlativi, eseguendo l'eliminazione per mezzo delle correlate (186) e delle equazioni compensanti (184) si ottiene poi,

---

* Si è scritto qui $[p\,\delta\,\delta]$ in luogo di $[\delta\,\delta]$ per mantenere a δ il significato di *residuo* di un'equazione generata analoga alle (163) non ridotta all'unità di peso.

tenendo conto delle correlanti (187), la formula (191) più sopra ricordata.

Se non si vuol far uso dei correlativi si può adoperare la relazione

$$[p\delta\delta]=[p\lambda\lambda]-\frac{L_1^2}{[A\mathfrak{A}]}-\frac{[L_2,1]^2}{[B\mathfrak{B}.1]}-\frac{[L_3,2]^2}{[C\mathfrak{C}.2]}-\dots \quad (192)$$

analoga alla (132) del § 59 e che si deduce dalla (191), eliminandone i correlativi per mezzo delle correlanti (187) col procedimento già tante volte indicato.

80. Ci resta a vedere come si può dedurre il peso e l'errore medio di una funzione delle osservazioni compensate, per esempio, della distanza geodetica fra due vertici qualunque della rete. È chiaro che basta considerare il caso in cui la funzione compensata ha la forma lineare seguente

$$\left.\begin{aligned} U_m = U_0 + F_1K_1 + F_2K_2 + F_3K_3 + \dots \\ + F_1(1) + F_2(2) + F_3(3) + \dots \end{aligned}\right\} \quad (193)$$

giacchè le quantità K_1, K_2, K_3, ... (1), (2), (3), ..., che hanno qui il significato dei numeri precedenti, sono correzioni che si debbono supporre dell'ordine degli errori d'osservazione. Per seguire il metodo generale del § 60 è anzitutto necessario esprimere le correzioni (1), (2), (3), ... in funzione delle direzioni più probabili dedotte nelle singole stazioni. Perciò introduciamo in luogo di tali correzioni i loro valori dati dalle correlate (186) ed avremo

$$U_m = U_0 + [FK] + I[F\mathfrak{A}] + II[F\mathfrak{B}] + III[F\mathfrak{C}] + \dots \quad (194)$$

dalla quale relazione debbono essere eliminati i correlativi per mezzo delle equazioni correlanti (187). Col metodo dei coefficienti indeterminati, rappresentando questi con R_1, R_2, R_3, ... come nel § 60, per le equazioni che determinano tali quantità si trovano le

$$\left.\begin{aligned} &[A\mathfrak{A}]R_1 + [A\mathfrak{B}]R_2 + [A\mathfrak{C}]R_3 + \dots + [F\mathfrak{A}] = 0 \\ &[A\mathfrak{B}]R_1 + [B\mathfrak{B}]R_2 + [B\mathfrak{C}]R_3 + \dots + [F\mathfrak{B}] = 0 \\ &[A\mathfrak{C}]R_1 + [B\mathfrak{C}]R_2 + [C\mathfrak{C}]R_3 + \dots + [F\mathfrak{C}] = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (195)$$

che permettono di dare alla (194) la forma

$$U_m = U_0 + [FK] + [RL]. \quad (196)$$

Se si pone mente al modo con cui sono formate le equazioni di condizione è facile vedere d'altra parte che, trascurando negli sviluppi in serie (a seconda dello spirito dei minimi quadrati) i termini dipendenti dalle potenze delle correzioni K maggiori alla prima, si ha in corrispondenza alle (181):

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= A_1' K_1' + A_2' K_2' + A_3' K_3' + \ldots A_1'' K_1'' + A_2'' K_2'' + \ldots + \Omega_1 \\ L_2 &= B_1' K_1' + B_2' K_2' + B_3' K_3' + \ldots B_1'' K_1'' + B_2'' K_2'' + \ldots + \Omega_2 \\ L_3 &= C_1' K_1' + C_2' K_2' + C_3' K_3' + \ldots C_1'' K_1'' + C_2'' K_2'' + \ldots + \Omega_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (197)$$

ove gli accenti si riferiscono ai numeri d'ordine delle stazioni ed $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ rappresentano delle funzioni di forma nota delle direzioni prossime $\{1\}_0, \{2\}_0, \{3\}_0, \ldots$ arbitrariamente scelte, ed in conseguenza debbono esser considerate come delle costanti note. Da queste relazioni e dalla (196) si ricava, tralasciando per semplicità gli accenti:

$$\begin{aligned} U_m = Q &+ K_1 \{A_1 R_1 + B_1 R_2 + C_1 R_3 + \ldots + F_1\} + \\ &+ K_2 \{A_2 R_1 + B_2 R_2 + C_2 R_3 + \ldots + F_2\} + \\ &+ K_3 \{A_3 R_1 + B_3 R_2 + C_3 R_3 + \ldots + F_3\} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ove Q è una costante. La ricerca del peso di U_m resta così ridotto al caso già studiato nei §§ 45 e 47 di questo capitolo (vol. I), giacchè le quantità $K_1, K_2, K_3, \ldots$ possono esser considerate come determinazioni indirette corrispondenti alle equazioni normali (169).

Se si pone

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= [\alpha\alpha] F_1 + [\alpha\beta] F_2 + [\alpha\gamma] F_3 + \ldots \\ Q_2 &= [\alpha\beta] F_1 + [\beta\beta] F_2 + [\beta\gamma] F_3 + \ldots \\ Q_3 &= [\alpha\gamma] F_1 + [\beta\gamma] F_2 + [\gamma\gamma] F_3 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (198)$$

e si costituiscono le equazioni analoghe alle (92) del § 45 sopra citato, in corrispondenza alla precedente forma di U, tenendo conto delle notazioni (185) si ottiene

$$\begin{aligned} M_1 &= Q_1 + \mathfrak{A}_1 R_1 + \mathfrak{B}_1 R_2 + \mathfrak{C}_1 R_3 + \ldots \\ M_2 &= Q_2 + \mathfrak{A}_2 R_1 + \mathfrak{B}_2 R_2 + \mathfrak{C}_2 R_3 + \ldots \\ M_3 &= Q_3 + \mathfrak{A}_3 R_1 + \mathfrak{B}_3 R_2 + \mathfrak{C}_3 R_3 + \ldots \end{aligned}$$

ed in conseguenza le (93), per l'inversa del peso P_u cercato della determinazione U_m, ricordando che si ha

$$[A\mathfrak{B}] = [B\mathfrak{A}],\ [A\mathfrak{C}] = [C\mathfrak{A}], \ldots [\mathfrak{B}C] = [B\mathfrak{C}], \ldots,$$

ci danno:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_u} &= [M(AR_1 + BR_2 + CR_3 + \ldots + F)] = \\
&= [(\mathfrak{A}R_1 + \mathfrak{B}R_2 + \mathfrak{C}R_3 + \ldots + Q)(AR_1 + BR_2 + CR_3 + \ldots + F)] \\
&= [FQ] + [\mathfrak{A}F]R_1 + [\mathfrak{B}F]R_2 + [\mathfrak{C}F]R_3 + \cdots \\
&\quad + [AQ]R_1 + [BQ]R_2 + [CQ]R_3 + \cdots \\
&\quad + ([A\mathfrak{A}]R_1 + [A\mathfrak{B}]R_2 + [A\mathfrak{C}]R_3 + \ldots)R_1 + \\
&\quad + ([A\mathfrak{B}]R_1 + [B\mathfrak{B}]R_2 + [B\mathfrak{C}]R_3 + \ldots)R_2 + \\
&\quad + ([A\mathfrak{C}]R_1 + [B\mathfrak{C}]R_2 + [C\mathfrak{C}]R_3 + \ldots)R_3 + \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Per ridurre questa espressione ad una forma più semplice basta tener conto delle equazioni (195), ed osservare che si ha, come è facile constatare, per mezzo delle (198):

$$[AQ] = [\mathfrak{A}F],\quad [BQ] = [\mathfrak{B}F],\quad [CQ] = [\mathfrak{C}F], \ldots,$$

dimodochè si può scrivere

$$\frac{1}{P_u} = [FQ] + [\mathfrak{A}F]R_1 + [\mathfrak{B}F]R_2 + [\mathfrak{C}F]R_3 + \cdots,$$

relazione della quale si possono eliminare gli R per mezzo delle equazioni normali (195); facendo uso del solito algoritmo del § 47, già tante volte applicato, si trova allora facilmente

$$\frac{1}{P_u} = [FQ] - \frac{[\mathfrak{A}F]^2}{[A\mathfrak{A}]} - \frac{[\mathfrak{B}F,1]^2}{[B\mathfrak{B},1]} - \frac{[\mathfrak{C}F,2]^2}{[C\mathfrak{C},2]} - \ldots \quad (199)$$

e quindi

$$m_u = m\sqrt{[FQ] - \frac{[\mathfrak{A}F]^2}{[A\mathfrak{A}]} - \frac{[\mathfrak{B}F,1]^2}{[B\mathfrak{B}]} - \frac{[\mathfrak{C}F,2]^2}{[C\mathfrak{C},2]} - \ldots} \quad (199^{bis})$$

che sono le formole più convenienti al calcolo del peso P_u e dell'errore medio m_u quando la compensazione della rete è stata fatta col metodo esposto più sopra. Il procedimento del calcolo può riassumersi come segue:

1.° *Riduzione della funzione, di cui si cerca il peso e l'errore medio, alla forma lineare* (193).

2.° *Calcolo delle ausiliarie* $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ *per mezzo delle relazioni* (198) *e di* $[FQ]$.

3.° *Calcolo delle altre quantità che compariscono nella* (199) *col metodo di deduzione con cui si calcolano i coefficienti di un sistema di equazioni risolventi.*

4.° *Sostituzione nella* (199) *e calcolo di* P_u *e di* m_u.

81. Abbiamo sviluppato completamente il sistema di compensazione geodetica di *Bessel* colle modificazioni ed aggiunte di *Andrae,* perchè esso è, da un lato, uno dei più eleganti per la simmetria delle formule e per la semplicità dei calcoli, ed è, dall'altro lato, il più acconcio a mostrare come si applichi la teoria generale dei minimi quadrati al caso della compensazione delle reti geodetiche. Uscirebbe però dalla natura di quest'opera il particolareggiare ugualmente altri metodi speciali, dacchè tutti si riducono ad una facile applicazione delle formule dedotte nelle parti precedenti di questo capitolo. Diremo soltanto che la doppia risoluzione fondata sul principio dell'equivalenza (vedi § 66 e seguenti) presenta gli stessi vantaggi del sistema di compensazione sopra esposto, e che nel caso in cui si tratti di una piccola rete con poche equazioni di condizione è assai conveniente anche il metodo di eliminazione immediata, detto di *riduzione alle determinazioni indirette* od il metodo di compensazione diretta del § 52, che può essere applicato senza difficoltà ove in ogni stazione si considerino gli angoli fra i punti successivi del giro di orizzonte, anzichè le corrispondenti direzioni. Torneremo brevemente su questo proposito nel § 83.*

82. Nelle triangolazioni che coprono vaste regioni di terreno il numero delle condizioni e quello delle osservazioni da compensare è così grande che la compensazione della intera rete considerata complessivamente riesce malagevole e pressochè impossibile qualunque sia il sistema di risoluzione che si adotta. Diviene allora necessario lo spezzare le reti stesse in più parti ed il considerare separatamente ciascuna di queste. In generale i criterii per tale suddivisione sono indicati dalla disposizione delle basi nella rete che si considera,

* Per lo sviluppo degli altri metodi sia per la compensazione geodetica sia per la deduzione delle direzioni o degli angoli più probabili di ciascuna stazione si possono consultare le opere seguenti: HANSEN, *Geodätische Untersuchungen.* — ANDRAE, *Danske Gradmaaling.* — HELMERT, *Ausgleichungsrechnung.* — FISCHER, *Geodäsie.* — JORDAN, *Handbuch der Vermessungskunde.*

le quali sono sempre numerose e distribuite in modo che gli elementi lineari intermedii più distanti restino determinati con un errore medio unitario minore di una quantità prestabilita come *tolleranza nelle lunghezze*. Compensata allora separatamente una delle parti estreme, si passa per solito alla compensazione di una parte limitrofa considerando gli elementi comuni come quantità note e non suscettibili di correzione; e nello stesso modo si procede successivamente per le altre parti. Si ottiene così una rete per cui in realtà la condizione fondamentale ($\sum p\,v\,v = minimo$), alla quale si informa il metodo dei minimi quadrati, non è soddisfatta che approssimativamente, ma che tuttavia non presenta contraddizioni geometriche ne duplicazioni di lati, e si compone di elementi corretti i quali evidentemente meritano molta maggior fiducia degli osservati e non differiscono sensibilmente dai più probabili che si otterrebbero dalla compensazione complessiva e rigorosa, se le parti in cui la rete è stata suddivisa sono molto estese. *Gauss* ha dato però un metodo di compensazione per parti, fondato sul principio delle approssimazioni successive, che permette di ottenere le correzioni più probabili corrispondenti alla condizione fondamentale $[p\,v\,v] = minimo$ con un aumento di calcolo poco rilevante rispetto al metodo approssimativo sopraccennato: ecco in che consiste.

Se nelle equazioni correlate (186), invece dei valori dei correlativi che soddisfanno alle correlanti (187), si introducono dei valori approssimati, si ottengono delle correzioni prossime che non soddisfanno alle equazioni di condizione (181), ma ne riducono i primi membri a certe quantità che potrebbero a loro volta esser considerate come errori residuali di osservazione e servire alla compensazione definitiva; e se si costituiscono quindi le equazioni normali corrispondenti a questo nuovo caso, e senza averle risolute si riesce a ricavarne delle correzioni prossime per i suddetti valori provvisorii dei correlativi, evidentemente questi possono servire, per mezzo delle (186) stesse, a dedurre delle nuove correzioni più delle prime prossime alle più probabili: ed è chiaro che se, procedendo collo stesso metodo per successive approssimazioni, si ottiene un sistema di correzioni che soddisfanno alle condizioni (181), il corrispondente sistema di correlativi si identifica con quello che si sarebbe potuto ricavare risolvendo fin da principio le equazioni normali correlanti (187).

Ciò posto supponiamo che, costituite tutte le condizioni di un' intera rete geodetica, siano queste state suddivise in gruppi per

modo che ciascun gruppo corrisponda ad una delle parti in cui la rete è stata spezzata: distinguiamo poi queste parti l'una dall'altra numerandole secondo l'ordine con cui si sarebbe proceduto alla loro compensazione successiva seguendo il metodo approssimativo esposto più sopra.

Compensando parzialmente la prima parte si ottengono delle correzioni provvisorie che, introdotte nelle condizioni della seconda parte insieme alle altre osservazioni, non le soddisfanno e danno dei nuovi residui L coi quali può esser eseguita la compensazione delle osservazioni che si riferiscono alla seconda parte stessa, comprese quelle comuni a questa ed alla parte precedente. Così si può procedere di parte in parte introducendo sempre i valori antecedentemente compensati e considerandoli come suscettibili di nuove correzioni, fino a che, esaurito il calcolo per tutte le parti si ricomincia dalla prima per ottenere nuove correzioni più prossime alle definitive. In generale dopo la seconda approssimazione le correzioni complessive ottenute, cioè le somme delle correzioni parzialmente calcolate nelle successive compensazioni per uno stesso elemento osservato, introdotte nelle equazioni di condizione danno dei residui così piccoli da rendere inutile un'approssimazione ulteriore.

È superfluo il dire che nelle reti geodetiche che comprendono triangolazioni di varii ordini la triangolazione di primo ordine deve essere compensata a parte, e che i suoi elementi debbono esser poi considerati come delle costanti note ed inalterabili nella compensazione degli altri ordini. In generale, per non complicare inutilmente i calcoli, conviene compensare il secondo ordine fissandone ciascun punto rispetto ai tre vertici del triangolo di primo ordine che lo comprende, e determinando in conseguenza i collegamenti dei vertici di secondo ordine fra loro. Del resto molti sono i metodi adottati in pratica per le compensazioni delle reti inferiori, ma l'indole di questo libro non ci consente di entrare in particolarità su questo proposito.

83. Nel caso di misure azimutali fatte per angoli, come succede quando gli strumenti goniometrici adottati sono ripetitori, è pure applicabile il sistema di compensazione esposto più sopra, se si modifica la compensazione delle singole stazioni (vedi § 71), nel modo seguente.

Sieno

$$\{1 . 2\},\ \{2 . 3\},\ \{3 . 4\},\ \ldots\ \{n . 1\}$$

gli angoli successivi ignoti che compongono il giro d'orizzonte di una stazione di n punti osservati, in modo che si debba avere rigorosamente

$$\{1.2\}+\{2.3\}+\{3.4\}+\ldots\{n.1\}-360^\circ=0, \qquad (200)$$

e sieno

$$\{1.2\}_0,\ \{2.3\}_0,\ \{3.4\}_0,\ \ldots$$

i valori dedotti per tali angoli dall'osservazione: ponendo, come nel paragrafo 71

$$\{1.2\}=\{1.2\}_0+k_1,\ \{2.3\}=\{2.3\}_0+k_2,\ \{3.4\}=\{3.4\}_0+k_3,\ \ldots$$

è chiaro che per mezzo delle misure fatte nella stazione considerata si possono costituire le seguenti equazioni generate

k_1	$+L_1'=v_1'$	*peso*	P_1'
k_2	$+L_2'=v_2'$	»	P_2'
	. . . . .	»	. . .
	$k_n+L_n'=v_n'$	»	P_n'
k_1+k_2	$+L_1''=v_1''$	»	P_1''
k_2+k_3	$+L_2''=v_2''$	»	P_2''
	. . . . .	»	. . .
k_1	$+k_n+L_n''=v_2''$	»	P_n''
$k_1+k_2+k_3$	$+L_1'''=v_1'''$	»	P_1'''
$k_2+k_3+k_4$	$+L_2'''=v_2'''$	»	P_2'''
	. . . . .	»	. . .
k_1+k_2	$+k_n+L_n'''=v_n'''$	»	P_n'''

. . . . . .

che debbono essere risolute subordinatamente alla condizione (200). È qui conveniente ricorrere al metodo di sostituzione diretta eliminando l'incognita k_n per mezzo della (200) stessa, posta sotto la forma

$$k_1+k_2+k_3+\ldots k_n+w=0;$$

ed è facile vedere come in tal caso le precedenti equazioni possono

essere raggruppate due a due per mezzo di medie aritmetiche, in guisa da ottenerne il sistema di equazioni generate indipendenti

$$
\begin{array}{rrrrr}
k_1 & +l_1' & =v_1' & peso & p_1' \\
k_2 & +l_2' & =v_2' & \text{»} & p_2' \\
 & \dots\dots\dots & & \text{»} & \dots \\
k_{n-1} & +l'_{n-1} & =v'_{n-1} & \text{»} & p'_{n-1} \\
\hline
k_1+k_2 & +l_1'' & =v_1'' & \text{»} & p_1'' \\
k_2+k_3 & +l_2'' & =v_2'' & \text{»} & p_2'' \\
 & \dots\dots\dots & & \text{»} & \dots \\
k_{n-2}+k_{n-1} & +l''_{n-2} & =v''_{n-2} & \text{»} & p''_{n-2} \\
\hline
k_1+k_2+k_3 & +l_1''' & =v_1''' & \text{»} & p_1''' \\
k_2+k_3+k_4 & +l_2''' & =v_2''' & \text{»} & p_2''' \\
 & \dots\dots\dots & & \text{»} & \dots \\
k_{n-3}+k_{n-2}+k_{n-1} & +l'''_{n-3} & =v''_{n-3} & \text{»} & p'''_{n-3} \\
\hline
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots
\end{array}
\qquad (201)
$$

le quali in questo caso sostituiscono le (163) del § 71. Costituendo le corrispondenti equazioni normali e ponendo, per conformità di notazione,

$$
\begin{array}{l}
[aa]=p_1'+p_1''+p_1'''+p_1^{iv}+\dots \\
[ab]=\quad p_1''+p_1'''+p_1^{iv}+\dots \\
[ac]=\quad\quad p_1'''+p_1^{iv}+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
[bb]=p_2'+p_1''+p_2''+p_1'''+p_2'''+\dots \\
[bc]=\quad p_2''+p_1'''+p_2'''+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[cc]=p_3'+p_2''+p_3''+p_1'''+p_2'''+p_3'''+\dots \\
[cd]=\quad p_3''\quad +p_2'''+p_3'''+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[al]=p_1'l_1'+p_1''l_1''+p_1'''l_1'''+\dots \\
[bl]=p_2'l_2'+p_1''l_1''+p_2''l_2''+p_1'''l_1'''+p_2'''l_2'''+\dots \\
[cl]=p_3'l_3'+p_2''l_2''+p_3''l_3''+p_1'''l_1'''+p_2'''l_2'''+p_3'''l_3'''+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\qquad (202)
$$

si ritrova un sistema analogo al (169), salvo che, in questo in caso, le quantità k si riferiscono agli angoli successivi invece che alle direzioni.

Successivamente poi la compensazione generale della rete può procedere come nel caso delle misure azimutali per direzioni, colla sola modificazione delle condizioni (181), nella cui formazione in luogo delle correzioni (1), (2), (3),... corrispondenti alle direzioni debbono essere introdotte quelle relative agli angoli $\{1.2\}$, $\{2.3\}$, $\{3.4\}$,... più probabili dedotti come sopra è detto, le quali per analogia, si sogliono rappresentare colle notazioni (1.2), (2.3), (3.4),... Si deve però avvertire che ove comparisce l'ultimo angolo $\{n.1\}$ di ciascun giro di orizzonte conviene in generale introdurre

$$360° - \{1.2\} - \{1.3\} - \{1.4\} \ldots$$

per non aggiungere le condizioni azimutali che complicherebbero di troppo il calcolo.

Solo nel caso in cui si tratti di piccole reti, e che la compensazione venga fatta col metodo diretto esposto nel § 52, è utile introdurre in calcolo anche le correzioni $(n.1)$ corrispondenti agli ultimi angoli suddetti, aggiungendo le condizioni azimutali che prendono in generale la forma:

$$(1.2) + (2.3) + (3.4) + \ldots L = 0. \qquad (203)$$

84. L'errore medio ed il peso di una funzione qualunque delle osservazioni compensate non danno che parzialmente l'idea della precisione complessiva di una rete geodetica; ma questa precisione si concepisce invece colla massima chiarezza considerando le probabilità che hanno i punti prossimi a ciascun vertice trigonometricamente determinato di coincidere invece di questo colla vera sua posizione geodetica. L'introduzione di queste probabilità conduce a delle importanti conclusioni che si raggruppano sotto il nome di *Teoria delle ellissi degli errori,** della quale daremo ora i fondamenti per quanto ce lo consente l'indole di quest'opera, rinviando il lettore ai trattati speciali per le sue importanti applicazioni ai lavori topografici e di bassa geodesia.

Consideriamo anzitutto in un piano un punto O determinato esperimentalmente per mezzo delle misure dirette ed indipendenti

* La considerazione delle ellissi degli errori fu introdotta per la prima volta in Geodesia da ANDRAE (*Danske Gradmaaling*), ed è stata poi sviluppata da HELMERT nella sua importante memoria intitolata *Studien über rationelle Vermessungen* (SCHLÖMILCH, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1868).

delle sue coordinate x_0, y_0 riferite a due assi obliqui qualunque comprendenti l'angolo φ, e siano Δx, Δy degli errori possibili per le misure suddette, e δ l'errore corrispondente nella determinazione di O, ossia la distanza fra la sua posizione più probabile (x_0, y_0) ed il punto $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$; si avrà

$$\delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\,\Delta x\,\Delta y \cos\varphi},$$

relazione da cui, rappresentando con M l'errore medio della determinazione (x_0, y_0) di O, e con m_x, m_y gli errori medii delle due osservazioni x_0, y_0, si trae, come è noto,

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2, \qquad (204)$$

giacchè il valore medio di $2\,\Delta x\,\Delta y$, accettata l'ipotesi su cui si fonda il calcolo dei minimi quadrati, è evidentemente zero.

La probabilità P dell'errore δ si ottiene moltiplicando la probabilità dell'errore Δx in x_0 per la probabilità dell'errore Δy in y_0, in guisa che sarà

$$P = \frac{1}{2\,m_x m_y \cdot \pi}\, e^{-\frac{\Delta x^2}{2 m_x^2} - \frac{\Delta y^2}{2 m_y^2}}\, dx\,dy;$$

e di qui risulta che a tutte le coppie di valori di Δx, Δy, per le quali resta soddisfatta la relazione

$$\frac{\Delta x^2}{m_x^2} + \frac{\Delta y^2}{m_y^2} = \text{costante} = k^2, \qquad (205)$$

corrispondono dei valori δ che hanno tra loro uguale probabilità di coincidere coll'errore commesso nella determinazione del punto O. Ora, trasportando parallelamente gli assi in modo che la loro origine cada nel punto (x_0, y_0), la (205) viene a rappresentare una ellisse riferita ad una coppia di diametri conjugati $2\,m_x k$, $2\,m_y k$, e cambiando il valore di k si ottengono ellissi simili e similmente disposte. Concluderemo quindi che *tutti i gruppi di punti che hanno fra loro eguale probabilità di coincidere colla vera posizione del punto O costituiscono una determinata famiglia di elissi simili e similmente disposte, col centro comune nel punto* (x_0, y_0): a queste ellissi si dà il nome di *ellissi degli errori:* per $k = 1$ si ha poi l'*ellisse principale*, che gode della proprietà di dare l'errore medio della determinazione del punto (x_0, y_0) per mezzo della somma dei quadrati di due semidiametri conjugati qualunque, come si vede dalla relazione (204).

È chiaro che la quantità

$$\frac{1}{2\pi x_x m_y} e^{-\frac{\Delta x^2}{2m_x^2}-\frac{\Delta y^2}{2m_y^2}} dx\,dy = \frac{1}{2\pi m_x m_y sen\,\varphi} e^{-\frac{\Delta x^2}{2m_x^2}-\frac{\Delta y^2}{2m_y^2}} dx\,dy\,sen\,\varphi$$

rappresenta anche la probabilità che la vera posizione del punto O cada nel parallelogrammo infinitesimo di area $dx\,dy\,sen\,\varphi$, adiacente al punto $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, e che, analogamente, la probabilità che O cada dentro un elemento $d\sigma$ di area, compreso fra due successive ellissi degli errori e fra due normali successive ad una di queste, è data da

$$\frac{1}{2\pi m_x m_y sen\,\varphi} e^{-\frac{\Delta x^2}{2m_x^2}-\frac{\Delta y^2}{2m_y^2}} d\sigma$$

ove $d\sigma$ è un infinitesimo di second'ordine.

Dacchè lungo ciascun' ellisse degli errori la quantità

$$\frac{1}{2\pi m_x m_y sen\,\varphi} e^{-\frac{\Delta x^2}{2m_x^2}-\frac{\Delta y^2}{2m_y^2}}$$

rimane costante, si può avere immediatamente, con una prima integrazione della precedente espressione differenziale, la probabilità dW che la vera posizione di O cada dentro l'anello ellittico infinitesimo compreso fra due successive ellissi degli errori. In tal modo, rappresentando con $d\Delta$ l'area di tale anello, si ottiene:

$$dW = \frac{1}{2\pi m_x m_y sen\,\varphi} e^{-\frac{\Delta x^2}{2m_x^2}-\frac{\Delta y^2}{2m_y^2}} d\Delta,$$

dalla quale relazione, è facile di risalire, con una seconda integrazione, alla probabilità W_k che il vero punto O cada dentro l'ellisse degli errori caratterizzata dalla (205) per un valore determinato di k. Infatti da questa si trae per l'espressione dell'area Δ compresa nella ellisse suddetta

$$\Delta = \pi m_x m_y k^2 sen\,\varphi,$$

e per l'area $\Delta + d\Delta$ compresa nella ellisse degli errori successiva, che corrisponde a $k + dk$:

$$\Delta + d\Delta = \pi m_x m_y (k+dk)^2 sen\,\varphi;$$

si ha dunque:

$$d\Delta = 2\pi m_x m_y sen\,\varphi \,.\, k \,.\, dk,$$

e per conseguenza

$$dW = e^{-\frac{k^2}{2}} k\,dk\,.$$

Integrando fra i limiti o e k, ed osservando che per $k=0$ l'ellisse degli errori si riduce ad un punto, e quindi si ha $W_0 = 0$, si ottiene

$$W_k = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}\,.$$

Per $k=1{,}1774$ si trova poi $W_k = 0{,}5$ ed all'ellisse corrispondente, per analogia al significato analitico dell'errore probabile, si dà il nome di ellisse probabile degli errori.

85. Abbiamo supposto il punto O determinato per mezzo delle due osservazioni indipendenti x_0, y_0: passiamo ora al caso delle determinazioni multiple e contemporanee (che coincide col caso delle determinazioni indirette), immaginando che le coordinate x_0, y_0 siano state dedotte da un sistema di equazioni generate dalla forma generatrice

$$a\,x + b\,y + l = 0.$$

I pesi di x_0, y_0 sono allora rispettivamente dati da

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\,\alpha]} = [a\,a\,.\,1] = [a\,a] - \frac{[a\,b]^2}{[b\,b]}$$

$$p_y = \frac{1}{[\beta\,\beta]} = [b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}$$

e quindi, rappresentando, al solito, con m l'errore medio corrispondente all'unità di peso, si ha:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= m^2 \frac{[b\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]^2} \\ m_y^2 &= m^2 \frac{[a\,a]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (206)$$

In conseguenza, dalla (204) si ricava

$$M^2 = m^2 \frac{[a\,a] + [b\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]^2}\,, \qquad (207)$$

relazione che dimostra, come sapevamo, che tutti i sistemi generati *assolutamente, totalmente* o *parzialmente* equivalenti rispetto alle coordinate x_0, y_0 conducono allo stesso errore medio M della determinazione del punto (x_0, y_0).

Le corrispondenze fra le coordinate relative a due sistemi di assi ortogonali che hanno comune l'origine e formano fra loro

l'angolo ψ sono

$$x = x' \cos\psi - y' \operatorname{sen}\psi,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\psi + y' \cos\psi,$$

dalle quali risulta che i coefficienti della forma generatrice

$$ax + by + l = o$$

in una rotazione degli assi divengono rispettivamente:

$$\left.\begin{aligned} a' &= a\cos\psi + b\operatorname{sen}\psi \\ b' &= -a\operatorname{sen}\psi + b\cos\psi. \end{aligned}\right\} \quad (208)$$

Dalle osservazioni alle quali corrispondono le equazioni generate dalla suddetta forma, e che per ipotesi hanno dato x_0, y_0, si possono quindi anche trarre altre equazioni atte alla determinazione delle nuove coordinate x_0', y_0' dello stesso punto O considerato, ed i coefficienti delle equazioni normali che ne provengono sono dati da

$$\left.\begin{aligned} [a'a'] &= [aa]\cos^2\psi + [bb]\operatorname{sen}^2\psi + 2[ab]\operatorname{sen}\psi\cos\psi \\ [a'b'] &= \left(-[aa] + [bb]\right)\operatorname{sen}\psi\cos\psi - [ab]\left(\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi\right) \\ [b'b'] &= [aa]\operatorname{sen}^2\psi + [bb]\cos^2\psi - 2[ab]\operatorname{sen}\psi\cos\psi. \end{aligned}\right\} \quad (209)$$

Di qui, osservando che si ha

$$\cos^4\psi + \operatorname{sen}^4\psi + 2\operatorname{sen}^2\psi\cos^2\psi = 1,$$

si trae senza difficoltà

$$[a'a'] + [b'b'] = [aa] + [bb]$$
$$[a'a'][b'b'] - [a'b']^2 = [aa][bb] - [ab]^2,$$

ed in conseguenza si vede come l'errore medio M' della nuova determinazione (x_0', y_0') del punto O, errore medio che sarebbe dato da una formula analoga alla (207), non differisce dall'errore medio M della determinazione (x_0, y_0), giacchè gli errori medii corrispondenti all'unità di peso nei due sistemi di equazioni generate qui considerati hanno evidentemente il medesimo valore.

Non succede però lo stesso per gli errori medii delle determinazioni singole x_0, x_0' e y_0, y_0'; ed infatti le formule (206) e quelle analoghe relative alla determinazione (x_0', y_0') danno

$$m_x^2 = m_x'^2 \frac{[bb]}{[b'b']}, \qquad m_y^2 = m_y'^2 \frac{[aa]}{[a'a']}. \quad (210)$$

Rappresentiamo quindi con ψ_1, ψ_2 gli angoli di rotazione degli assi che corrispondono al massimo ed al minimo valore di m_x' o di m_y': è facile vedere come i loro valori, che si ottengono eguagliando a zero la derivata rispetto a ψ della prima o dell'ultima delle (209) (giacchè ambedue le dette formule conducono allo stesso risultato), debbono soddisfare alla relazione

$$tang\, 2\psi = \frac{2\,[a\,b]}{[a\,a]-[b\,b]}\,; \qquad (211)$$

quindi i due detti angoli differiscono fra loro di 90°. Inoltre dal segno che per ψ_1, ψ_2 prendono le derivate seconde delle (209) risulta che quando le direzioni degli assi corrispondono al caso di $m_x' = minimo$, si ha invece $m_y' = massimo$ e reciprocamente, come del resto poteva anche essere stabilito a priori.

Il massimo e il minimo valore di m'_x e di m_y' si ottengono introducendo rispettivamente nelle (210) il massimo e minimo valore delle quantità $[a'\,a']$, $[b'\,b']$ tratti dalle (209) col sostituire in esse a ψ la sua espressione (211). Ora la prima e l'ultima delle (209), messe sotto la forma

$$[a'\,a'] = \frac{[a\,a]+[b\,b]}{2} + \frac{[a\,a]-[b\,b]}{2}\,cos\,2\psi + [a\,b]\,sen\,2\psi$$

$$[b'\,b'] = \frac{[a\,a]+[b\,b]}{2} - \frac{[a\,a]-[b\,b]}{2}\,cos\,2\psi - [a\,b]\,sen\,2\psi,$$

danno, osservando che si ha dalla (211)

$$\left.\begin{aligned} cos\,2\psi &= \pm\,\frac{[a\,a]-[b\,b]}{\sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2+4\,[a\,b]^2}} \\ sen\,2\psi &= \pm\,\frac{2\,[a\,b]}{\sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2+4\,[a\,b]^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (212)$$

ed eseguendo la suddetta sostituzione,

$$\left.\begin{aligned} [a'\,a']_1 &= \frac{[a\,a]+[b\,b] \pm \sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2+4\,[a\,b]^2}}{2} \\ [b'\,b']_1 &= \frac{[a\,a]+[b\,b] \mp \sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2+4\,[a\,b]^2}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (213)$$

nelle quali i segni superiori e gli inferiori si corrispondono rispet-

tivamente, ed in ciascuna separatamente se il segno del positivo corrisponde ad un massimo quello del negativo corrisponde al minimo. Adottando l'unico simbolo M_x per indicare *il massimo od il minimo* valore di m'_x, e facendo in modo analogo per m'_y, dalle relazioni soprascritte, paragonate alle (206) e (210), avremo dunque:

$$\left.\begin{aligned} M_x^2 &= m^2 \frac{[a\,a]+[b\,b] \mp \sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2+4\,[a\,b]^2}}{2\left([a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]^2\right)} \\ M_y^2 &= m^2 \frac{[a\,a]+[b\,b] \pm \sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2+4\,[a\,b]^2}}{2\left([a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]^2\right)} \\ M_x^2 &+ M_y^2 = M^2 = m_x^2 + m_y^2 . \end{aligned}\right\} \quad (214)$$

È poi facile constatare per mezzo delle (212) che, rappresentando con θ l'angolo formato fra l'asse delle x e la direzione corrispondente al valore M_x di m_x, si ha inoltre:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= M_x^2 \cos^2\theta + M_y^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ m_y^2 &= M_x^2 \operatorname{sen}^2\theta + M_y^2 \cos^2\theta \end{aligned}\right\} . \quad (215)$$

Queste equazioni sono molto importanti nella teoria che ci occupa, giacchè danno il modo di calcolare e di costruire graficamente i valori di m_x e di m_y corrispondenti a dati valori di θ. La fig. 56 rappresenta la forma della curva che si ottiene conside-

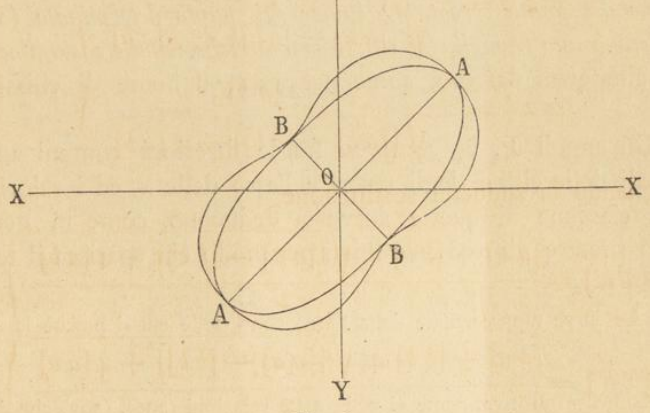

Fig. 56.

rando nelle (215) m_x od m_y come il raggio vettore corrispondente

all' anomalia θ in un sistema di coordinate polari, e la posizione di tale curva rispetto all' ellisse principale degli errori di cui è detto nel paragrafo seguente.

Ciò premesso torniamo alle equazioni generate, che, per ipotesi, determinano il punto (x_0, y_0), e, ritenendo le solite notazioni, poniamo inoltre in generale

$$v = a x + b y + l$$
$$\lambda = a x_0 + b y_0 + l$$
$$\Delta x = x - x_0$$
$$\Delta y = y - y_0$$

essendo x, y dei valori arbitrariamente scelti, che non soddisfanno le equazioni normali $[a\lambda] = 0$, $[b\lambda] = 0$ corrispondenti alle generate suddette. È facile dedurre la relazione

$$[v v] = [a a]\Delta x^2 + 2[a b]\Delta x \Delta y + [b b]\Delta y^2 + [\lambda\lambda] \qquad (216)$$

che, riferendo il punto qualunque x, y a due assi paralleli ai coordinati coll' origine nel punto x_0, y_0, e considerando Δx, Δy come coordinate correnti, per $[v v] = costante$ rappresenta un' ellisse col centro nell'origine.* Ma i punti per i quali $[v v]$ è costante hanno evidentemente la stessa probabilità di coincidere col punto cercato O invece del punto più probabile x_0, y_0, giacchè la probabilità relativa della determinazione qualunque (x, y) è proporzionale alla quantità $e^{-h^2[v v]}$: quindi si vede che *anche nel caso delle determinazioni multiple di un punto* (determinazioni indirette) *tutti i gruppi di punti che hanno fra loro eguale probabilità di coincidere colla vera posizione del punto cercato O invece del punto determinato* (x_0, y_0), *costituiscono una famiglia di ellissi concentriche, simili e similmente disposte* alle quali daremo, come nel § 84, il nome di ellissi degli errori.

Gli angoli θ_1, θ_2 compresi fra le direzioni comuni agli assi principali delle ellissi degli errori e l'asse delle x, ed i valori degli assi di ciascuna di queste curve si deducono, come in generale, facendo ruotare gli assi coordinati per modo che sparisca il termine

---

* Le curve rappresentate dalla (216) sono delle ellissi perchè la quantità

$$[a a][b b] - [a b]^2$$

è essenzialmente positiva, come si vede dalle relazioni (206), (207) che debbono dare per m_x, m_y, M dei valori reali, e come, del resto, può esser dimostrato direttamente in modo semplicissimo.

rettangolare nell'equazione (216). Siano $\Delta x'$, $\Delta y'$ le nuove coordinate vincolate alle antiche per mezzo delle relazioni

$$\Delta x = \Delta x' \cos\psi - \Delta y' \operatorname{sen}\psi$$
$$\Delta y = \Delta x' \operatorname{sen}\psi + \Delta y' \cos\psi,$$

nelle quali ψ rappresenta l'angolo di cui hanno ruotato gli assi: evidentemente, ritenendo le notazioni (209), dall'equazione (216) si ha:

$$[vv] - [\lambda\lambda] = [a'a']\,\Delta x'^2 + 2[a'b']\Delta x'\Delta y' + 2[b'b']\Delta y'^2 \quad (217)$$

Di qui risulta che la condizione necessaria e sufficiente perchè l'angolo ψ prenda uno dei due valori θ_1, θ_2 è data da

$$2[a'b'] = \Big([bb] - [aa]\Big)\operatorname{sen} 2\psi + 2[ab]\cos 2\psi = 0,$$

e quindi, adottando la notazione θ per significare uno qualunque dei due angoli cercati sopraddetti, si avrà:

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]}. \quad (218)$$

Rappresentando inoltre con A e B i due semiassi dell'ellisse degli errori corrispondente ad un dato valore $\frac{s^2}{h^2}$ di $[vv] - [\lambda\lambda]$, e con $\Big([a'a']\Big)$, $\Big([b'b']\Big)$ i valori che prendono $[a'a']$, $[b'b']$ per θ eguale a θ_1 o θ_2, potremo anche porre:

$$A^2 = \frac{s^2}{h^2\Big([a'a']\Big)}, \qquad B^2 = \frac{s^2}{h^2\Big([b'b']\Big)}$$

ovvero, in conseguenza delle (211) e (213),

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \frac{2s^2}{h^2\left\{[aa] + [bb] \pm \sqrt{\Big([aa] - [bb]\Big)^2 + 4[ab]^2}\right\}} \\ B^2 &= \frac{2s^2}{h^2\left\{[aa] + [bb] \mp \sqrt{\Big([aa] - [bb]\Big)^2 + 4[ab]^2}\right\}} \end{aligned}\right\} \quad (219)$$

ove i segni superiori e gli inferiori rispettivamente si corrispondono.

Per il valore particolare m^2 delle quantità $\frac{s^2}{h^2} = [vv] - [\lambda\lambda]$ si ottiene la cosidetta *ellisse principale degli errori,* della quale i semi-

assi non sono che i massimi e minimi valori M_x, M_y, lungo due direzioni ortogonali, degli errori medii elementari m'_x, m'_y: infatti moltiplicando il numeratore e il denominatore di ciascuna delle (219) rispettivamente per

$$[aa]+[bb]\mp\sqrt{\left([aa]-[bb]\right)^2+4[ab]^2},$$

e per

$$[aa]+[bb]\pm\sqrt{\left([aa]-[bb]\right)^2+4[ab]^2},$$

si trova:

$$\left.\begin{aligned}(A^2)_m &= m^2\,\frac{[aa]+[bb]\mp\sqrt{\left([aa]-[bb]\right)^2-4[ab]^2}}{2\left([aa][bb]-[ab]^2\right)}\\ (B^2)_m &= m^2\,\frac{[aa]+[bb]\pm\sqrt{\left([aa]-[bb]\right)^2+4[ab]^2}}{2\left([aa][bb]-[ab]^2\right)}\end{aligned}\right\}\qquad(220)$$

e queste confrontate colle (214) dimostrano la proposizione sopra enunciata.

86. Osserviamo ora che la probabilità relativa del sistema qualunque di errori $v_1, v_2, v_3, \ldots$, che supporremo già ridotti allo stesso peso, è proporzionale ad

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2[vv]},$$

e che, per conseguenza, la probabilità che la vera posizione del punto O cada dentro un elemento di area $d\sigma$ adiacente al punto che corrisponde ai suddetti residui è data da

$$Ce^{-h^2[vv]}\,d\sigma,$$

dove C per un dato sistema di equazioni generate è costante, ed h è la misura di precisione relativa all'unità di peso. Ricordando che lungo ciascuna ellisse degli errori $[vv]$ è costante, con un procedimento analogo a quello indicato alla fine del § 84, si ha quindi per la probabilità dW che il vero punto O sia compreso entro l'anello ellittico racchiuso fra due successive ellissi degli errori, anello di cui rappresenteremo anche qui l'area con $d\Delta$:

$$dW = Ce^{-h^2[vv]}d\Delta.$$

Ponendo per brevità:

$$s^2 = h^2\left([v\,v] - [\lambda\lambda]\right)$$

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{h}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{[a\,a]+[b\,b] \pm \sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2 + 4\,[a\,b]^2}}} \\ K_2 &= \frac{1}{h}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{[a\,a]+[b\,b] \mp \sqrt{\left([a\,a]-[b\,b]\right)^2 + 4\,[a\,b]^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (221)$$

e rappresentando con Δ l'area dell'ellisse di cui i semiassi sono A e B [formule (219)] si ha d'altra parte:

$$dW = Ce^{-h^2[\lambda\lambda]} \cdot e^{-s^2} \cdot d\Delta$$

$$\Delta = \frac{s^2\pi}{K_1 K_2},$$

ove K_1, K_2 si conservano costanti per tutte le ellissi degli errori: per conseguenza, ricordando che si passa da una ellisse degli errori ad un'altra col variare della sola s, e differenziando rispetto ad s, si ottiene

$$d\Delta = \frac{2\pi s\,ds}{K_1 K_2}$$

Quindi la probabilità $W_{s'}$ che il vero punto O sia compreso in un'ellisse degli errori corrispondente al valore s' di s è espressa dall'integrale

$$W_{s'} = N\int_0^{s'} 2\,e^{-s^2}\,s\,.\,ds$$

(essendo N una costante), giacchè l'ellisse degli errori corrispondenti ad $s = 0$ si riduce ad un punto.

Eseguendo l'integrazione si trova:

$$W_{s'} = N(1 - e^{-s'^2})$$

in cui il valore di N si può determinare osservando che per $s' = +\infty$ i semiassi della ellisse divengono ambedue infinitamente grandi, e perciò si deve avere $W = 1$ ed $N = 1$. Avremo pertanto

$$\left.\begin{aligned} W_{s'} &= 1 - e^{-s'^2} \\ \log(1 - W_{s'}) &= -0{,}434294\,s'^2 \end{aligned}\right\} \qquad (222)$$

il logaritmo essendo comune.

Per $s' = \sqrt{\frac{1}{2}}$ si trova l'ellisse degli errori in cui la somma dei quadrati dei semiassi è uguale al quadrato dell'errore medio della determinazione del punto più probabile (x_0, y_0), giacchè si ha

$$[v\,v] - [\lambda\,\lambda] = \frac{1}{2\,h^2} = m^2$$

e quindi i semiassi dell'ellisse suddetta sono dati dalle formule (220), che paragonate alla (214) danno:

$$M = \sqrt{A^2 + B^2}. \qquad (223)$$

Perciò a tale ellisse Helmert ha dato il nome di *media ellisse degli errori:* la probabilità W che la vera posizione del punto O cada dentro di esso non è che di 0,3935. Se poi si fa $s' = 0{,}8325$ si ottiene $W = 0{,}5$ e l'ellisse corrispondente, per analogia al significato analitico dell'errore probabile, è detta *ellisse probabile degli errori;* fra i suoi semiassi e l'errore M medio della determinazione più probabile (x_0, y_0) del punto O si ha la relazione

$$1{,}177\,M = \sqrt{A^2 + B^2}. \qquad (224)$$

È facile vedere quali sono le relazioni fra le ellissi degli errori e le ellissi di equivalenza parziale rispetto alle due quantità x_0, y_0 (vedi terza parte di questo capitolo, § 65). Considerando ad esempio nella ellisse principale una coppia qualunque di diametri conjugati $2\,m'_x$, $2m_y$, si può sempre ritenere che le loro direzioni coincidano con quelle di un sistema di assi tali che alle coordinate di O ipoteticamente misurate cogli errori medii m'_x, m_y corrisponda la stessa ellisse principale suddetta e quindi lo stesso errore medio nella determinazione di O: scegliendo poi per diametri conjugati gli assi dell'ellisse principale si hanno le due direzioni ipotetiche ortogonali equivalenti alla determinazione (x_0, y_0) considerata.

87. Le conclusioni precedenti si generalizzano senza difficoltà al caso in cui il punto trigonometrico x_0, y_0 sia determinato in un modo qualunque se si introducono nelle formule in luogo dei coefficienti $[a\,a]$, $[a\,b]$, $[b\,b]$, i pesi P_x, P_y delle incognite x_0, y_0, (o le reciproche $[\alpha\,\alpha]$, $[\beta\,\beta]$), ed il peso P_{x+y} della funzione $x_0 + y_0$, peso, questo ultimo, che è dato, come risulta dalle formule (92) e (93) del § 45 (Vol. I, pag. 393), dalla relazione

$$\frac{1}{p_{x+y}} = [\alpha\,\alpha] + 2\,[\alpha\,\beta] + [\beta\,\beta], \qquad (225)$$

che dimostra come la quantità $[\alpha\,\beta]$ può esser sempre espressa in funzione di P_x, P_y, P_{x+y}.

Infatti dalle equazioni del peso delle incognite si ottiene facilmente nel caso nostro

$$\left.\begin{aligned} [a\,a] &= \frac{[\beta\,\beta]}{[\alpha\,\alpha][\beta\,\beta]-[\alpha\,\beta]^2} \\ [a\,b] &= \frac{-[\alpha\,\beta]}{[\alpha\,\alpha][\beta\,\beta]-[\alpha\,\beta]^2} \\ [b\,b] &= \frac{[\alpha\,\alpha]}{[\alpha\,\alpha][\beta\,\beta]-[\alpha\,\beta]^2} \end{aligned}\right\} \qquad (226)$$

e, per conseguenza, alle relazioni fondamentali (218) e (219) delle ellissi degli errori, trasformando le (219) col metodo con cui ne abbiamo più sopra dedotto le (220), può esser data la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} tang\,2\,\theta &= \frac{2\,[\alpha\,\beta]}{[\alpha\,\alpha]-[\beta\,\beta]} \\ A^2 &= \frac{s^2}{2\,h^2}\left([\alpha\,\alpha]+[\beta\,\beta]\mp\sqrt{\left([\alpha\,\alpha]-[\beta\,\beta]\right)^2+4\,[\alpha\,\beta]^2}\right) \\ B^2 &= \frac{s^2}{2\,h^2}\left([\alpha\,\alpha]+[\beta\,\beta]\pm\sqrt{\left([\alpha\,\alpha]-[\beta\,\beta]\right)^2+4\,[\alpha\,\beta]^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

Ora se, come si è fatto nei paragrafi 64 e 65 parlando dell'equivalenza, si adotta in generale la notazione Q per significare l'inversa del peso p di una funzione qualunque delle incognite, in modo che si abbia

$$Q_x = \frac{1}{p_x}, \quad Q_y = \frac{1}{p_y},$$

e, per analogia, si pone [tenendo conto della (225)]

$$Q_{x,y} = [\alpha\,\beta] = \frac{1}{2\,p_{x+y}} - \frac{1}{2\,p_x} - \frac{1}{2\,p_y}, \qquad (228)$$

le (227) divengono

$$\left.\begin{aligned} tang\,2\,\theta &= \frac{2\,Q_{x,y}}{Q_x-Q_y} \\ A^2 &= \frac{s^2}{2\,h^2}\left\{Q_x+Q_y\mp\sqrt{(Q_x-Q_y)^2+4\,Q_{x,y}}\right\} \\ &= \frac{s^2}{2\,h^2\,cos\,2\,\theta}\left\{\mp Q_x\pm Q_y+(Q_x+Q_y)\,cos\,2\,\theta\right\} \\ B^2 &= \frac{s^2}{2\,h^2}\left\{Q_x+Q_y\pm\sqrt{(Q_x-Q_y)^2+4\,Q_{x,y}}\right\} \\ &= \frac{s^2}{2\,h^2\,cos\,2\,\theta}\left\{\pm Q_x\mp Q_y+(Q_x+Q_y)\,cos\,2\,\theta\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (229)$$

Queste formule permettono evidentemente di calcolare gli elementi delle ellissi degli errori e tutte le altre ausiliarie di precisione corrispondenti alla determinazione del punto (x_0, y_0), in funzione dei pesi P_x, P_y, P_{x+y}, anche nel caso in cui x ed y non rappresentino le uniche incognite di un sistema di equazioni generate, ma facciano parte o siano funzioni qualunque di un sistema d'incognite determinate coll'esperienza, subordinatamente o no a condizioni rigorose.

È utile osservare che nel caso generale, in cui le reciproche Q_x, Q_y dei pesi delle due coordinate qualunque x, y sono determinate dalle formule

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \frac{L_1'^2}{[a\,a]} + \frac{[L_1''.1]^2}{[b\,b.1]} + \dots \\ Q_y &= \frac{L_2'^2}{[a\,a]} + \frac{[L_2''.1]^2}{[b\,b.1]} + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (230)$$

(vedi § 64, pag. 36), il valore di $Q_{x,y}$ si ottiene con tutta facilità dalla espressione

$$Q_{x,y} = \frac{L_1' L_2'}{[a\,a]} + \frac{[L_1''.1][L_2''.1]}{[b\,b.1]} + \dots, \qquad (231)$$

giacchè in corrispondenza alle (230) si deve porre contemporaneamente

$$\begin{aligned} F &= x_0 + y_0 \\ x_0 &= L_1' x + L_1'' y + \dots \\ y_0 &= L_2' x + L_2'' y + \dots \end{aligned}$$

e, se si calcola la reciproca del peso di F per mezzo delle formule generali (§ 47) tenendo conto della relazione (228), si trova appunto, con facili trasformazioni, la (231).

88. Le reti altimetriche (*livellazioni barometriche, trigonometriche e geometriche*) vanno evidentemente soggette a compensazione come le reti geodetiche propriamente dette; ma noi non aggiungeremo che poche parole in proposito, giacchè le formule ed i criterii del § 52 si applicano a questo caso senza veruna difficoltà e senza dare occasione a considerazioni speciali.

È chiaro che nella compensazione di una rete altimetrica si può fare sempre astrazione dal modo con cui sono state determinate le differenze di livello fra le coppie coniugate dei suoi punti, e considerare tali differenze di livello come delle quantità misurate da

compensare invece delle osservazioni dirette che hanno servito a calcolarle. D'altra parte si viene così a tener conto separatamente di certi errori speciali che è utile di tener distinti, come sono ad esempio l'errore di refrazione (*teoretica*) nelle livellazioni trigonometriche e geometriche, l'errore istrumentale costante nelle barometriche, ecc.

Il numero delle differenze di livello da misurare per determinare le *altitudini relative* di P punti è evidentemente $P-1$: se dunque N è il numero delle differenze di livello direttamente determinate in una rete altimetrica di P punti

$$N-P+1$$

sarà il numero superfluo di tali misure, ed altrettante saranno le equazioni di condizione distinte da stabilire.

La forma da dare a queste condizioni si determina facilmente osservando che se $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sono le altezze assolute dei vertici di un poligono chiuso, si ha:

$$a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n - a_1 = 0.$$

Sieno $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$ le differenze di livello successivamente osservate fra i vertici sopraddetti considerati due a due contiguamente, e che possono essere positive o negative, ma che si suppongono contate sempre in una data direzione lungo la periferia del poligono; rappresentiamo inoltre con (1), (2), (3), .. (n) le correzioni più probabili da fare a tali osservazioni dietro la compensazione; la precedente relazione conduce alla condizione

$$h_1 + (1) + h_2 + (2) + h_3 + (3) + \ldots + h_n + (n) = 0,$$

dalla quale si ottiene

$$(1) + (2) + (3) + \ldots + (n) + L = 0, \qquad (232)$$

essendo L la somma algebrica delle differenze di livello h. Tale è la forma sotto la quale si pongono le condizioni altimetriche, ed è inutile aggiungere che nello stabilire le due equazioni corrispondenti a due poligoni che hanno degli elementi comuni, fa d'uopo tener presente che se le direzioni secondo cui procedono le differenze di livello successive negli elementi comuni sono opposte, i termini corrispondenti ai detti elementi nelle due equazioni debbono avere segno contrario.

89. Nel caso della livellazione geometrica, come del resto succede in generale per tutte le misure che procedono per piccoli

tratti successivi lungo date linee (ad esempio le basi), sorge la considerazione dell'*errore medio relativo all'unità di peso ed all'unità di lunghezza,* unità per la quale in Geodesia si adotta il chilometro. Tale ausiliaria dà in realtà l'idea assoluta della precisione di siffatte misure, dacchè può essere considerata come sensibilmente costante lungo tutte le linee di una data specie, almeno se l'unità di misura prescelta contiene un numero sufficientemente grande dei tratti elementari direttamente misurati. È facile vedere che se M è l'errore medio corrispondente all'unità di peso nella misura della intera linea l, si ha un valore esperimentale dell'errore medio unitario suddetto dalla formula

$$\mu = \frac{M}{\sqrt{l}}, \qquad (233)$$

essendo l espresso in funzione dell'unità di lunghezza prescelta: ed infatti immaginando la linea l suddivisa nelle sue unità, e supponendo ciascuna di queste misurata direttamente coll'errore medio μ, la formula generale (34) del § 26 (Vol. I, pag. 355) dà appunto la soprascritta relazione.

Sieno ora $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ varie porzioni della lunghezza L, e consideriamo delle misure fatte fra gli estremi di queste linee, tutte colla stessa precisione ma ciascuna due volte (di solito le due misure coniugate vengono fatte in direzioni opposte per mettere in evidenza e compensare in parte gli errori sistematici di osservazione); se con $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ rappresentiamo le semidifferenze dedotte rispettivamente da ciascuna coppia di misure, evidentemente le quantità

$$\frac{w_1}{\sqrt{l_1}}, \frac{w_2}{\sqrt{l_2}}, \frac{w_3}{\sqrt{l_3}}, \ldots \frac{w_n}{\sqrt{l_n}},$$

che, dietro ciascuna delle suddette coppie, darebbero altrettanti valori approssimati dell'errore medio unitario m, possono esser considerate come dei singoli errori più probabili corrispondenti a varie osservazioni della stessa lunghezza (unità di misura): quindi il valore più probabile che dal loro complesso si può trarre per μ sarà

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{w\,w}{l}\right]}{n}}, \qquad (234)$$

formula che, del resto, vale anche pel caso più generale, in cui w_1, w_2, $w_3, \ldots w_n$ sono rispettivamente gli errori medii corrispondenti

all'unità di peso nelle misure sopra indicate. È superfluo aggiungere che l'errore medio relativo all'unità di peso per una misura dello stesso genere di queste ed alla lunghezza qualunque λ è dato da $\mu\sqrt{\lambda}$, ed il peso da $\frac{1}{\lambda}$ se si sceglie come unità di peso la misura unitaria.

Ma se le misure lungo la linea L sono state sottoposte a compensazione la formula precedente deve esser modificata in guisa da tener conto anche delle loro correzioni più probabili. Osserviamo perciò che se h', h'' costituiscono una coppia di misure coniugate relative al tratto l ed h_m è la loro media, si ha in generale

$$h' - h_m = \pm w, \quad h'' - h_m = \mp w;$$

sia ancora (k) la correzione che in seguito alla compensazione deve esser fatta ad h_m: evidentemente gli errori più probabili delle due osservazioni h', h'' saranno $\pm w + (k)$, $\mp w + (k)$, dei quali la somma dei quadrati è $2\left(w^2 + (k)^2\right)$. Da ciò risulta che la correzione che, in conseguenza della compensazione, deve esser fatta alla quantità $\left[\frac{w\,w}{l}\right]$ nella precedente formula (234), è $\left[\frac{(k)^2}{l}\right]$. In luogo di n poi deve essere introdotto il numero complessivo σ delle equazioni di condizione che hanno servito a compensare le misure considerate h (vedi § 53 formula 115): si avrà dunque

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{w\,w}{l}\right] + \left[\frac{(k)\,(k)}{l}\right]}{\sigma}}. \qquad (235)$$

Però nel caso di una livellazione geometrica, alle $N - P + 1$ equazioni indicate nel § 88 vanno qui aggiunte evidentemente le n condizioni che si riferiscono alla compensazione delle coppie h', h'' di differenze di livello misurate per ciascuno dei tratti l, giacchè la (235) si riferisce al caso in cui sono introdotte in calcolo le singole misure anzichè le medie delle osservazioni coniugate: perciò si ha

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{w\,w}{l}\right] + \left[\frac{(k)\,(k)}{l}\right]}{n + N + P + 1}} \qquad (236)$$

Ricordiamo per ultimo che il valore di $\left[\frac{(k)\,(k)}{l}\right]$ si calcola molto facilmente dalle equazioni ridotte correlanti per mezzo del-

l'algoritmo di cui già tante volte ci siamo serviti per dedurre le espressioni dei pesi e degli errori medii nelle parti precedenti di questo capitolo.

90. Nel § 10 del capitolo V (vedi Vol. I, pag. 183), parlando dello sviluppo delle basi geodetiche, ci siamo riservati di studiare a suo tempo la forma più vantaggiosa da dare al complesso dei triangoli che legano una base al primo lato geodetico di una rete, ed è qui il luogo d'intraprendere un tale studio. *

Anche in questo caso conviene evidentemente introdurre la considerazione dell'*errore medio unitario* (corrispondente all'unità di lunghezza) ogni volta che si tratta degli elementi lineari dei triangoli (vedi § 9 del capitolo V e § 89 di questo capitolo): la relazione che lega questa quantità, che, al solito, rappresenteremo in generale con μ, all'errore medio m corrispondente all'unità di peso in un lato di lunghezza l non è però la (233), la quale suppone la lunghezza l misurata successivamente per brevi tratti; in una triangolazione un lato l non è scindibile che in porzioni nelle quali gli errori di osservazione hanno influito ugualmente in proporzione della lunghezza di queste, giacchè non si può considerare una porzione misurata separaramente dalle altre: si deve dunque porre:

$$\mu = \frac{m}{l} \qquad (237)$$

e la quantità μ deve essere considerata come un *errore di relazione* piuttosto che come un *errore medio* nel senso assoluto di questa parola.

Consideriamo anzitutto un solo triangolo piano $A\,B\,C$, di cui sia noto esattamente il lato a (base) e siano stati osservati direttamente i tre angoli, e rappresentiamo con (1), (2), (3) le correzioni che a tali angoli debbono esser fatte in conseguenza della compensazione: il valore più probabile dal lato b sarà dato dalla relazione

$$b = \frac{a\ sen\left(B + (2)\right)}{sen\left(A + (1)\right)}$$

ed il peso p_b e l'errore medio m_b di questa determinazione si ot-

* L'indole dell'opera non ci consente di trattare distesamente quest'argomento: il lettore può consultare in proposito l'interessante memoria di HELMERT già altra volta citata, intitolata *Studien über rationelle Vermessungen* (*Zur Theorie der Basisnetze*) e pubblicata nel *Zeitschrift für Mathematik, und Phisik,* von SCLÖMILCH, 13. — 1868.

terranno senza difficoltà applicando le formule generali (122) stabilite nel § 54. Se si pone per brevità $b_0 = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$, la (119) del suddetto paragrafo dà in questo caso (vedi capitolo V, formula 22):

$$b = b_0 \{1 - (1)\operatorname{cotg} A + (2)\operatorname{cotg} B\},$$

mentre l'unica condizione fra le correzioni (1), (2), (3) è la seguente

$$(1) + (2) + (3) - \Delta = 0,$$

essendo Δ l'errore di chiusura del triangolo considerato. In conseguenza per applicare le (122) si dovrà porre

$$F_1 = -b_0 \operatorname{cotg} A, \quad F_2 = b_0 \operatorname{cotg} B, \quad F_3 = F_4 = \ldots = 0$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1, \quad A_4 = A_5 = \ldots = B_1 = B_2 = \ldots = C_1 = C_2 = \ldots = 0.$$

Siano rispettivamente p_1, p_2, p_3 i pesi degli angoli osservati A, B, C, e sia m l'errore medio corrispondente all'unità di peso; la seconda delle (122) dà:

$$\frac{1}{P_b} = b_0^2 \left\{ \frac{\operatorname{cot}^2 A}{p_1} + \frac{\operatorname{cotg}^2 B}{p_2} - \frac{\left(-\frac{\operatorname{cotg} A}{p_1} + \frac{\operatorname{cotg} B}{p_2}\right)^2}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}} \right\} \quad (238)$$

dalla quale si trae con ovvie riduzioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_b} &= b_0^2 \frac{p_2 \operatorname{cotg}^2 A + p_1 \operatorname{cotg}^2 B + p_3 (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \\ \mu_b = \frac{m_b}{b_b} &= m \operatorname{sen} 1'' \sqrt{\frac{p_2 \operatorname{cotg}^2 A + p_1 \operatorname{cotg}^2 B + p_3 (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \end{aligned}\right\} \quad (239)$$

ove nell'espressione di μ_0 abbiamo aggiunto il fattore *sen* 1″ nell'ultimo membro per indicare che mentre l'errore medio dell'unità di peso, secondo la consuetudine trattandosi di misure angolari, si suppone dato in secondi, l'errore medio unitario μ_b s'intende invece espresso in lunghezza.

Queste formule dimostrano un teorema molto importante per la teoria che ci occupa, ed infatti dalla (238) si vede subito come in un triangolo in cui un angolo è molto acuto, almeno uno dei lati geodeticamente calcolati resta determinato con un peso relativamente molto piccolo, a meno che il peso dell'angolo acuto osservato non sia molto grande in confronto dei pesi degli altri due angoli. Ora nelle reti di *riattacco* di una base ad una triangolazione trattandosi di passare da una geodetica direttamente misurata, e quindi molto corta, ad una geodetica molto più lunga, o reci-

procamente, per mezzo di un piccolo numero di triangoli,* diviene impossibile l'escludere gli angoli relativamente molto acuti. Dalla prima delle (239) risulta inoltre che dato poi a priori A o B il massimo valore del peso P_b si ha rispettivamente per B od A di 90°. Concluderemo che:

1.° *In generale gli angoli molto acuti di una rete geodetica debbono, teoreticamente parlando, essere misurati con una precisione molto maggiore degli altri in modo che, presso a poco, il peso di ciascun angolo sia proporzionale alla sua cotangente.*

2.° *In una serie di triangoli simili crescenti (sviluppo), in ciascuno dei quali uno solo dei lati calcolati serve di base ai triangoli successivi e l'angolo opposto a questa ha un valore dato, la miglior forma da darè ai triangoli è la rettangola, l'angolo retto essendo opposto al lato che deve esser poi considerato come base.* Lo sviluppo in questo caso ha la forma indicata nella fig. 57, ove le linee pun-

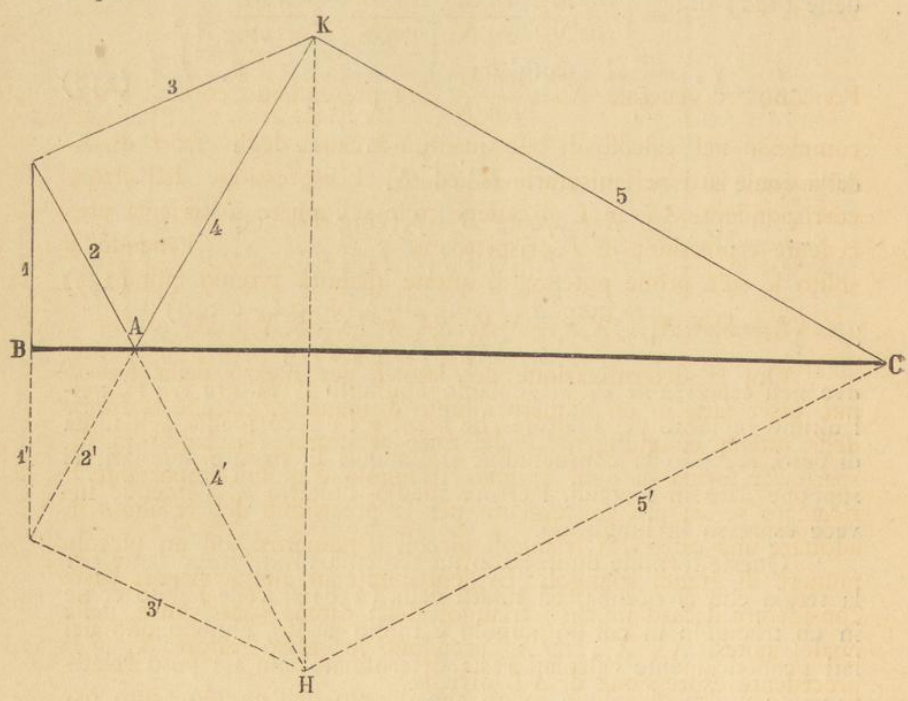

Fig. 57.

teggiate indicano un secondo sviluppo per la chiusura del poligono

* Vedremo fra breve che, in generale, col crescere di troppo il numero dei triangoli dello sviluppo diminuisce il peso della determinazione del lato finale.

intorno ad A, AB la base da sviluppare, AC il lato geodetico di riattacco alla rete principale, KH una linea aggiunta per avere una condizione lineare di più. In generale gli sviluppi di tal forma hanno l'inconveniente di dare un numero di condizione troppo piccolo rispetto al numero dei loro vertici.

3.° *In una serie di triangoli simili decrescenti (riattacco alla base) in ciascuno dei quali uno solo dei lati calcolati serve di base ai triangoli successivi, e l'angolo opposto al lato che si calcola ha un dato valore la miglior forma da dare ai triangoli è la rettangola, l'angolo retto essendo opposto alla base.*

91. Consideriamo ancora una catena semplice di triangoli successivi, che, partendo da una base misurata b, conduca alla determinazione del lato L. Il valore di questo in funzione degli angoli misurati nella catena è dato dall'espressione [§ 75 formula (177)]:

$$L = b \frac{sen\, M_1}{sen\, N_1} \cdot \frac{sen\, M_2}{sen\, N_2} \cdot \frac{sen\, M_3}{sen\, N_3} \cdots \frac{sen\, M_n}{sen\, N_n}.$$

Poniamo in generale $X = \frac{sen\, M}{sen\, N}$ e rappresentiamo con x l'errore commesso nel calcolo di tale quantità a causa degli errori di osservazione fatti nel misurare M ed N. L'espressione dell'errore corrispondente ΔL in L si ottiene collo sviluppare in serie la precedente espressione di L, rispetto ad $x_1, x_2, \ldots x_n$; ritenendo al solito le sole prime potenze di queste quantità avremo quindi:

$$\Delta L = b\{X_2 X_3 \ldots X_n x_1 + X_1 X_3 \ldots X_n x_2 + \ldots X_1 X_2 \ldots X_{n-1} x_n\}.$$

Ora la determinazione del lato L per mezzo della base b può esser fatta in un numero infinito di maniere, giacchè la forma della catena congiungente è del tutto arbitraria: lasciando in disparte la forma di ogni singolo triangolo è quindi importante il ricercare se sia più conveniente per la precisione del resultato di adottare una catena di triangoli piccoli e numerosi, od un piccolo numero di grandi triangoli. Evidentemente in questa ricerca basta considerare il caso in cui i triangoli della catena sono simili, nella quale ipotesi $X_1, X_2, \ldots X_n$ prendono lo stesso valore X, e la precedente espressione di ΔL diviene

$$\Delta L = b X^{n-1} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

essendo $L = b X^n$, ed in conseguenza:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{X}.$$

Se si considera $\frac{\Delta L}{L}$ come una funzione lineare rispetto ad $x_1, x_2, \ldots,$ e si rappresenta in generale con m_x l'errore medio corrispondente ad x, dalla relazione precedente si può trarre l'errore medio unitario μ_l della determinazione di L applicando la solita formula (34) del § 26: si trova in tal guisa

$$\mu_l = \frac{1}{X}\sqrt{[m_x m_x]},$$

da cui, se si suppone, come è naturale, che tutti gli angoli della catena sieno stati misurati colla stessa precisione, avremo finalmente:

$$\mu_l = \frac{m_x}{X}\sqrt{n} \qquad (240)$$

Questo risultato dimostra che *la precisione della determinazione di un lato trigonometrico diminuisce proporzionalmente alla radice del numero dei triangoli* (simili) *impiegati:* può poi servire a stabilire il numero delle basi e la loro posizione nella rete in modo che l'errore medio unitario dei lati più distanti da esse non sorpassi una quantità data, giacchè l'errore medio di un osservazione angolare (e quindi il valore di m_x) è sempre conosciuto a priori con più che sufficiente approssimazione. Inoltre ci permette di formulare il seguente teorema conosciuto sotto il nome di teorema di *Laplace:*

Di due reti geodetiche che coprono la stessa zona e sono composte di triangoli equiangoli e poggiate su lati determinati con ugual precisione (unitaria) *con osservazioni angolari egualmente precise, è più precisa quella in cui i triangoli sono più ampii.* Questo teorema suppone che gli errori medii corrispondenti all'unità di peso nelle due reti comparate siano uguali, e che gli errori sistematici nelle misure azimutali siano indipendenti dalla distanza dei punti osservati: per conseguenza non vale che per distanze geodetiche minori di 60 chilometri, giacchè al di là di questo limite, diventa sensibile la *refrazione laterale ellissoidica e casuale* (vedi § 21 del capitolo VI). Però dentro i 60 chilometri la precisione relativa delle reti a grandi triangoli è ancora aumentata dalla influenza relativamente più piccola delle *fasi* dei segnali geodetici, e degli errori inevitabili che si commettono nella determinazione degli elementi necessarii per la riduzione degli angoli ai relativi centri di stazione.

92. Ritornando ora alla relazione (240), notiamo come, data la base b ed il *lato di arrivo* L, il valore dell'errore medio m_x

dipende dalla forma dei triangoli simili successivi della rete congiungente, ossia da X, mentre, ponendo per semplicità $\frac{L}{b} = k$, si ha:

$$k = X^n, \quad n = \frac{\log k}{\log X} \tag{241}$$

Si può quindi domandare quale è il numero dei triangoli della rete che, in corrispondenza ad una data famiglia di triangoli (per esempio isosceli o rettangoli), dà la massima precisione nella determinazione del lato finale L. La relazione generale fra m_x ed $X = \frac{sen\, M}{sen\, N}$ si ha dalla seconda delle formule (239), facendovi $A = N$, $B = M$, $b_0 = X$, nel qual caso se ne trae

$$\frac{m_x}{X} = m\, sen\, 1'' \sqrt{\frac{p_2\, cotg^2 N + p_1\, cotg^2 M + p_3\, (cotg\, N + cotg\, M)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}},$$

ove p_1, p_2 rappresentano rispettivamente i pesi delle quantità N, M e p_3 quello del terzo angolo del triangolo; ed è chiaro che la formula sopra scritta (come le 239) comprende anche il caso in cui uno degli angoli è stato *concluso,* bastando allora supporre nullo il relativo peso. In conseguenza la (240) dà:

$$\mu_i^2 = m^2\, sen^2\, 1''. \frac{\log k}{\log \frac{sen\, M}{sen\, N}} \frac{p_2 cotg^2 N + p_1 cotg^2 M + p_3 (cotg N + cotg M)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \tag{242}$$

La rete dei triangoli rettangoli crescenti, considerata nel paragrafo precedente come una delle più convenienti, corrisponde al caso di $M = 90°$, e quindi l'errore medio unitario μ_i' del lato finale L è dato allora dalla relazione:

$$\mu_i'^2 = m^2\, sen^2\, 1'' \frac{\log k}{\log \frac{1}{sen\, N}} \cdot \frac{(p_2 + p_3)\, cotg^2 N}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}, \tag{243}$$

da cui si vede che il valore di N che rende minimo l'errore medio unitario μ_i' è indipendente dal rapporto k fra il lato finale e la base di partenza, e corrisponde al minimo valore che prende la quantità

$$F = \frac{cotg^2 N}{\log \frac{1}{sen\, N}}$$

per N compreso fra 0° e 90°. Ora è facile constatare che la derivata

$$\frac{dF}{dN} = \frac{\cos N}{sen^3 N \log^2 \frac{1}{sen N}} \left(\cos^2 N - 2 \log \frac{1}{sen N} \right)$$

si mantiene costantemente negativa fra i limiti di N sopraddetti, quindi μ_i' diminuisce col crescere di N ed acquista il più piccolo valore per $N = 90°$. Introducendo questa ipotesi nelle (241) si trova $n = \infty$, risultato che dimostra come sia, in questo caso, conveniente il moltiplicare più che è possibile il numero dei triangoli simili dello sviluppo. Per trovare poi il limite M_1, al quale tende μ_i' col crescere di n, e che corrisponde alla massima precisione teoretica nel lato finale L, basta notare che per $N = 90°$ il valore di F, che si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, è eguale a 2 e quindi si ha:

$$M_1^2 = 2 m^2 sen^2 1'' \log k \frac{p_2 + p_3}{p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3} . \qquad (244)$$

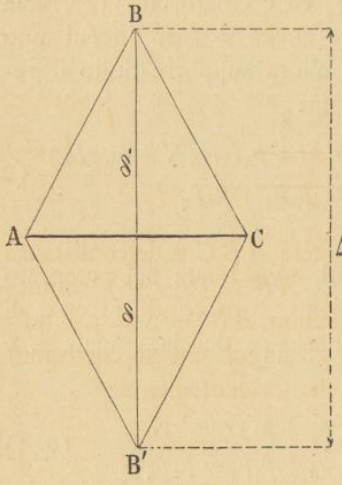

Fig. 58.

93. Confrontiamo ora la precisione dello sviluppo rettangolare sopra discusso con quella dello sviluppo romboidale accennato nel § 10 del Capitolo V. Perciò sia $AC = b$ (fig. 58) la base misurata, ABC il primo triangolo dello sviluppo romboidale e δ la distanza del vertice B dalla base b; avremo:

$$AB = \frac{b \,.\, sen\left(C + (3)\right)}{sen\left(B + (2)\right)},$$

e quindi:

$$\delta = \frac{b \, sen\left(A + (1)\right) sen\left(C + (3)\right)}{sen\left(B + (2)\right)},$$

da cui, sviluppando in serie rispetto alle correzioni e ponendo

$$\delta_0 = \frac{b \, sen A \, sen C}{sen B},$$

si trae con facili trasformazioni:

$$\delta = \delta_0 \left\{ 1 + (1) \, cotg A - (2) \, cotg B + (3) \, cotg C \right\}.$$

Fra le correzioni (1), (2), (3) si ha la solita unica condizione

$$(1) + (2) + (3) - \Delta = 0,$$

in modo che per l'inversa del peso della determinazione δ, con una deduzione analoga a quella sviluppata nel § 90, si trova in generale

$$\frac{1}{P_\delta} = \delta_0^2 \frac{p_1(cotgB+cotgC)^2+p_2(cotgA-cotgC)^2+p_3(cotgA+cotgB)^2}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3}, \quad (245)$$

essendo p_1, p_2, p_3 i pesi rispettivi degli angoli osservati A, B, C. Nel caso speciale di un triangolo isoscele, evidentemente i due angoli A, C, adiacenti alla base hanno la stessa importanza nella determinazione di δ, ed è quindi logico il supporli misurati colla stessa precisione; inoltre, rappresentando con θ la metà del terzo angolo misurato B, è:

$$\theta = \frac{B}{2} = 90^\circ - A = 90^\circ - C,$$

e perciò la (246) ci dà:

$$\frac{1}{P_\delta} = \frac{2\,\delta_0^2(cotg\,2\theta + tang\,\theta)^2}{p_1+2p_2},$$

di dove, osservando che fra δ_0 e b vi ha la relazione approssimativa $\delta_0 = \frac{b}{2} cotg\,\theta$, si trae facilmente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_\delta} &= \frac{b^2}{(16p_2+8p_1)\,sen^4\theta} \\ m_\delta &= \frac{m\,sen\,1''\,b}{2\,sen^2\theta}\sqrt{\frac{1}{4p_2+2p_1}}. \end{aligned}\right\} \quad (246)$$

Se invece di un solo triangolo isoscele $A\,B\,C$ e della distanza δ, si considerano i due triangoli $A\,B\,C$, $A\,B'\,C$ (fig. 58) simmetrici rispetto alla base data $A\,C$ e la distanza $BB' = \Delta = 2\,\delta$ fra i loro vertici opposti B e B', supponendo gli angoli che si corrispondono misurati colle stesse precisioni si ha evidentemente:

$$m_\Delta = m_\delta \cdot \sqrt{2},$$

giacchè le due parti di cui si compone Δ provengono da due determinazioni fra loro indipendenti: in conseguenza l'errore medio m_Δ della determinazione di Δ fatta per mezzo del rombo $A\,B\,C\,B'$ è dato da

$$m_\Delta = \frac{b\,.\,m\,sen\,1''}{2\,sen^2\theta}\cdot\sqrt{\frac{1}{2p_2+p_1}}. \quad (247)$$

Ciò posto, immaginiamo protratto lo sviluppo della base b per mezzo di figure romboidali simili successive $A\,B\,A'\,B'$, $B\,C\,B'\,C'$,

$C\,D\,C'\,D'$, ... (fig. 59), risolute successivamente prendendo a base le rispettive diagonali $b = A\,A'$, $\Delta_1 = B\,B'$, $\Delta_2 = C\,C'$, ...

È chiaro allora che la diagonale Δ_n, che supporremo essere il lato di riattacco fra lo sviluppo della base e la rete geodetica, è data da

$$\Delta_n = b\,cotg^n\,\theta \qquad (248)$$

e perciò, rappresentando con m_θ l'errore medio di una determi-

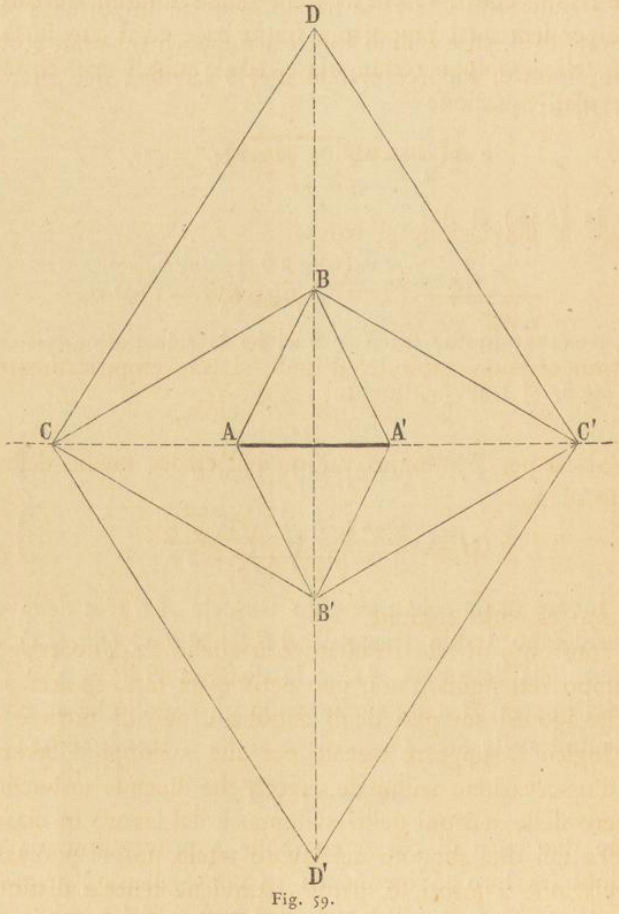

Fig. 59.

nazione di $cotg\,\theta$ si ha [vedi § 91, formula (240)]

$$\mu_{\Delta_n} = \frac{m_\theta}{cotg\,\theta}\sqrt{n} \qquad (249)$$

essendo

$$n = \frac{\log\frac{\Delta_n}{b}}{\log cotg\,\theta}\,.$$

Il valore di m_0 si deduce senza difficoltà dalla (247), giacchè per $b = 1$ si ha in essa $\Delta = cotg\,\theta$; ponendo per brevità, come nel § 92, $k = \frac{\Delta_n}{b}$, si trova quindi dalla (249):

$$\mu_{\Delta_n} = \frac{m\,sen\,1''\sqrt{\log k}}{2\,sen\,\theta\,cos\,\theta\sqrt{\log\,cotg\,\theta}}\sqrt{\frac{1}{2p_2+p_1}}. \qquad (250)$$

Ne risulta che il valore di θ che rende minimo l'errore medio μ_{Δ_n} è indipendente dal rapporto k fra la base ed il lato finale, come nel caso dello sviluppo rettangolare, ed è quindi una costante che si deduce dall'equazione:

$$\frac{d\,(sen\,2\,\theta\sqrt{\log\,cotg\,\theta})}{d\,\theta} = 0.$$

Eseguendo la derivazione si trova

$$\frac{1}{\sqrt{\log\,cotg\,\theta}}(2\,cos\,2\,\theta\log\,cotg\,\theta - 1) = 0, \qquad (251)$$

il logaritmo essendo naturale, d'onde si trae empiricamente

$$\theta = 24°.48'.30'' \text{ circa}, \qquad (252)$$

e perciò si ha per il minimo valore dell'errore medio della determinazione di Δ_n:

$$M_2 = \frac{2{,}27\,m\,sen\,1''\sqrt{\text{Log.}\,k}}{\sqrt{2p_2+p_1}}, \qquad (253)$$

il logaritmo essendo comune.

Il confronto di tale resultato con quello (244) corrispondente allo sviluppo rettangolare non può però esser fatto se non partendo da qualche ipotesi sui pesi degli angoli: e più di tutto è evidentemente logico il supporre uguale nei due sviluppi il lavoro complessivo d'osservazione azimutale, lavoro che dipende sostanzialmente dal numero delle stazioni dello sviluppo e dal lavoro in ciascuna di queste. Fra tali due aliquote del lavoro totale non si può assegnare veruna relazione a priori, e, perciò, conviene tenerle distinte nella discussione, supponendo che i due sviluppi siano composti dello stesso numero di triangoli, e che sia costante in ciascuno di questi la somma dei pesi delle tre misure angolari.

Se dunque ν è il numero delle diagonali successive dello sviluppo romboidale, 2ν sarà quello dei triangoli elementari in ciascuno dei due sviluppi da comparare, e per gli errori medii unitarii

della determinazione del lato finale avremo rispettivamente nei due casi [formule (253) e (243)]:

$$M_2'' = \frac{2{,}27\, m \operatorname{sen} 1'' \sqrt{\operatorname{Log} k}}{\sqrt{2 p_2'' + p_1''}},$$

$$M_1' = m \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg} N \sqrt{\frac{\operatorname{Log} k}{\operatorname{Log} \frac{1}{\operatorname{sen} N}} \cdot \frac{p_2' + p_3'}{p_1' p_2' + p_1' p_3' + p_2' p_3'}},$$

ove si ha [formule (241) e (248)]:

$$\operatorname{Log} k = \nu \operatorname{Log} \operatorname{cotg} \theta = \nu \operatorname{Log} \operatorname{cotg} (24°.48'.30'') = 2\nu \operatorname{Log} \frac{1}{\operatorname{sen} N},$$

ed il doppio accento alle lettere si riferisce allo sviluppo romboidale, l'accento semplice al rettangolare.

Il valore di N resta quindi perfettamente determinato da questa ultima relazione ed è prossimamente di 42°. 50′, di modo che la precedente espressione di M_1' dà:

$$M_1' = 2{,}63\, m \operatorname{sen} 1'' \sqrt{\operatorname{Log} k} \sqrt{\frac{p_2' + p_3'}{p_1' p_2' + p_1' p_3' + p_2' p_3'}}.$$

Si può semplificare più oltre la ricerca che ci occupa osservando che i pesi p_2' e p_3' influiscono ugualmente nel valore di M_1' e che, perciò, è logico di supporli eguali: introducendo quindi la costante P del lavoro azimutale di ciascun triangolo (lavoro che può venire misurato dalla somma dei pesi degli angoli) in modo che si abbia

$$P = p_1' + p_2' + p_3' = p_1'' + p_2'' + p_3'',$$

avremo finalmente:

$$M_2'' = \frac{1{,}60 \,.\, m \operatorname{sen} 1'' \sqrt{\operatorname{Log} k}}{\sqrt{P - \frac{3}{2} p_1}}$$

$$M_1' = \frac{2{,}63 \,.\, m \operatorname{sen} 1'' \sqrt{\operatorname{Log} k}}{\sqrt{P - \frac{3}{2} p_2'}}.$$

Di qui si vede, come del resto già sapevamo, che la massima precisione tanto nello sviluppo romboidale quanto nel rettangolare si ha quando si concentra tutta la cura dell'osservazione sull'angolo opposto alla base di ciascun triangolo. Nella discussione che ci

occupa è poi evidentemente da supporre $p_2' = p_1''$, nel qual caso si ha

$$\Omega = \frac{M_2''}{M_1''} = \frac{1{,}60}{2{,}63} = 0{,}6 \text{ } circa,$$

d'onde si conclude che il peso dello sviluppo romboidale, a lavoro complessivo costante, è sempre circa due volte e mezzo maggiore di quello del rettangolare, qualunque sia d'altronde il rapporto fra la base ed il lato finale. Del resto la precisione relativa dello sviluppo romboidale è ancora molto aumentata in pratica dalle *condizioni geometriche* cui dà luogo se si osservano le direzioni delle diagonali, giacchè evidentemente la figura romboidale è quella che fornisce il massimo numero di condizioni col minimo numero di triangoli ben conformati.

Alla stessa conclusione si giunge considerando costante il lavoro complessivo di osservazione, astrazion fatta dal numero delle stazioni, nel qual caso questo numero, ed, in conseguenza, la somma dei pesi delle osservazioni relative ad ogni singolo triangolo, debbono essere considerate come delle variabili da determinare nel modo più conveniente.

Sieno infatti ν_1 e $2\nu_2$ rispettivamente i numeri dei triangoli elementari nello sviluppo rettangolare e romboidale, ed abbiasi per ipotesi:

$$C = \nu_1(p_1' + p_2' + p_3') = \nu_1(p_1' + 2p_2')$$
$$= 2\nu_2(p_1'' + p_2'' + p_3'') = 2\nu_2(2p_1'' + p_2'').$$

Dalle solite relazioni (241), (248), (243) e (253) avremo:

$$\nu_1 \log \frac{1}{sen\, N} = \log k = \nu_2 \log cotg\, \theta$$

$$M_1' = \frac{m\, sen\, 1''\, \nu_1\, cotg\, N}{\sqrt{C - \frac{3p_2'\nu_1}{2}}}, \qquad M_2'' = \frac{1{,}31\, m\, sen\, 1''\, \nu_2}{\sqrt{C - \frac{3p_1''2\nu_2}{2}}},$$

ove, per quanto è stato detto poco sopra sull'importanza relativa di p_2', p_1'' negli errori medii M_1', M_2'', è da supporre:

$$C - \frac{3p_2'\nu_1}{2} = C - \frac{3p_1''2\nu_2}{2}.$$

Si ottiene adunque

$$\Omega = \frac{M_2''}{M_1'} = \frac{1{,}31 \cdot \nu_2}{\nu_1 \cdot cotg\, N},$$

ovvero, sostituendo al rapporto $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ il suo valore in funzione di N,

$$\Omega = \frac{M_2''}{M_1'} = 3{,}92 \frac{\log \frac{1}{sen\, N}}{cotg\, N}$$

il logaritmo essendo volgare; d'onde risulta che il massimo valore che può prendere il rapporto Ω, corrisponde al valore N_1 di N compreso fra 0 e 90° che rende minima la quantità

$$\frac{cotg\, N}{\log \frac{1}{sen\, N}}.$$

Derivando ed eguagliando a zero si trova:

$$\frac{1}{sen^2 N}\left\{\mu\, cos^2 N - \log \frac{1}{sen\, N}\right\} = 0$$

essendo $\mu = 0{,}4342945$ il modulo dei logaritmi naturali, e da questa equazione, risoluta empiricamente, si trae per il suddetto valore di N:

$$N_1 = 26°.47'.30''\ circa,$$

che, introdotto nella precedente espressione di Ω, dà:

$$M_2'' = 0{,}68\, M_1'.$$

La precisione dello sviluppo romboidale è dunque anche in questo caso assai maggiore di quella del rettangolare; però conviene notare che il lavoro effettivo, tenuto conto del numero delle stazioni, nello sviluppo rettangolare, è molto minore, mentre questo raggiunge una precisione un poco maggiore che non nel caso precedentemente discusso: ed invero dalla relazione

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\log \frac{1}{sen\, N_1}}{\log cotg\, \theta}$$

si ottiene

$$2\, \nu_2 = 2{,}1\, \nu_1,$$

che mostra che nello sviluppo romboidale si richiedono il doppio delle stazioni, che non nel rettangolare.

CAPITOLO VIII.

COORDINATE GEOGRAFICHE, DISTANZE ED AZIMUT SULL'ELLISSOIDE.

1. Le reti geodetiche calcolate e compensate coi metodi esposti nei capitoli precedenti, non danno che le posizioni relative delle proiezioni geodetiche dei punti da esse collegati; quando si vogliono conoscere le corrispondenti posizioni assolute sull'ellissoide terrestre, è necessario di riferire i vertici trigonometrici a delle linee conosciute di questa superficie, come sono ad esempio i meridiani ed i paralleli geodetici. Il sistema più conveniente di linee coordinate non può essere assegnato in generale, giacchè dipende dallo scopo cui deve servire la determinazione dei punti suddetti. Per la costruzione delle carte geografiche si ricorre spesso, ad esempio, alle coordinate geodetiche polari, od alle coordinate così dette di *Bonne* e di *Cassini*, coordinate che non potrebbero essere adottate con vantaggio in altre quistioni geografiche o geodetiche. Però quasi tutte le coordinate che si sogliono considerare possono essere espresse per mezzo di formule abbastanza semplici in funzione dalle coordinate geografiche (Latitudine e Longitudine geodetica), che sono, senza dubbio, le più comode nelle ricerche di alta geodesia, e presentano il grande vantaggio di sintetizzare, per dir così, le condizioni fisiche e naturali del punto che determinano. Vediamo adunque come, data una rete di triangoli, si deducano le latitudini e le longitudini geografiche dei suoi vertici.

È superfluo notare come per tale determinazione sia necessario ricorrere alle osservazioni astronomiche, giacchè la conoscenza dei meridiani e dei paralleli terrestri poggia sulla loro relazione colla sfera celeste: ma con tali osservazioni non si riesce direttamente a determinare, in ultima analisi, che le direzioni delle verticali terre-

stri, ossia valori affetti dalle attrazioni locali, i quali, nell'ignoranza in cui siamo sulla natura analitica del Geoide, e per cagione delle casuali ondulazioni di questa superficie, non hanno nessuna relazione rigorosa analiticamente assegnabile in generale colle distanze geodetiche fra i punti terrestri, e non possono quindi dare un'idea della posizione relativa di questi. Perciò, la considerazione delle sole coordinate astronomiche non basta ai bisogni della Geografia e della Geodesia, ma è necessario di ridurre queste quantità a quelle che si sarebbero osservate dai punti corrispondenti geodeticamente sopra una superficie ipotetica nota, come è appunto l'ellissoide terrestre, correggendole delle relative attrazioni locali. I metodi, coi quali si giunge a fare questa correzione nel modo più probabile confrontando le osservazioni astronomiche fatte, coi resultati delle triangolazioni geodetiche, e che risolvono una delle più importanti questioni dell'alta geodesia, saranno esposti in un altro capitolo: qui ora supporremo che sia stata determinata la posizione geografica di un vertice di una rete trigonometrica compensata e la direzione (azimut geodetico) di uno dei suoi lati, per mostrare come da questi dati si possano dedurre le coordinate geografiche di tutti gli altri vertici. Per lo più tale passaggio si fa da punto a punto della rete per successive differenze di latitudine e di longitudine, in modo che la distanza fra i due punti, delle cui coordinate si cercano le differenze, sia molto piccola rispetto ai raggi di curvatura della geodetica congiungente; ma altre volte conviene considerare dei punti collegati indirettamente fra loro per mezzo di una geodetica calcolata da una triangolazione intermedia: questi due casi debbono essere considerati come essenzialmente distinti, perocchè, non essendo possibile dedurre formule finite per risolvere il problema qui discusso, nel primo caso è vantaggioso ricorrere a delle serie ordinate secondo le potenze crescenti della distanza geodetica, serie di cui basta tener conto dei primi due o tre termini, giacchè riescono allora rapidamente convergenti, mentre nel secondo caso la convergenza delle serie da adottare non deve dipendere dalla posizione dei punti sulla superficie terrestre.

2. Siano φ_1 la latitudine, ω_1 la longitudine * di un punto A dell'ellissoide terrestre, e rappresentiamo con s la lunghezza e con α_0 l'azimut in A della geodetica che lo congiunge ad un secondo punto

* In tutto questo capitolo parlando di latitudine, longitudine ed azimut, ci riferiamo sempre all'ellissoide terrestre e non al Geoide.

qualunque B, del quale si cerca la posizione geografica φ, ω. La latitudine φ di un punto qualunque della geodetica s può esser considerata come una funzione dell'arco di questa, del quale supporremo in A l'origine: si avrà quindi

$$\varphi - \varphi_1 = s\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_1 + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_1 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{ds^3}\right)_1 + \dots \qquad (1)$$

essendo $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_1, \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_1, \dots$ ciò che divengono le derivate totali $\frac{d\varphi}{ds}, \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \dots$ per $s = 0$. Porremo ancora, come nei primi capitoli del primo volume,

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \text{raggio di curvatura del meridiano sotto la latitudine } \varphi \\ r &= \text{» » del parallelo » » » } \\ N &= \text{gran normale » » » } \\ \alpha &= \text{azimut della geodetica } s \text{ » » » } \\ a &= \text{semiasse maggiore dell'ellissi meridiana} \\ e &= \text{eccentricità » »} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

in modo che si avrà [vedi capitolo primo, formule (8) e (9)]

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2 . d\varphi^2 + r^2 . d\omega^2 \\ \cos\alpha &= \frac{\rho . d\varphi}{ds} \\ \operatorname{sen}\alpha &= \frac{r . d\omega}{ds} \end{aligned}\right\} . \qquad (3)$$

Dalla seconda delle (3) si trae in generale

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\alpha}{\rho},$$

da cui, derivando successivamente coll'avvertenza che le quantità ρ ad α debbono esser considerate come funzioni di s:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho}\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\cos\alpha}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} \\ \frac{d^3\varphi}{ds^3} &= -\frac{\cos\alpha}{\rho}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\rho^2}\frac{d\alpha}{ds}\frac{d\rho}{ds} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho}\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \\ &\quad + \frac{2\cos\alpha}{\rho^3}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - \frac{\cos\alpha}{\rho^2}\frac{d^2\rho}{ds^2} \\ \frac{d^4\varphi}{ds^4} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Le formule precedenti stanno qualunque sia la natura della curva s: per esprimere che questa è una geodetica dell'ellissoide basta subordinare le coordinate correnti (s, φ, ω) dei suoi punti alla condizione

$$r \,.\, sen\, \alpha = costante$$

(teorema di *Clairaut*), dalla quale si possono dedurre in funzione di φ e di α le espressioni delle derivate $\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \ldots$ che compariscono nelle (4). Derivando rispetto ad s si ha infatti

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{tang\, \alpha}{r} \frac{dr}{ds} \tag{5}$$

mentre dalla nota relazione

$$r = \frac{a \,.\, cos\, \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \,.\, sen^2 \varphi}},$$

si trae

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{a(1 - e^2)\, sen\, \varphi}{(1 - e^2 \,.\, sen^2 \varphi)^{3/2}} \frac{d\varphi}{ds} = -\rho \,.\, sen\, \varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

ovvero, ricordando la seconda delle (3):

$$\frac{dr}{ds} = -\, sen\, \varphi\, cos\, \alpha. \tag{6}$$

Per conseguenza la (5) dà:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{sen\, \varphi\, sen\, \alpha}{r} \\ \frac{d^2\alpha}{ds^2} &= \frac{cos\, \varphi\, sen\, \alpha}{r} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{cos\, \alpha\, sen\, \varphi}{r} \frac{d\alpha}{ds} - \frac{sen\, \varphi\, sen\, \alpha}{r^2} \frac{dr}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e da questa ultima relazione si possono eliminare $\frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\alpha}{ds}, \frac{dr}{ds}$ per mezzo delle precedenti (3), (5), (6): in tal guisa si trova:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{sen\, \alpha\, cos\, \alpha\, cos\, \varphi}{\rho \,.\, r} + 2\, \frac{cos\, \alpha\, sen\, \alpha\, sen^2 \varphi}{r^2}. \tag{8}$$

Procedendo in modo analogo si ricaverebbero i valori di $\frac{d^3\alpha}{ds^3}, \frac{d^4\alpha}{ds^4}, \ldots$

Nelle (4) compariscono ancora le derivate successive di ρ rispetto ad s, derivate che si esprimono senza difficoltà in funzione

di φ partendo dalla nota relazione

$$\rho^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2.sen^2\varphi)^3},$$

dalla quale si ricava:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{ds} = \frac{3.e^2.\rho.sen\varphi cos\varphi}{1-e^2.sen^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{3.e^2.sen\varphi cos\varphi cos\alpha}{1-e^2.sen^2\varphi}\\
&\frac{d^2\rho}{ds^2} = -\frac{3.e^2.sen\varphi cos\varphi sen\alpha}{1-e^2.sen^2\varphi}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{3.e^2.cos\alpha(cos^2\varphi - sen^2\varphi)}{1-e^2.sen^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds} + \\
&\qquad + \frac{6.e^4.sen^2\varphi cos^2\varphi cos\alpha}{(1-e^2.sen^2\varphi)^2}\frac{d\varphi}{ds}\\
&\quad = -\frac{3.e^2}{1-e^2.sen^2\varphi}\left\{\frac{sen^2\varphi sen^2\alpha cos\varphi}{r} - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{cos^2\alpha}{\rho}\left(cos2\varphi + \frac{e^2.sen^2 2\varphi}{2(1-e^2.sen^2\varphi)}\right)\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Sostituendo nei secondi membri delle (4) alle varie derivate che vi compariscono, i loro valori dati dalle (7), (8), (9), avremo finalmente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{sen\varphi}{\rho^2}\left(\frac{sen^2\alpha.\rho}{r} + \frac{3.e^2.cos\varphi cos^2\alpha}{1-e^2sen^2\varphi}\right)\\
&\frac{d^3\varphi}{ds^3} = -\frac{sen^2\alpha cos\alpha}{r\rho}\left\{\frac{cos\varphi}{\rho} + \frac{3sen^2\varphi}{r}\right\} + e^2.\Omega\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

essendo Ω una funzione di φ e di α che è inutile di specificare, se nella serie (1) si ritiene soltanto l'approssimazione del terzo ordine inclusivo, perocchè i termini di cui si compone Ω sono dello stesso ordine di quelli che precedono $e^2\,\Omega$ nella seconda delle (10), mentre e^2 nella classificazione delle grandezze deve esser considerata al più come una piccola quantità del primo ordine. Per la stessa ragione si possono omettere i termini in $\frac{e^4}{\rho^2}$, $\frac{e^4}{r^2}$, che implicitamente entrano nella composizione dei secondi membri delle

(10), e queste, coll'approssimazione del terzo ordine inclusivo, nella (1) possono essere scritte più semplicemente come segue:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -\frac{sen\,\varphi}{\rho^2}\left(\frac{sen^2\alpha\,.\,\rho}{r} + 3\,.\,e^2\,.\,cos\,\varphi\,cos^2\alpha\right) \\ \frac{d^3\varphi}{ds^3} &= -\frac{sen^2\alpha\,.\,cos\,\alpha}{\rho^3}\,(1 + 3\,tang^2\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

giacchè, dentro i limiti della suddetta approssimazione si può sostituire e^2 in luogo di $\frac{e^2}{1 - e^2\,.\,sen^2\varphi}$ nella prima delle (10) e $\rho\,cos\,\varphi$ in luogo di r nella seconda.

In conseguenza delle (11) lo sviluppo (1) ci dà per la differenza di latitudine $\varphi - \varphi_1$ cercata:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi - \varphi_1 = \frac{s\,.\,cos\,\alpha_1}{\rho_1\,sen\,1''} - \\ - \frac{s^2\,.\,sen\,\varphi_1}{2\,.\,\rho_1^2\,sen\,1''}\left(\frac{sen^2\alpha_1\,.\,\rho_1}{r_1} + 3\,.\,e^2\,.\,cos\,\varphi_1 cos^2\alpha_1\right) - \\ - \frac{s^3\,.\,sen^2\alpha_1 cos\,\alpha_1}{6\,.\,\rho_1^3\,sen\,1''}\,(1 + 3\,tang^2\varphi_1) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

nella quale l'indice delle lettere ρ, r indica che le quantità che queste rappresentano debbono corrispondere al valore φ_1 di φ, ed è stato aggiunto il fattore $\frac{1}{sen\,1''}$ nel secondo membro perchè $\Delta\varphi$ resti espresso in secondi di arco. La serie (12), dovuta a *Legendre,* nelle latitudini non troppo polari e per distanze geodetiche inferiori a 100,000 metri converge così rapidamente al suo limite $\Delta\varphi$ che già il terzo termine raggiunge appena un decimo di secondo nei casi più sfavorevoli, ed è una delle più comode per il calcolo delle differenze di latitudine successive fra i punti di una rete geodetica, specialmente se si posseggono delle tavole atte a dare con brevi calcoli i coefficienti di $\frac{s}{\rho}$, $\frac{s^2}{\rho^2}$, $\frac{s^3}{\rho^3}$. A seconda delle tavole di cui si fa uso si suole poi cambiare la forma della (12): così da questa si ottiene la serie conosciuta sotto il nome di serie di *Delambre* (e che è stata applicata nei grandi lavori geodetici francesi), osservando

che si ha

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-e^2}{\cos\varphi(1-e^2.sen^2\varphi)} = \frac{1-e^2}{\cos\varphi}(1+e^2.sen^2\varphi+e^4.sen^4\varphi+\ldots)$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}(1-e^2.\cos^2\varphi-e^4.\cos^4\varphi\ldots),$$

e perciò:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi = {} & \frac{s.\cos\alpha_1}{\rho_1 sen\,1''} - \\ & - \frac{s^2.tang\,\varphi_1}{2.\rho_1^2 sen\,1''}\{sen^2\alpha_1(1-e^2.\cos^2\varphi_1)+3.e^2.\cos^2\varphi_1\cos^2\alpha_1\} - \\ & - \frac{s^3.sen^2\alpha_1\cos\alpha_1}{6.\rho_1^3 sen\,1''}\{1+3.tang^2\varphi_1\}+\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Da noi fino a pochi anni or sono, è stata adottata una serie che si ottiene dalla (12) introducendovi in luogo del raggio di curvatura ρ la gran normale N. Si ha allora

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-e^2.sen^2\varphi}{N(1-e^2)}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1-2.e^2.sen^2\varphi+e^4.sen^4\varphi}{N^2(1-e^2)^2} = \frac{1+2.e^2.\cos^2\varphi+e^4\ldots}{N^2}$$

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1+e^2\ldots}{N^3},$$

ed in conseguenza, sostituendo nella (12):

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi = {} & \frac{s.\cos\alpha_1}{N_1(1-e^2)sen\,1''}(1-e^2.sen^2\varphi_1) - \\ & - \frac{s^2.tang\,\varphi_1}{N^2 sen\,1''}\{sen^2\alpha_1(1+e^2.\cos^2\varphi_1)-3.e^2.\cos^2\alpha_1\cos^2\varphi_1\} - \\ & - \frac{s^3.sen^2\alpha_1\cos\alpha_1}{6.N^3 sen\,1''}\{1+3\,tang^2\varphi_1\}+\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

I valori delle quantità

$$\frac{1-e^2.sen^2\varphi_1}{N_1(1-e^2)sen\,1''}, \qquad \frac{1+e^2.\cos^2\varphi_1}{N^2 sen\,1''}tang\,\varphi'$$

erano dati in tavole coll'argomento φ_1.

3. È molto importante, anche per certe questioni che saranno sviluppate in seguito, l'indagare quale errore corrisponde nella lati-

tudine φ calcolata, agli errori commessi nei dati φ_1, α_1, a, e necessarii al calcolo della (12) o delle altre formule ad essa equivalenti. Sia dunque anzitutto $\delta\alpha$ l'errore commesso nella determinazione dell'azimut α_1, la quale, poggiando sopra osservazioni astronomiche dirette, non può esser resa a priori indipendente dalle attrazioni locali. Evidentemente, dentro l'approssimazione del terzo ordine tenuta nella (12), un tale errore non influisce sensibilmente che nel primo termine del secondo membro, e nella parte del secondo termine che è indipendente da e^2. Perciò, nella ricerca che ci occupa, potremo porre per brevità

$$\Delta\varphi = \frac{s \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot sen\, 1''} - \frac{s^2 \cdot tang\,\varphi\, sen^2\alpha}{2 \cdot a^2 \cdot sen\, 1''}, \qquad (15)$$

da cui, rappresentando con $\delta\Delta\varphi_\alpha$ l'errore che in $\Delta\varphi$ corrisponde all'errore considerato in α, si trae con un facile sviluppo:

$$\delta\Delta\varphi_\alpha = -\frac{\delta\alpha \cdot s \cdot sen\,\alpha}{\rho}\left(1 + \frac{s \cdot tang\,\varphi \cos\alpha}{a} + \frac{\delta\alpha \cdot cotg\,\alpha\, sen\, 1''}{2} + \ldots\right) \qquad (16)$$

essendo $\delta\alpha$ e $\delta\Delta\varphi_\alpha$ espressi in secondi di arco. Di qui si vede come l'errore $\delta\Delta\varphi_\alpha$ è in grandezza inferiore di un ordine a $\delta\alpha$, purchè il rapporto $\frac{s}{\rho}$ possa essere considerato come una quantità piccola del primo ordine; così nelle nostre latitudini per un errore di $10''$ nell'azimut, il valore di $\delta\Delta\varphi_\alpha$ non raggiunge al massimo che circa $0''.1$ per $s = 100000^m$, lo che permette nella maggior parte dei casi di introdurre nei calcoli gli azimut astronomici in luogo dei geodeteci senza errore finale sensibile. Ma non si deve dimenticare che il calcolo delle coordinate geografiche di un punto molto distante dal punto iniziale $(\varphi_1, \alpha_1, \omega_1)$ per mezzo di successive differenze passando per i vertici di una rete compensata interposta, equivale a dedurre direttamente la differenza delle coordinate fra i due punti estremi suddetti per mezzo della loro distanza geodetica (distanza che può essere calcolata cogli elementi della rete congiungente) e dell'azimut corrispondente, che si deduce combinando convenientemente l'azimut astronomico osservato in (φ_1, ω_1) cogli angoli compensati della rete medesima. Perciò, se la distanza fra i punti estremi considerati è sufficientemente grande, non solo $\delta\Delta\varphi$ può, teoreticamente parlando, diventare dello stesso ordine di $\delta\alpha$, ma può anche superare questa quantità. Perciò in pratica le reti geodetiche così estese sono sempre orientate per mezzo di molti

azimut direttamente osservati e distribuiti equabilmente in esse: il metodo di introdurli tutti in calcolo è intimamente legato colla deduzione delle attrazioni locali, e sarà esposto a suo luogo.

Assai minore è l'influenza dell'errore $\delta\varphi$ commesso nella determinazione della latitudine iniziale: ed infatti rappresentando con $\delta\Delta\varphi_\varphi$ il corrispondente errore in $\Delta\varphi$, dalla (15) si ottiene:

$$\delta\Delta\varphi_\varphi = -\left(\frac{3.e^2.s.\cos\alpha\,sen\,2\varphi_1}{2.N(1-e^2)_1} + \frac{s^2.sen^2\alpha}{2r^2}\right)\delta\varphi, \qquad (17)$$

il termine in $\delta\varphi^2$ risultando di quarto ordine.

Finalmente gli errori $\delta\Delta\varphi_a$, $\delta\Delta\varphi_e$ che in $\Delta\varphi$ si commettono a causa degli errori δa, δe, di cui debbono supporsi affette le costanti terrestri a ed e, sono dati dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\delta\Delta\varphi_a &= -\delta a\frac{s.\cos\alpha}{\rho.a.sen\,1''}\\ \delta\Delta\varphi_e &= \frac{2.e.\delta e.s.\cos\alpha}{N(1-e^2)^2}\left(1-\frac{3-e^2}{2}sen^2\varphi\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (18)$$

È facile vedere inoltre come nell'espressione dell'errore complessivo commesso in $\Delta\varphi$ a causa di tutti gli errori dei dati, i termini che conterrebbero i dopii prodotti di questi errori sono almeno di un ordine inferiori all'ultimo ritenuto nella serie (12), e perciò trascurabili quando l'approssimazione data da questa è sufficiente: l'errore totale suddetto si ottiene quindi semplicemente dalla somma degli errori parziali sopra considerati.

4. La differenza di longitudine $\omega - \omega_1$ fra i due punti A, B congiunti dalla geodetica s si ottiene in modo analogo alla differenza di latitudine: considerando infatti ω come funzione dell'arco s contato a partire dal punto (φ_1, ω_1), si ha in generale:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_1 = s.\left(\frac{d\omega}{ds}\right)_1 + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2\omega}{ds^2}\right)_1 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\omega}{ds^3}\right)_1 + \cdots$$

ove

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)_1,\quad \left(\frac{d^2\omega}{ds^2}\right)_1,\quad \left(\frac{d^3\omega}{ds^3}\right)_1,\cdots$$

rappresentano i valori che prendono le derivate totali successive

$$\frac{d\omega}{ds},\quad \frac{d^2\omega}{ds^2},\quad \frac{d^3\omega}{ds^3},\cdots$$

nel punto iniziale (φ_1, ω_1). Ora dall'ultima delle relazioni fondamentali (3) si trae

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{sen\,\alpha}{r}, \tag{19}$$

e da questa si hanno senza difficoltà le espressioni delle altre derivate suddette in funzione di φ ed α, e quindi tutti i dati necessarii per l'applicazione della serie generale soprascritta. Così per l'espressione di $\frac{d^2\omega}{ds^2}$ si trova, ricordando le (5) e (6):

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = \frac{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha\,sen\,\varphi}{r^2} = \frac{sen\,\varphi\,sen\,2\,\alpha}{r^2}, \tag{20}$$

e successivamente, se si tralasciano in $\frac{d^3\omega}{ds^3}$ i termini che contengono il fattore e^2, e che, nello sviluppo di $\omega - \omega_1$, corrispondono a termini di quarto ordine, si ottiene:

$$\frac{d^3\omega}{ds^3} = \frac{2}{r^3}\left\{sen\,\alpha\,cos^2\alpha\,(cos^2\varphi + 3\,sen^2\varphi) - sen^3\alpha\,sen^2\varphi\right\}. \tag{21}$$

Quindi avremo:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\omega = \omega - \omega_1 = {} & \frac{s\,.\,sen\,\alpha_1}{N_1\,cos\,\varphi_1\,sen\,1''} + \\ & + \frac{s^2\,.\,tang\,\varphi_1\,sen\,2\,\alpha_1}{2\,.\,N_1^2\,cos\,\varphi_1\,sen\,1''} + \\ & + \frac{s^3\,.\,sen\,\alpha_1}{3\,.\,N_1^3\,cos\,\varphi_1\,sen\,1''}\left\{cos^2\alpha_1\,(1 + 3\,tang^2\varphi_1) - sen^2\alpha_1\,tang^2\varphi_1\right\}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

essendo la differenza $\omega - \omega_1$ espressa in secondi.

Questa formula diviene molto più semplice se in luogo della latitudine φ_1 e della gran normale N_1, corrispondenti al punto iniziale A, si introducono la latitudine φ e la gran normale N del punto $B\,(\varphi, \omega)$, del quale la latitudine può supporsi già calcolata per mezzo della serie (12) o di altra equivalente. Ed invero consideriamo pel momento il punto $B\,(\varphi, \omega)$ come il punto di partenza, e rappresentiamo con α l'azimut in B della geodetica s contata a partire da B

verso A (*azimut reciproco ad* α_1): applicando la (22) stessa avremo:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\omega = \omega_1 - \omega = {} & \frac{s \cdot sen\,\alpha}{N \cos\varphi\, sen\,1''} + \\ & + \frac{s^2}{2 \cdot N^2} \frac{sen\,2\alpha\, sen\,\varphi}{\cos^2\varphi\, sen\,1''} + \\ & + \frac{s^3 \cdot sen\,\alpha}{3 \cdot N^3 \cos\varphi\, sen\,1''} \left\{\cos^2\alpha\,(1 + 3\,tang^2\varphi) - sen^2\alpha\, tang^2\varphi\right\} \end{aligned}\right\} . \quad (23)$$

Ora gli azimut reciproci α_1 ed α, pel teorema di *Clairaut,* sono vincolati dalla relazione

$$sen\,\alpha = -\frac{r_1}{r} sen\,\alpha_1 = -\frac{sen\,\alpha_1 \cos\varphi_1}{\cos\varphi} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi}}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi_1}}, \quad (24)$$

mentre, ponendo $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$, si trae collo sviluppo di Taylor

$$r_1 = r + \Delta\varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \frac{\Delta\varphi^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} + \cdots,$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi_1}} = {} & \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi}} - \\ & - \Delta\varphi \cdot sen\,1'' \frac{(1 - e^2)\, sen\,\varphi}{(1 - e^2 \cdot sen^2\varphi)^{3/2}} - \\ & - \Delta\varphi^2 \cdot sen^2\,1'' \frac{(1 - e^2)\,(1 + e^2 \cdot sen^2\varphi - 2 \cdot e^4 \cdot sen^4\varphi) \cos\varphi}{2\,(1 - e^2 \cdot sen^2\varphi)^{7/2}} + \cdots \end{aligned}$$

In conseguenza dalla (24) si trova:

$$\begin{aligned} sen\,\alpha = {} & - sen\,\alpha_1 \left\{1 - \Delta\varphi \cdot sen\,1'' \frac{(1 - e^2)\, tang\,\varphi}{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi} - \right. \\ & \left. - \Delta\varphi^2 \cdot sen^2\,1'' \frac{(1 - e^2)\,(1 + e^2 \cdot sen^2\varphi - 2\,e^4 \cdot sen^4\varphi)}{2\,(1 - e^2 sen^2 \cdot \varphi)^3} + \cdots \right\} \end{aligned}$$

da cui, ricordando che

$$\rho = \frac{N(1 - e^2)}{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} sen\,\alpha = {} & - sen\,\alpha_1 \left\{1 - \Delta\varphi \cdot sen\,1'' \cdot \frac{\rho \cdot tang\,\varphi}{N} - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta\varphi^2 \cdot sen^2\,1'' \cdot \rho}{2 \cdot N} \frac{1 + e^2 \cdot sen^2\varphi - 2\,e^4 \cdot sen^4\varphi}{(1 - e^2 \cdot sen^2\varphi)^2} + \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Il valore di $\Delta\varphi$ è dato dalla (12) dalla quale si ha, fino al secondo ordine inclusivo:

$$sen\,1''.\Delta\varphi = \frac{s.\cos\alpha}{\rho} - \frac{s^2.sen^2\alpha\,tang\,\varphi}{2.\rho.N} - \dots$$

Sostituendo nella relazione precedente avremo:

$$sen\,\alpha = -sen\,\alpha_1\left\{1 - \frac{s.\cos\alpha\,tang\,\varphi}{N} - \frac{s^2(sen^2\alpha\,tang^2\varphi\cos^2\alpha)}{2.N^2\cos\varphi} - \dots\right\}$$

ed introducendo questa espressione di $sen\,\alpha$ nella serie (23):

$$\Delta\omega = \omega - \omega_1 = \frac{s.sen\,\alpha_1}{N\cos\varphi\,sen\,1''} - \frac{s^2.sen\,2\alpha\,sen\,\varphi}{2.N^2\cos^2\varphi\,sen\,1''} - \frac{s^2.sen\,\alpha_1\cos\alpha\,sen\,\varphi}{N^2\cos^2\varphi\,sen\,1''} + \dots$$

Dimostreremo fra breve (§ 7) che fra gli azimut reciproci α ed α_1 si ha la relazione

$$\alpha = 180° + \alpha_1 + \frac{s.sen\,\alpha_1\,tang\,\varphi_1}{N_1 sen\,1''} + \dots;$$

è facile quindi vedere come i due ultimi termini della formula precedente non differiscono che di una quantità dell'ordine di $\frac{s^3}{N^3}$: quindi si avrà:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega = \frac{s.sen\,\alpha_1}{N\cos\varphi\,sen\,1''} - \frac{s^3}{N^3}\{\dots\} - \dots$$

Eseguendo un calcolo analogo, per i termini di terzo ordine, calcolo di cui omettiamo il lungo sviluppo perchè non presenta veruna difficoltà, si trova poi:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega = \frac{s.sen\,\alpha_1}{N\cos\varphi\,sen\,1''} - \frac{s^3.sen\,\alpha_1}{6N^3\cos\varphi}\left(1 - \frac{sen^2\alpha_1}{\cos\varphi}\right) + \dots \quad (25)$$

che è la formula equivalente alla (22), e che si suole adottare invece di questa nel calcolo delle longitudini di una rete, quando per tale calcolo si fa uso delle serie di *Legendre*.

5. La (22) dimostra che, se si ritiene la superficie terrestre come una sfera di raggio N_1 e si considera un punto di latitudine (sferica) φ_1 collegato ad un altro per mezzo di un arco di cerchio

massimo di lunghezza s, che formi nel punto φ_1 un azimut α_1 col meridiano sferico, la differenza di longitudine sferica fra tali due punti non differisce dalla ellissoidica $\omega_1 - \omega$ che di una quantità piccola del quarto ordine. Noi cercheremo ora l'espressione analitica di questa quantità, della quale dobbiamo valerci tra breve.

Perciò osserveremo che sullo sferoide si ha rigorosamente:

$$\frac{d^3\omega}{ds^3} = \frac{2\,sen\,\alpha}{N^3\,cos\,\varphi}\left\{cos^2\alpha\,(1 + 3\,tang^2\varphi) - sen^2\alpha\,tang^2\varphi + \frac{e^2 cos^2\varphi\,cos^2\alpha}{1 - e^2}\right\}$$

e quindi:

$$\frac{d^4\omega}{ds^4} = \frac{4\,sen\,\varphi\,sen\,2\,\alpha}{N^4 cos^2\varphi}\left\{cos\,2\,\alpha\,(1 + 3\,tang^2\varphi) + cos^2\alpha\right\} + e^2\{\ldots\}.$$

Siano ora $\Delta\Omega$, $\frac{d\Omega}{ds}$, $\frac{d^2\Omega}{ds^2}$, ... i valori che sulla sfera di raggio N_1 sopra indicata corrispondono a $\Delta\omega$, $\frac{d\omega}{ds}$, $\frac{d^2\omega}{ds^2}$, ...: è facile vedere che è

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)_1 = \frac{sen\,\alpha_1}{N_1 cos\,\varphi_1} = \left(\frac{d\omega}{ds}\right)_1 \\
&\left(\frac{d^2\Omega}{ds^2}\right)_1 = \frac{sen\,\varphi_1\,sen\,2\,\alpha_1}{N_1^2 cos^2\varphi_1} = \left(\frac{d^2\omega}{ds^2}\right)_1 \\
&\left(\frac{d^3\Omega}{ds^3}\right)_1 = \frac{2\,sen\,\alpha_1}{N_1^3 cos\,\varphi_1}\left\{cos^2\alpha_1\,(1 + 3\,tang^2\varphi_1) - sen^2\alpha_1\,tang^2\varphi_1\right\} = \\
&\qquad = \left(\frac{d^3\omega}{ds^3}\right)_1 - \frac{2 \cdot e^2 \cdot cos^2\varphi_1\,sen\,\alpha_1\,cos^2\alpha_1}{N_1^3\,(1 - e^2)\,cos\,\varphi_1} \\
&\left(\frac{d^4\Omega}{ds^4}\right)_1 = \frac{4 \cdot sen\,\varphi_1\,sen\,2\,\alpha_1}{N_1^4 cos^2\varphi_1}\left\{cos\,2\,\alpha_1\,(1 + 3\,tang^2\varphi_1) + cos^2\alpha_1\right\} = \\
&\qquad = \left(\frac{d^4\omega}{ds^4}\right)_1 - e^2\{\ldots\}
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

e, per conseguenza, da uno sviluppo in serie, avremo:

$$\Delta\omega = \Delta\Omega' - \frac{e^2 \cdot s^3 \cdot cos\,\varphi_1\,sen\,\alpha_1\,cos^2\alpha_1}{3\,N_1^3\,(1 - e^2)\,sen\,1''} \qquad (27)$$

coll'approssimazione spinta fino all'ordine $\frac{e^2 s^4}{N^4}$, questo escluso. Le quantità di questo ordine sono del resto trascurabili in quasi tutte le ricerche di Geodesia.

6. Le espressioni degli errori parziali $\delta\Delta\omega_\alpha$, $\delta\Delta\omega_\varphi$, $\delta\Delta\omega_a$, $\delta\Delta\omega_e$, dei quali la differenza di longitudine $\Delta\omega$, calcolata con una qualunque delle formule sopra ricavate, rimane affetta a causa degli errori rispettivamente commessi nei dati di partenza α, φ, a ed e si ottengono senza difficoltà dalla (22), di cui, in questo caso, basta considerare i soli termini di primo e secondo ordine ponendo:

$$\Delta\omega = \frac{s\,.\,sen\,\alpha}{r\,.\,sen\,1''} + \frac{s^2\,.\,sen\,\varphi\,sen\,2\,\alpha}{2\,.\,r^2\,.\,sen\,1''} + \ldots$$

Così, sviluppando rispetto ad un aumento ipotetico $\delta\alpha$ di α si ricava:

$$\delta\Delta\omega_\alpha = \delta\alpha\,\frac{s\,.\,cos\,\alpha}{r}\left\{1 - \frac{\delta\alpha\,.\,tang\,\alpha\,sen\,1''}{2} + \frac{s\,.\,sen\,\varphi\,cos\,2\,\alpha}{r\,.\,cos\,\alpha}\right\} \quad (28)$$

formula analoga alla (16) del § 3, dalla quale si conclude che, anche nel trasporto della longitudine, un errore nell'azimut non ha che un'influenza di secondo ordine. Per l'influenza di un errore nella latitudine si ha evidentemente

$$\delta\Delta_1\omega_\varphi = s\,.\,sen\,\alpha\,.\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\,\delta\varphi + \frac{s^2\,.\,sen\,2\,\alpha}{2}\,\frac{d\left(\frac{sen\,\varphi}{r^2}\right)}{d\varphi}\,\delta\varphi + \\ + \frac{s\,.\,sen\,\alpha}{2}\,\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}\,\delta\varphi^2 + \ldots$$

e quindi, osservando che, coll'approssimazione del terzo ordine, incluso, in $\delta\Delta\omega_\varphi$ si può porre

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} &= \frac{(1-e^2)\,sen\,\varphi}{a\,.\,cos^2\varphi\sqrt{1-e^2\,.\,sen^2\varphi}} \\ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} &= \frac{(1-e^2)(1+sen^2\varphi)}{a\,.\,cos^3\varphi\sqrt{1-e^2\,.\,sen^2\varphi}} + e^2\{\ldots\} \\ \frac{d\left(\frac{sen\,\varphi}{r^2}\right)}{d\varphi} &= \frac{1+sen^2\varphi}{a^2\,.\,cos^3\varphi} + e^2\{\ldots\} = \frac{(1-e^2)(1+sen^2\varphi)}{a^2 cos^3\varphi\sqrt{1-e^2\,.\,sen^2\varphi}} + e^2[\ldots] \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

si trae:

$$\delta\Delta\omega_\varphi = \delta\varphi\,\frac{(1-e^2)\,.\,s\,.\,sen\,\alpha\,sen\,\varphi}{a\,.\,cos^2\varphi\sqrt{1-e^2\,.\,sen^2\varphi}}\cdot\left\{1 + \frac{1+sen^2\varphi}{sen\,2\,\varphi}\left(\delta\varphi\,.\,sen\,1'' + \frac{2\,.\,s\,.\,cos\,\alpha}{a}\right)\right\}. \quad (30)$$

Finalmente agli errori δa e δe nel semiasse maggiore e nell'eccentricità dell'ellissoide corrispondono rispettivamente gli errori:

$$\left.\begin{aligned}\delta\Delta\omega_a &= -\frac{\delta a \,.\, s \,.\, sen\,\alpha}{a \,.\, r \,.\, sen\,1''}\left(1 - \frac{\delta a}{a} + \frac{2 \,.\, s \,.\, sen\,\varphi\, cos\,\alpha}{a \,.\, cos\,\varphi}\right)\\ \delta\Delta\omega_e &= -\frac{e \,.\, \delta e \,.\, s \,.\, sen\,\alpha\, sen^2\varphi}{a \,.\, cos\,\varphi \,.\, sen\,1'' \,.\, \sqrt{1 - e^2 \,.\, sen^2\varphi}} + \cdots\end{aligned}\right\}. \qquad (31)$$

È superfluo l'osservare poi che anche qui l'errore complessivo $\delta\Delta\omega$, coll'approssimazione del terzo ordine inclusivamente, si ottiene dalla somma degli errori parziali sopra considerati, giacchè i termini dipendenti dai doppii prodotti degli errori dei dati sono almeno di quarto ordine.

7. Le formule dedotte nei numeri precedenti non bastano, praticamente parlando, per passare dalla posizione geografica di un vertice di una rete alle posizioni geografiche di tutti gli altri, perocchè quando, partendo dal punto iniziale A, sono state calcolate le coordinate dei punti collegati direttamente con esso, per procedere oltre fa d'uopo conoscere gli azimut di nuovi punti collegati con quelli già calcolati. Ora questi azimut si determinano senza difficoltà se nel passaggio da un punto all'altro si calcola altresì l'azimut del punto di partenza sull'orizzonte di quello di arrivo.

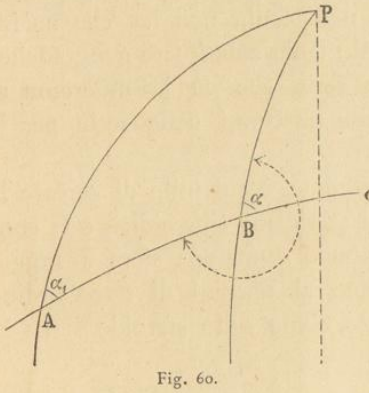

Fig. 60.

Sia ABC la geodetica illimitata che congiunge i due punti A, B (fig. 60): geodeticamente parlando se AP, BP sono i meridiani rispettivi di tali punti, l'azimut della linea suddetta in A è α_1 o $360° - \alpha_1$ secondochè si suppongono gli archi contati da A in B, o da B in A; ma una volta scelto il senso positivo di questi, in modo per esempio che l'azimut in A sia α_1, quello in B è l'angolo $PBC = \alpha$ che differisce di 180° dall'azimut α' di A rispetto a B. Ai due azimut α_1, α' si dà il nome di *azimut reciproci*. La differenza $\alpha - \alpha_1 = \Delta\alpha$ è poi detta *convergenza dei meridiani* di A e B, ed è vincolata in ogni caso ai corrispondenti azimut reciproci della relazione

$$\alpha' = \alpha_1 + \Delta\alpha + 180°, \qquad (32)$$

in modo che la ricerca dell'azimut α' reciproco ad un azimut dato α_1

si riduce alla ricerca della convergenza $\Delta\alpha$.* Ora, considerando l'azimut geodetico α di un punto qualunque della linea AB come funzione dell'arco s, si ha

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1 = s.\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_1 + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)_1 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right)_1 + \dots$$

ove gli indici alle parentesi indicano che le quantità racchiuse fra queste si riferiscono al punto ($s = 0$, $\varphi = \varphi_1$, $\alpha = \alpha_1$); quindi limitando l'approssimazione ai termini di secondo ordine, questi inclusi, e ricordando le formule (7) ed (8), si trae:

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1 = \frac{s\,.\,sen\,\alpha_1\,tang\,\varphi_1}{N_1\,sen\,1''} + \frac{s^2\,.\,sen\,2\alpha_1\,(1 + sen^2\varphi_1)}{4\,N_1^2\,cos^2\varphi_1\,sen\,1''} + \dots \quad (33)$$

giacchè, dentro l'approssimazione suddetta, in $\frac{d^2\alpha}{ds^2}$ si può sostituire N in luogo di ρ.

Sarebbe facile tener conto anche delle quantità di terzo ordine derivando la (8) rispetto ad s; ma complessivamente queste non raggiungono in pratica che qualche centesimo di secondo nei più sfavorevoli dei casi in cui si applicano le serie di *Legendre*, e noi abbiamo visto come un errore nell'azimut non ha che un'influenza di secondo ordine nel calcolo delle coordinate geografiche; perciò è logico di trascurare nella serie che dà la differenza di azimut un termine di più di quelli trascurati nelle serie per la latitudine e per la longitudine.

8. Come nel caso della longitudine, è qui utile di cercare la differenza fra la convergenza $\Delta\alpha$ dei meridiani ellissoidici, e la convergenza sferica ΔA, che le corrisponde sopra una sfera di raggio N_1, spingendo l'approssimazione fino ai termini di terzo ordine inclusivi. Perciò osserviamo anzitutto come sullo sferoide si ha in

---

* L'azimut α' reciproco ad α_1 può esser calcolato anche direttamente applicando il teorema di CLAIRAUT, che dà

$$-\,sen\,\alpha' = sen\,\alpha_1\,.\,\frac{cos\,\varphi_1}{cos\,\varphi}\,.\,\frac{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi}}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi_1}}\,;$$

ma quando il calcolo delle coordinate geografiche si fa per mezzo delle serie di LEGENDRE è molto più breve e conveniente il procedimento esposto in questo paragrafo.

generale (formula 8)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\alpha}{ds^2} &= \frac{sen\ 2\ \alpha}{2\ .\ N}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{2\ tang^2\varphi}{N}\right)=\frac{sen\,2\,\alpha}{2\,N^2cos^2\varphi}\left(1+sen^2\varphi+\frac{e^2.cos^4\varphi}{1-e^2}\right)\\ \frac{d^3\alpha}{ds^3} &= \frac{sen\,\varphi\,\varphi}{N^3cos^3\varphi}\left\{sen\,3\,\alpha\,(1+sen^2\varphi)+sen\,2\,\alpha\,cos\,\alpha\,cos^2\varphi+e^2.\psi\right\}\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

essendo ψ una funzione di α e φ che è qui inutile di specificare.

Se ora si suppone sopra una sfera di raggio N_1, riferita ad un qualunque sistema di meridiani e di paralleli, tracciato a partire da un punto di latitudine (sferica) φ_1 e sotto l'azimut (sferico) α_1 un arco s di cerchio massimo, e si considera l'altro estremo di questo arco come corrispondente al punto B dello sferoide, rappresentando con ΔA, $\frac{dA}{ds}$, $\frac{d^2A}{ds^2}$, $\frac{d^3A}{ds^3}$, ... i valori che su tale sfera corrispondono ad α, $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d^2\alpha}{as^2}$, $\frac{d^3\alpha}{ds^3}$, ... si ottiene

$$\left(\frac{dA}{ds}\right)_1=\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_1$$

$$\left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_1=\left(\frac{d^2\alpha}{ds}\right)_1-\frac{e^2.sen\,2\,\alpha_1\,cos^2\varphi_1}{2\,N_1^2\,(1-e^2)}$$

$$\left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_1=\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right)_1-e^2.\Phi$$

e quindi, coll'approssimazione del terzo ordine inclusivo, sarà:

$$\Delta\alpha=\Delta A+\frac{e^2.s^2.sen\,2\,\alpha_1\,cos^2\varphi_1}{4.N_1^2(1-e^2)sen\,1''}.\qquad(35)$$

Tenendo conto anche dei termini di quarto ordine si trova poi:

$$\Delta\alpha=\Delta A+\frac{e^2.s^2\,sen\,2\,\alpha_1\,cos^2\varphi_1}{4.N_1^2(1-e^2)sen\,1''}+\frac{e^2.s^3.sen\,2\,\varphi_1\,sen\,\alpha_1\,cos\,2\,\alpha_1}{12.N_1^3\,(1-e^2)\,sen\,1''}\qquad(36)$$

in cui l'ultimo termine in pratica non serve mai se non per dare l'idea dell'ammontare dei termini che si trascurano.

9. Riprendiamo ancora la formula (33) per dedurre gli errori $\delta\Delta\alpha_\alpha$, $\delta\Delta\alpha_\varphi$, $\delta\Delta\alpha_a$, $\delta\Delta\alpha_e$, che, a causa degli errori nei dati α_1, φ_1, a, ed e si commettono nel trasportare l'azimut da un estremo all'altro di una geodetica s: è chiaro che, la (33) essendo approssimata fino al solo secondo ordine, è inutile tener qui conto delle variazioni che nel termine di secondo ordine di essa corrispondono

agli errori degli elementi suddetti. Perciò da semplici differenziazioni della formula

$$\Delta\alpha = \frac{s \,.\, sen\,\alpha\, tang\,\varphi}{N\, sen\ 1''}$$

avremo, coll'approssimazione stessa con cui dalla (33) può esser calcolata la convergenza $\Delta\alpha$:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\Delta\alpha_\alpha &= \frac{s \,.\, cos\,\alpha\, tang\,\varphi}{N}\,\delta\alpha \\
\delta\Delta\alpha_\varphi &= \frac{s \,.\, sen\,\alpha}{N\, cos^2\varphi}\,\delta\varphi \\
\delta\Delta\alpha_a &= -\frac{s \,.\, sen\,\alpha\, tang\,\varphi}{a^2\, sen\ 1''}\,\delta a \\
\delta\Delta\alpha_e &= -\frac{e.s \,.\, sen\,\alpha\, sen^3\varphi}{a\, cos\varphi\, sen\ 1''}\,\delta e
\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

l'errore complessivo $\delta\Delta\alpha$ essendo dato dalla somma dei soprascritti errori parziali.

10. Nelle comuni reti geodetiche di primo ordine, astrazion fatta dai riattacchi di isole e da altre circostanze eccezionali, la lunghezza dei lati varia fra i 30 ed i 70 chilometri, e dentro questi limiti le serie di *Legendre* danno senza dubbio il metodo più semplice e comodo di calcolare con precisione sufficiente le coordinate geografiche dei vertici della rete, tanto più che in un gran numero di casi il valore complessivo dei termini di terzo ordine non sorpassa 0″,01, quantità che, corrispondendo a qualche decimetro, è minore dell'errore probabile corrispondente alla determinazione geodetica del punto cui si riferisce, e perciò praticamente trascurabile. Le serie di *Legendre* presentano d'altronde il grande vantaggio di dare le posizioni geografiche per differenze successive, differenze che sono sempre, geodeticamente parlando, assai piccole, e che, per conseguenza, possono esser calcolate con le comuni tavole logaritmiche a sette decimali. È facile vedere che non è più possibile far uso di così poche cifre logaritmiche quando si adottano formule che danno direttamente gli angoli cercati, e si vuole spingere l'approssimazione fino al millesimo di secondo: perciò gli astronomi ed i geodeti sogliono accogliere i metodi indiretti di calcolo, atti a dar le quantità cercate per mezzo di piccole differenze successive, con molto più favore dei metodi diretti, quantunque teoreticamente questi sieno sempre più eleganti. Così

del problema che ci occupa, anche per distanze superiori a quelle alle quali convengono le formule di *Legendre,* ma non illimitate, sebbene fosse nota la soluzione generale di *Bessel,* sono state cercate altre soluzioni indirette, fra cui accenneremo la seguente come una delle più semplici.

Sia $AB = s$ (fig. 61) un arco di geodetica ellissoidica tracciata fra i punti $A(\varphi_1, \omega_1, \alpha_1)$ e $B(\varphi, \omega\, \alpha)$, e rappresentino AP, BP i meridiani sferoidici dei suoi estremi. Se dal punto B si conduce la geodetica BC perpendicolare al meridiano di A, si ottiene il triangolo geodetico ABC in cui sono noti i tre elementi $AB = s$, $BCA = 90°$, $BAC = \alpha_1$, e che, risoluto coi metodi altrove già esposti, fornisce i valori degli altri elementi $AC = \sigma$, $BC = \lambda$, $CBA = \beta$. Ciò posto ricordiamo che fra un arco σ di meridiano e le latitudini dei suoi estremi, coll'approssimazione del quarto ordine inclusivo si ha la relazione [Capitolo II, formula (35)]:

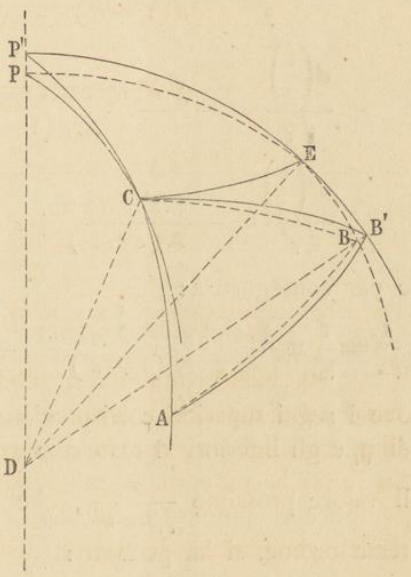

Fig. 61.

$$\sigma = \Delta\varphi \cdot \rho_m \, sen\, 1'' + \Delta\varphi^3 \cdot \rho_m \cdot sen^3\, 1'' \frac{e^2 \cdot cos\, 2\varphi_m}{8}$$

dalla quale, sostituendo nell'ultimo termine del secondo membro in luogo di $\Delta\varphi$ il suo valore prossimo $\frac{\sigma}{\rho_m\, sen\, 1''}$, si trae, sempre colla suddetta approssimazione:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\rho_m\, sen\, 1''}\left(1 - \frac{e^2 \cdot \sigma^2 \cdot cos\, 2\varphi_m}{8\rho_m^2}\right). \qquad (38)$$

Da questa formula, in cui $\Delta\varphi$ rappresenta il valore assoluto della differenza, φ_m la media delle latitudini degli estremi dell'arco σ, e ρ_m il raggio di curvatura del meridiano sotto la latitudine φ_m, si può calcolare colla massima semplicità il valore di $\Delta\varphi$ o per mezzo di approssimazioni successive (delle quali basta sempre la seconda), o

cercando l'errore $\delta\Delta\varphi$ che si fa in $\Delta\varphi$ se invece di ρ_m si introduce un altro raggio di curvatura meridiana, per esempio quello corrispondente alla data latitudine φ_1.

In questo ultimo caso per avere l'espressione analitica di tale errore, basta osservare che si ha in generale:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(1 - e^2 . sen^2\varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2)}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\varphi} = -\frac{3 . e^2 . sen\, 2\varphi . (1 - e^2 . sen^2\varphi)^{1/2}}{2 . a(1 - e^2)} = -\frac{3 . e^2 . sen\, 2\varphi}{2 . N(1 - e^2)}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\varphi^2} = -\frac{3 . e^2 . cos\, 2\varphi}{N(1 - e^2)} + e^4\{\ldots\},$$

e per conseguenza:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\rho_1} \mp \frac{3 . e^2 . \Delta\varphi . sen\, 2\varphi_1 sen\, 1''}{4 . N_1(1 - e^2)} - \frac{3 . e^2 . \Delta\varphi^2 . cos\, 2\varphi_1 sen^2\, 1''}{8 . N_1(1 - e^2)} \mp \cdots,$$

ove i segni superiori corrispondono al caso in cui φ_m sia maggiore di φ_1 e gli inferiori al caso contrario. Introducendo in luogo di $\Delta\varphi$ il valore prossimo $\frac{\sigma}{\rho_1 sen\, 1''}$, che ne differisce di una quantità di terzo ordine, si ha pertanto:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\rho_1} \mp \frac{3 . e^2 . \sigma . sen\, 2\varphi_1}{4 . N_1\rho_1(1 - e^2)} - \frac{3 . e^2 . \sigma^2 . cos\, 2\varphi_1}{8 . N_1\rho_1^2(1 - e^2)} \mp \cdots$$

e quindi, sostituendo nella (38):

$$\delta\Delta\varphi = \mp \frac{3 . e^2 . \sigma^2 . sen\, 2\varphi_1}{4 . N_1\rho_1(1 - e^2) sen\, 1''} - \frac{3 . e^2 . \sigma^3 . cos\, 2\varphi_1}{8 . N_1\rho_1^2(1 - e^2) sen\, 1''} \mp \cdots, \quad (39)$$

Trasformando la (38) stessa per modo da renderla adatta al calcolo diretto di $\Delta\varphi$ si ha poi:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\rho_1 sen\, 1''}\left\{1 \mp \frac{3 . e^2 . \sigma . sen\, 2\varphi_1}{4 . N_1(1 - e^2)} - \frac{3 . e^2 . \sigma^2 . cos\, 2\varphi_1}{8 . N_1\rho_1(1 - e^2)} - \frac{e^2 . \sigma^2 . cos\, 2\varphi_m}{8 . \rho_m^2}\right\}$$

relazione che può, coll'approssimazione del quarto ordine inclusivamente, essere scritta come segue:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\rho_1 sen\, 1''}\left\{1 \mp \frac{3 . e^2 . \sigma . sen\, 2\varphi_1}{4 . N_1(1 - e^2)} - \frac{e^2 . \sigma^2 . cos\, 2\varphi_1}{2 . \rho_1^2}\right\}. \quad (40)$$

Allo stesso risultato si poteva giungere del resto direttamente considerando la latitudine φ come una funzione dell'arco ellittico σ, contato a partire dal punto per cui è $\Delta\varphi = 0$, e positivamente insieme a $\Delta\varphi$, ponendo:

$$\Delta\varphi = \sigma\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0 + \frac{\sigma^2}{1.2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}\right)_0 + \frac{\sigma^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3}\right)_0 + \cdots,$$

ed osservando che, a causa della nota relazione $d\sigma = \rho . d\varphi$, si trae:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = -\frac{3 . e^2 . sen\, 2\varphi}{2 . \rho . N(1 - e^2)}$$

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -\frac{3 . e^2 . cos\, 2\varphi}{\rho^2 . N(1 - e^2)} + \frac{3 . e^4 . sen^2 2\varphi}{2 . \rho . N^2(1 - e^2)}$$

. . . . . .

Con $\Delta\varphi$, ottenuto nel modo sopra indicato, resta determinata la latitudine geodetica Φ del punto C (fig. 61): sia dunque $CD = N_0$ la gran normale corrispondente a questa latitudine, e supponiamo descritta col centro in D una sfera di raggio N_0, la quale evidentemente è esterna al meridiano BEP, tocca l'ellissoide lungo il parallelo CE del punto C, ed è incontrata dal prolungamento della retta BD in un punto B' molto prossimo a B. L'espressione analitica della distanza BB' si ottiene senza difficoltà osservando che l'arco di sezione CB normale in C, e l'arco di cerchio massimo CB', generato dall'intersezione del piano CBD colla sfera suddetta, sono tangenti in C e si corrispondono nel senso stabilito nel § 7 del Capitolo II (Vol. I, pag. 58); inoltre l'azimut in C della suddetta sezione normale CB differisce da 90° tutt'al più di una quantità di quarto ordine, giacchè la corrispondente geodetica CB taglia perpendicolarmente in C il meridiano, e quindi il primo termine della serie che dà la differenza fra un azimut astronomico ed il corrispondente azimut geodetico (Capitolo III, § 13) si annulla. Da ciò risulta anzitutto che per il raggio di curvatura in C della sezione normale suddetta può prendersi [Capitolo II, formule (13) per $\alpha = 90°$].

$$R = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 . sen^2\Phi}} = N_0$$

che è il raggio del cerchio massimo CB'; per conseguenza sono qui applicabili le formule (21) e (21^{bis}) del Capitolo II (Vol. I, pag. 62 e 63), delle quali la seconda, tenendo conto delle conclusioni tratte nel § 14 del Capitolo III, dimostra come l'arco di cerchio massimo CB' differisce in lunghezza tutto al più di una quantità di quinto ordine dall'arco di geodetica $CB = \lambda$.

Da quanto precede resta dimostrato che nel triangolo sferico $P'CB'$ (fig. 61) si possono considerare come noti il lato $CB' = \lambda$, il lato $CP' = 90° - \Phi$, e l'angolo $C = 90°$*: così da esso si possono calcolare la differenza di longitudine cercata $\Delta\omega$, il lato $B'P'$ e l'angolo $P'B'C$, che rappresenteremo con $90° - \psi$ dacchè differisce poco da un retto. Chiamando inoltre con δ l'angolo $B'DE$, si ha (fig. 61) $B'P' = 90° - \Phi + \delta$, quindi, ponendo $\lambda' = \frac{\lambda}{N_0 \, sen\, 1''}$, dal triangolo sferico rettangolo sopra indicato avremo:

$$tang\,\Delta\omega = tang\,\lambda'\,sec\,\Phi$$

$$tang\,\psi = sen\,\lambda'\,tang\,\Phi$$

$$sen\,(\Phi - \delta) = cos\,\lambda'\,sen\,\Phi.$$

Ma per lo più queste formule convengono poco al calcolo logaritmico, a causa della piccolezza che hanno $\Delta\omega$, ψ, δ e λ', cosicchè è utile ricorrere a degli sviluppi in serie per le linee trigonometriche di queste quantità. In tal modo, limitando l'approssimazione al quarto ordine inclusivo, si ottiene senza difficoltà:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega &= \lambda'.\,sec\,\Phi\left\{1 - \frac{\lambda'^2.\,tang^2\Phi\,sen^2.1''}{3}\right\} \\ \psi &= \lambda'.\,tang\,\Phi\left\{1 - \frac{\lambda'^2.\,sen^2 1''}{6}\,(1 + 2\,tang^2\Phi)\right\} \\ \delta &= \frac{\lambda'^2.\,sen\,1''}{2}\,tang\,\Phi\left\{1 - \frac{\lambda'^2.\,sen^2 1''}{12}\,(1 + 3\,tang^2\Phi)\right\} \end{aligned}\right\}. \qquad (41)$$

La prima di queste formule dà direttamente la differenza di longitudine cercata fra i punti A e B dello sferoide: la seconda e la terza servono poi rispettivamente a dedurre l'azimut α' reciproco all'azimut dato α_1, e la latitudine sferoidica del punto B nel modo che segue.

* Rigorosamente parlando l'angolo in C differisce da 90° di una quantità di quarto ordine che può essere calcolata colla formula (126) dal seguente § 25; ma, trattandosi di un azimut, si può sempre fare astrazione da tale piccola differenza.

Se si riferiscono, come nel § 7 del Capitolo II, gli archi EB, EB' (fig. 61), con un sistema di coordinate polari r, ζ, all'asse polare DE ed al polo D, le formule dedotte nel luogo suddetto (Vol. I, pag. 60), facendovi

$$r_0 = N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 . sen^2 \Phi}}$$

$$R = \rho_0 = \frac{N_0 (1 - e^2)}{1 - e^2 . sen^2 \Phi} = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 . sen^2 \Phi)^{3/2}},$$

$$\psi = \zeta$$

danno per l'espressione generale del raggio vettore r lungo l'arco ellittico EB:

$$r = N_0 \left(1 - \frac{e^2 . \zeta^2 . cos^2 \Phi}{2 (1 - e^2)} \right) + \dots$$

e quindi, per l'elemento lineare $d\varepsilon$ di tale arco, si ha

$$d\varepsilon = N_0 d\zeta \sqrt{(1 - m . \zeta^2 + \dots)^2 + 4 . m^2 . \zeta^2 + \dots},$$

ove, per brevità, abbiamo posto

$$m = \frac{e^2 . cos^2 \Phi}{2 (1 - e^2)} .$$

A causa della piccolezza di m, dalla precedente espressione di $d\varepsilon$, almeno per valori limitati di ζ, con un facile sviluppo in serie si trae:

$$d\varepsilon = N_0 d\zeta (1 - m . \zeta^2 + \dots),$$

e quindi, rappresentando con ε la lunghezza dell'arco ellittico EB, avremo:

$$\varepsilon = N_0 \int_0^{\delta . sen 1''} d\zeta (1 - m . \zeta^2 + \dots) = N_0 \left(\delta . sen . 1'' - \frac{m . \delta^3 . sen^3 . 1''}{3} + \dots \right)$$

od anche:

$$\varepsilon - N_0 \delta . sen 1'' = - \frac{e^2 . \delta^3 . N_0 sen^3 1'' cos^2 \Phi}{3 (1 - e^2)} + \dots$$

Di qui, osservando che $N_0 \delta . sen 1''$ non è altro che la lunghezza dell'arco sferico EB', si conclude che la differenza di lunghezza fra questo arco e l'arco ellittico EB è affatto trascurabile nel caso qui considerato, raggiungendo appena il sesto ordine di grandezze, dacchè δ, come risulta dall'ultima delle (41), è una quantità piccola di secondo ordine. La differenza di latitudine sferoidica fra i punti C e B, ossia fra B ed E, si può quindi calcolare dalla formula (40),

introducendovi $\delta . N_0 \, sen \, 1''$ in luogo di σ e Φ in luogo di φ_1: ma i termini di terzo e quarto ordine di tale formula, a causa della piccolezza di δ, hanno valori così piccoli che si può ritenere senz'altro il solo primo ordine, ponendo

$$\Phi - \varphi = \frac{\delta . N_0 \, sen \, 1''}{\rho_0 \, sen \, 1''} = \frac{\delta . (1 - e^2 . sen^2 \Phi)}{1 - e^2}$$

e quindi

$$\varphi = \Phi - \frac{\delta . (1 - e^2 . sen^2 \Phi)}{1 - e^2} . \qquad (42)$$

Se per il punto B immaginiamo ancora condotta la normale BB'' all'ellissoide, la direzione di tale retta, quella del raggio vettore DB prolungato indefinitamente, e la direzione della corda BC (fig. 61) costituiscono un triangolo sferico rappresentato nella fig. 61^{bis}, del quale l'angolo in B'', compreso fra il piano $B'BB''$

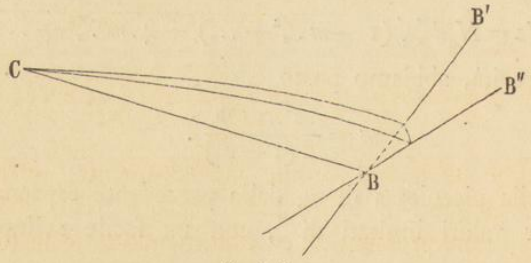

Fig. 61^{bis}.

del meridiano e il piano CBB'' normale allo sferoide in B, è il supplemento a 360° dell'azimut θ della sezione normale ellissoidica BC nel punto B. Se la normale BB'' in B coincidesse colla retta BB' tale azimut sarebbe dato evidentemente dalla relazione $\theta = 270° + \psi$: poniamo dunque, per analogia,

$$\theta = 270° + \Psi,$$

in modo che il suddetto angolo sferico B'' sia dato da $90° - \Psi$, e, rappresentando rispettivamente con ϑ e con $90° + \tau$ i due lati $B'B''$ e $B''C$, osserviamo che l'angolo $B''B'C$ è dato da $90 + \psi$: si avrà allora:

$$sen \, \vartheta \, tang \, \tau = cos \, \Psi \, tang \, \psi - cos \, \vartheta \, sen \, \Psi,$$

da cui si trae con ovvie trasformazioni:

$$tang \, \psi - tang \, \Psi = \frac{1}{cos \, \Psi} \left(sen \, \vartheta \, tang \, \tau - . \, 2 \, sen^2 \frac{\vartheta}{2} \, sen \, \Psi \right).$$

Si ha per altro evidentemente

$$\Im = \varphi - \Phi + \delta ,$$

od anche, introducendo per φ il suo valore (42), e ricordando le (41):

$$\Im = -\frac{\delta . e^2 . \cos^2 \Phi}{1 - e^2} = -\frac{e^2 . \lambda'^2 . sen\, 1'' \, sen\, 2\Phi}{4(1 - e^2)} + \dots ,$$

da cui si vede come $\Im$ è una quantità del terzo ordine. Il valore prossimo dell'angolo τ, ossia della depressione del punto C sull'orizzonte di B, è dato poi da $\frac{\lambda'}{2}$, perciò la grandezza $tang\, \psi - tang\, \Psi$ è tutto al più del quarto ordine, e chiamando quindi con χ la differenza $\psi - \Psi$, si può porre, nel caso nostro:

$$tang\, \psi - tang\, \Psi = \frac{\chi}{\cos^2 \Psi} ,$$

da cui si trae:

$$\chi = \cos \Psi \left\{ tang\, \tau . sen\, \Im - 2 . sen^2 \frac{\Im}{2} . sen\, \Psi \right\} ,$$

od anche fino al quarto ordine inclusivamente, introducendo in luogo delle tangenti e dei seni dei piccoli archi, gli archi stessi, per Ψ il suo valore prossimo ψ, ed esprimendo tutto in funzione di λ':

$$\chi = \frac{e^2 . \lambda'^3 . sen^2 1'' . sen\, 2\Phi}{8} . \qquad (43)$$

Questa formula servirebbe a calcolare la differenza fra l'angolo $270° + \psi$ e l'azimut $\theta = 270° + \Psi$ della sezione normale CB in B: ma di solito si fa astrazione da tale differenza, che non diventa apprezzabile che per distanze geodetiche s eccezionalmente grandi, e non ha, in nessun caso, influenza sensibile nel trasporto delle latitudini e delle longitudini lungo una rete trigonometrica, come risulta chiaramente dalla discussione dei §§ 3 e 6. Avuto l'azimut astronomico del punto C rispetto al punto B (azimut in B della sezione normale BC) si può passare anzitutto senza difficoltà all'azimut geodetico corrispondente, introducendo la solita correzione per mezzo delle formule generali (25) del Capitolo III, le quali, in questo caso danno, chiamando con c la correzione suddetta espressa in secondi, ed osservando che nelle formule sopra citate per s si può

sostituire con più che sufficiente approssimazione $\lambda' . a . sen\, 1''$:

$$c = \frac{e^2 . \lambda'^2 . sen\, 1'' . sen\, 2\psi . cos^2\varphi}{12} + \dots$$

o, più semplicemente, a causa della piccolezza di ψ, e tenendo conto delle (41):

$$c = \frac{e^2 . \lambda'^3 . sen^2\, 1'' . sen\, 2\Phi}{12} . \qquad (44)$$

Questa correzione è dunque del quarto ordine, ossia dell'ordine stesso della correzione χ sopra discussa; non è quindi da tener conto della prima se non si tiene conto anche di questa ultima.

In generale si passa dunque direttamente dalla quantità $270° + \psi$, che, per quanto sopra abbiamo esposto, rappresenta fino al terzo ordine inclusivamente l'azimut geodetico del punto C sull'orizzonte di B, all'azimut α' cercato, reciproco ad α_1, sottraendo a quello l'angolo geodetico $\beta = CBA$, calcolato nella risoluzione del triangolo CBA (fig. 61). Volendo poi tener conto anche delle quantità del quarto ordine si ha, riepilogando:

$$\alpha' = 270° - \beta + \psi - \frac{e^2 . \lambda'^3 . sen^2\, 1'' sen\, 2\Phi}{24} . \qquad (45)$$

11. Il procedimento di calcolo sviluppato nel numero precedente è dovuto ad *Andrae,* ed è molto semplice e conveniente in tutti i casi in cui la risoluzione del triangolo sferoidico ausiliario ABC può essere ridotta a quella del triangolo piano di eguali lati per mezzo delle formule (16) o (17) del Capitolo V (Vol. I, pagine 172 e 173): nei rari casi di distanze geodetiche maggiori la ricerca delle ausiliarie λ, σ e β, diviene assai complicata.

Il metodo seguente mantiene invece pressochè la stessa semplicità di calcolo anche per archi di geodetica eccezionalmente lunghi (ma non illimitati), come ad esempio sono quelli di un migliaio di chilometri.

Sia σ la lunghezza dell'arco di meridiano compreso fra i paralleli dei punti A e B, punti che supporremo come precedentemente congiunti dall'arco di geodetica s; ritenendo le notazioni dei numeri precedenti per la latitudine e per l'azimut di un punto qualunque, e per quelli dell'estremo A di questa curva avremo come è noto:

$$d\sigma = \rho . d\varphi = ds . cos\, \alpha ,$$

da cui si trae con facili trasformazioni, tenendo conto delle relazioni (6) e (7):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\sigma}{ds} = \cos\alpha \\
&\frac{d^2\sigma}{ds^2} = -\frac{\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}\varphi}{N\cos\varphi} \\
&\frac{d^3\sigma}{ds^3} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\alpha}{2 . N^2\cos^2\varphi}\left(1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{e^2 . \cos^4\varphi}{1 - e^2}\right) \\
&\frac{d^4\sigma}{ds^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} . \qquad (46)$$

Per conseguenza, se si suppone σ contato a partire dal punto $s = 0$ e si considera come una funzione di s ponendo al solito

$$\sigma = s . \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_1 + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2\sigma}{ds^2}\right)_1 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\sigma}{ds^3}\right)_1 + \ldots,$$

si trova:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma = s . \cos\alpha_1 - \frac{s^2 . \operatorname{sen}^2\alpha_1 \operatorname{tang}\varphi_1}{2 . N_1} - \\
- \frac{s^3 . \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1}{12 . N_1^2 \cos^2\varphi_1}\left(1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi_1 + \frac{e^2 . \cos^4\varphi_1}{1 - e^2}\right) + \ldots
\end{aligned}\right\} . \qquad (47)$$

Ciò posto torniamo alla sfera ausiliaria di raggio N_1 considerata già nei §§ 5 e 8 di questo Capitolo, e rappresentiamo con S, $\frac{dS}{ds}$, $\frac{d^2S}{ds^2}$, $\frac{d^3S}{ds^3}$, ... i valori che, rispetto a tale sfera, prendono le quantità analoghe alle sferoidiche σ, $\frac{d\sigma}{ds}$, $\frac{d^2\sigma}{ds^2}$, $\frac{d^3\sigma}{ds^3}$, ...; è agevole vedere che si ha:

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)_1 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_1, \quad \left(\frac{d^2S}{ds^2}\right)_1 = \left(\frac{d\sigma^2}{ds^2}\right)_1$$

$$\left(\frac{d^3S}{ds^3}\right)_1 = \left(\frac{d^3\sigma}{ds^3}\right)_1 - \frac{e^2 . \cos^2\varphi_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1}{2 . N_1^2 (1 - e^2)}$$

$$\left(\frac{d^4S}{ds^4}\right)_1 = \left(\frac{d^4\sigma}{ds^4}\right)_1 - e^2\Psi$$

essendo Ψ una funzione di α_1, φ_1 che è qui inutile di specificare.

Perciò coll'approssimazione del quarto ordine inclusivo sarà:

$$\sigma = S - \frac{e^2 . s^3 . \cos^2 \varphi_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1}{12 . N_1^2 (1 - e^2)},$$

e, ricordando le (27) e (36), potremo porre complessivamente:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega &= \Delta\Omega - \frac{e^2 . s^3 . \cos\varphi_1 \cos\alpha_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1}{6 . N_1^3 (1 - e^2) \operatorname{sen} 1''} \\ \Delta\alpha &= \Delta A + \frac{e^2 . s^2 . \operatorname{sen} 2\alpha_1 \cos^2\varphi_1}{4 . N_1^2 (1 - e^2) \operatorname{sen} 1''} + \frac{e^2 s^3 \operatorname{sen}\alpha_1 \cos 2\alpha_1 \operatorname{sen} 2\varphi_1}{12 . N_1^3 (1 - e^2) \operatorname{sen} 1''} \\ \sigma &= S - \frac{e^2 . s^3 . \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1 \cos^2\varphi_1}{12 . N_1^2 (1 - e^2)} \end{aligned}\right\} . \quad (48)$$

Per tutti i *possibili* lati di una rete geodetica *osservata* poi, quando non si voglia approssimazione maggiore a 0″.001 nei risultati, si può porre semplicemente:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega &= \Delta\Omega \\ \Delta\alpha &= \Delta A + \frac{e^2 . s^2 . \operatorname{sen} 2\alpha_1 \cos^2\varphi_1}{4 . N_1^2 (1 - e^2) \operatorname{sen} 1''} \\ \sigma &= S \end{aligned}\right\} . \quad (49)$$

Ora il triangolo sferico $A'B'P'$ (vedi pagina seguente, fig. 62), formato sulla sfera ausiliaria dal già considerato arco di cerchio massimo s, e dai meridiani sferici che lo limitano, ha per angoli (vedi §§ 5 e 8) $\Delta\Omega$, $180° - \alpha_1 - \Delta A$ ed α_1, ed i lati rispettivamente opposti ai primi due di questi sono s e $90° - \varphi_1$: quindi ponendo per brevità di notazione $s' = \frac{s}{N_1 \operatorname{sen} 1''}$, si avrà:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1 + \Delta A + \Delta\Omega}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\left(45° - \frac{\varphi_1 + s'}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(45° - \frac{\varphi_1 - s'}{2}\right)} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} \\ \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1 + \Delta A - \delta\Omega}{2} &= \frac{\cos\left(45° - \frac{\varphi_1 + s'}{2}\right)}{\cos\left(45° - \frac{\varphi_1 - s'}{2}\right)} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

formule che servono assai bene al calcolo contemporaneo di $\Delta\Omega$ e ΔA. Dallo stesso triangolo si otterrebbe anche S calcolando il terzo lato, ossia la collatitudine sferica del punto B', sottraendolo dalla collatitudine sferica di A', e riducendo in lunghezza l'angolo così

ottenuto col moltiplicarlo per $N_1 sen\, 1''$: ma, per le ragioni già indicate al principio del § 10, conviene in pratica seguire altra via.

Sia C' il punto in cui il parallelo sferico del punto A' incontra il meridiano del punto B'; se per i punti A', C' si fa passare un arco di cerchio massimo si ottiene il triangolo sferico isoscele $A'P'C'$, in cui i due lati che comprendono l'angolo in P' sono eguali a $90° - \varphi_1$, quindi il valore ψ di ciascuno degli altri due angoli è dato da:

$$cotg\,\psi = sen\,\varphi_1\, tang\,\frac{\Delta\Omega}{2}\,. \qquad (51)$$

Nella maggior parte dei casi però $\Delta\Omega$ è un angolo molto piccolo, ed è quindi conveniente di trasformare la (51) con uno sviluppo in serie, in modo che dia direttamente la piccola quantità $\beta = 90° - \psi$. Si trova così:

$$\beta\, sen\, 1'' + \frac{\beta^3\, sen^3\, 1''}{3} + \ldots = sen\,\varphi_1 \left\{ \frac{\Delta\Omega\, sen\, 1''}{2} + \frac{\Delta\Omega^3\, sen^3\, 1''}{24} + \ldots \right\}$$

e quindi, trascurando le quantità di quinto ordine rispetto a β ed a $\Delta\Omega$, si ha:

$$\beta = \frac{\Delta\Omega}{2}\, sen\,\varphi_1 \left\{ 1 + \frac{\Delta\Omega^2\, sen^2\, 1''}{12}\, cos^2\varphi_1 \right\}. \qquad (52)$$

Calcolati dalle (50) e (51) o (52) i valori di $\Delta\Omega$, ΔA e ψ, nel triangolo sferico $A'B'C'$ (fig. 62) si conoscono gli angoli $B'A'C' = \psi - \alpha_1$, $A'B'C' = \alpha_1 + \Delta A$, $A'C'B = \psi$ ed il lato s' *; e si può quindi dedurne il valore del lato $B'C' = \dfrac{S}{N_1\, sen\, 1''}$ ponendo:

$$sen\,\frac{S}{N_1\, sen\, 1''} = \frac{sen\, s'\, sen\,(\psi - \alpha_1)}{sen\,\psi} \qquad (53)$$

quando l'arco s' è molto grande, o

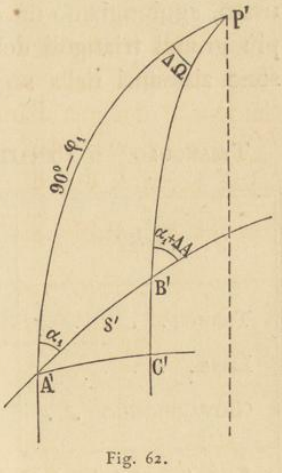

Fig. 62.

$$S = \frac{s\, .\, sen\,(\psi - \alpha_1)}{sen\,\psi} \left\{ 1 - \frac{s^2}{6\, .\, N_1^2}\, cos^2\,(\psi - \alpha_1) \right\} \qquad (54)$$

* Se l'azimut di partenza α_1 è compreso fra 90° e 180° si ha invece $B'A'C' = \alpha_1 - \psi$, $A'BC = 180° - \alpha_1 - \Delta A$, $C = 180° - \psi$. Il caso dell'azimut α_1 maggiore di 180° si riduce ad uno dei due casi indicati, considerando invece degli azimut i loro supplementi a 360°, ossia supponendo gli azimut contati da 0° a 180° nei due sensi.

quando s non sorpassa la massima lunghezza *possibile* di un lato geodetico *osservato*. In questo ultimo caso si può del resto anche ridurre il triangolo sferico $A'B'C'$ al triangolo piano di eguali lati, deducendo l'eccesso sferico ε dalla relazione

$$\pm \varepsilon = 2\psi + \Delta A - 180^\circ \qquad (55)$$

ove è da scegliere il segno superiore o l'inferiore secondochè l'azimut, od il suo supplemento a 360°, è compreso fra 0° e 90° o fra 90° e 180°.

Ottenuto S, e quindi σ dalla terza delle formule (48) se il termine

$$\frac{e^2 . s^3 . sen\, \alpha_1 \, sen\, 2\alpha_1 \, cos^2 \varphi_1}{12 . N_1^2 (1 - e^2)}$$

non è trascurabile, resta a trasformare l'arco σ in differenza di latitudine, ed in ciò si può procedere come abbiamo già indicato per un caso analogo nel numero precedente [formula (38) o (40)].

Trattandosi di un metodo di calcolo che non è mai stato usato, aggiungiamo un esempio, facendo un'applicazione ad uno dei più grandi triangoli delle reti geodetiche italiane, del quale i dati sono riassunti nella seguente tabella:

TRIANGOLO — ***Tremiti — Lissa — Giovannicchio***

Vertici	*Angoli compensati*	*Logaritmi dei lati*
TREMITI	103°.17'.15'',870	5,1249499.0
LISSA	21°.31'.26',407	4,7012451.8
GIOVANNICCHIO . .	55°.11'.31'',685	5,0511068.3

Latitudine geodetica di TREMITI: $\varphi_1 = 42.°07'.16'',269$.
Azimut di GIOVANNICCHIO *sull'orizzonte di* TREMITI: $\alpha_1 = 129°.22'.47'',644$.

Lo schema seguente contiene tutto il processo di calcolo per determinare la posizione geografica di *Giovannicchio* partendo da quella di *Tremiti*.

Calcolo della posizione geografica di Giovannicchio

$colog.\ N_1\ sen\ 1'' = 8{,}5091287.3 - 10$	$45° + \frac{\varphi + s'}{2} = 66°.17'.09'',738$	$log.\ sen. = 9{,}9616890.0 - 10$	$log.\ cos. = 9{,}6044106.4 - 10$
$log.\ s = 4{,}7012451.8$	$45° + \frac{\varphi - s'}{2} = 65\ .50\ .06\ ,531$	$colog.\ sen. = 0{,}0398283.3$	$colog.\ cos. = 0{,}3878909.6$
$log.\ s' = 3{,}2103739.1$	$\frac{\alpha_1}{2} = 64\ .41\ .23\ ,822$	$log.\ colg. = 9{,}6747807.4 - 10$	$log.\ colg. = 9{,}6747807.4 - 10$
$s' = 0°.27'.03'',20713$	$\frac{\alpha_1 + \Delta A + \Delta\Omega}{2} = 64\ .36\ .44\ ,9993$	$log.\ tang. = 9{,}6762980.7 - 10$	$log.\ tang. = 9{,}6670823.4 - 10$
	$\frac{\alpha_1 + \Delta A - \Delta\Omega}{2} = 65\ .04\ .48\ ,9404$		
$colog.\ sen\ \varphi_1 = 0{,}1734711$	$\Delta\Omega = 0\ .28\ .03\ ,9411$	$log\ \frac{e^2}{4(1-e^2)} = 7{,}22526 - 10$	$A = 39°.32'.12'',355 \quad 11'',313$
$log.\ colg\ \frac{\Delta\Omega}{2} = 2{,}3891266$	$\alpha_1 + \Delta A = 129\ .41\ .33\ ,9397$	$colg\ N\ sen\ 1'' = 1{,}70383 - 10$	$B = 50\ .18\ .26\ ,061 \quad 25\ ,018$
$log.\ tang\ \psi = 2{,}5625977$	$c = -\ 0\ ,0116$	$log\ s^2 = 9{,}40249$	$C = 90\ .09\ .24\ ,711 \quad 23\ ,669$
$\psi = 89°.50'.35'',289$	$\alpha = 129\ .41\ .33\ ,9281$	$log.\ cos^2\ \varphi_1 = 9{,}74040 - 10$	$\varepsilon = 3{,}127 \quad 00\ ,000$
		$log.\ sen\ 2\ \alpha_1 = 9{,}99158 - 10$	
		$log\ c = 8{,}06356 - 10$	
$log.\ s = 4{,}7012452$	$log\ \frac{3\ e^2}{2(1-e^2)} = 8{,}00341 - 10$	$\varphi_1 = 42°07'.16'',269$	$\varphi = 41°.49'.59'',136$
$log.\ sen\ A^* = 9{,}8038458 - 10$	$colog\ 2\rho N sen 1'' = 1{,}40440 - 10$	$I = -\ 17\ .17\ ,1076$	$\Delta\omega = 0\ .28\ .03\ ,941$
$colg.\ sen\ C^* = 0{,}0000016$	$log\ \sigma^2 = 9{,}01018$	$II = -\ 0\ .00\ ,0260$	$\alpha' = 309\ .41\ .33\ ,928$
$log\ S = 4{,}5050926$	$log.\ sen\ 2\ \varphi_1 = 9{,}99780 - 10$	$\varphi = 41\ .49\ .59\ ,1354$	
$colog.\ \rho\ .\ sen\ 1'' = 8{,}5107312 - 10$	$log\ II = 8{,}41579$		
$log\ I = 3{,}0158238$			

Se si calcola poi in modo analogo la posizione geografica di Lissa si ottiene partendo

Da Giovannicchio	Da Tremiti
$\varphi = 43°.01.44{,}867$	$\varphi = 43.01.44{,}867$
$\omega = 0.36.25{,}485$	$\omega = 0{,}36.25{,}485$
$\alpha_1' = 184.58.44{,}024$	$\alpha_2' = 206.30\ 10{,}431$

$$\alpha_2' - \alpha_1' = 21.31.26{,}407.$$

Angolo del triangolo in Lissa $= 21.31.26{,}407.$

Differenza $= 0.00.00{,}000.$

12. Tutti i sopra esposti metodi di calcolare le differenze fra le coordinate geografiche di due punti collegati da un arco di geodetica noto in direzione e lunghezza suppongono che il rapporto fra questa lunghezza ed il semiasse terrestre sia notevolmente minore dell'unità; esporremo ora un metodo, dovuto a *Bessel,* completamente generale, premettendo alcune formule e considerazioni sopra una quantità ausiliaria ben nota ai geodeti sotto il nome di *latitudine ridotta;* quantità che rappresenteremo di qui innanzi sempre con u, e che è analiticamente definita dalla relazione

$$r = a \cos u, \qquad (56)$$

escludendo la soluzione per cui a φ ed u corrispondono angoli di segno contrario: è inutile il dire che nella (56) le lettere r ed a hanno il loro consueto significato. È facile il costruire geometricamente l'angolo u corrispondente ad un punto M di data latitudine: infatti sia PME un meridiano ed EO il suo semiasse maggiore (fig. 63),

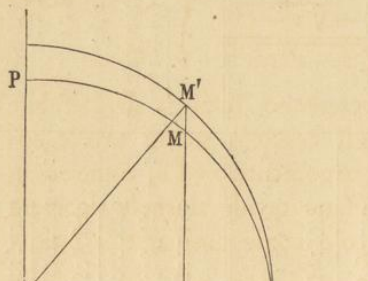

Fig. 63.

e, circoscritto all'ellisse EMP una circonferenza, si tracci l'ordinata $MQ = y$ del punto M, e si prolunghi fino ad incontrare in M' la detta circonferenza. Nel triangolo $OM'Q$ si ha evidentemente

$$QO = r,\ M'O = a,$$

e quindi

$$r = a \,.\, \cos M'OQ;$$

d'onde si vede che la latitudine ridotta u è in figura rappresentata dall'angolo $M'OQ$.

Analiticamente poi dalla (56) si ottengono senza difficoltà le seguenti formule di corrispondenza fra la latitudine ridotta e la

relativa latitudine geografica:

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi}} \\ \operatorname{sen} u &= \frac{\operatorname{sen}\varphi\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi}} \\ \operatorname{tang} u &= \operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-e^2} \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

e reciprocamente:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\cos u\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2.\cos^2 u}} \\ \operatorname{sen}\varphi &= \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{1-e^2.\cos^2 u}} \\ \operatorname{tang}\varphi &= \frac{\operatorname{tang} u}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (58)$$

Per il passaggio dall'una specie di latitudini all'altra conviene in pratica per altro avere delle formule che ne diano direttamente la differenza, giacchè questa è in ogni caso molto piccola, e, come mostra l'ultima delle (57) o delle (58), precisamente dell'ordine di e^2.

Perciò osserviamo che si ha:

$$\operatorname{sen}(\varphi-u) = \operatorname{sen}\varphi\cos u - \cos\varphi\operatorname{sen} u,$$

e quindi, a causa delle (57) e (58):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\varphi-u) &= \operatorname{sen} 2\varphi\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi}} \\ \operatorname{sen}(\varphi-u) &= \operatorname{sen} 2u\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{1-e^2.\cos^2 u}} \end{aligned}\right\}. \qquad (59)$$

Tali espressioni dell'angolo $\varphi-u$ presentano tutta la desiderabile semplicità di calcolo; del resto oggidì esistono molte tavole costruite per il passaggio suddetto, cogli argomenti φ ed u, come sono, ad esempio, quelle di Bremiker; a siffatte tavole si suole ricorrere tutte le volte che si introduce in calcolo come ausiliaria la latitudine ridotta.

13. Ciò posto siano $\varphi, u, \omega, \alpha$ rispettivamente la latitudine geografica, la latitudine ridotta, la longitudine e l'azimut in un punto qualunque M di una geodetica s: in generale si avrà [Capitolo I, formula (9)]:

$$ds = \frac{\rho\, d\varphi}{\cos\alpha} = \frac{a(1-e^2)\,d\varphi}{\cos\alpha(1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi)^{3/2}},$$

mentre dalle precedenti relazioni (57) si trae senza difficoltà:

$$d\varphi = du \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \cos^2 u}$$

$$\rho = \frac{a(1-e^2 \cdot \cos^2 u)^{3/2}}{\sqrt{1-e^2}}$$

Per conseguenza la soprascritta espressione di ds dà

$$ds = \frac{a \cdot du \sqrt{1-e^2 \cdot \cos^2 u}}{\cos \alpha}, \qquad (60)$$

e tale relazione sussiste indipendentemente dalla natura della linea s. Se si suppone che questa sia una geodetica dell'ellissoide terrestre si deve subordinare l'azimut α alla condizione

$$r \cdot \operatorname{sen} \alpha = \text{costante}$$

(equazione delle geodetiche, teorema di *Clairaut*), la quale, introducendo la latitudine ridotta in luogo del raggio del parallelo, si cangia in

$$\cos u \operatorname{sen} \alpha = \text{costante}.$$

Rappresentando ancora con u_1, α_1, φ_1, ... i valori che prendono u, α, φ per $s = 0$, valori che nel caso nostro dobbiamo supporre noti, si avrà pertanto:

$$\cos u \operatorname{sen} \alpha = \cos u_1 \operatorname{sen} \alpha_1. \qquad (61)$$

Eliminando ora α per mezzo di questa equazione dalla (60) ed integrando si ha una relazione fra u ed s che permette di determinare la latitudine ridotta, e quindi la geografica, di un punto qualunque della geodetica s considerata, in modo che, per quanto si riferisce alla latitudine, la soluzione del problema generale discusso nei paragrafi precedenti è ridotta a trovare un procedimento di integrazione della (60) che conduca a formule relativamente semplici per il calcolo di u in funzione di s.

Per questo conviene introdurre una nuova variabile indipendente in luogo di u, considerando una sfera ausiliaria di raggio *uno*, e, sopra questa, un triangolo sferico $P'M'N'$ in cui siano $90° - u$, $90° - u_1$ due lati, ed α_1 l'angolo opposto al primo di questi, ed esprimendo quindi u in funzione del terzo lato, di cui rappresenteremo con θ l'ampiezza angolare. Chiamando con X l'angolo apposto al lato $90° - u_1$, dalla relazione che in un triangolo sferico lega i seni degli angoli ai seni dei lati opposti si ha:

$$\operatorname{sen} X = \frac{\cos u_1}{\cos u} \operatorname{sen} a_1$$

da cui si vede, confrontando colla (61), che l'angolo X è il supplemento a 180° dell'azimut geodetico α, giacchè la soluzione $X = \alpha$ rimane esclusa per la legge di continuità (ossia per s infinitamente piccolo). Inoltre, dacchè la suddetta relazione fra i quattro elementi caratteristici del triangolo sferico ausiliario, ossia fra le latitudini e gli azimut degli estremi di s, sussiste qualunque sia la grandezza di questo arco, è chiaro che a ciascun punto della geodetica s corrisponde un punto del cerchio massimo cui appartiene θ e reciprocamente, in modo che questo può esser considerato come una immagine geometrica di quella. Analiticamente la corrispondenza fra la geodetica sferica θ e la geodetica ellissoidica s si ottiene osservando anzitutto che dalla nota relazione fra i tre lati del triangolo sferico ausiliario e l'angolo α_1 si trae, considerando u e θ come variabili e differenziando,

$$du = \frac{d\theta}{\cos u} (\cos\theta \cos u_1 \cos\alpha_1 - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} u_1),$$

mentre si ha:

$$\frac{\cos u_1}{\cos u} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha_1}$$

$$\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{cotg}\alpha = \cos\alpha_1 \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{tang} u_1 .$$

Quindi si trova

$$du = d\theta \,.\cos\alpha , \tag{62}$$

e per conseguenza, dalla (60):

$$ds = a\, d\theta \sqrt{1 - e^2 . \cos^2 u}. \tag{63}$$

L'integrazione di $d\theta\sqrt{1 - e^2 . \cos^2 u}$ non è possibile in termini finiti, giacchè dipende dalle trascendenti ellittiche. Per mezzo di queste potrebbe venir calcolato s in funzione di θ e, reciprocamente, θ in funzione di s; ma, oltre che i mezzi che possediamo per l'esecuzione di un tale calcolo sono ancora piuttosto deficienti, a causa della piccolezza di e^2 è molto più conveniente e sbrigativo ricorrere ad uno sviluppo in serie.

Per ciò è necessario anzitutto esprimere nella (63) u in funzione di θ, partendo dalla relazione

$$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u_1 \cos\theta + \cos u_1 \operatorname{sen}\theta \cos\alpha_1 ,$$

dalla quale, se si pone

$$\operatorname{cotg} M = \operatorname{cotg} u_1 \cos\alpha_1 , \tag{64}$$

come è sempre possibile di fare, si trae

$$sen\, u = \frac{sen\, u_1}{sen\, M} sen(M+\theta) \qquad (65)$$

e quindi:

$$ds = a\, d\theta \sqrt{1-e^2} \sqrt{1+\frac{e^2}{1-e^2}\frac{sen^2 u_1}{sen^2 M} sen^2(M+\theta)}\,.$$

Dalla (64) si deduce ancora con facili trasformazioni

$$\frac{sen^2 u_1}{sen^2 M} = cos^2\alpha_1 cos^2 u_1 + sen^2 u_1 = 1 - cos^2 u_1 sen^2\alpha_1;$$

così, introducendo la nuova quantità ausiliaria u_0 definita dalla formula

$$cos\, u_0 = cos\, u_1 sen\, \alpha_1 = cos\, u\, sen\, \alpha_2 \qquad (66)$$

la precedente espressione di ds prende la forma

$$ds = a\, d\theta \sqrt{1-e^2} \sqrt{1+\frac{e^2 . sen^2 u_0}{1-e^2} sen^2(M+\theta)}\,,$$

sotto la quale può essere sviluppata in una serie molto convergente ed immediatamente integrabile termine per termine, applicando il procedimento del Capitolo II, § 10. L'ausiliaria u_0 ha un notevole significato geometrico, giacchè è la latitudine ridotta dei punti della geodetica s in cui l'azimut è di 90°, e corrisponde ai paralleli fra i quali corre tale curva e che sono tangenti successivamente a punti determinati di essa (Capitolo III, § 4).

Per applicare le formule (22), (23), (24), (25) del Capitolo II (vol. I, pag. 64 e seguenti) a questo caso si deve fare in esse

$$m = \frac{1}{2}, \quad k^2 = -\frac{sen^2 . u_0}{1-e^2}, \quad c = \frac{1-\sqrt{1+\frac{e^2 . sen^2 . u_0}{1-e^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{e^2 . sen^2 . u_0}{1-e^2}}}$$

$$p = \frac{1+\sqrt{1+\frac{e^2 . sen^2 . u_0}{1-e^2}}}{2}$$

d'onde, ponendo, per semplificare,

$$tang\, E = \frac{e \,.\, sen\, u_0}{\sqrt{1 - e^2}}, \tag{67}$$

si trova

$$e^2 k^2 = -tang^2 E, \quad c = -\frac{1 - cos\, E}{1 + cos\, E} = -tang^2 \frac{E}{2},$$

$$p^{2m} = \frac{1 + cos\, E}{2 \,.\, cos\, E} = \frac{cos^2 \frac{E}{2}}{cos\, E}.$$

Per tal modo le suddette formule (24), (25) del Capitolo II danno:

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= 1 + \frac{1}{4} tang^4 \frac{E}{2} + \frac{1}{64} tang^8 \frac{E}{2} + \frac{1}{256} tang^{12} \frac{E}{2} + \dots \\
A_1 &= -\frac{1}{2} tang^2 \frac{E}{2} + \frac{1}{16} tang^6 \frac{E}{2} + \frac{1}{128} tang^{10} \frac{E}{2} - \dots \\
A_2 &= -\frac{1}{8} tang^4 \frac{E}{2} + \frac{1}{32} tang^8 \frac{E}{2} + \dots \\
A_3 &= +\frac{1}{16} tang^6 \frac{E}{2} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
ds &= a\sqrt{1 - e^2} \,.\, \frac{cos^2 \frac{E}{2}}{cos\, E} \left\{ A_0 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \, cos\, 2n(M + \theta) \right\} d\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Da questa ultima relazione, osservando che in generale si ha

$$\int_0^\theta d\theta \,.\, cos\, 2n(M + \theta) = \frac{1}{n} sen\, n\theta \, cos\, n(2M + \theta),$$

integrando fra i limiti *zero* ed s, e supponendo θ dato in secondi si ottiene:

$$s = a\sqrt{1 - e^2} \, \frac{cos^2 \frac{E}{2}}{cos\, E} \left\{ A_0 \theta \, sen\, 1'' + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n} sen\, n\theta \, cos\, n(2M + \theta) \right\} \tag{69}$$

che è la formula che dà s in funzione di θ. Per vedere la rapidità

con cui la somma dei primi termini del secondo membro converge al suo limite col crescere di n, basta osservare che il valore massimo di cui è suscettibile $tang^2 E$ è $\frac{e^2}{1-e^2}$, ossia è minore di 0,007 e quindi si ha

$$A_3 < tang^6 \frac{E}{2} < 0{,}000\ 000\ 006$$

$$A_4 < tang^8 \frac{E}{2} < 0{,}000\ 000\ 000\ 009,$$

quest'ultima quantità essendo così piccola che la sua influenza nel calcolo di s per mezzo della formula (69) sarebbe affatto trascurabile anche per un arco di geodetica che abbracciasse l'intero sferoide terrestre. Perciò nella (69) stessa è in ogni caso più che sufficiente l'approssimazione che si ottiene arrestando la somma della serie al terzo termine, ed il calcolo dei coefficienti A_0, A_1, A_2, per mezzo delle (68) riesce semplicissimo. Per lo più i valori di queste quantità si traggono del resto da tavole, che ne danno i logaritmi in corrispondenza all'argomento $log\ tang E$: ma quando si vuole calcolare s senza aiuto di tavole conviene porre la (69) sotto la forma seguente

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= a\sqrt{1-e^2}\left(1+\frac{1}{4}tang^4\frac{E}{2}\right)\frac{cos^2\frac{E}{2}}{cos E}, \\ \frac{s}{\Gamma} &= \theta\, sen\, 1'' - \left(tang^2\frac{E}{2} - \frac{3}{8}tang^6\frac{E}{2}\right) sen\,\theta\, cos\,(2M+\theta) - \\ &\quad - \frac{1}{8}tang^4\frac{E}{2}\, sen\, 2\theta\, cos\,(4M+2\theta) + \\ &\quad + \frac{1}{24}tang^6\frac{E}{2}\, sen\, 3\theta\, cos\,(6M+3\theta) \end{aligned}\right\}. \quad (70)$$

14. Alcune volte invece delle formule (69) o (70) dovute a Bessel si preferisce dedurne altre analoghe introducendo invece dell'ausiliaria M, l'arco del cerchio massimo cui appartiene θ, compreso fra il punto di partenza (u_1, α_1) ed il punto N' $(u = u_0, \alpha = 90°)$

che corrisponde al punto dello sferoide in cui la geodetica s nella direzione da B in A tocca il parallelo di latitudine u_0. In questo caso gli archi sul detto cerchio massimo si suppongono contati da N' positivamente nella direzione $N'AB$, in modo che, rappresentandoli in generale con θ', si ha dai triangoli sferici $N'P'A'$, $N'P'B'$ tracciati sulla sfera ausiliaria fra i punti N', A', B' ed il polo sferico P' (fig. 64), e rettangoli in N':

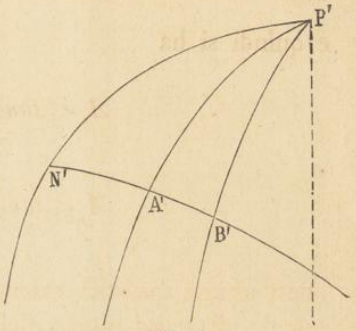

Fig. 64.

$$\left.\begin{aligned} sen\,u_1 &= sen\,u_0 \cos\theta_1' \\ sen\,u &= sen\,u_0 \cos\theta' \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

e quindi dalla formula fondamentale (63) si deduce:

$$ds = a\,d\theta' \sqrt{1 - e^2.\cos^2 u_0} \sqrt{1 - \frac{e^2.sen^2 u_0}{1 - e^2.\cos^2 u_0}\, sen^2\theta'}.$$

Esprimendo $\cos u_0$ e $sen\,u_0$ in funzione della latitudine geografica φ_0 per mezzo delle formule generali (57), si ottiene:

$$ds = a\,d\theta' \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2.sen^2\varphi_0}} \cdot \sqrt{1 - e^2.sen^2\varphi_0\, sen^2\theta'}$$

espressione che s'integra per serie, applicando come nel caso precedente le formule (22), (23), (24), (25) del Capitolo II (vol. 1.°, pag. 64 e seguenti), nelle quali si pone

$$m = \frac{1}{2}, \quad k = sen\,\varphi_0,$$

$$c = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2.sen^2\varphi_0}}{1 + \sqrt{1 - e^2.sen^2\varphi_0}} = \frac{\sqrt{1 - e^2.\cos^2 u_0} - \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2.\cos^2 u_0} + \sqrt{1 - e^2}}$$

$$p = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2.sen^2\varphi_0}}{2} = \frac{\sqrt{1 - e^2.\cos^2 u_0} + \sqrt{1 - e^2}}{2\sqrt{1 - e^2.\cos^2 u_0}}.$$

Queste espressioni divengono assai più semplici introducendo anche

qui come più sopra l'angolo ausiliario E, definito dalla relazione

$$tang\,E = \frac{e\,.\,sen\,u_0}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{72}$$

nel qual caso si trova

$$c = \frac{1-cos\,E}{1+cos\,E} = tang^2\frac{E}{2}$$

$$p^{2m} = \frac{1+cos\,E}{2} = cos^2\frac{E}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\,.\,sen^2\varphi_0}} = \sqrt{1-e^2\,.\,cos^2 u_0} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{cos\,E},$$

e quindi, dalle (24) e (25) del suddetto Capitolo II:

$$\left.\begin{aligned}
A_0' &= 1 + \frac{1}{4}tang^4\frac{E}{2} + \frac{1}{64}tang^8\frac{E}{2} + \dots \\
A_1' &= \frac{1}{2}tang^2\frac{E}{2} - \frac{1}{16}tang^6\frac{E}{2} + \dots \\
A_2' &= -\frac{1}{8}tang^4\frac{E}{2} + \dots \\
A_3' &= \frac{1}{16}tang^6\frac{E}{2} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
ds &= a\,.\,d\theta\,.\,\sqrt{1-e^2}\,\frac{cos^2\frac{E}{2}}{cos\,E}\left\{A_0' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n'\,cos\,2n\theta'\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Rappresentando con θ_1', θ_2' i valori che prende θ' agli estremi del dato arco di geodetica s, ed osservando, come precedentemente, che in generale si ha

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\,.\,cos\,2n\theta = \frac{1}{n}\,sen\,n(\theta_2-\theta_1)\,cos\,n(\theta_1+\theta_2),$$

dall'integrazione dell'ultima delle (73) si trae finalmente, supposto

$\theta_2 - \theta_1$ espresso in secondi:

$$= a\sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos^2\frac{E}{2}}{\cos E}\left\{A_0(\theta_2'-\theta_1')\,sen\,1'' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n}{n}\,sen\,n(\theta_2'-\theta_1')\cos n(\theta_2'+\theta_1')\right\}. \quad (74)$$

Tenendo poi conto delle considerazioni esposte alla fine del paragrafo precedente, per le formule adatte al calcolo diretto di s si avrà

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= a\sqrt{1-e^2}\left(1+\frac{1}{4}\,tang^4\frac{E}{2}\right)\frac{\cos^2\frac{E}{2}}{\cos E} \\ &= (\theta_2'-\theta_1')\,sen\,1'' + tang^2\frac{E}{2}\left(1-\frac{3}{8}\,tang^4\frac{E}{2}\right)sen\,(\theta_2'-\theta_1')\cos(\theta_2'+\theta_1') - \\ &\quad - \frac{1}{8}\,tang^4\frac{E}{2}\,sen\,2(\theta_2'-\theta_1')\cos 2(\theta_2'+\theta_1') + \\ &\quad + \frac{1}{24}\,tang^6\frac{E}{2}\,sen\,3(\theta_2'-\theta_1')\cos 3(\theta_2'+\theta_1') \end{aligned}\right\}. \quad (75)$$

15. Le formule (69) e (74) danno s in funzione di θ, ma in generale è appunto s che è noto e si cerca invece $\theta = \theta_2' - \theta_1'$. Il calcolo di questa quantità per mezzo delle serie suddette non può esser fatto che per successive approssimazioni, ma la loro convergenza è così rapida che la seconda approssimazione è quasi sempre sufficiente per dare θ a meno di un millesimo di secondo. Per solito poi le (69) e (74) si trasformano ponendo

$$\alpha_0 = \frac{\cos E}{A_0\cos^2\frac{E}{2}\,sen\,1''}, \qquad \alpha_n = \frac{2A_n}{nA_0\,sen\,1''} \quad (76)$$

e quindi

$$\theta = \frac{\alpha_0 s}{a\sqrt{1-e^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha_n\,sen\,n\theta\cos n(2M+\theta), \quad (77)$$

ovvero

$$\theta_2' - \theta_1' = \frac{\alpha_0 s}{a\sqrt{1-e^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha_n'\,sen\,n(\theta_2'-\theta_1')\cos n(\theta_1'+\theta_2') \quad (78)$$

nelle quali si entra col valore prossimo $\frac{\alpha_0 s}{a\sqrt{1-e^2}}$ di θ per avere con una prima approssimazione questa quantità, ripetendo quindi il calcolo col nuovo valore approssimativamente corretto.

16. Ciò posto riassumiamo il procedimento con cui dalla latitudine φ_1 e dall'azimut α_1 nel punto A si può passare alla latitudine φ ed all'azimut α nel punto B collegato col primo dalla geodetica s. Le operazioni di calcolo sono le seguenti:

1.° *Calcolo della latitudine ridotta* u_1 *corrispondente a* φ_1 *per mezzo delle formule* (59), *quando non si faccia uso di apposite tavole.*

2.° *Calcolo delle ausiliarie* M, u_0, E [*formule* (64), (66) *e* (67)] *quando il calcolo di* θ *si vuol far colla* (77), *o delle ausiliarie* u_0, θ_1', E [*formule* (66), (71), (72)] *se si vuole applicare invece la* (78).

3.° *Calcolo dei coefficienti che entrano nella* (77) *o nella* (78) *per mezzo delle formule* (68) *e* (76), *o* (73) *e* (76) (per lo più si fa uso di tavole che danno direttamente i logaritmi degli α in corrispondenza all'argomento $\log \operatorname{tang} E$) *e deduzione, per successive approssimazioni, dell'arco* θ *o* θ_2 [*formule* (77) *o* (78)].

4.° *Calcolo della latitudine ridotta* u *del punto* B [*formula* (65), *cui può esser data la forma più semplice*

$$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen}(M + \theta),$$

o formule (71)] *e quindi della corrispondente latitudine sferoidica* [*formule* (59)].*

5.° *Calcolo dell'azimut* α [*formula* (61)].**

17. Rimane da determinare la differenza di longitudine fra gli estremi A e B della geodetica s data in lunghezza e direzione, ed è facile intendere come tale differenza di longitudine debba avere una relazione assai semplice coll'angolo w, che nel triangolo sferico ausiliario considerato nel § 13 è opposto al lato θ. Ed infatti se nella relazione fondamentale [Capitolo I, formule (9)]

$$d\omega = \frac{ds \cdot \operatorname{sen} \alpha}{r}$$

si sostituisce ad r il suo valore $a \cos u$ ed a ds la sua espressione (63) si ottiene:

$$d\omega = \frac{d\theta \operatorname{sen} \alpha \sqrt{1 - e^2 \cdot \cos^2 u}}{\cos u};$$

---

* Sul modo di calcolare la latitudine ridotta vedasi inoltre quanto è detto nel § 20.

** Sul modo di calcolare l'azimut α vedasi inoltre quanto è detto alla fine dal paragrafo seguente (formule 86^{bis}), e nel § 20.

ma dal sopraddetto triangolo sferico ausiliario $A' P' B'$ si ha

$$\cos u_1 \operatorname{cotg} \theta = \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{cotg} w + \cos \alpha_1 \operatorname{sen} u_1,$$

ovvero, considerando θ come funzione di w e differenziando:

$$d\theta = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos u_1 \operatorname{sen}^2 w} dw = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \cos u_1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} dw = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} \alpha} dw: \qquad (79)$$

per conseguenza alla precedente espressione di $d\omega$ può esser data la forma

$$d\omega = dw \sqrt{1 - e^2 . \cos^2 u}, \qquad (80)$$

che mostra intanto come la differenza fra w e la differenza di longitudine cercata è dell'ordine di e^2.

Per integrare la (80) sviluppiamo anzitutto il radicale in serie secondo le potenze ascendenti di e^2 ed avremo:

$$\omega = \int dw \left(1 - \frac{e^2 . \cos^2 u}{2} - \frac{e^4 . \cos^4 u}{8} - \frac{e^6 . \cos^6 u}{16} - \frac{5 . e^8 . \cos^8 u}{128} - \ldots \right) + C$$

da cui, fra i limiti *zero* e w dell'integrale, si ottiene:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_1 = w - \frac{e^2}{2} \int_0^w dw . \cos^2 u \left(1 + \frac{e^2 . \cos^2 u}{4} + \frac{e^4 . \cos^4 u}{8} + \ldots \right) \qquad (81)$$

Per eseguire l'integrazione accennata nel secondo membro conviene introdurre nuovamente la variabile θ invece della w, eliminando dw per mezzo della (79). Ora da questa, se si tiene conto della relazione generale fra gli azimut e le latitudini ridotte, si trae

$$dw = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \cos u_1}{\cos^2 u} d\theta,$$

per modo che la (81) si può scrivere come segue:

$$\Delta\omega = w - \frac{e^2 . \cos u_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{2} \int_0^\theta d\theta \left(1 + \frac{e^2 . \cos^2 u}{4} + \frac{e^4 . \cos^4 u}{8} + \frac{5 . e^6 . \cos^6 u}{64} + \ldots \right), \qquad (82)$$

ove rimane ad esprimere u per θ e ad integrare. Perciò osserviamo come facendo uso anche qui delle due costanti ausiliarie u_0 ed M del § 13, definite dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} \cos u_0 &= \cos u_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \\ \operatorname{cotg} M &= \operatorname{cotg} u_1 \cos \alpha_1 \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

e tenendo conto della (65) posta sotto la forma

$$sen u = sen u_0 sen (M + \theta),$$

si trae in generale

$$(cos^2 u)^n = [1 - sen^2 u_0 sen^2 (M + \theta)]^n.$$

Il secondo membro di questa relazione può essere sviluppato in serie ordinate secondo i coseni dei multipli dell'arco $M + \theta$ applicando le solite formule (22), (23), (24) e (25) del Capitolo II, nelle quali in questo caso è da porre:

$$e^2 = 1, \quad k = sen u_0,$$

$$p = \frac{1 + cos u_0}{2} = cos^2 \frac{u_0}{2}, \quad c = \frac{1 - cos u_0}{1 + cos u_0} = tang^2 \frac{u_0}{2}.$$

In tal modo, facendovi successivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3, \ldots$ si trova senza difficoltà: *

$$cos^2 u = cos^4 \frac{u_0}{2} \left\{ 1 + tang^4 \frac{u_0}{2} + 2 tang^2 \frac{u_0}{2} cos 2(M + \theta) \right\}$$

$$cos^4 u = cos^8 \frac{u_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 4 tang^4 \frac{u_0}{2} + tang^8 \frac{u_0}{2} \\ + 2 \left(2 tang^2 \frac{u_0}{2} + 2 tang^6 \frac{u_0}{2} \right) cos 2(M + \theta) \\ + 2 tang^4 \frac{u_0}{2} cos 4(M + \theta) \end{array} \right\}$$

$$cos^6 u = cos^{12} \frac{u_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 9 tang^4 \frac{u_0}{2} + 9 tang^8 \frac{u_0}{2} + tang^{12} \frac{u_0}{2} \\ + 2 \left(3 tang^2 \frac{u^0}{2} + 9 tang^6 \frac{u_0}{2} + 3 tang^{10} \frac{u_0}{2} \right) cos 2(M + \theta) \\ + 2 \left(3 tang^4 \frac{u_0}{2} + 3 tang^8 \frac{u_0}{2} \right) cos 4(M + \theta) + \\ + 2 tang^6 \frac{u_0}{2} cos 6(M + \theta) \end{array} \right\}$$

. . . . . .

* I valori dei coefficienti A_0, A_1, $A_2, \ldots$ che si deducono dalle formule (24) del Capitolo II, supponendovi successivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3, \ldots$

e per conseguenza dalla (82) si deduce

$$\omega = w - e^2 \frac{\cos u_0}{2} \int_0^\theta d\theta \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{e^2 . p^2}{4}(1+c^2) + \frac{e^4 . p^4}{8}(1+4c^2+c^4) + \\ \qquad + \frac{5\,e^6 . p^6}{64}(1+9c^2+9c^4+c^6) + \ldots \\ + 2\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^2 . p^2}{4} c + \frac{e^4 . p^4}{8}(2c+2c^3) + \\ + \frac{5\,e^6 . p^6}{64}(3c+9c^3+3c^5) + \ldots \end{array} \right\} \cos 2(M+\theta) \\ + 2\left\{ \frac{e^4 . p^4}{8} c^2 + \frac{5\,e^6 . p^6}{64}(3c^2+3c^4) + \ldots \right\} \cos 4(M+\theta) \\ + 2\left\{ \frac{5\,e^6 . p^6}{64} c^3 + \ldots \right\} \cos 6(M+\theta) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

ove per semplicità di trascrizione abbiamo ritenuto le notazioni p, c per le quantità $\cos^2 \frac{u_0}{2}$, $\tan g^2 \frac{u_0}{2}$. Ponendo

$$\left. \begin{array}{l} {}_0 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 \frac{u_0}{2}}{4}\left(1+\tan g^4 \frac{u_0}{2}\right) + \frac{e^4 \cos^8 \frac{u_0}{2}}{8}\left(1+4\tan g^4 \frac{u_0}{2} + \tan g^8 \frac{u_0}{2}\right) + \ldots \\ {}_1 = \frac{e^2 \cos^4 \frac{u_0}{2}}{4} \tan g^2 \frac{u_0}{2} + \frac{e^4 \cos^8 \frac{u_0}{2}}{8}\left(2\tan g^2 \frac{u_0}{2} + 2\tan g^6 \frac{u_0}{2}\right) + \ldots \\ {}_2 = + \frac{e^4 \cos^8 \frac{u_0}{2}}{8} \tan g^8 \frac{u_0}{2} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \quad (84)$$

---

sono i seguenti:

per $m=1$ si ha $A_0 = 1 + c^2$, $A_1 = c$, $A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = 0$

$m=2$ $A_0 = 1 + 4c^2 + c^4$, $A_1 = 2c + 2c^3$, $A_2 = c^2$, $A_3 = A_4 = \ldots = 0$

$m=3$ $A_0 = 1 + 9c^2 + 9c^4 + c^6$, $A_1 = 3c + 9c^3 + 3c^5$,
$A_2 = 3c^2 + 3c^4 +$, $A_3 = c^3$, $A_4 = A_5 = \ldots = 0$

$m=4$ $A_0 = 1 + 16c^2 + 36c^4 + 16c^6 + c^8$
$A_1 = 4c + 24c^3 + 24c^5 + 4c^7$
$A_2 = 6c^2 + 16c^4 + 6c^6$, $A_3 = 4c^3 + 4c^5$, $A_4 = c^4$, $A_5 = \ldots = 0$

$m=5$ . . . . . .

si ha finalmente

$$\Delta\omega = w - \frac{e^2 \cos u_0}{2} \int_0^\theta d\theta \left\{ B_0 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \cos 2n(M+\theta) \right\},$$

ed eseguendo l'integrazione:

$$\Delta\omega = w - \frac{e^2 \cos u_0}{2} \left\{ B_0 \theta + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{n} \operatorname{sen} n\theta \cos n(2M+\theta) \right\} \qquad (85)$$

formula che può servire direttamente al calcolo della cercata differenza di longitudine $\Delta\omega$. Infatti l'arco θ e le ausiliarie u_0 ed M devonsi supporre già calcolate nella determinazione della latitudine u e dell'azimut α corrispondenti al punto B (vedi §§ 13 e 14), quindi per l'applicazione della (85) non resta da cercare che il valore di w, il quale può essere dedotto dal solito triangolo sferico ausiliario $P'A'B'$ per mezzo di una qualunque delle formule seguenti: *

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} w &= \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha}{\cos u_1} \\
\operatorname{sen} w &= \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha_1}{\cos u} \\
\operatorname{sen} w &= \frac{\operatorname{sen}\theta \cos u_0}{\cos u_1 \cos u} \\
\operatorname{tang}\frac{w}{2} &= \frac{\cos\dfrac{u-u_1}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{u+u_1}{2}} \operatorname{tang}\frac{\alpha-\alpha_1}{2} \\
\operatorname{tang}\frac{w}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\dfrac{u-u_1}{2}}{\cos\dfrac{u+u_1}{2}} \operatorname{tang}\frac{\alpha_1+\alpha}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

o delle:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\frac{\alpha+w}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\left(45^\circ - \dfrac{u_1+\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(45^\circ - \dfrac{u_1-\theta}{2}\right)} \operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2} \\
\operatorname{cotg}\frac{\alpha-w}{2} &= \frac{\cos\left(45^\circ - \dfrac{u_1+\theta}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ - \dfrac{u_1-\theta}{2}\right)} \operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (86^{bis})$$

* Relativamente al calcolo di w vedasi inoltre quanto è detto nel seguente § 20.

che sono analoghe alle (50) del § 11, e che danno in modo semplicissimo contemporaneamente all'angolo w anche l'azimut α.

18. Le (84) ed (85), che sono date da *Baeyer* nella sua memoria intitolata *Das Messen auf der Sphäroidischen Erdeoberfläche,* permettono di ottenere la differenza di longitudine in modo del tutto generale, ma presentano, come nota *Baeyer* stesso, una lunghezza di calcolo eccessiva, giacchè i valori dei coefficienti B [formule (84)] dipendono dalla quantità u_0 che è suscettibile di tutti i valori compresi fra 0° e 90° e non si hanno tavole in proposito. Le formule analoghe dedotte originalmente da *Bessel* sono meno rigorose, teoreticamente parlando, ma danno tuttavia molto più semplicemente e per qualunque distanza geodetica la massima approssimazione compatibile coi nostri mezzi di misura.

Bessel osserva che paragonando la serie

$$S_1 = 1 + \frac{e^2 . \cos^2 u}{4} + \frac{e^4 . \cos^4 u}{8} + \frac{5 . e^6 . \cos^6 u}{64} + \dots$$

collo sviluppo del binomio

$$S_2 = (1 + r . e^2 . \cos^2 u)^n = 1 + n . r . e^2 . \cos^2 u +$$

$$+ \frac{n(n-1) r^2}{1 . 2} e^4 . \cos^4 u + \frac{n(n-1)(n-2) r^3}{1 . 2 . 3} e^6 . \cos^6 u + \dots$$

e determinando n ed r in modo che i primi termini delle due serie sieno rispettivamente eguali, la differenza fra i limiti S_1 ed S_2 è data da

$$\Delta = \frac{5}{128} e^6 . \cos^6 u + \dots,$$

dimodochè se si introduce S_2 in luogo di S_1 sotto l'integrale della relazione generale (82) si viene a commettere in $\Delta\omega$ un errore dell'ordine di

$$e^8 < 0{,}000\ 000\ 002$$

errore che, tenuto conto della massima approssimazione con cui può esser dato l'arco s, è interamente trascurabile qualunque sia la differenza di longitudine cercata $\Delta\omega$.

I valori di n ed r che rendono rispettivamente uguali i primi tre termini delle due serie suddette sono dati dalle condizioni

$$nr = \frac{1}{4}, \quad \frac{n(n-1) r^2}{2} = \frac{1}{8},$$

dalle quali si trae:

$$r=-\frac{3}{4},\quad n=-\frac{1}{3};$$

possiamo dunque porre con *Bessel* invece della (82)

$$\Delta\omega=w-\frac{e^2.\cos u_0}{2}\int_0^\theta d\theta\left(1-\frac{3}{4}e^2.\cos^2 u\right)^{-4/3},$$

od anche, esprimendo u per θ per mezzo della relazione (65),

$$\Delta\omega=w-\frac{e^2.\cos u^0}{2(1-{}^3/_4 e^2)^{1/3}}\int_0^\theta d\theta\left[1+\frac{3}{4}\frac{e^2.\operatorname{sen}^2 u_0}{1-{}^3/_4 e^2}.\operatorname{sen}^2(M+\theta)\right]^{-1/3},$$

ove l'integrazione accennata si può eseguire per serie col solito metodo del Capitolo II, § 10. Per applicare le corrispondenti formule (24) e (25) quivi stabilite vi si porrà

$$m=-\frac{1}{3},\quad k^2=-\frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen}^2 u_0}{1-{}^3/_4 e^2}$$

$$p=\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{4}\frac{e^2.\operatorname{sen}^2 u_0}{1-{}^3/_4 e^2}}}{2},\qquad c=\frac{1-\sqrt{1+\frac{3}{4}\frac{e^2.\operatorname{sen}^2 u_0}{1-{}^3/_4 e^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{4}\frac{e^2.\operatorname{sen}^2 u_0}{1-{}^3/_4 e^2}}}.$$

ovvero, introducendo anche qui una costante ausiliaria E' analoga alla costante E dei precedenti paragrafi 13 e 14, e definita dalla formula

$$\operatorname{tang} E'=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{e^2.\operatorname{sen}^2 u^0}{1-{}^3/_4 e^2}},\qquad (87)$$

più semplicemente:

$$m=-\frac{1}{3},\quad k^2=-\operatorname{tang}^2 E'$$

$$p=\frac{1+\cos E'}{2\cos E'}=\frac{\cos^2\frac{E'}{2}}{\cos E'},\quad c=-\frac{1-\cos E'}{1+\cos E'}=-\operatorname{tang}^2\frac{E'}{2}$$

ed in conseguenza

$$\left.\begin{aligned}
A_0' &= 1 + \frac{1}{9}\,tang^4\frac{E'}{2} + \frac{4}{81}\,tang^8\frac{E'}{2} + \frac{196}{6561}\,tang^{12}\frac{E'}{2} + \dots \\
A_1' &= \frac{1}{3}\,tang^2\frac{E'}{2} + \frac{2}{27}\,tang^6\frac{E'}{2} + \frac{28}{729}\,tang^{10}\frac{E'}{2} + \dots \\
A_2' &= \frac{2}{9}\,tang^4\frac{E'}{2} + \frac{14}{243}\,tang^8\frac{E'}{2} + \dots \\
A_3' &= \frac{14}{81}\,tang^6\frac{E'}{2} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\Delta\omega &= w - \frac{e'^2\cos u_0}{2\left(1-\frac{3}{4}e^2\right)^{1/2}}\left(\frac{\cos E'}{\cos^2\frac{E'}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\int_0^{\theta} d\theta\left\{A_0' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n'\cos 2n(M+\theta)\right\}
\end{aligned}\right\}. \quad (88)$$

Eseguendo quest'ultima integrazione si trova finalmente

$$\Delta\omega = w - \frac{e'^2\cos u_0}{2\left(1-\frac{3}{4}e^2\right)^{1/2}}\left(\frac{\cos E'}{\cos^2\frac{E'}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{A_0'\theta + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n'}{n}\,sen\,n\theta\cos n(2M+\theta)\right\}, \quad (89)$$

alla quale relazione si suol dare la forma

$$\Delta\omega = w - \frac{e'^2\cos u_0}{\left(1-\frac{3}{4}e^2\right)^{1/2}}\left\{\beta_0\theta + \sum_{n=1}^{n=\infty}\beta_n\,sen\,n\theta\cos n(2M+\theta)\right\} \quad (90)$$

ponendo

$$\beta_0 = \frac{A_0'}{2}\left(\frac{\cos E'}{\cos^2\frac{E'}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad \beta_n = \frac{A_n'}{n\,sen\,1''}\left(\frac{\cos E'}{\cos^2\frac{E'}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (91)$$

ove il fattore $\frac{1}{sen\,1''}$ è aggiunto per rendere tutti i termini omogenei ed espressi in secondi. Il calcolo di $\Delta\omega$ per mezzo della (90) riesce semplicissimo quando i valori dei β si traggono da tavole [ad esempio da quelle pubblicate da *Bessel*, che danno oltre i β anche i valori degli α per l'applicazione della formula (77), ed in corrispondenza ai valori delle costanti terrestri calcolati da *Bessel* stesso], ed il valore di θ è stato dedotto in funzione delle ausiliarie u_0 ed M, nel qual caso si hanno i valori di $sen\,n\theta\cos n(2M+\theta)$ già calcolati. È superfluo poi il notare che la quantità $tang^2\frac{E'}{2}$ è dello stesso

ordine di $tang^2 \frac{E}{2}$, e che perciò riesce inutile in ogni caso di spingere l'approssimazione al di là dell'ordine di $tang^6 \frac{E'}{2}$. Quando poi non si fa uso di tavole per i β, conviene adottare invece la (89) trasformata nella seguente:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\omega = w - \frac{e^2 . cos^2 u_0}{2(1 - {}^3/_4 e^2)^{1/3}} \left(\frac{cos E'}{cos^2 \frac{E'}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{9} tang^4 \frac{E'}{2}\right) \Big\{ \theta + \\ + \frac{2}{3 sen 1''} tang^2 \frac{E'}{2} \left(1 + \frac{1}{9} tang^4 \frac{E'}{2}\right) sen\theta \cos(2M + \theta) + \\ + \frac{2}{9 . sen 1''} tang^4 \frac{E'}{2} sen 2\theta \cos(4M + 2\theta) + \\ + \frac{28}{243 . sen 1''} tang^6 \frac{E'}{2} sen 3\theta \cos(6M + 3\theta) \Big\}\end{aligned}\right\} \quad (92)$$

19. Se pel calcolo dell'angolo θ è stata impiegata la (78), le precedenti formule (90) e (91) non presentano più la stessa semplicità di calcolo, e conviene dedurne altre che, invece della costante ausiliaria M, contengano, come la (78), la ausiliaria θ'_1. Per fare questa deduzione riprendiamo la formula fondamentale (80)

$$d\omega = dw \sqrt{1 - e^2 . cos^2 u},$$

alla quale, tenendo conto delle (79) e (66), è facile dare la forma:

$$d\omega = dw - \frac{d\theta . cos u_0}{cos^2 u} (1 - \sqrt{1 - e^2 . cos^2 u}).$$

Eliminandovi u per mezzo della seconda delle (71) si trae

$$d\omega = dw - \frac{d\theta . cos u_0 \sqrt{1 - e^2 . cos^2 u_0}}{sen^2 u_0 (cotg^2 u_0 + sen^2 \theta')} \left\{ (1 - e^2 . cos^2 u_0)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{e^2 . sen^2 u_0 sen^2 \theta'}{1 - e^2 . cos^2 u_0}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (93)$$

d'onde, ponendo per brevità

$$\delta = \frac{e . sen u_0}{\sqrt{1 - e^2 . cos^2 u_0}} \quad (94)$$

ed osservando che si ha

$$(1 - e^2 . cos^2 u_0)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 - e^2 . cos^2 u_0 + e^2 . cos^2 u_0}{1 - e^2 . cos^2 u_0}} = \sqrt{1 + \frac{e^2 . sen^2 u_0}{1 - e^2 . cos^2 u_0}} cotg^2 u_0$$

si ottiene:

$$d\omega = dw - \frac{d\theta \,.\, \cos u_0 \sqrt{1 - e^2 \,.\, \cos^2 u_0}}{\operatorname{sen}^2 u_0 (\operatorname{cotg}^2 u_0 + \operatorname{sen}^2 \theta')} \left\{ \sqrt{1 + \delta^2 \,.\, \operatorname{cotg}^2 u_0} - \sqrt{1 - \delta^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 \theta'} \right\}$$

od anche, sviluppando i due radicali in serie secondo le potenze ascendenti di δ^2:

$$d\omega = dw - \frac{d\theta \,.\, \cos u_0 \sqrt{1 - e^2 \,.\, \cos^2 u_0}}{\operatorname{sen}^2 u_0 (\operatorname{sen}^2 \theta' + \operatorname{cotg}^2 u_0)} \left\{ \frac{\delta^2}{2} (\operatorname{sen}^2 \theta' + \operatorname{cotg}^2 u_0) + \right.$$

$$+ \frac{\delta^4}{8} (\operatorname{sen}^4 \theta' - \operatorname{cotg}^4 u_0) + \frac{\delta^6}{16} (\operatorname{sen}^6 \theta' + \operatorname{cotg}^6 u_0) +$$

$$\left. + \frac{5\,\delta^8}{128} (\operatorname{sen}^8 \theta' - \operatorname{cotg}^8 u_0) + \ldots \right\}.$$

Tutti i termini rinchiusi nella parentesi grande sono divisibili per $\operatorname{sen}^2 \theta' + \operatorname{cotg}^2 u_0$, ed eseguendo la divisione si ottiene

$$d\omega = dw - \frac{d\theta \,.\, \delta^2 \,.\, \cos u_0 \sqrt{1 - e^2 \,.\, \cos^2 u_0}}{2 \,.\, \operatorname{sen}^2 u_0} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\delta^2}{4} (\operatorname{sen}^2 \theta' - \operatorname{cotg}^2 u_0) + \\ + \frac{\delta^4}{8} (\operatorname{sen}^4 \theta' - \operatorname{sen}^2 \theta' \operatorname{cotg}^2 u_0 + \operatorname{cotg}^4 u_0) \\ + \frac{5\,\delta^6}{64} (\operatorname{sen}^6 \theta' - \operatorname{sen}^4 \theta' \operatorname{cotg}^2 u_0 + \\ \qquad + \operatorname{sen}^2 \theta' \operatorname{cotg}^4 u_0 - \operatorname{cotg}^6 u_0) + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

dalla quale formula, notando che si ha

$$\operatorname{sen}^2 \theta' = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}^4 \theta' = \frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$$

$$\operatorname{sen}^6 \theta' = \frac{10 - 15 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta - \cos 6\theta}{32}$$

$$\operatorname{sen}^8 \theta' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e sostituendo, si trova:

$$d\omega = dw - \frac{d\theta' . \delta^2 . \cos u_0 \sqrt{1 - e^2 . \cos^2 u_0}}{2 . \operatorname{sen}^2 u_0} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\delta^2}{8} - \frac{\delta^2}{4} \operatorname{cotg}^2 u_0 + \frac{3 . \delta^4}{64} - \\ - \frac{\delta^4}{16} \operatorname{cotg}^2 u_0 + \frac{\delta^4}{8} \operatorname{cotg}^4 u_0 - \ldots \\ - \cos 2\theta \left(\frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^4}{16} - \frac{\delta^4}{16} \operatorname{cotg}^2 u_0 - \ldots \right) \\ + \cos 4\theta \left(\frac{\delta^4}{64} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right) \\ - \cos 6\theta \left(\ldots\ldots\ldots\ldots \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} . \quad (95)$$

Per mettere il secondo membro di questa relazione sotto forma più conveniente osserviamo che la (94) dà:

$$\delta^2 = \frac{e^2 . \operatorname{sen}^2 u_0}{\operatorname{sen}^2 u_0 + (1 - e^2) \cos^2 u_0} = \frac{e^2}{1 + (1 - e^2) \operatorname{cotg}^2 u_0}$$

e quindi

$$\delta^2 \operatorname{cotg}^2 u_0 = \frac{e^2 - \delta^2}{1 - e^2},$$

mentre, introducendo l'angolo ausiliario E già adoperato nel § 14 e definito dalla relazione

$$\operatorname{tang} E = \frac{e . \operatorname{sen} u_0}{\sqrt{1 - e^2}},$$

si ricava

$$\delta^2 = \frac{\frac{e^2 . \operatorname{sen}^2 u_0}{1 - e^2}}{1 + \frac{e^2 . \operatorname{sen}^2 u_0}{1 - e^2}} = \frac{\operatorname{tang}^2 E}{1 + \operatorname{tang}^2 E} = \operatorname{sen}^2 E = \frac{4 \operatorname{tang}^2 \frac{E}{2}}{\left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{E}{2}\right)^2} =$$

$$= 4 \operatorname{tang}^2 \frac{E}{2} - 8 \operatorname{tang}^4 \frac{E}{2} + 12 \operatorname{tang}^6 \frac{E}{2} - 16 \operatorname{tang}^8 \frac{E}{2} + \ldots$$

Per $u_0 = 90°$ si ha dunque contemporaneamente:

$$\operatorname{tang} E = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad \delta^2 = e^2, \quad \cos E = \sqrt{1 - e^2},$$

$$\operatorname{tang}^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

e quindi, rappresentando con n questa ultima quantità,

$$e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} = 4n - 8n^2 + 12n^3 - 16n^4 + \dots$$

In conseguenza avremo

$$e^2 - \delta^2 = 4\left(n - tang^2\frac{E}{2}\right) - 8\left(n^2 - tang^4\frac{E}{2}\right) + 12\left(n^3 - tang^6\frac{E}{2}\right) - \dots$$

$$\frac{1}{1-e^2} = 1 + 4n + 8n^2 + 16n^3 + \dots$$

$$\frac{e^2 - \delta^2}{1-e^2} = \delta^2 cotg^2 u_0 = 4\left(n - tang^2\frac{E}{2}\right) + 8\left(n - tang^2\frac{E}{2}\right)^2 + \dots$$

$$\delta^4 cotg^2 u_0 = 16\, tang^2\frac{E}{2}\left(n - tang^2\frac{E}{2}\right) + \dots$$

$$\delta^4 = 16\, tang^4\frac{E}{2} + \dots$$

$$\frac{\delta^2\sqrt{1 - e^2.cos^2 u_0}}{sen^2 u_0} = \frac{e^2}{\sqrt{1 - e^2.cos^2 u_0}} = e^2\sqrt{\frac{1 - e^2.cos^2 u_0 + e^2.cos^2 u_0}{1 - e^2.cos^2 u_0}} =$$

$$= e^2\sqrt{1 + \delta^2.cotg^2 u_0} = e^2\left(1 + \frac{\delta^2.cotg^2 u_0}{2} - \frac{\delta^4.cotg^4 u_0}{8} + \dots\right) =$$

$$= e^2\left\{1 + 2\left(n - tang^2\frac{E}{2}\right) + 2\left(n - tang^2\frac{E}{2}\right)^2 + \dots\right\}$$

e queste relazioni permettono, coll'approssimazione dell'ordine di e^6 inclusivo, di dare alla (95) la forma semplicissima seguente:

$$d\omega = dw - \frac{e^2.cos\, u_0\, d\theta}{2}\left\{\begin{array}{l} 1 + n - \frac{1}{2}tang^2\frac{E}{2} - \frac{1}{4}tang^4\frac{E}{2} - \dots \\ -\frac{1}{2}tang^2\frac{E}{2}cos\,2\theta' + \frac{1}{4}tang^4\frac{E}{2}cos\,4\theta' - \dots \end{array}\right\}$$

sotto la quale diviene immediatamente integrabile. Così, ritenendo le notazioni del § 14, si trova

$$\Delta\omega = w - \frac{e^2.cos\, u_0}{2}\left\{\begin{array}{l} \left(1 + n - \frac{1}{2}tang^2\frac{E}{2} - \frac{1}{4}tang^4\frac{E}{2} - \dots\right)(\theta'_2 - \theta'_1) \\ -\frac{1}{2}tang^2\frac{E}{2}sen(\theta'_2 - \theta_1)cos(\theta'_2 + \theta'_1) + \\ +\frac{1}{8}tang^4\frac{E}{2}sen\,2(\theta'_2 - \theta'_1)cos\,2(\theta'_2 + \theta'_1) + \dots \end{array}\right\} \quad (96)$$

$$n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

formula molto conveniente pel calcolo di $\Delta\omega$ quando la determinazione della latitudine u e dell'azimut α è stata fatta adoperando la (78). I procedimenti di calcolo sviluppati in questo paragrafo e nel § 14 sono dovuti al signor *Helmert*.

20. Le formule (65), (71), (61) e (86) danno le quantità u, α e w in modo affatto generale: tuttavia hanno il grave inconveniente di richiedere un calcolo con almeno otto cifre decimali logaritmiche esatte se si vuole spingere l'approssimazione fino a 0″,001 nei resultati. Teoreticamente parlando gli sviluppi in serie che hanno per modulo di convergenza le variazioni degli elementi geodetici (*latitudine, longitudine, azimut, distanze e quantità corrispondenti a queste sulla sfera*) fra gli estremi dell'arco s non si accordano collo spirito e colla generalità dei metodi esposti negli ultimi paragrafi: però in pratica nella maggior parte dei casi, cioè quando la distanza s non sorpassa il massimo valore possibile in un lato geodetico *osservato*, è utile di ricorrere a sviluppi siffatti, giacchè permettono di ottenere l'approssimazione di 0″,001 anche colle comuni tavole logaritmiche a sette decimali.

Ora dalla relazione generale

$$sen\, u = \frac{sen\, u_1}{sen\, M} sen\,(M+\theta)$$

del § 13 si trae:

$$sen\, u = sen\, u_1 \cos\theta + sen\,\theta\, sen\, u_1\, cotg\, M,$$

da cui, sviluppando in serie $sen\,\theta$ e $\cos\theta$, e tenendo conto della relazione (64), si ha:

$$sen\, u - sen\, u_1 = (u-u_1)\cos u_1\, sen\, 1'' - \frac{(u-u_1)^2}{2} sen\, u_1 sen^2 1'' -$$

$$- \frac{(u-u_1)^3}{6} \cos u_1 sen^3 1'' + \frac{(u-u_1)^4}{24} sen\, u_1 sen^4 1'' + \ldots .$$

$$= \cos u_1 \cos\alpha_1 \left(\theta . sen 1'' - \frac{\theta^3 . sen^3 1''}{6}\right) - \frac{sen\, u_1}{2}\left(\theta^2 . sen^2 1'' - \frac{\theta^4}{12} sen^4 1''\right) + \ldots$$

od anche:

$$u - u_1 = \theta . \cos\alpha_1 - \frac{[\theta^2 - (u-u_1)^2]}{2} tang\, u_1 sen\, 1'' -$$

$$- \frac{[\theta^3 . \cos\alpha_1 - (u-u_1)^3]}{6} sen^2 1'' + \frac{[\theta^4 - (u-u_1)^4]}{24} tang\, u_1 sen^3 1'' + \ldots$$

Di qui, colla approssimazione del quarto ordine inclusivamente, si trae:

$$(u-u_1)^2=\theta^2.\cos^2\alpha_1-\theta^3.\operatorname{tang}u_1\cos\alpha_1\operatorname{sen}^2\alpha_1\operatorname{sen}1''+$$
$$+\frac{\theta^4}{4}\operatorname{tang}^2u_1\operatorname{sen}^2\alpha_1(1-5\cos^2\alpha_1)\operatorname{sen}^2 1''-\frac{\theta^4}{3}\cos^2\alpha_1\operatorname{sen}^2\alpha_1\operatorname{sen}^2 1''$$

$$(u-u_1)^3=\theta^3.\cos^3\alpha_1-\frac{3\,\theta^4.\operatorname{tang}u_1\cos^2\alpha_1\operatorname{sen}^2\alpha_1\operatorname{sen}1''}{2}$$

$$(u-u_1)^4=\theta^4.\cos^4\alpha_1,$$

e quindi, sostituendo nel secondo membro della precedente espressione di $(u-u_1)$, si trova coll'approssimazione suddetta,

$$\left.\begin{aligned}u-u_1=&\ \theta.\cos\alpha_1\\&-{}^1/_2\,\theta^2.\operatorname{sen}^2\alpha_1\operatorname{tang}u_1\operatorname{sen}1''\\&-{}^1/_6\,\theta^3.\cos\alpha_1\operatorname{sen}^2\alpha_1(1+3\operatorname{tang}^2u_1)\operatorname{sen}^2 1''\\&+{}^1/_{24}\,\theta^4.\operatorname{tang}u_1\operatorname{sen}^2\alpha_1\{1-9\cos^2\alpha_1+3\operatorname{tang}^2u_1(1-5\cos^2\alpha_1)\}\operatorname{sen}^3 1''.\end{aligned}\right\}\quad(97)$$

L'errore che si commette in $u-u_1$ trascurando il quinto ordine non raggiunge $0'',001$ se la distanza geodetica s non sorpassa 300 000 metri.

Ottenuto u, il calcolo dell'angolo w può esser fatto molto semplicemente; ed infatti osservando che w e θ sono quantità dello stesso ordine, dalla relazione

$$\operatorname{sen}w=\operatorname{sen}\theta\,\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\cos u}$$

si trae coll'approssimazione del quarto ordine inclusive:

$$w=\frac{\theta.\operatorname{sen}\alpha_1}{\cos u}-\frac{\theta^3.\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}^2 1''}{6.\cos u}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha_1}{\cos^2 u}\right).\qquad(98)$$

Per ultimo, con la stessa semplicità, dopo aver calcolata la differenza di longitudine $\Delta\omega$, si può ottenere l'azimut α per mezzo della relazione

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha-\alpha_1}{2}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{u+u_1}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}\operatorname{sen}\frac{w}{2}$$

dalla quale si deduce, sempre coll'approssimazione suddetta

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{w \,.\, sen \frac{u+u_1}{2}}{cos \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{w^2}{24} cos^2 \frac{u+u_1}{2} sen^2 1'' \right). \qquad (99)$$

Nel caso poi che l'azimut α e l'angolo w sieno stati calcolati contemporaneamente per mezzo delle relazioni (86^{bis}), e la distanza geodetica s non sorpassi 300 000 metri, conviene calcolare la latitudine ridotta u dalla relazione

$$sen \frac{u-u_1}{2} = \frac{cos \frac{\alpha+\alpha_1}{2}}{cos \frac{w}{2}} sen \frac{\theta}{2}$$

sviluppata come segue:

$$u - u_1 = \theta \frac{cos \frac{\alpha+\alpha_1}{2}}{cos \frac{w}{2}} \left(1 - \frac{\theta^2}{24} sen^2 \frac{\alpha+\alpha_1}{2} sen^2 1'' \right). \qquad (100)$$

21. I metodi esposti nei paragrafi precedenti sono di uso continuo in Geodesia, giacchè danno gli elementi geografici fondamentali per la cartografia di un paese e per lo studio matematico generale della superficie terrestre: perciò molte tavole sono state costruite per abbreviarne i calcoli, ed il problema che essi risolvono è stato studiato col massimo interesse. Il problema inverso, *date*, cioè, *le posizioni geografiche di due punti terrestri, determinare la loro distanza e l'orientamento della geodetica ellissoidica che li collega*, fino a questi ultimi tempi non si presentava che per eccezione, e, forse per questo, considerato quasi come una curiosità scientifica, non fu risoluto in modo rigoroso e generale, ma, nei rari casi, fu trattato con metodi indiretti, per mezzo di successive approssimazioni. Per altro oggidì nell'applicazione dei metodi moderni della Geodesia sintetica tale quistione ha acquistato una notevole importanza, dacchè coll'estendersi delle reti geodetiche sopra vastissime regioni e col perfezionarsi delle misure di longitudine, è diventato indispensabile nelle grandi sintesi il paragonare ripetutamente le posizioni astronomiche di punti molto lontani, colle relative distanze geodetiche. Ne intraprenderemo dunque lo studio,

distinguendo, come per il problema precedente, il caso di una distanza geodetica limitata, dal caso generale di una distanza geodetica qualunque, ed indicando anzitutto le più semplici soluzioni indirette.

Sieno $A(\varphi_1, \omega_1, \alpha_1)$ e $B(\varphi_2, \omega_2, \alpha_2)$ i due punti estremi dati dell'arco di geodetica ellissoidica s incognito per lunghezza ed orientamento, e rappresentiamo con $\varphi_0, \omega_0, \alpha_0$ le coordinate geografiche e l'azimut nel punto di mezzo O di tale arco, gli azimut $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_2$ essendo tutti riferiti alla direzione da A in B. Applicando le formule (12) e (22), ed osservando che sull'orizzonte di O l'azimut geodetico di B è α_0, e quello di A è $180° + \alpha_0$, avremo:

$$
\begin{aligned}
\varphi_0 &= \frac{s \cdot \cos\alpha_0}{2 \cdot \rho_0 \cdot \operatorname{sen} 1''} - \\
&- \frac{s^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_0}{8 \cdot \rho_0^2 \operatorname{sen} 1''}\left(\frac{\rho_0 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha_0}{r_0} + 3 \cdot e^2 \cdot \cos\varphi_0 \cos^2\alpha_0\right) - \\
&- \frac{s^3 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha_0 \cos\alpha_0}{48 \cdot \rho_0^3 \operatorname{sen} 1''}\{1 + 3 \cdot tang^2\varphi_0 + 3 \cdot e^2 \cdot \cos 2\varphi_0 cotg^2\alpha_0 - e^2(1 + 14 \operatorname{sen}^2\varphi_0)\} + \ldots \\
\omega_0 &= -\frac{s \cdot \cos\alpha_0}{2 \cdot \rho_0 \operatorname{sen} 1''} - \\
&- \frac{s^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_0}{8 \cdot \rho_0^2 \operatorname{sen} 1''}\left(\frac{\rho_0 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha_0}{r_0} + 3 \cdot e^2 \cdot \cos\varphi_0 \cos^2\alpha_0\right) + \\
&+ \frac{s^3 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha_0 \cos\alpha_0}{48 \cdot \rho_0^3 \operatorname{sen} 1''}\{1 + 3 tang^2\varphi_0 + 3 \cdot e^2 \cdot \cos 2\varphi_0 cotg^2\alpha_0 - e^2(1 + 14 \operatorname{sen}^2\varphi_0)\} + \ldots \\
\alpha_0 &= \frac{s \cdot \operatorname{sen}\alpha_0}{2 \cdot N_0 \cos\varphi_0 \operatorname{sen} 1''} + \\
&+ \frac{s^2 \cdot tang\varphi_0 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{8 \cdot N_0^2 \cos\varphi_0 \operatorname{sen} 1''} + \\
&+ \frac{s^3 \operatorname{sen}\alpha_0}{24 \cdot N_0^3 \cos\varphi_0 \operatorname{sen} 1''}\{\cos^2\alpha_0(1 + 3 \cdot tang^2\varphi_0) - \operatorname{sen}^2\alpha_0 tang^2\varphi_0 + e^2 \cdot \cos^2\varphi_0 \cos^2\alpha_0\} + \ldots \\
\alpha_0 &= -\frac{s \cdot \operatorname{sen}\alpha_0}{2 \cdot N_0 \cos\varphi_0 \operatorname{sen} 1''} + \\
&+ \frac{s^2 \cdot tang\varphi_0 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{8 \cdot N_0^2 \cos\varphi_0 \operatorname{sen} 1''} - \\
&- \frac{s^3 \cdot \operatorname{sen}\alpha_0}{24 \cdot N_0^3 \cos\varphi_0 \operatorname{sen} 1''}\{\cos^2\alpha_0(1 + 3 \cdot tang^2\varphi_0) - \operatorname{sen}^2\alpha_0 tang^2\varphi_0 + e^2 \cdot \cos^2\varphi_0 \cos^2\alpha_0\} + \ldots
\end{aligned}
\qquad (101)
$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi&=\frac{s\,.\,\cos\alpha_0}{\rho_0\,sen\,1'}\left\{1-\frac{s^2\,.\,sen^2\alpha_0}{24\,.\,\rho_0^2}[1+3\,.\,tang^2\varphi_0+\right.\\&\left.\qquad+3\,.\,e^2\,.\,\cos 2\varphi_0 cotg^2\alpha_0-e^2(1+14\,sen^2\varphi_0)]\right\}\\ \omega_2-\omega_1=\Delta\omega&=\frac{s\,.\,sen\,\alpha_0}{N_0\cos\varphi_0\,sen\,1''}\left\{1+\frac{s^2}{12\,.\,N_0}[\cos^2\alpha_0(1+3\,tang^2\varphi_0)-\right.\\&\left.\qquad-sen^2\alpha_0\,tang^2\varphi_0+e^2\,.\,\cos^2\varphi_0\cos^2\alpha_0]\right\}\end{aligned}\right\}\quad(102)$$

coll'approssimazione del quarto ordine inclusivamente quantunque i termini di questo ordine non figurino nelle precedenti relazioni (101).

Quando la distanza geodetica s non sorpassa una cinquantina di chilometri i termini di terzo ordine non raggiungono in generale o''.01, e quindi, se non si richiede un'approssimazione maggiore di questa, si può porre:

$$\left.\begin{aligned}s\,.\,\cos\alpha_0&=\Delta\varphi\,.\,\rho_0\,sen\,1''\\ s\,.\,sen\,\alpha_0&=\Delta\omega\,.\,N_0\cos\varphi_0\,sen\,1''\\ tang\,\alpha_0&=\frac{\Delta\omega\,.\,N_0\cos\varphi_0}{\Delta\varphi\,.\,\rho_0}\\ s&=sen\,1''\sqrt{\Delta\varphi^2\,.\,\rho_0^2+\Delta\omega^2\,.\,N_0^2\cos^2\varphi_0}\end{aligned}\right\}.\quad(103)$$

Nel caso più generale in cui si abbia da tener conto anche dei termini di terzo ordine, le due ultime di queste relazioni danno dei valori approssimati s', α_0' di s e di α_0, per mezzo dei quali, se fosse noto φ_0, si potrebbero calcolare valori più che abbastanza precisi per le quantità che nella (102) sono rinchiuse fra le parentesi maggiori. Ponendo adunque

$$\beta=\frac{s'^2\,.\,sen^2\alpha_0'}{24\,.\,\rho_0^2}\{1+3\,tang^2\varphi_0+3\,.\,e^2\,.\,\cos 2\varphi_0 cotg^2\alpha_0'-e^2(1+14\,sen^2\varphi_0)\}$$

$$\gamma=\frac{s'^2}{12\,.\,N_0^2}\{\cos^2\alpha_0'(1+3\,tang^2\varphi_0)-sen^2\alpha_0'\,tang^2\varphi_0+e^2\,.\,\cos^2\varphi_0\cos^2\alpha_0'\},$$

dalle formule

$$\left.\begin{aligned}tang\,\alpha_0&=\frac{\Delta\omega\,.\,N_0\cos\varphi_0(1-\beta)}{\Delta\varphi\,.\,\rho_0(1+\gamma)}\\ s&=sen\,1''\sqrt{\frac{\Delta\varphi^2\,.\,\rho_0^2}{(1-\beta)^2}+\frac{\Delta\omega^2\,.\,N_0^2\cos^2\varphi_0}{(1+\gamma)^2}}=\\ &=\frac{\Delta\varphi\,.\,\rho_0\,sen\,1''}{(1-\beta)\cos\alpha_0}=\frac{\Delta\omega\,.\,N_0\cos\varphi_0\,sen\,1''}{(1+\gamma)\,sen\,\alpha_0}\end{aligned}\right\}\quad(104)$$

si avrebbero i valori di α_0 ed s approssimati fino al quarto ordine se dentro questa stessa approssimazione si potesse calcolare preventivamente l'ausiliaria φ_0.

Ora sommando membro a membro le prime due relazioni (101) si trae:

$$\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}-\varphi_0=-\frac{s^2.sen\,\varphi_0}{8.\rho_0^2 sen\,1''}\left(\frac{sen^2\alpha_0.\rho_0}{r_0}+3.e^2.cos\,\varphi_0 cos^2\alpha_0\right)+$$
$$+termini\ di\ quarto\ ordine$$

da cui si vede come la differenza fra φ_0 e la media aritmetica delle latitudini estreme φ_1, φ_2 è una quantità piccola di secondo ordine, e che, per conseguenza, coll'approssimazione del terzo ordine inclusivamente, si può sostituire nel secondo membro la latitudine media φ_m in luogo di φ_0 ed invece di $s.cos\,\alpha_0$, $s.sen\,\alpha_0$ si possono introdurre i valori dati per queste quantità dalle relazioni approssimate (103). Avremo quindi, eseguendo tale sostituzione:

$$\varphi_0=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\frac{sen\,2\varphi_m.sen\,1''}{16}\{\Delta\omega^2+e^2.cos^2\varphi_m\Delta\omega^2+3.e^2.\Delta\varphi^2\}+$$
$$+termini\ di\ quarto\ ordine.$$

Analiticamente sarebbe facile di tener conto anche dei termini di quarto ordine, ma il loro calcolo numerico riesce assai complicato, cosicchè quando non possono essere trascurati conviene piuttosto risolvere il problema con uno dei metodi più generali che esporremo in seguito. Riassumendo pertanto, e trascurando anche nelle espressioni di β e γ i termini che nei risultati corrispondono a quelli non sviluppati nella precedente espressione di φ_0, porremo

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \frac{\Delta\omega^2.sen^2 1''(1+2.sen^2\varphi_m)}{24}\\
\gamma &= \frac{sen^2 1''}{12}\{\Delta\varphi^2(1+3.tang^2\varphi_m)-\Delta\omega^2.sen^2\varphi_m\}\\
\varphi_0 &= \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\frac{sen\,2\varphi_m sen\,1''}{16}\{\Delta\omega^2+e^2(\Delta\omega^2.cos^2\varphi_m+3.\Delta\varphi^2)\}\\
tang\,\alpha_0 &= \frac{\Delta\omega.N_0 cos\,\varphi_0(1-\beta)}{\Delta\varphi.\rho_0(1+\gamma)}\\
s &= sen\,1''\sqrt{\frac{\Delta\varphi^2.\rho_0^2}{(1-\beta)^2}+\frac{\Delta\omega^2.N_0^2 cos^2\varphi_0}{(1+\gamma)^2}},
\end{aligned}\right\}\quad(105)$$

intendendo che queste formule non debbano essere applicate che

per distanze minori della massima lunghezza di un lato geodetico *osservato,* e quando l'approssimazione del terzo ordine inclusivo è sufficiente.

L'azimut α_0 dà l'orientamento della geodetica congiungente cercata s; ma in pratica piuttosto che α_0 in generale sono richiesti gli azimut estremi α_1, α_2. Il passaggio da quello a questi non presenta per altro nessuna difficoltà giacchè, dopo il calcolo di s e di α_0, diviene applicabile in tale ricerca il metodo sviluppato nel § 7 di questo capitolo, se pure non si vuole far uso della nota relazione

$$\cos u \cos \alpha = \text{costante},$$

che lega l'azimut alla latitudine ridotta lungo una geodetica. Del resto il metodo del § 7 può in questo caso esser molto semplificato: ed infatti applicando successivamente la serie (33) alla ricerca dei due azimut α_1 ed α_2, e tenendo conto anche dei termini di terzo ordine [vedi formule (34)], si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_2 - \alpha_0 &= + \frac{s \,.\, sen\, \alpha_0 tang\, \varphi_0}{2\,.\,N_0 sen\, 1''} + \\
&+ \frac{s^2 \,.\, sen\, 2\,\alpha_0}{16\,.\,N_0^2 cos^2 \varphi_0 sen\, 1''} \left(1 + sen^2 \varphi_0 + \frac{e^2 \,.\, cos^4 \varphi_0}{1 - e^2}\right) + \\
&+ \frac{s^3 \,.\, sen\, \varphi_0}{48\,.\,N_0^3 cos^3 \varphi_0 sen\, 1''} \{sen\, 3\,\alpha_0 (1 + sen^2 \varphi_0) + \\
&\qquad + sen\, 2\,\alpha_0 cos\, \alpha_0 cos^2 \varphi_0 + e^2 [\ldots]\} + \ldots \\
\alpha_1 - \alpha_0 &= - \frac{s \,.\, sen\, \alpha_0 tang\, \varphi_0}{2\,.\,N_0 sen\, 1''} + \\
&+ \frac{s^2 \,.\, sen\, 2\,\alpha_0}{16\,.\,N_0^2 cos^2 \varphi_0 sen\, 1''} \left(1 + sen^2 \varphi_0 + \frac{e^2 \,.\, cos^4 \varphi_0}{1 - e^2}\right) \\
&- \frac{s^3 \,.\, sen\, \varphi_0}{48\,.\,N_0^3 cos^3 \varphi_0 sen\, 1''} \{sen\, 3\,\alpha_0 (1 + sen^2 \varphi_0) + \\
&\qquad + sen\, 2\,\alpha_0 cos\, \alpha_0 cos^2 \varphi_0 + e^2 [\ldots]\} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Sommando e dividendo per due avremo quindi:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha_0 + \frac{s^2 \,.\, sen\, 2\,\alpha_0}{16\,.\,N_0^2 cos^2 \varphi_0 sen\, 1''} \left(1 + sen^2 \varphi_0 + \frac{e^2 \,.\, cos^4 \varphi_0}{1 - e^2}\right) +$$

$$+ \textit{termine di quarto ordine}$$

d' onde, ricordando che si ha in generale

$$\frac{\rho}{N} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 . sen^2 \varphi},$$

si trae con facili trasformazioni:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha_0 + \frac{s^2 . sen\, \alpha_0 cos\, \alpha_0}{8 . N_0 \rho_0 sen\, 1''} \left(1 + \frac{2\rho_0}{N_0} tang^2 \varphi_0 \right).$$

Introducendo anche qui, come nelle formule pel calcolo di φ_0, in luogo di $s . cos\, \alpha_0$, $s . sen\, \alpha_0$ i valori prossimi che per tali quantità sono dati dalle (103) avremo dunque coll'approssimazione del terzo ordine inclusivo:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha_0 + \Delta\varphi . \Delta\omega . cos\, \varphi_0 sen\, 1'' \left(1 + \frac{2\rho_0}{N_0} tang^2 \varphi_0 \right) \qquad (107)$$

mentre, per un teorema che esporremo fra breve sotto il nome di teorema di *Dalby*, coll' approssimazione sopraddetta si ha ancora [vedi § 26, formula (130)]:

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{\Delta\omega . sen\, \varphi_m}{2 . cos \frac{\Delta\varphi}{2}} \left(1 + \frac{\Delta\omega^2 . cos^2 \varphi_m sen^2 1''}{12} \right). \qquad (108)$$

Le (107) e (108) risolute e combinate per somma e sottrazione danno con un calcolo relativamente facile e breve le quantità α_1, α_2 cercate.

Il metodo esposto in questo paragrafo, salvo lievi modificazioni, è dovuto al sig. *Guarducci* ingegnere nell' Istituto Geografico Militare.

22. Il procedimento inverso a quello sviluppato nel § 11 conduce ad una soluzione assai comoda e semplice del problema che ci occupa, anche per geodetiche molto lunghe, ma non illimitate.

Supponiamo infatti che φ_1 sia la latitudine più bassa tra quelle dei punti A e B considerati, in modo che ponendo $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta\varphi$ riesca positivo: la solita formula di *Andræ* (vedi vol. I, pag. 71) protratta fino al quinto ordine inclusivo dà per l'arco σ di meridiano corrispondente alla differenza di latitudine $\Delta\varphi$

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \rho_m \Delta\varphi . sen\, 1'' + e^2 . \rho_m cos\, 2\varphi_m \frac{\Delta\varphi^3 . sen^3\, 1''}{8} + \\ + e^4 . \rho_m sen^2 \varphi_m \{ 7 cos^2 \varphi_m - 1 \} \frac{\Delta\varphi^3 . sen^3\, 1''}{8}, \end{aligned} \right\} \qquad (109)$$

essendo, come sopra, φ_m la latitudine media $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ e ρ_m il relativo raggio di curvatura del meridiano. Del resto il valore di σ

può anche esser calcolato colle formule del Capitolo II, § 12 che sono completamente generali. Riteniamo le notazioni del § 11 di questo Capitolo: le formule (51) e (52), a seconda dei casi, danno il modo di calcolare con sufficiente approssimazione l'angolo ausiliario ψ se la differenza di longitudine è minore di 3°, e, se è maggiore, forniscono un valore approssimato di tale quantità: così dal triangolo sferico ausiliario $P'C'A'$ (fig. 62, pag. 141) considerato nel paragrafo suddetto si trae, rappresentando con λ' il lato $A'C'$ espresso in secondi e con λ la sua lunghezza:

$$sen\,\lambda' = sen\,\frac{\lambda}{N_1 sen\,1''} = \frac{cos\,\varphi_1}{sen\,\psi}\,sen\,\Delta\Omega \qquad (110)$$

formula che si risolve per approssimazione rispetto a λ', introducendovi $\Delta\omega$ invece di $\Delta\Omega$.

In generale però l'angolo λ' e l'angolo $\Delta\Omega$ sono molto piccoli, cosicchè per applicare quest'ultima formula conviene ricorrere a degli sviluppi in serie: coll'approssimazione del quarto ordine inclusivo porremo quindi:

$$\lambda = \frac{\Delta\Omega . N_1 cos\,\varphi_1 sen\,1''}{sen\,\psi}\left\{1 - \frac{\Delta\Omega^2 . sen^2 1''}{6}\,sen^2\varphi_1\right\}. \qquad (111)$$

Ottenuto prossimamente λ, nell'altro triangolo sferico ausiliario $A'B'C'$ (fig. 62) oltre a questo lato si conoscono i valori provvisorii del lato $B'C' = S$, e dell'angolo $C' = \psi$, valori che non differiscono dai veri che di quantità di quarto ordine: risolvendolo quindi provvisoriamente si avranno con molta approssimazione i valori di s e di $\alpha_1 = \psi - A'$, che, introdotti nelle (48), danno modo di calcolare i valori di S e di $\Delta\Omega$ a meno di quantità del quinto ordine. Ripetendo quindi il calcolo si otterranno i valori cercati di s e di α_1.

È superfluo notare che in pratica, eccettuato il caso di distanze estremamente grandi, è utile di fare la risoluzione del secondo triangolo sferico $A'B'C'$ coi metodi esposti nel Capitolo V.

Trattandosi anche qui di un metodo non comunemente conosciuto aggiungiamo un esempio per indicare lo schema ed il procedimento del calcolo

DATI
- *Posizione geografica di* LISSA
  - $\varphi_2 = 43°.01'.44'',867$
  - $\omega_2 = 0\,.36\,.25\,,485$
- *Posizione geografica di* TREMITI
  - $\varphi_1 = 42\,.07\,.16\,,269$
  - $\omega_1 = 0\,.00\,.00\,,000$

Calcolo della distanza fra Tremiti e Lissa e dell'Azimut in Tremiti

$\log . \Delta\varphi = 3.5143615,3$	$\log . tang \frac{\Delta\omega}{2} = 7.7240967,2$	$\log . cos\,\varphi_1 = 9.8701445,9$	$\log (\omega\, sen\, 1'')^2 = 6.05026$
$\log . \rho_m\, sen\, 1'' = 1.4893032,0$	$\log . sen\,\varphi_1 = 9.8265289,1$	$colog . sen\,\psi = 0.0000027,3$	$\log . I = 4.70067$
$\log . \sigma = 5.0036647,3$	$\log . cotg\,\psi = 7.5506256,3$	$\log . \omega' = 3.3395478,3$	$\log . sen^2\varphi = 9.65305$
$colog . N_1\, sen\, 1'' = 8.5091287,5$		$\log . N\, sen\, 1'' = 1.4908712,5$	$colog . \sigma = 9.22185$
$\log . \sigma' = 3.5127934,8$		$\log . I = 4.7006664,0$	$\log . II = 9.62583$
$\sigma'' = 0°.54'.16',8180$			
$\lambda'' = 0\ .27\ .01\ ,0320$			
			$I = +\ 50195,6867$
$\frac{\lambda'' - \sigma''}{2} = 0\ .13\ .37\ ,8933$	$\log . sen = 7.5982703,5$	$\log . cos = 9.9999966,5$	$II = \quad -\ 4225$
$\frac{\lambda' + \sigma''}{2} = 0\ .40\ .38\ ,9247$	$colog . sen = 1.9272368,5$	$colog . cos = 0.0000303,2$	$\lambda = +\ 50195,2642$
$\frac{\psi}{2} = 44\ .53\ .53\ ,5470$	$\log . cotg = 0.0015431,6$	$\log . cotg = 0.0015431,6$	$\log . \lambda = 4.7006627,1$
	$\log . tang = 9.5270503,6$	$\log . tang = 0.0015701,3$	$colog . N sen'' = 8.5091287,5$
			$\log \lambda' = 3.2097914,6$
$\frac{A+B}{2} = 18\ .36\ .02\ ,4850$	$A = 63°.42'.15'',332$	$11'',066$	$\log \sigma = 5.0036647,5$
$\frac{A-B}{2} = 45\ .06\ .12\ ,8570$	$B = 26\ .30\ .10\ ,372$	$06'',106$	$\log . sen\,\psi^* = 9.9999972,3$
$A = 63\ .42\ .15\ ,3320$	$C = 89\ .47\ .47\ ,093$	$42'',829$	$colog . sen\, A^* = 0.0474447,6$
$\psi = 89\ .47\ .47\ ,0930$	$12\ ,797$	$00\ ,000$	$\log . s = 5.0511067,4$
$\alpha_1 = 26°.05\ .31\ ,7610$			

$\log s = 5.0511067,4, \quad s = 112488,14$

$\alpha_1 = 26°.05'.31'',761$

L'approssimazione nell'azimut non è che di 0″,01 perchè nel calcolo non è stato tenuto conto dei diecimillesimi nelle differenze delle coordinate geografiche (vedi discussione nei §§ 3 e 6).

23. Anche questo secondo metodo, quantunque applicabile a distanze molto considerevoli, suppone che l'arco s sia una quantità assai minore del raggio medio terrestre. Una soluzione indiretta generale può esser tratta qui pure dalla rappresentazione Besseliana dell'ellissoide sulla sfera, ed è la seguente.

Riteniamo tutte le notazioni stabilite nel § 12 e nei successivi di questo capitolo, e torniamo al triangolo sferico ausiliario in cui, ai lati $90^\circ - u_1$, $90^\circ - u_2$ e θ sono rispettivamente opposti gli angoli $180^\circ - \alpha_2$, α_1 e w.

La relazione (90), ove β_0 differisce di poco da $\frac{1}{2}$, mostra come la differenza fra $\Delta\omega$ e w sia dell'ordine di $e^2\theta$, e sia quindi in ogni caso una frazione molto piccola di $\Delta\omega$: perciò se si risolve provvisoriamente il triangolo sferico sopra citato (in cui sono da considerare come conosciuti i due lati $90^\circ - u_1$, $90^\circ - u_2$) introducendo la differenza di longitudine $\Delta\omega$ in luogo dell'angolo w, si ottengono dei valori prossimi di θ e di α_1 che, introdotti anzitutto nelle relazioni (66) e (67), e quindi nella relazione provvisoria

$$w = \Delta\omega + \frac{e^2 . \beta_0 . \theta . \cos u_0}{(1 - {}^3/_4 e^2)^{1/3}} \qquad (112)$$

dedotta dalla (90), danno una seconda approssimazione dell'angolo w. Risolvendo di nuovo il triangolo sferico ausiliario si ottengono così per α_1, α_2, θ dei valori che non differiscono dai veri che di quantità dell'ordine di e^4, e possono essere usufruiti senz'altro per calcolare definitivamente le costanti ausiliarie M, u_0, ed E [formule (64), (66) e (67)] che compariscono nella (90) e quindi, per mezzo di questa, l'angolo w. Una terza risoluzione dà per ultimo gli azimut α_1, α_2 cercati, mentre la distanza s può essere calcolata dalla relazione generale (69) del § 13. La risoluzione del triangolo ausiliario si fa per mezzo delle analogie di *Nèper*, che in questo caso danno

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} &= \frac{\cos\frac{u_2-u_1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{u_2+u_1}{2}}\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\\
\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} &= -\frac{\operatorname{sen}\frac{u_1-u_2}{2}}{\cos\frac{u_1+u_2}{2}}\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\\
\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\operatorname{cotg}\frac{u_2+u_1}{2}\\
\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} &= -\frac{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}}\operatorname{tang}\frac{u_1-u_2}{2}
\end{aligned}\right\}. \qquad (113)$$

24. L'unica e semplicissima soluzione diretta del problema che ci occupa si fonda sopra un importante teorema, che ha dato luogo a curiose controversie,* e che è ben noto ai geodeti sotto il nome di teorema di *Dalby*, dal matematico inglese al quale è dovuto. Ecco in che consiste.

Siano P un polo, A_1, A_2 due punti dell'ellissoide terrestre, φ_1, φ_2 le loro latitudini geografiche, $\Delta\omega$ la differenza di longitudine, a', a'' rispettivamente gli azimut astronomici di ciascuno di essi sull'orizzonte all'altro, contati però, a seconda dei casi, dal Nord verso l'Est o verso l'Ovest fino a 180°. Se si immagina che l'eccentricità dell'ellissoide diminuisca successivamente, le due sezioni normali che collegano tali punti si accostano l'una all'altra fino a che, per $e = o$, si confondono in un unico arco di cerchio massimo: il triangolo geodetico $P A_1 A_2$ diviene allora un triangolo sferico, in cui l'angolo in P è dato dalla differenza di longitudine $\Delta\omega$, gli altri due angoli poi, che indicheremo con a_o' ed a_o'', e che sono rispettivamente opposti ai lati $P A_1 = 90° - \varphi_1$ e $P A_2 = 90° - \varphi_2$, rappresentano i limiti ai quali tendono a' ed a'' col decrescere di e. Ciò posto il teorema di *Dalby* è sintetizzato dalla relazione:

$$a' + a'' = a_o' + a_o'' + \frac{e^4 . \Delta\omega . \Delta\varphi^2 . \cos^4\varphi_m \operatorname{sen}\varphi_m \operatorname{sen}^2 1''}{4} + \cdots$$

* *Philosophical Magazine*, 1828.

e può enunciarsi come segue:

La somma di due azimut astronomici reciproci, contati dal Nord verso l'Est o verso l'Ovest fino a 180°, differisce dalla somma dei limiti ai quali tendono col decrescere dell'eccentricità, di una quantità di quinto ordine, della quale il valore prossimo è:

$$\frac{e^4}{4} . \Delta\omega . \Delta\varphi^2 . cos^4\varphi_m \, sen\,\varphi_m sen^2 1''$$

essendo φ_m la media delle latitudini dei punti corrispondenti agli azimut considerati, $\Delta\omega$ e $\Delta\varphi$ rispettivamente le differenze in longitudine ed in latitudine.

Per dimostrare questa proposizione, riteniamo per primo meridiano il meridiano del punto A_1, e riferiamo l'ellissoide terrestre a tre assi ortogonali, scegliendo il suo asse polare per asse delle z e l'intersezione dell'equatore col primo meridiano suddetto per asse delle x, per modo che le coordinate cartesiane del punto A_2 in funzione delle sue coordinate geografiche siano [Vol. I, Capitolo I, formule (4) e (10)]

$$x = N_2 cos\varphi_2 cos\Delta\omega,$$
$$y = N_2 cos\varphi_2 sen\,\Delta\omega,$$
$$z = (1 - e^2) N_2 sen\,\varphi_2,$$

essendo N_2 la gran normale corrispondente alla latitudine φ_2. Se si trasportano gli assi parallelamente coll'origine nel punto A_1 e si rappresentano, come altra volta (Capitolo II, § 4), con x_1, y_1, z_1 le nuove coordinate avremo evidentemente:

$$x_1 = N_2 cos\varphi_2 cos\,\Delta\omega - N_1 cos\,\varphi_1$$
$$y_1 = N_2 cos\varphi_2 sen\,\Delta\omega$$
$$z_1 = (1 - e^2)\{N_2 sen\,\varphi_2 - N_1 sen\,\varphi_1\}$$

giacchè $N_1 cos\,\varphi_1$, o, $(1 - e^2) N_1 sen\,\varphi_1$, se N_1 è la gran normale sotto la latitudine φ_1, sono le cordinate del punto A_1 rispetto agli assi primitivi. Facendo ancora ruotare gli assi delle x_1 e delle z_1 nel loro piano dal Sud al Nord per un angolo di $90° + \varphi_1$, e rappresentando con x_2, y_2, z_2 le coordinate dopo tale rotazione avremo poi:

$$x_2 = z_1 cos\,\varphi_1 - x_1 sen\,\varphi_1 =$$
$$= N_2 (sen\,\varphi_2 cos\,\varphi_1 - cos\,\varphi_2 sen\,\varphi_1 cos\,\Delta\omega) -$$
$$- e^2 (N_2 sen\,\varphi_2 cos\,\varphi_1 - N_1 sen\,\varphi_1 cos\,\varphi_1)$$

$$y_2 = N_2 \cos\varphi_2 \operatorname{sen}\Delta\omega$$

$$z_2 = -z_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - x_1 \cos\varphi_1$$

$$= N_1 - N_2(\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\omega) +$$

$$+ e^2(N_2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 - N_1 \operatorname{sen}^2\varphi_1).$$

Ora in questa ultima posizione degli assi l'asse delle z è diretto secondo la normale alla superficie, e gli altri due sono compresi nel piano tangente, quello delle x essendo tangente al meridiano di A_1 e colla parte positiva rivolta al Nord: fra le coordinate del punto A_2 e l'azimut astronomico di esso sull'orizzonte del punto A_1 esiste quindi la relazione

$$\operatorname{cotg} a' = \frac{x_2}{y_2},$$

dalla quale si trae, sostituendo ad x_2 ed y_2 i loro valori ricavati più sopra:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} a' = {} & \frac{\operatorname{tang}\varphi_2 \cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\Delta\omega}{\operatorname{sen}\Delta\omega} - \\ & - \frac{e^2 . \cos\varphi_1}{\cos\varphi_2 \operatorname{sen}\Delta\omega}\left(\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \frac{\sqrt{1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi_2}}{\sqrt{1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi_1}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

Ma nel triangolo sferico limite già sopra considerato, nel quale gli angoli a_0', a_0'' sono rispettivamente opposti ai lati $90° - \varphi_2$, $90° - \varphi_1$, ed il terzo angolo è $\Delta\omega$, si ha:

$$\operatorname{cotg} a_0' = \frac{\operatorname{tang}\varphi_2 \cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\Delta\omega}{\operatorname{sen}\Delta\omega},$$

$$\cos\varphi_1 \operatorname{sen} a_0' = \cos\varphi_2 \operatorname{sen} a_0'';$$

quindi la (114) può essere scritta anche come segue:

$$\operatorname{cotg} a_0' - \operatorname{cotg} a' = \frac{e^2 . \operatorname{sen} a_0''}{\operatorname{sen} a_0' \operatorname{sen}\Delta\omega}\left(\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \frac{\sqrt{1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi_2}}{\sqrt{1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi_1}}\right) \quad (115)$$

che è la relazione rigorosa che vincola l'azimut astronomico a' al corrispondente limite sferico a_0'.

Ponendo ora per semplicità

$$\frac{e^2 . \operatorname{sen} a''}{\operatorname{sen} a_0' \operatorname{sen}\Delta\omega}\left(\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \frac{\sqrt{1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi_2}}{\sqrt{1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi_1}}\right) = \chi,$$

e sviluppando il primo membro in una serie ordinata secondo le

potenze ascendenti di e^2, si ottiene per altro:

$$\chi = \frac{e^2 . sen\, a_0''}{sen\, a_0' sen\, \Delta\omega} \left\{ sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1 + \frac{e^2 . sen\, \varphi_1}{2} (sen^2 \varphi_2 - sen^2 \varphi_1) + e^4 (\ldots) \right\}$$

$$= \frac{e^2 . sen\, a_0''}{sen\, a_0' sen\, \Delta\omega} (sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1) \left\{ 1 + \frac{e^2 . sen\, \varphi_1}{2} (sen\, \varphi_2 + sen\, \varphi_1) + e^4 (\ldots) \right\};$$

quindi, osservando che è

$$\left. \begin{aligned} tang\,(a' - a_0') &= \frac{cotg\, a_0' - cotg\, a'}{1 + cotg\, a'\, cotg\, a_0'} = \frac{\chi . sen^2 a_0'}{1 - \chi . cos\, a_0' sen\, a_0'} = \\ &= \chi . sen^2 a_0' + \chi^2 . cos\, a_0' sen^3 a_0' + \chi^3 . cos^2 a_0' sen^4 a_0' + \ldots \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

e sostituendo per χ il suo valore in funzione di e^2, avremo:

$$tang\,(a - a_0') = \frac{e^2 . sen\, a_0' sen\, a_0''}{sen\, \Delta\omega} (sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1) \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{e^2 . sen\, \varphi_1}{2} (sen\, \varphi_2 + sen\, \varphi_1) + \\ &+ \frac{e^2 . sen\, a_0'' cos\, a_0'}{sen\, \Delta\omega} (sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1) + \\ &+ e^4 (\ldots) + \ldots \end{aligned} \right\}$$

ove, se si limita l'approssimazione alle quantità dell'ordine di e^4 inclusivamente, si può introdurre l'arco $(a' - a_0')\, sen\, 1''$ in luogo della sua tangente.

Dall'espressione di $a' - a_0'$ si passa evidentemente a quella analoga di $a'' - a_0''$ invertendo gli indici delle lettere a e φ; si ha dunque

$$a' - a_0' = \frac{e^2 . sen\, a_0' sen\, a_0''}{sen\, \Delta\omega . sen\, 1''} (sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1) \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{e^2 . sen\, \varphi_1}{2} (sen\, \varphi_2 + sen\, \varphi_1) + \\ &+ \frac{e^2 . cos\, a_0' sen\, a_0''}{sen\, \Delta\omega} (sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1) + \\ &+ e^4 \{\ldots\} + \ldots \end{aligned} \right\}$$

$$a'' - a_0'' = \frac{e^2 . sen\, a_0 sen\, a_0''}{sen\, \Delta\omega . sen\, 1''} (sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1) \left\{ \begin{aligned} &-1 - \frac{e^2\, sen\, \varphi_2}{2} (sen\, \varphi_2 + sen\, \varphi_1) + \\ &+ \frac{e^2 . cos\, a_0'' sen\, a_0'}{sen\, \Delta\omega} (sen\, \varphi_2 - sen\, \varphi_1) + \\ &+ e^4 \{\ldots\} + \end{aligned} \right\}$$

e per conseguenza, sommando membro a membro:

$$a'+a''-(a'_0+a''_0)=$$

$$=\frac{e^4.sen\,a'_0 sen\,a''_0}{sen\,\Delta\omega\,.sen\,1''}(sen\,\varphi_2-sen\,\varphi_1)^2\left\{\frac{sen\,(a''_0+a'_0)}{sen\,\Delta\omega}-\frac{sen\,\varphi_2+sen\,\varphi_1}{2}\right\}+\dots$$

ossia, ponendo $2\varphi_m=\varphi_1+\varphi_2$ e $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$:

$$\left.\begin{aligned}&a'+a''-(a'_0+a''_0)=\\&=\frac{4.e^4.sen\,a'_0 sen\,a''_0\cos^2\varphi_m sen^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{sen\,\Delta\omega\,.sen\,1''}\left\{\frac{sen\,(a''_0+a'_0)}{sen\,\Delta\omega}-sen\,\varphi_m\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right\}+\dots\end{aligned}\right\}\quad(118)$$

Per dare al secondo membro di questa relazione la forma indicata nell'enunciato del teorema basta osservare che dal triangolo sferico limite sopra considerato, rappresentandone con θ il terzo lato, cioè quello che unisce i due punti A_1, A_2, si trae

$$\frac{sen\,a'_0 sen\,a''_0}{sen\,\Delta\omega}=\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 sen\,\Delta\omega}{sen^2\theta},$$

$$sen\frac{a'_0+a''_0}{2}=\frac{\cos\frac{\Delta\omega}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

$$\cos\frac{a'_0+a''_0}{2}=\frac{sen\frac{\Delta\omega}{2}sen\,\varphi_m}{\cos\frac{\theta}{2}};$$

ed infatti moltiplicando membro a membro le due ultime delle uguaglianze soprascritte si ha

$$sen\,(a''_0+a'_0)=sen\,\Delta\omega\,\frac{sen\,\varphi_m\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

e, per conseguenza, la (118) dà, con ovvie trasformazioni,

$$\left.\begin{aligned}&a'+a''-(a'_0+a''_0)=\\&=\frac{e^4.\cos\varphi_1\cos\varphi_2 sen\,\varphi_m\cos^2\varphi_m sen\,\Delta\omega\,sen^2\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}\,.sen\,1''}+\dots\end{aligned}\right\}\quad(119)$$

formula che dimostra la prima parte del teorema. Coll'approssimazione del quinto ordine inclusivo poi nella (119) si può anche porre

$$\Delta\omega \operatorname{sen} 1'' = \operatorname{sen}\Delta\omega, \quad \frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{sen} 1'' = \operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad 1 = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} = \cos\frac{\theta}{2}:$$

scriveremo quindi

$$a' + a'' - (a_0' + a_0'') = \frac{e^4 . \Delta\omega . \Delta\varphi^2 . \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \operatorname{sen}\varphi_m \cos^2\varphi_m \operatorname{sen}^2 1''}{4} + \ldots$$

od anche, sempre coll'approssimazione suddetta:

$$a' + a'' - (a_0' + a_0'') = \frac{e^4 . \Delta\omega . \Delta\varphi^2 . \operatorname{sen}\varphi_m \cos^4\varphi_m \operatorname{sen}^2 1''}{4} \qquad (120)$$

come si voleva dimostrare. È da osservare che la differenza

$$a' + a'' - (a_0' + a_0'')$$

non prende un valore apprezzabile se non per distanze geodetiche estremamente grandi, e quali non capita quasi mai di dover considerare. Ad ogni modo sarebbe molto facile tener conto anche dei termini di sesto ordine, trascurati nella deduzione precedente, calcolando i termini del quinto per mezzo della relazione (119) e ritenendo negli sviluppi anche il termine in e^6, per il quale si trova:

$$\frac{e^6}{4} . \Delta\varphi^2 . \Delta\omega . \cos^4\varphi_m \operatorname{sen}\varphi_m \{\cos^2\varphi_m \cos^2 a_0' + 2 \operatorname{sen}^2\varphi_m\}. \qquad (121)$$

Ma questa quantità esce assolutamente dai limiti di precisione ai quali possiamo aspirare coi nostri mezzi di misura e di calcolo logaritmico diretto.

25. Il teorema di *Dalby* si estende senza difficoltà al caso in cui, in luogo di due azimut astronomici reciproci si considerano invece i corrispondenti azimut geodetici, nel qual caso il suo enunciato va modificato come segue:

La somma di due azimut geodetici reciproci, contati da 0 *fino a* 180° *e dal Nord verso l'Est o verso l'Ovest secondo i casi, differisce dalla somma dei limiti sferici, cui essi tendono col decrescere dell'eccentricità, di una quantità di quarto ordine, della quale il valore prossimo è dato da:*

$$\frac{e^2 . s^3 . \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen} 2\varphi}{24 . a^3 . \operatorname{sen} 1''}$$

ovvero da:

$$\Delta\omega . \frac{s^2 . e^2 . \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi}{12 . a^2}.$$

La prima parte di questa nuova proposizione si dimostra senza veruna difficoltà osservando che se α', α'' sono gli azimut geodetici corrispondenti agli astronomici a', a'' e contati dal Nord nei due sensi come è detto sopra, si ha dalle formule (25) del Capitolo III, coll'approssimazione del terzo ordine inclusivo:

$$a' = \alpha' + \frac{s^2 . e^2 . sen\, 2\alpha' cos^2 \varphi_1}{12 . a^2 sen\, 1''}$$

$$a'' = \alpha'' + \frac{s^2 . e^2 . sen\, 2\alpha'' cos^2 \varphi_2}{12 . a^2 sen\, 1''}$$

e quindi:

$$a' + a'' = \alpha' + \alpha'' + \frac{s^2 . e^2}{12 . a^2 . sen 1''} (sen\, 2\alpha' cos^2 \varphi_1 + sen\, 2\alpha'' cos^2 \varphi_2).$$

Ora la quantità fra parentesi è evidentemente una quantità dell'ordine di $\frac{s}{a}$ giacchè, chiamando $\Delta\alpha$ la convergenza dei meridiani, si ha

$$\alpha'' = 180° - \alpha' + \Delta\alpha, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$$

mentre $\Delta\alpha$ e $\Delta\varphi$ sono ambedue dell'ordine di $\frac{s}{a}$; quindi avremo

$$a' + a'' = \alpha' + \alpha'' + \textit{termine di quarto ordine,}$$

come era da provare.

Ma per trovare l'espressione analitica del termine di quarto ordine l'approssimazione delle formule (25) del Capitolo III non è più sufficiente, ed è necessario o di completarle per calcolar quindi la differenza fra le somme $\alpha' + \alpha''$ ed $a' + a''$, o di seguire un procedimento analogo a quello sviluppato nel numero precedente, comparando la relazione

$$cotg\, \alpha' = \frac{tang\, u_2 \cos u_1 - sen\, u_1 \cos w}{sen\, w},$$

che ci è fornita dal triangolo sferico ausiliario di *Bessel* (vedi § 13), colla corrispondente relazione sferica

$$cotg\, a'_0 = \frac{tang\, \varphi_2 \cos \varphi_1 - sen\, \varphi_1 \cos \Delta\omega}{sen\, \Delta\omega},$$

che è il limite della precedente per $e = 0$. Qui preferiremo il primo dei suddetti metodi, quantunque più indiretto e più complicato, perchè ci dà occasione di porre le formule generali che danno la differenza fra un azimut astronomico ed il corrispondente azimut geodetico, anche per distanze eccezionalmente grandi.

Se nella sopra scritta relazione

$$cotg\,\alpha' = \frac{tang\,u_2 \cos u_1 - sen\,u_1 \cos w}{sen\,w} \qquad (122)$$

si introducono le latitudini sferoidiche in luogo delle ridotte [§ 12, formule (57)] si trova:

$$cotg\,\alpha' = \frac{tang\,\varphi_2 \cos\varphi_1 - sen\,\varphi_1 \cos w}{sen\,w} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 . sen^2\varphi_1}},$$

ovvero, sviluppando il secondo membro secondo le potenze crescenti di e^2:

$$cotg\,\alpha' = \frac{tang\,\varphi_2 \cos\varphi_1 - sen\,\varphi_1 \cos w}{sen\,w}\left(1 - \frac{e^2 . \cos^2\varphi_1}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots\right). \qquad (123)$$

Dalla relazione (82) o dalla (90) si vede per altro che alla differenza fra w e $\Delta\omega$, che è dell'ordine di e^2, può esser data la forma

$$w - \Delta\omega = \frac{e^2 . \theta . \cos u_0}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

essendo θ il lato che nel triangolo ausiliario di *Bessel* è opposto all'angolo w, ed u_0 la latitudine ridotta nel punto in cui la geodetica s considerata è tangente ad uno dei suoi paralleli limiti, dimodochè si ha

$$\cos u_0 = \cos u_1 sen\,\alpha' = \cos\varphi_1 sen\,\alpha' + \frac{e^2 sen^2\varphi_1 \cos\varphi_1 sen\,\alpha'}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

Ponendo quindi $w = \Delta\omega + \zeta$ sarà:

$$\zeta = \frac{e^2 . \theta . \cos\varphi_1 sen\,\alpha'}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

e per conseguenza:

$$\cos w = \cos\Delta\omega - \frac{e^2}{2} . \theta . \cos\varphi_1 sen\,\alpha' sen\,\Delta\omega + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

$$sen\,w = sen\,\Delta\omega + \frac{e^2}{2} . \theta . \cos\varphi_1 sen\,\alpha' \cos\Delta\omega + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

Sostituendo nella (123), e sviluppando, al solito, secondo le potenze crescenti di e^2, si trova:

$$cotg\,\alpha' = \frac{tang\,\varphi_2 \cos\varphi_1 - sen\,\varphi_1 \cos\Delta\omega}{sen\,\Delta\omega}\left(1 - \frac{e^2 . \cos^2\varphi_1}{2} - \frac{e^2 . \theta . \cos\varphi_1 sen\,\alpha' cotg\,\Delta\omega}{2}\right) +$$

$$+ \frac{e^2 . \theta . \cos\varphi_1 sen\,\varphi_1 sen\,\alpha'}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

ove evidentemente il primo fattore del primo termine del secondo membro è il limite cui tende la quantità $cotg\,\alpha'$ col decrescere di e^2, ossia, nelle notazioni del paragrafo precedente, è eguale a $cotg\,a_0'$. Si ha dunque:

$$cotg\,a_0' - cotg\,\alpha' = \frac{e^2 . cos^2\varphi_1\, cotg\,a_0'}{2} + \frac{e^2 . \theta . cos\,\varphi_1\, sen\,\alpha'\, cotg\,a_0'\, cotg\,\Delta\omega}{2} -$$

$$- \frac{e^2 . \theta . cos\,\varphi_1\, sen\,\varphi_1\, sen\,\alpha'}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

od anche, per essere la differenza fra a'_0 ed α' dell'ordine di e^2:

$$cotg\,a_0' - cotg\,\alpha' = \frac{e^2 . cos^2\varphi_1 cotg\,a_0'}{2} + \frac{e^2 . \theta . cos\,\varphi_1 cos\,a_0' . cotg\,\Delta\omega}{2} -$$

$$- \frac{e^2 . \theta . cos\,\varphi_1\, sen\,\varphi_1\, sen\,a_0'}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

Ora dalla formula (114) si deduce

$$cotg\,a' - cotg\,a_0' = - \frac{e^2 . cos\,\varphi_1}{cos\,\varphi_2\, sen\,\Delta\omega}(sen\,\varphi_2 - sen\,\varphi_1) + e^4 \ldots;$$

quindi, sommando membro a membro colla relazione scritta più sopra avremo:

$$cotg\,\alpha' - cotg\,a' = \chi' = \frac{e^2 . cos\,\varphi_1 (sen\,\varphi_2 - sen\,\varphi_1)}{cos\,\varphi_2\, sen\,\Delta\omega} - \frac{e^2 . cos^2\varphi_1\, cotg\,a_0'}{2} -$$

$$- \frac{e^2 . \theta . cos\,\varphi_1 cos\,a_0'\, cotg\,\Delta\omega}{2} + \frac{e^2 . \theta . cos\,\varphi_1\, sen\,\varphi_1\, sen\,a_0'}{2} + e^4\{\ldots\} + \ldots$$

che è la formola analoga alla (115) del paragrafo precedente. Ma si ha:

$$tang\,(a' - \alpha') = \frac{cotg\,\alpha' - cotg\,a'}{1 + cotg\,\alpha\; cotg\,a'} = \frac{\chi' . sen^2\,\alpha'}{1 - \chi' . cos\,\alpha'\, sen\,\alpha'}$$

ed χ' è dell'ordine di e^2; perciò con un facile sviluppo si trova, notando che α' ed a_0' differiscono anch'esse di una quantità dell'ordine ora detto:

$$a' - \alpha' = e^2 . cos\,\varphi_1\, sen\,a' \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{sen\,\varphi_2\, sen\,a_0' - sen\,\varphi_1\, sen\,a_0'}{cos\,\varphi_2\, sen\,\Delta\omega} - \dfrac{cos\,\varphi_1 cos\,a_0'}{2} - \\ - \dfrac{\theta . cos\,\alpha'\, sen\,a_0'\, cotg\,\Delta\omega}{2} + \dfrac{\theta . sen\,\varphi_1 sen^2\,a_0'}{2} + \\ + e^2\{\ldots\} + \ldots \end{array} \right\} . \quad (124)$$

Dal triangolo limite si deduce per altro, rappresentando con θ' il lato opposto all'angolo $\Delta\omega$:

$$sen\,\varphi_2 = sen\,\varphi_1 \cos\theta' + \cos\varphi_1 sen\,\theta' \cos a'_0$$

$$\cos\varphi_2 sen\,\Delta\omega = sen\,\theta' sen\,a'_0$$

$$cotg\,\Delta\omega = \frac{cotg\,\theta' \cos\varphi_1 - sen\,\varphi_1 \cos a'_0}{sen\,a'_0},$$

quindi si ha:

$$\frac{sen\,\varphi_2 sen\,a'_0 - sen\,\varphi_1 sen\,a'_0}{\cos\varphi_2 sen\,\Delta\omega} = \cos\varphi_1 \cos a'_0 - \frac{scn\,\varphi_1}{sen\,\theta'}(1 - \cos\theta') =$$

$$= \cos\varphi_1 \cos a'_0 - sen\,\varphi_1 tang\frac{\theta'}{2}$$

$$\cos\alpha' sen\,a'_0 cotg\,\Delta\omega - sen\,\varphi_1 sen^2 a'_0 = \cos\alpha' \cos\varphi_1 cotg\,\theta' -$$

$$- \cos\alpha' \cos a'_0 sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_1 sen^2 a'_0$$

e sostituendo nella (124) colla solita avvertenza sull'ordine della quantità $a' - \alpha'$:

$$a' - \alpha' = e^2 . \cos\varphi_1 sen\,\alpha' \left\{ \frac{\cos\varphi_1 \cos\alpha'}{2}(1 - \theta . cotg\,\theta') + sen\,\varphi_1 \left(\frac{\theta}{2} - tang\frac{\theta'}{2} \right) \right\} +$$

$$+ e^4 \{ \ldots \} + \ldots$$

Però le formole (68) e (69) del § 13 mostrano come la differenza fra θ ed $\frac{s}{a}$ è dell'ordine di e^2, e dello stesso ordine è evidentemente anche la differenza fra $\frac{s}{a}$ e θ', giacchè per $e^2 = 0$ il triangolo sferoidico formato dalla geodetica s ed i meridiani che la limitano si confonde col triangolo limite cui appartiene θ'; potremo dunque porre:

$$a' - \alpha' = e^2 . \cos\varphi_1 sen\,\alpha' \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{\cos\varphi_1 \cos\alpha'}{2} \left(1 - \frac{s}{a} cotg\frac{s}{a} \right) + \right. \\ \left. + sen\,\varphi_1 \left(\frac{s}{2a} - tang\frac{s}{2a} \right) \right\} + e^4 \{ \ldots \} + \ldots \end{array} \right. \quad (125)$$

che è la formula, completa e rigorosa nel termine in e^2, che dà la differenza tra un azimut astronomico ed il corrispondente azimut geodetico, e che è identica a quella pubblicata da *Bessel* nelle *Astro-*

nomischen Nachrichten senza dimostrazione.* Sviluppando le funzioni trigonometriche di $\frac{s}{a}$ fino al quarto ordine inclusivo si trova poi l'altra ben nota ai geodeti:

$$a' - \alpha' = \frac{e^2 . s^2 . \cos^2 \varphi_1 \operatorname{sen} \alpha'}{6 . a^2 \operatorname{sen} 1''} \left(\cos \alpha' - \frac{s}{4 . a} \operatorname{tang} \varphi_1 \right) \qquad (126)$$

ove l'angolo $a' - \alpha'$ si suppone contato in secondi.

È da notare che questa formula non è completa fino ai termini del quarto ordine propriamente detto, giacchè manca il termine in $e^4 s^2$: ma quando il rapporto $\frac{s}{a}$ è molto piccolo il termine in $e^4 s^2$ diviene affatto trascurabile come quello in $e^2 s^3$, mentre quando $\frac{s}{a}$ è prossimo all'unità il termine in $e^2 s^3$ diviene di un ordine più grande del termine in $e^4 s^2$, che rimane sempre di una grandezza inferiore alla precisione compatibile coi nostri mezzi di misura. La (126) può adunque essere considerata come interamente generale.

26. Applicando ora la formula (126) al caso degli azimut reciproci α', α'' si trova, tenuto conto del senso in cui questi, per ipotesi, sono contati:

$$a' + a'' - (\alpha' + \alpha'') = \frac{s^2 . e^2}{6 . a^2} (\cos^2 \varphi_1 \operatorname{sen} \alpha' \cos \alpha' + \cos^2 \varphi_2 \operatorname{sen} \alpha'' \cos \alpha'') -$$

$$- \frac{s^3 . e^2}{24 . a^3} (\cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \alpha' + \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \alpha'') +$$

$$+ e^4 \{ \ldots \} + \ldots$$

e questa formula, ricordando che la somma degli azimut astronomici $a' + a''$ non differisce che di una quantità di quinto ordine dalla somma dei corrispondenti limiti sferici, e che α' ed α'' differiscono dai loro limiti sferici di una quantità dell'ordine di e^2, si può scrivere anche come segue:

$$a'_0 + a''_0 - (\alpha' + \alpha'') = \frac{s^2 . e^2}{6 . a^2} (\cos^2 \varphi_1 \operatorname{sen} a'_0 \cos a'_0 + \cos^2 \varphi_2 \operatorname{sen} a''_0 \cos a''_0) -$$

$$- \frac{s^3 . e^2}{24 . a^3} (\cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} a'_0 + \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} a''_0$$

$$+ e^4 \{ \ldots \} + \ldots$$

* Vedi *Abhandlungen* v. FRIEDRICH WILHELM BESSEL herausgegeben v. Rudolf Engelmann. III Band, § 125.

Di qui, osservando che dal triangolo limite si ha

$$\cos\varphi_2 \operatorname{sen} a_0'' = \cos\varphi_1 \operatorname{sen} a_0',$$

si trae con semplicissime trasformazioni:

$$a_0' + a_0'' - (\alpha' + \alpha'') = \frac{s^2 . e^2}{6 . a^2} \frac{\operatorname{sen} a_0'}{\operatorname{sen} a_0''} \cos^2\varphi_1 \operatorname{sen}(a_0'' + a_0') -$$

$$- \frac{s^3 . e^2}{24 . a^3} \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\alpha' (\operatorname{sen}\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1) + \ldots$$

$$= \frac{s^2 . e^2 . \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{6 . a^2} \operatorname{sen}(\alpha' + \alpha'') - \frac{s^3 . e^2 . \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\varphi_m \cos\frac{\Delta\varphi}{2}}{12 . a^3} + \ldots$$

È facile vedere per altro come, rappresentando con $\Delta\alpha$ la convergenza dei meridiani che limitano l'arco s, sia $\alpha'' + \alpha' = 180° - \Delta\alpha$, e come inoltre, per gli sviluppi (33) e (12) dei §§ 7 e 2, si possa porre:

$$\alpha'' + \alpha' = 180° - \frac{s . \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{tang}\varphi_1}{a} + \ldots$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \frac{s . \cos\alpha'}{a} + \ldots$$

per conseguenza alla relazione scritta più sopra, pur mantenendo l'approssimazione dell'ordine $\frac{e^2 . s^3}{a^3}$, può esser data la seguente forma

$$a_0' + a_0'' - (\alpha' + \alpha'') = \frac{s^3 . e^2 . \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\alpha'}{12 . a^3 \operatorname{sen} 1''} = \frac{e^2 . s^3 . \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen} 2\varphi}{24 . a^3 \operatorname{sen} 1''} \quad (127)$$

(ove è stato aggiunto il fattore $\frac{1}{\operatorname{sen} 1''}$ perchè il primo membro rimanesse espresso in secondi) od anche:

$$a_0' + a_0'' - (\alpha' + \alpha'') = \Delta\omega \frac{s^2 . e^2 . \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi}{12 . a^2} \quad (128)$$

come si voleva dimostrare.

27. Il teorema di *Dalby*, così modificato, offre un mezzo semplicissimo per calcolare la convergenza $\Delta\alpha$ dei meridiani, corrispondente ad una data geodetica s, in funzione delle latitudini degli estremi di questa e della loro differenza di longitudine: ed infatti, rappresen-

tando con δ la quantità $a'_0 + a''_0 - (\alpha' + \alpha'')$, dal triangolo sferico limite abbiamo

$$tang \frac{\Delta\alpha - \delta}{2} = \frac{sen \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} tang \frac{\Delta\omega}{2} \qquad (129)$$

da cui si trae il valore di $\Delta\alpha - \delta$, mentre la quantità δ può esser calcolata dalla (128) introducendo in luogo di s un valore approssimato, per esempio il suo valore sferico. Nella maggior parte dei casi però la quantità δ è affatto trascurabile, giacchè si ha più che sufficiente precisione arrestando l'approssimazione ai termini di terzo ordine: allora è utile trasformare con uno sviluppo in serie anche la (129), che sarebbe poco conveniente al calcolo per logaritmi a causa della piccolezza di $\Delta\alpha$ e di $\Delta\omega$. Col noto metodo delle approssimazioni successive si trova così, tenendo conto delle grandezze di quarto ordine:

$$\Delta\alpha - \delta = \Delta\omega \frac{sen \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} \left\{ 1 + \frac{\Delta\omega^2 . sen^2 1''}{12} \left(1 - \frac{sen^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{cos^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} \right) \right\}$$

od anche, sempre colla suddetta approssimazione:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\omega . sen \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} \left(1 + \frac{\Delta\omega^2 . sen^2 1'' cos^2 \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{12} \right). \qquad (130)$$

28. Tornando ora alla determinazione diretta della distanza geodetica s fra due punti dei quali sono date le posizioni geografiche e degli azimut geodetici in questi, ricordiamo che dal triangolo sferico ausiliario di *Bessel* si ha, indicando al solito in generale con u la latitudine ridotta:

$$\frac{sen \alpha_1}{sen \alpha_2} = \frac{cos u_2}{cos u_1}$$

ove α_1, α_2 rappresentano gli azimut che negli estremi di s corrispondono ad una unica direzione di questo arco, in modo che $\alpha_2 - \alpha_1$ coincide colla convergenza $\Delta\alpha$ dei meridiani limitanti. Se ne deduce senza difficoltà:

$$tang \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = cotg \frac{u_1 + u_2}{2} cotg \frac{u_2 - u_1}{2} tang \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \qquad (131)$$

formula che, unita alle precedenti (128) e (129), dà il mezzo di calcolare gli azimut cercati α_1 ed α_2. Nel caso più comune in cui $\alpha_2 - \alpha_1$ e $u_2 - u_1$ sono da considerare come quantità piccole del primo ordine, invece della (131) è poi conveniente di adottare la formula

$$tang\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta u}cotg\frac{u_2+u_1}{2}\left(1+\frac{\Delta\alpha^2-\Delta u^2}{12}sen^2\,1''\right) \quad (132)$$

che si ricava dalla (131) stessa con ovvii sviluppi in serie ed è approssimata fino al terzo ordine inclusivamente. Ottenuti gli azimut α_1, α_2 la ricerca della distanza s non presenta più veruna difficoltà giacchè si hanno tutti gli elementi per calcolare le costanti ausiliarie che compariscono nella formula (69) del § 13. Così le (64), (66), (67) daranno:

$$\left.\begin{aligned} cotg\,M &= cotg\,u_1\cos\alpha_1 \\ \cos u_0 &= \cos u_1\,sen\,\alpha_1 \\ tang\,E &= \frac{e\,.\,sen\,u_0}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

e dal triangolo ausiliario di *Bessel* si avrà:

$$\left.\begin{aligned} tang\frac{\theta}{2} &= \frac{tang\frac{\Delta u}{2}\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \\ tang\frac{\theta}{2} &= \frac{cotg\,u_m\,sen\,\frac{\Delta\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

o, per il caso in cui il tener conto della quantità del terzo ordine sia sufficiente:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\Delta u\,.\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\left(1-\frac{\Delta u^2\,.\,tang^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\,.\,sen^2\,1''}{12}\right) \\ \theta &= \frac{\Delta\alpha\,.\,cotg\,u_m}{sen\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\left\{1-\frac{\Delta\alpha^2}{24}\left(1+\frac{2\,cotg^2\,u_m}{sen^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\right)\right\} \end{aligned}\right\} . \quad (135)$$

Finalmente si otterrà s dalla relazione

$$s = a\sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos^2\frac{E}{2}}{\cos E}\left\{A_0 . \theta . \operatorname{sen} 1'' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n}{n}\operatorname{sen} n\theta \cos n(2M+\theta)\right\}, \quad (136)$$

i valori di A_0, A_1, A_2, A_3... essendo quelli specificati nelle (68) del § 13 suddetto.

Applicando questo metodo generale al caso considerato alla fine del § 22 si ha il seguente calcolo (pag. 192) per ottenere la distanza *Tremiti-Lissa,* e l'orientamento di tali due punti l'uno rispetto all'altro.

Gli azimut non concordano coi resultati del § 22 che nei decimi di secondo, ma i centesimi provenienti dal calcolo sono illusorii, dacchè è stato tenuto conto solo dei millesimi nelle latitudini e nelle longitudini (vedi discussione nei §§ 3 e 6). La distanza s ottenuta tanto col metodo del § 22 quanto in questa ultima applicazione non differisce che di $0^m,03$ dal dato di partenza indicato nel § 11; la concordanza è quindi superiore all'approssimazione tenuta nei calcoli riportati.

Calcolo della distanza e dell'orientamento Tremiti-Lissa.

$\varphi_2 = 43°.01'.44'',867$
$\varphi_1 = 42\ .07\ .16\ ,269$
$\Delta\varphi = 0\ .54\ .28\ ,598$
$\varphi_m = 42\ .34\ .30\ ,568$
$\Delta\omega = 0\ .36\ .25\ ,485$
$\frac{\Delta\alpha}{2} = 0\ .12\ .19\ ,329$
$\alpha_m = 26\ .17\ .51\ ,040$
$\alpha_1 = 26\ .05\ .31\ ,711$
$\alpha_2 = 26\ .30\ .10\ ,369$
$u_0 = 70\ .55\ .49\ ,835$
$E = 4\ .25\ .47\ ,98$
$M = 45\ .05\ .58\ ,9$
$2\,M = 90\ .11\ .57\ ,8$
$4\,M = 180\ .23\ .55\ ,6$
$\theta = 1\ .00\ .44\ ,4$
$2\,\theta = 2\ .01\ .28\ ,8$

Risultati

$\alpha_1 = 26\ .05\ .31\ ,7$
$\alpha_2 = 26\ .30\ .10\ ,4$
$s = 112488{,}14$
$\log s = 5{,}0511067{,}2$

$u_2 = 42.56.00{,}3985$
$u_1 = 42.01.32{,}7438$
$\Delta u = 0.54.27{,}6547$
$u_m = 42.28.46{,}5711$

$\log . \operatorname{sen} u_0 = 9{,}9754876$
$\log . e = 8{,}9122052$
$\operatorname{colg} . \sqrt{1 - e^2} = 0{,}0014542$
$\log . \operatorname{tang} E = 8{,}8891470$

$\log . \operatorname{tang} u_1 = 9{,}9548301$
$\log . \cos \alpha_1 = 9{,}0466812$
$\log . \operatorname{tang} M = 0{,}0015113$

$\log . \operatorname{tang} \frac{\Delta\omega}{2} = 7{,}7240966.8$
$\log . \operatorname{sen} \varphi_m = 9{,}8303042.1$
$\operatorname{colg} . \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = 0{,}0000136.0$
$\log . \operatorname{tang} \frac{\Delta\alpha}{2} = 7{,}5544144.9$
$\log . \operatorname{colg} u_m = 0{,}0382579.1$
$\log . \operatorname{cotg} \frac{\Delta u}{2} = 2{,}1012099.0$
$\log . \operatorname{tang} \alpha_m = 9{,}6938823.0$

$\log . \cos^2 \frac{E}{2} = 9{,}9993508.0$
$\operatorname{colg} . \cos E = 0{,}0012994.4$
$\log b = 6{,}8031892.8$
$6{,}8038395.2$
$\log . \operatorname{sen} 1'' \; 4{,}6855748.7$
$1{,}4894143.9$

$\log . \cos \frac{\Delta\alpha}{2} = 9{,}9999972.1$
$\operatorname{colg} . \cos \varphi_m = 0{,}0474469.8$
$\log . \operatorname{tang} \frac{\Delta u}{2} = 7{,}8987901.0$
$\log . \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = 7{,}9462342.9$
$5{,}3144138.3$
$\log . \frac{\theta}{2} = 3{,}2606481.2$
$\log 2 = 0{,}3010300.0$
$\log \theta = 3{,}5616781.2$

$\log . \cos u_1 = 9{,}8708975.9$
$\log . \operatorname{sen} \alpha_1 = 9{,}6432710.6$
$\log . \cos u_0 = 9{,}5141686.5$

1.° termine	2.° termine	3.° termine
1,4894143.9	6,80384	6,804
$\log . A_0 = 0{,}0000002.4$	$\log . B_0 = 6{,}87391$	$\log . C_0 = 3{,}447$
$\log . \theta = 3{,}5616781.2$	$\log . 2 = 0{,}30103$	$\log . \operatorname{sen} 2\,\theta = 8{,}548$
$\log . I = 5{,}0510927.5$	$\log . \operatorname{sen} \theta = 8{,}24723$	$\log . \cos (4\,M + 2\,\theta) = 9{,}999$
corr. II . . . . . + 137,4	$\log . \cos (2\,M + \theta) = 8{,}32528$	$\log III = 8{,}798$
corr. III . . . . . + 2,3	$\log II = 0{,}55129$	
$\log s = 5{,}0511067.2$		

CAPITOLO IX.

DELLA RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUPERFICIE SOPRA UN'ALTRA.

1. Coi metodi di misura e di calcolo studiati fin qui si possono riferire le singolarità della crosta terrestre ad una superficie ipotetica di forma nota (ellissoide terrestre), per modo che esse rimangano perfettamente determinate di posizione e, per così dire, analiticamente costruite. A prima giunta sembra che il miglior modo per acquistare quindi un'idea sintetica della distribuzione relativa dei luoghi consista nel riportare le linee ed i punti, che si vogliono considerare, sopra una superficie simile alla superficie fisica o matematica della terra, a seconda dei casi, ma di piccole dimensioni, in modo analogo a quello secondo cui sono realmente disposti, così che gli angoli rimangano inalterati e le distanze, contate lungo fili tesi sulla superficie rappresentante, sieno ridotte in una data proporzione. Ma questo metodo, tutt'al più applicabile nelle grandi sintesi approssimative, non risponde alle richieste della pratica, in cui per solito si ha da fermare l'attenzione sopra una zona parziale, raffigurata in tutte le sue particolarità caratteristiche, per intuire la disposizione di queste non solo, ma altresì per risalire speditamente alle distanze ed agli orientamenti per mezzo di facili misure e di calcoli elementari.

D'altra parte per zone limitate, la superficie matematica terrestre si confonde quasi col suo piano tangente, ed era quindi naturale che i primi tentativi per rappresentarle fossero fatti su di un piano e che, in seguito, dopo accertata la sferoidicità del nostro pianeta, si cercasse di usufruire della notevole intimità del piano colla superficie suddetta col rappresentare su di esso per mezzo di

proiezioni ortogonali o centrali anche zone sempre più larghe fino alla costruzione delle prime carte generali. Così a poco a poco si impose agli antichi geografi, guidati dai bisogni della navigazione, del commercio e dell'arte della guerra, il problema di rappresentare sulle carte le irregolarità e le diversità di costituzione fisica delle varie regioni della terra, subordinando la legge di proiezione allo scopo cui le carte erano destinate, finchè sviluppata l'idea dell'arbitrarietà della legge, non si giunse, sotto la scorta dei più grandi analisti e geometri, a considerare la costruzione delle carte come un caso particolare di una teoria molto più generale che può servire anche in altre importanti questioni di alta geodesia.

Ed invero se date due superficie si stabiliscono delle relazioni fra le coordinate dei punti dell'una e le coordinate di quelli dell'altra, per modo che ad ogni punto della prima corrispondano uno o più punti in numero discreto sulla seconda, e reciprocamente, e le corrispondenze sono esprimibili per funzioni continue dentro certi campi, è chiaro che in questi limiti ad una figura tracciata sopra una delle due superficie corrisponde sulla seconda una figura che è come l'immagine di quella. È facile comprendere come, teoreticamente parlando, per mezzo delle corrispondenze suddette si possa sempre risalire dalle proprietà geometriche ed analitiche di una immagine a quelle della figura rappresentata, e parecchi passaggi siffatti abbiamo veduto nei precedenti capitoli, ove più volte è stata tacitamente ridotta la soluzione di problemi ellissoidici a quella dei problemi corrispondenti sulla sfera. La teoria della curvatura integrale delle superficie è anch'essa, ad esempio, un caso speciale di rappresentazione sferica, la legge di corrispondenza essendo data dalle relazioni

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

fra le coordinate cartesiane X, Y, Z di un punto della sfera e le coordinate cartesiane della superficie considerata, che entrano implicitamente nei coefficienti differenziali parziali p e q. Così pure, in generale, le integrazioni fatte per mezzo di un cambiamento di

variabili non sono in ultima analisi che trasformazioni di superficie o di spazii, le corrispondenze essendo scelte per modo da rendere più facile sulla superficie o nello spazio trasformato una sintesi che mal si poteva eseguire sulla superficie o nello spazio dato.

2. Supponiamo che i punti della superficie da rappresentare sieno riferiti ad un doppio sistema di linee coordinate tracciate sulla superficie stessa e corrispondenti ai parametri variabili u, v, per modo che il suo elemento lineare sia dato da

$$ds = \sqrt{E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2}, \qquad (1)$$

e che, analogamente, per la seconda superficie si abbia:

$$ds' = \sqrt{E'.du_1^2 + 2.F'.du_1.dv_1 + G'.dv_1^2}. \qquad (2)$$

Affinchè a ciascun punto della superficie $S(u,v)$ corrispondano uno o più punti in numero discreto sulla superficie $S'(u_1, v_1)$ è necessario e sufficiente il porre

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_{u_1}(u,v) \\ v_1 &= f_{v_1}(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

essendo f_{u_1}, f_{v_1} simboli di funzioni arbitrarie, tali però che per ogni valore reale di u e v si abbia almeno un valore reale per u_1 ed uno per v_1. Le relazioni (3), che sintetizzano qui le corrispondenze, comprendono dunque implicitamente tutte le rappresentazioni possibili, che si ottengono in pratica individuando le funzioni arbitrarie suddette, e di queste la scelta può esser fatta per modo da dare alla rappresentazione delle proprietà speciali assegnate a priori. Così ponendo

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_{u_1}(u) \\ v_1 &= f_{v_1}(v) \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

le linee u_1 della *superficie rappresentante* vengono a corrispondere alle linee u della *superficie rappresentata,* e le v_1 alle v, e se, particolareggiando più oltre, si volesse ad esempio che al sistema dei meridiani ed a quello dei paralleli dello sferoide terrestre corrispondessero in un piano rispettivamente due sistemi di rette ortogonali, basterebbe porre, nelle consuete notazioni della latitudine e della longitudine e rappresentando con x,y le coordinate cartesiane del piano:

$$\begin{aligned} x &= f_x(\omega) \\ y &= f_y(\varphi) \end{aligned}$$

e si potrebbero per di più caratterizzare le funzioni arbitrarie f_x, f_y in modo da dare alla rappresentazione qualche altra proprietà.

3. Supponiamo per un momento che nelle corrispondenze (3) si potessero determinare le funzioni arbitrarie per modo che il rapporto fra l'elemento di una linea della superficie rappresentata ed il corrispondente elemento della linea rappresentante avesse un valore invariabile n, indipendente cioè dalla posizione e dalla direzione degli elementi suddetti: in tal caso ad un triangolo curvilineo elementare di lati infinitamente piccoli tracciato sulla superficie rappresentata corrisponderebbe in generale sull'altra un triangolo curvilineo elementare simile al primo, giacchè, secondo lo spirito del calcolo differenziale, tali triangoli potrebbero esser considerati come piani. Da ciò si vede come nella rappresentazione gli angoli fra le linee rimarrebbero inalterati, di modo che all'elemento di superficie (vedi *Introduzione*, § 9)

$$d\sigma = sen\,\omega \,.\, ds_u\, ds_v$$

verrebbe a corrispondere un parallelogrammo di lati infinitamente piccoli, la cui superficie avrebbe per espressione analitica

$$d\sigma_1 = sen\,\omega \,.\, ds'_u\, ds'_v$$

essendo

$$\frac{ds'_u}{ds_u} = \frac{ds'_v}{ds_v} = n = cost.,$$

e sarebbe quindi

$$d\sigma_1 = n^2 \,.\, d\sigma$$

od anche, integrando fra limiti dati di u, v, ed indicando con σ_1 l'area corrispondente ad un'area data σ:

$$\sigma_1 = n^2 \,.\, \sigma:$$

la rappresentazione conserverebbe quindi altresì un rapporto costante fra le aree che si corrispondono.

È facile trovare le condizioni cui debbono soddisfare le funzioni f_{u_1}, f_{v_1} affinchè ogni figura rappresentante sia simile, nel senso qui sopra indicato, alla figura rappresentata, ed infatti dalla relazione

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{E' \,.\, du_1^2 + 2 \,.\, F' \,.\, du_1 \,.\, dv_1 + G' \,.\, dv_1^2}}{\sqrt{E \,.\, du^2 + 2 \,.\, F \,.\, du \,.\, dv + G \,.\, dv^2}}$$

che vincola in una rappresentazione qualunque due elementi ds_1, ds che si corrispondono, introducendo in luogo di du_1, dv_1 i loro va-

lori in funzione di u, v, tratti dalle corrispondenze (3), e ponendo per semplificare

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= E'\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2.F'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \\ F_1 &= E'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + F'\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u} + F'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G'\frac{\partial v_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u} \\ G_1 &= E'\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2.F'\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

si trae l'altra

$$\frac{E_1\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2.F_1\frac{du}{dv} + G_1}{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2.F\frac{du}{dv} + G} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \quad (6)$$

Ma la direzione θ di una linea s rispetto alla $v = cost.$ (*azimut*) è data (vedi *Introduzione*, § 6) da:

$$cotg\,\theta = \frac{E\frac{du}{dv} + F}{\sqrt{E.G - F^2}},$$

ed intorno a ciascun punto dipende solo dal valore che prende il rapporto $\frac{du}{dv}$ lungo la linea stessa: se dunque il rapporto (6) deve esser invariabile qualunque sieno le coordinate u, v e l'azimut θ si dovrà avere

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G} = n^2 = cost. \quad (7)$$

d'onde, tenendo conto delle (5), si traggono per le condizioni necessarie e sufficienti alla similitudine sopra considerata le tre equazioni a differenze parziali

$$\left.\begin{aligned} E'\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2.F'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 &= E.n^2 \\ E'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + F'\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u} + F'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G'\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} &= F.n^2 \\ E'\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2.F'\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 &= G.n^2 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

fra le due funzioni arbitrarie u_1, v_1 di corrispondenza e le variabili indipendenti u, v.

Date dunque due superficie, non è possibile in generale stabilire delle corrispondenze fra i loro punti in modo da rappresentarne similmente una sull'altra; ma se si lascia indeterminata la natura di una di esse, l'integrazione delle equazioni (8) conduce a determinare una classe ben definita di superficie, che sono dette *simili* fra loro e simili alla superficie data.

È chiaro che le condizioni di applicabilità di una superficie sopra un'altra si ottengono ponendo nelle (8) $n = 1$, giacchè per $n = 1$ tanto gli elementi infinitesimi delle linee quanto quelli delle aree che si corrispondono riescono uguali. Per due superficie che possono essere applicate l'una sull'altra sarà dunque, in generale

$$E_1 = E \quad , \quad F_1 = F \quad , \quad G_1 = G : \tag{9}$$

quindi tutte le superficie, per cui le quantità E_1, F_1, G_1 possono essere espresse rispettivamente per mezzo delle stesse funzioni di u, v sono applicabili l'una sull'altra; inoltre se una superficie è simile ad un'altra, anche le superficie applicabili delle due classi sono simili fra loro. Le condizioni (9) di applicabilità dimostrano poi come tutti gli enti geometrici ed analitici di una superficie (per la quale

$$ds = \sqrt{E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2}$$

rappresenta l'elemento lineare) che possono essere espressi in funzione di E, F, G, u, v e delle loro derivate soltanto, come sono gli angoli fra le linee, le geodetiche, le curvature integrali, ecc., quando la superficie viene applicata sopra un'altra, o, ciò che vale lo stesso, è considerata come un velo flessibile ed inestensibile e trasformata in un modo qualunque, conservano lo stesso significato e le stesse proprietà geometriche ed analitiche e le stesse equazioni rispetto alla nuova superficie così generata, quantunque considerati assolutamente nello spazio abbiano cambiato di natura. Così, per esempio, se si osserva che alla espressione analitica della misura di curvatura in un punto di una superficie qualunque può essere data la forma (34) dell'Introduzione (vedi vol. 1.° pag. 33) si può concludere senz'altro che tale quantità è nulla per tutta le superficie applicabili sul piano, e che quindi per queste si deve avere [vedi formula (29) dell'Introduzione]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0, \tag{10}$$

che è appunto, come è noto, l'equazione differenziale caratteristica delle superficie sviluppabili.

4. Ma se data e la superficie rappresentante e la rappresentata è impossibile in generale di ottenere una rappresentazione simile, tale cioè che conservi contemporaneamente gli angoli ed un rapporto costante fra le aree che si corrispondono, si possono per altro determinare in un numero infinito di maniere le corrispondenze in guisa che l'una o l'altra di tali proprietà sia separatamente soddisfatta; si ottengono così due classi distinte di rappresentazioni che, prese in complesso, rispondono a tutti i bisogni della geografia matematica considerata nei suoi rapporti colle scienze applicate, e che meritano per conseguenza di essere attentamente studiate.

Le rappresentazioni che conservano gli angoli sono dette *conformi* (*Gauss*) se non si tratta particolarmente della rappresentazione dell'ellissoide o della sfera sul piano la quale prende una denominazione speciale (proiezione *autogonale* od *ortomorfa*), e sono tutte incluse nelle seguenti equazioni a differenze parziali

$$\left.\begin{aligned} E'\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2.F'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 &= E.\psi(u,v) \\ E'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + F'\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u} + F'\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G'\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} &= F.\psi(u,v) \\ E'\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2.F'\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 &= G.\psi(u,v) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

che si traggono dalle condizioni di similitudine (8) considerandovi n come una funzione finita e continua di u e v da determinare per modo che si abbia

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}.$$

Se consideriamo infatti sopra la superficie $S(E, F, G)$ un triangolo elementare $M M_1 M_{11}$ di lati infinitamente piccoli, ed $m m_1 m_{11}$ è il triangolo che gli corrisponde sulla superficie $S'(E', F', G')$, il punto m corrispondendo ad M, e il punto m_1 al punto M_1 e le corrispondenze essendo scelte in guisa che le condizioni (11) sieno soddisfatte (lo che è evidentemente sempre possibile a causa della nuova incognita ψ introdotta), è chiaro che si avrà

$$\frac{MM_1}{mm_1} = \frac{MM_{11}}{mm_{11}} = \sqrt{\psi},$$

giacchè, per le relazioni (11), $\sqrt{\psi}$, che esprime il rapporto tra due elementi che si corrispondono, se questi partono da uno stesso punto

riesce indipendente dalla loro direzione. Passando dal punto M al punto infinitamente prossimo M_1 il suddetto rapporto varia di $d\sqrt{\psi}$ e siccome $\sqrt{\psi}$ ha, per ipotesi, un valore finito ed è funzione continua di u, v, si potrà porre, secondo lo spirito del calcolo differenziale:

$$\frac{M_1 M_{11}}{m_1 m_{11}} = \frac{M_1 M}{m_1 m} = \sqrt{\psi}$$

ed i due triangoli elementari corrispondentisi potranno esser considerati come simili, in modo che l'angolo (finito) in M sarà eguale al suo corrispondente in m. Le rappresentazioni incluse nelle equazioni differenziali (11) sono dunque conformi e possono anche, con *Gauss*, esser dette *simili nelle loro parti infinitesime*. Il rapporto fra le aree elementari che si corrispondono varia poi in esse da punto a punto, di modo che le aree finite vengono ad essere più o meno deformate nella rappresentazione a seconda della posizione che occupano sulla superficie rappresentata, giacchè si ha in generale per l'espressione dell'area σ' rappresentante

$$\sigma' = \int \psi \, . \, d\sigma,$$

l'integrale essendo esteso fra i limiti che comprendono l'area rappresentata σ. Da ciò può prevedersi l'importante significato analitico che ha la funzione ψ nella teoria delle rappresentazioni conformi.

5. La ricerca delle corrispondenze che danno le proiezioni conformi fra due superficie qualunque è dunque ridotta alla integrazione delle equazioni differenziali (11), la quale, se non si sa eseguire nel caso generalissimo di coordinate qualunque, riesce invece semplicissima se queste vengono scelte convenientemente.

Se supponiamo infatti che sopra ambedue le superficie che si considerano sieno stati per doppii sistemi di linee di riferimento scelti dei doppii sistemi isotermi, per guisa che gli elementi lineari ds, ds_1 siano dati rispettivamente da

$$ds = \sqrt{\lambda (d\alpha^2 + d\beta^2)}, \quad ds_1 = \sqrt{\lambda_1 (d\alpha_1^2 + d\beta_1^2)},$$

le equazioni generali (11) danno:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha}\right)^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \beta}\right)^2 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha}\frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

da cui, rappresentando con Ω il valore comune dei rapporti

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} : \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha}, \quad -\frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} : \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta},$$

si trae

$$(1+\Omega^2)\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha}\right)^2 = (1+\Omega^2)\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta}\right)^2,$$

e quindi, dacchè Ω non può essere una quantità immaginaria:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} = \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta}.$$

Per conseguenza della seconda delle (12) si deduce

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} = \mp \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta};$$

a meno che non sia

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} = 0$$

nel qual caso la precedente relazione si trae direttamente dalla prima delle (12) medesime. Ma le relazioni soprascritte non sono che le condizioni necessarie e sufficienti perchè il complesso $\alpha_1 \pm i\beta_1$ sia funzione del complesso $\alpha \pm i\beta$: l'integrale generale delle (12) è quindi dato da

$$\alpha_1 \pm i.\beta_1 = \Psi(\alpha \pm i.\beta), \qquad (13)$$

essendo Ψ simbolo di funzione arbitraria, come del resto avevamo già trovato nell'*Introduzione* (vedi vol. I, pag. 24).

6. È dunque sempre possibile di rappresentare conformemente una superficie sopra un'altra in un numero infinito di maniere, e ciascuna rappresentazione conforme corrisponde ad una forma particolare della funzione Ψ, che perciò può esser detta *complesso di conformità*. Dalla (13) è facile vedere, ricordando le considerazioni del § 12 dell'Introduzione, che *tutte le ora dette rappresentazioni conformi si ottengono facendo corrispondere linearmente tutti i sistemi isotermi di una delle due superficie con tutti i sistemi isotermi dell'altra:* ma questa proposizione può essere anche dimostrata in modo diretto come segue.

Sieno, come sopra, α e β i parametri coordinati isotermi della superficie S, e scegliamo per linee coordinate della superficie S' le linee u_1, v_1 che rispettivamente corrispondono in un modo dato qualunque alle linee α e β. In tal caso le corrispondenze verranno necessariamente (vedi § 2) ad aver la forma:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_{u_1}(\alpha) \\ v_1 &= f_{v_1}(\beta) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

e quindi le condizioni (11) necessarie e sufficienti perchè la rappresentazione caratterizzata da queste ultime relazioni (*a*) sia conforme diverranno

$$E'\left(\frac{du_1}{d\alpha}\right)^2 = \lambda . \psi(\alpha,\beta)$$

$$F' = 0$$

$$G'\left(\frac{dv_1}{d\beta}\right)^2 = \lambda . \psi(\alpha,\beta)$$

per modo che l'elemento lineare della superficie S' sarà dato da

$$ds_1 = \sqrt{\lambda . \psi(\alpha,\beta)\left\{\left(\frac{d\alpha}{du_1}\right)^2 du_1^2 + \left(\frac{d\beta}{dv_1}\right)^2 dv_1^2\right\}}.$$

Ora le corrispondenze (*a*) mostrano come i coefficienti differenziali $\frac{d\alpha}{du_1}$, $\frac{d\beta}{dv_1}$ possono essere rispettivamente espressi per mezzo di funzioni della sola u_1 e della sola v_1, quindi i parametri u_1, v_1 corrispondono a linee isoterme della superficie S', e si può formulare il seguente teorema:

In una rappresentazione conforme di una superficie sopra un'altra ad un doppio sistema di linee isoterme corrisponde un doppio sistema di linee isoterme.

Resta a dimostrare che *ad un doppio sistema qualunque di linee isoterme di una superficie, si può sempre far corrispondere un doppio sistema qualunque di linee isoterme di un'altra superficie per modo da ottenere una rappresentazione conforme.* Sieno per ciò

$$ds = \sqrt{\lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)}, \quad ds_1 = \sqrt{\lambda_1(d\alpha_1^2 + d\beta_1^2)}$$

gli elementi lineari delle due superficie date, espressi in coordinate isoterme α, β ed α_1, β_1 e poniamo le relazioni arbitrarie

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= f_{\alpha_1}(\alpha) \\ \beta_1 &= f_{\beta_1}(\beta) \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

per esprimere che, per ipotesi, la linea α_1 corrisponde alla linea α, e la β_1 alla β e ciò in un modo qualunque. Dalle equazioni fondamentali (11) si ha allora per unica condizione di conformità

$$\left(\frac{d\alpha_1}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{d\beta_1}{d\beta}\right)^2,$$

giacchè la seconda delle (11) resta identicamente soddisfatta a causa delle (*b*) e di $F' = 0$, mentre ψ è simbolo di fuzione arbitraria.

Ma $\frac{d\alpha_1}{d\alpha}$, $\frac{d\beta_1}{d\beta}$ sono rispettivamente funzioni della sola α e della sola β, quindi la precedente equazione equivale a porre

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha} = \pm \frac{d\beta_1}{d\beta} = c_1 = costante,$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= c_1\alpha + k_1 \\ \pm\beta_1 &= c_1\beta + k_2 \\ \alpha_1 \pm i.\beta_1 &= c_1(\alpha + i.\beta) + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

c_1 e c_2 rappresentando delle costanti arbitrarie, e c_2 potendo essere anche un complesso. Ponendo dunque:

$$f_{\alpha_1} = c_1\alpha_1 + k_1, \quad f_{\beta_1} = \pm c_1\beta + k_2$$

si ottiene una rappresentazione conforme, e ciò dimostra l'ultimo teorema enunciato e la proposizione indicata al principio di questo paragrafo.

7. Ritornando ora alla relazione generale (13), rappresentiamo separatamente con Ψ_1 e con Ψ_2 le due funzioni coniugate che corrispondono al complesso di conformità Ψ, ponendo

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + i.\beta_1 &= \Psi_1 \\ \alpha_1 - i.\beta_1 &= \Psi_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Se si indicano inoltre con Ψ_1', Ψ_2' le derivate totali di Ψ_1, Ψ_2 prese rispetto ai complessi di cui queste sono funzioni avremo

$$d\alpha_1 + i.d\beta_1 = (d\alpha + i.d\beta)\Psi_1'$$
$$d\alpha_1 - i.d\beta_1 = (d\alpha - i.d\beta)\Psi_2'$$

e quindi il rapporto $n = \sqrt{\Psi}$ fra due elementi che si corrispondono in una rappresentazione conforme caratterizzata dal complesso Ψ sarà dato da:

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_1(d\alpha_1^2 + d\beta_1^2)}{\lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)}} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}\Psi_1'\Psi_2'}. \qquad (16)$$

Questa espressione di n è molto importante giacchè, dato il complesso Ψ, permette di risalire, come già abbiamo accennato, da un'area della superficie rappresentante a quella che gli corrisponde sulla superficie rappresentata e reciprocamente, e di giudicare della deformazione che soffrono le aree elementari nella rappresentazione. La quantità n poi prende il nome di *modulo di trasformazione* ed è

considerata come uno degli enti fondamentali della rappresentazione cui corrisponde.

Dalle (15) si trae ancora

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \\ \beta_1 &= \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2\,.\,i} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

che sono le formule che danno direttamente α_1, β_1 in funzione di α, β quando è stato individuato il complesso di conformità.

8. Sieno ora u, v i parametri coordinati di un doppio sistema di linee ortogonali qualunque di una superficie S sopra cui si abbia

$$ds = \sqrt{E\,.\,du^2 + G\,.\,dv^2},$$

e supponiamo, come più sopra, che siano state scelte per linee coordinate di una seconda superficie S' delle linee u_1, v_1 corrispondenti conformemente alle linee u, v suddette: si avrà allora

$$u_1 = f_{u_1}(u)$$
$$v_1 = f_{v_1}(v)$$

mentre, a causa della presupposta conformità, le funzioni arbitrarie f_{u_1}, f_{v_1} debbono esser tali che restino soddisfatte le condizioni generali (11), e che sia perciò

$$ds_1 = \sqrt{E_1 du^2 + G_1 dv^2} = n\sqrt{E\,.\,du^2 + G\,.\,dv^2},$$
$$E_1 = n^2 E, \quad G_1 = n^2 G, \quad F_1 = 0.$$

Ciò posto rappresentando con h_u la curvatura geodetica della linea u, avremo [formule (43) del capitolo III]

$$h_u = \frac{1}{2\,.\,G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u},$$

ed analogamente per la curvatura geodetica h_{u_1} della linea u_1 che, per ipotesi, corrisponde alla linea u

$$h_{u_1} = \frac{1}{2\,.\,G_1\sqrt{E_1}} \frac{\partial G_1}{\partial u} = \frac{1}{2\,.\,n^3\,.\,G\sqrt{E}} \frac{\partial (n^2\,.\,G)}{\partial u}$$

od anche:

$$h_{u_1} = \frac{1}{2\,.\,n\,.\,G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{n^2\sqrt{E}} \frac{\partial n}{\partial u} = \frac{h_u}{n} - \frac{\partial \frac{1}{n}}{\sqrt{E}\,\partial u}.$$

Se si osserva che lungo la linea $v = costante$ si ha $ds_v = du\sqrt{E}$ è fa-

cile vedere che la precedente espressione di h_{u_1} può anche essere scritta come segue

$$h_{u_1} = \frac{h_u}{n} - \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial s_v}; \qquad (18)$$

ma una linea qualunque s di una superficie può venir sempre considerata come appartenente ad un doppio sistema di linee coordinate ortogonali, quindi la relazione (18) può anche esser generalizzata e conduce al seguente elegantissimo teorema:

La curvatura geodetica di una linea s_1 che, sopra una superficie, corrisponde conformemente ad una linea qualunque s di un'altra superficie è eguale al prodotto della curvatura geodetica di questa seconda linea per l'inversa del modulo di trasformazione meno la derivata dell'inversa del modulo di trasformazione presa nella direzione s' perpendicolare alla linea suddetta, per modo che si ha

$$h_{s_1} = \frac{h_s}{n} - \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial s'}. \qquad (19)$$

Se poi si suppone che la linea rappresentata appartenga ad una famiglia di geodetiche s, e che la rappresentazione scelta sia tale che le linee s_1 corrispondenti alle geodetiche s risultino geodetiche della superficie rappresentante, nella (19) si deve porre $h_s = h_{s_1} = 0$ e perciò si ha

$$\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial s'} = 0,$$

relazione che dimostra come la variazione del modulo di trasformazione lungo le traiettorie ortogonali alle geodetiche s sia nulla; potremo quindi concludere che *se, in una rappresentazione conforme, ad un sistema dato di geodetiche della superficie rappresentata corrisponde un sistema di geodetiche della superficie rappresentante, il modulo di trasformazione è costante lungo le traiettorie ortogonali a queste curve, e reciprocamente, se lungo le traiettorie ortogonali ad un dato sistema di geodetiche di una delle due superficie il modulo di trasformazione è costante, le linee che corrispondono a queste geodetiche sono geodetiche dell'altra superficie.*

9. Se sopra una superficie di rivoluzione si scelgono per linee coordinate isoterme i meridiani ed i paralleli, e per parametri coor-

dinati la longitudine ω e l'arco σ di meridiano contato a partire da un parallelo fisso, l'elemento lineare prende, com'è noto, la forma

$$ds = \sqrt{d\sigma^2 + r^2 d\omega^2}$$

essendo r il raggio del parallelo corrispondente a $\sigma = cost.$, raggio che può evidentemente essere considerato come una funzione della sola variabile σ. Supponiamo ora che in una rappresentazione conforme della superficie di rivoluzione sopra un'altra superficie qualunque ai meridiani di quella corrispondano delle linee a curvatura geodetica costante, analiticamente esprimibile cioè per mezzo di una funzione della sola ω; in tal caso, indicando rispettivamente con h_ω, h_σ le curvature geodetiche dei meridiani e dei paralleli della superficie di rivoluzione e con $h'_\omega = \theta(\omega)$, h'_σ quelle delle linee corrispondenti, la formula (19) dà:

$$h'_\sigma = \frac{h_\sigma}{n} - \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \sigma}$$

$$h'_\omega = \theta(\omega) = -\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \omega} \frac{1}{r}.$$

Dall'ultima di queste abbiamo integrando

$$\frac{1}{n} = -r \int \theta(\omega) . d\omega + f(\sigma) \qquad (20)$$

essendo f simbolo di funzione arbitraria, e per conseguenza:

$$h'_\sigma = h_\sigma [f(\sigma) - r \int \theta(\omega) . d\omega] - f'(\sigma) + \frac{dr}{d\sigma} \int \theta(\omega) . d\omega .$$

Dalle espressioni generali della curvatura geodetica di una linea coordinata [Capitolo III, formule (41)] si ottiene per altro

$$h_\sigma = \frac{\frac{\partial (r^2)}{\partial \sigma}}{2r^2} = \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{1}{r};$$

quindi, sostituendo nella relazione precedente avremo

$$h'_\sigma = \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{1}{r} f(\sigma) - f'(\sigma), \qquad (21)$$

e questa relazione mostra come h'_σ sia funzione della sola σ, e quindi costante lungo ciascuna delle linee che rappresentano i paralleli.

Ad un risultato analogo si giunge supponendo che nella rappresentazione conforme suddetta il sistema di linee a curvatura geodetica costante sulla superficie qualunque corrisponda ai paralleli piuttosto che ai meridiani, ed infatti ponendo

$$h'_\sigma = \theta(\sigma) = \frac{h_\sigma}{n} - \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \sigma}$$

e sostituendo ad h_σ l'espressione in r più sopra indicata si trova l'equazione differenziale lineare di primo ordine

$$\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \sigma} - \frac{1}{nr} \cdot \frac{dr}{d\sigma} + \theta(\sigma) = 0$$

che, integrata, dà:

$$\frac{1}{n} = -e^{-\int \frac{dr}{r}} \left(\int \theta(\sigma) . e^{\int \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{r}} . d\sigma + f(\omega) \right) \qquad (21^{bis})$$

essendo f simbolo di funzione arbitraria. Da questa relazione si trae finalmente, indicando con $f'(\omega)$ la derivata di $f(\omega)$:

$$h'_\omega = -\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \omega} \frac{1}{r} = . \frac{e^{\int \frac{dr}{r}} . f'(\omega)}{r} = f'(\omega)$$

che dimostra come la curvatura geodetica delle linee che rappresentano i meridiani è costante lungo ciascuna di esse.

Possiamo quindi stabilire il seguente teorema: *se in una rappresentazione conforme di una superficie di rivoluzione sopra una superficie qualunque al sistema dei meridiani corrisponde un sistema di linee a curvatura geodetica costante anche il sistema dei paralleli vien rappresentato da un sistema di linee a curvatura geodetica costante, e reciprocamente.*

Del resto questo teorema poteva esser tratto immediatamente dal secondo di quelli dimostrati nel § 20 del Capitolo III, osservando che il doppio sistema di linee che corrisponde ai meridiani ed ai paralleli di una superficie di rivoluzione in una rappresentazione conforme costituisce necessariamente un doppio sistema di linee isoterme della superficie rappresentante (vedi § 6), e che perciò se uno dei due sistemi parziali che lo compongono è a curvatura geodetica costante, anche l'altro gode della stessa proprietà. Nel caso poi che la superficie rappresentante sia il piano, il teo-

rema precedente coincide col notissimo teorema di *Lagrange,* così formulato:

Se nella rappresentazione conforme di una superficie di rivoluzione sul piano ai meridiani di quella corrispondono delle circonferenze su questo anche i paralleli sono rappresentati da circonferenze e reciprocamente, intendendo compresa fra le circonferenze anche la retta, considerata come una circonferenza di raggio infinitamente grande.

10. Ritorniamo ancora alle formule generali delle rappresentazioni conformi

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \pm i\beta_1 &= \Psi(\alpha \pm i\beta) \\ n &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}\Psi_1'\Psi_2'} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

e consideriamo sulla superficie $S(\alpha, \beta)$ un arco s di una linea caratterizzata dall'equazione

$$F(\alpha, \beta) = 0.$$

L'equazione della linea s_1 corrispondente alla s si trova senza difficoltà sostituendo nella $F=o$ ad α e β i loro valori in funzione di α_1, β_1 tratti dalle corrispondenze (22). La lunghezza dell'arco s_1 corrispondente all'arco considerato s può esser poi calcolata da una delle relazioni

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \int_{\alpha'}^{\alpha''} n \cdot d\alpha \sqrt{\lambda\left\{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\}} = \int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \sqrt{\lambda_1\Psi_1'\Psi_2'\left\{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\}} \\ s_1 &= \int_{\beta'}^{\beta''} n \cdot d\beta \sqrt{\lambda\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right\}} = \int_{\beta'}^{\beta''} d\beta \sqrt{\lambda_1\Psi_1'\Psi_2'\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right\}} \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

(nelle quali le quantità sotto gli integrali si suppongono espresse in funzione della variabile indipendente per mezzo delle corrispondenze e dell'equazione della linea s, ed α', α'', β', β'' indicano i valori che prendono α e β agli estremi dell'arco s) ovvero da una delle formule generali

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} d\alpha_1 \sqrt{\lambda_1\left\{1 + \left(\frac{d\beta_1}{d\alpha_1}\right)^2\right\}} \\ s_1 &= \int_{\beta'}^{\beta_1''} d\beta_1 \sqrt{\lambda_1\left\{1 + \left(\frac{d\alpha_1}{d\beta_1}\right)^2\right\}} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

se per l'integrazione conviene di più l'introdurre α_1 o β_1 come variabile indipendente. Naturalmente si passerebbe in modo analogo dall'arco s_1 al corrispondente arco s.

L'elemento di area sulla superficie $S(\alpha, \beta)$ è dato da

$$d\sigma = \lambda . d\alpha . d\beta,$$

e ad esso sulla superficie rappresentante $S'(\alpha_1, \beta_1)$ corrisponde l'elemento

$$d\sigma_1 = n^2 . \lambda . d\alpha . d\beta \qquad (25)$$

Nel caso in cui l'area σ sia limitata da due linee coordinate α', α'' della famiglia α e da due linee coordinate β', β'' della famiglia β avremo quindi

$$\sigma_1 = \int_{\alpha'}^{\alpha''} \int_{\beta'}^{\beta''} n^2 . \lambda . d\alpha . d\beta = \int_{\alpha'}^{\alpha''} \int_{\beta'}^{\beta''} \lambda_1 \Psi_1' \Psi_2' d\alpha . d\beta$$

ove n e λ_1 si suppongono espressi in α, β per mezzo delle corrispondenze e le integrazioni debbono essere eseguite considerando queste variabili come indipendenti. Se poi l'area σ è limitata in due sensi dalle linee α', α'', nel terzo dalla linea β' e nel quarto da una curva qualunque

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

per ottenere l'area corrispondente σ_1 sarà da eseguire anzitutto parzialmente l'integrazione della (25) rispetto a β, considerando α come costante, e da esprimere quindi β in funzione di α per poi eseguire la seconda integrazione fra i limiti α', α''. È chiaro che ogni altro caso si può sempre ridurre ad uno dei due casi precedenti.

11. La determinazione dell'area σ per mezzo dell'area σ_1 che le corrisponde in una rappresentazione conforme presenta per lo più gravi difficoltà e complicazioni di calcolo a causa dell'integrazione accennata alla fine del precedente paragrafo, integrazione che spesso riesce ineseguibile in termini finiti. Così quando una rappresentazione non deve servire alla sintesi delle linee, ma a quella delle aree conviene determinare le corrispondenze per modo che il rapporto fra le aeree che si corrispondono sia costante, nel qual caso la rappresentazione è detta *equivalente*.

Le formule generali dell'equivalenza sono implicitamente contenute nella condizione

$$d\sigma_1 = c\, d\sigma \qquad (26)$$

essendo c una costante, $d\sigma$ l'elemento di area sulla superficie rappresentata e $d\sigma_1$ l'area elementare che gli corrisponde sulla superficie rappresentante.

Per dedurre dalla (26) le formule generali di corrispondenza fra le coordinate delle due superficie considerate sieno

$$ds = \sqrt{E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2}$$

$$ds_1 = \sqrt{E'.du_1^2 + 2.F'.du_1 dv_1 + G'.dv_1^2}$$

rispettivamente gli elementi lineari delle superficie σ e σ_1 e poniamo in generale:

$$u_1 = f_{u_1}(u, v)$$

$$v_1 = f_{v_1}(u, v).$$

Per l'espressione dell'elemento $d\sigma$ in funzione delle coordinate curvilinee u e v si ha (vol. I, pag. 17)

$$d\sigma = du.dv\sqrt{EG - F^2},$$

l'area elementare $d\sigma$ essendo compresa fra due linee u e due linee v infinitamente prossime.

Ora, ritenendo le notazioni (5) del § 3, l'elemento lineare ds_1 che sulla superficie σ_1 corrisponde all'elemento ds della superficie σ è dato da

$$ds_1 = \sqrt{E_1 du^2 + 2.F_1 du.dv + G_1 dv^2},$$

quindi l'area elementare $d\sigma_1$ corrispondente all'elemento $d\sigma$ ha evidentemente per espressione analitica

$$d\sigma_1 = du.dv\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}.$$

Sostituendo ad E_1, G_1, F_1 i loro valori in funzione di E', F', G' dati dalle (5) si ottiene dopo facili riduzioni

$$d\sigma_1 = \pm\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)\sqrt{E'G' - F'^2}\,du.dv,$$

e quindi alla condizione (26) di equivalenza può esser data la forma:

$$\frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}\right\} = c = costante. \qquad (27)$$

Tale è l'equazione differenziale caratteristica delle rappresentazioni equivalenti, e dacchè essa è sufficiente a caratterizzarle si conclude che non solo è sempre possibile di ottenere una rap-

presentazione equivalente di una superficie sopra un' altra data, ma che ciò può farsi in un numero infinito di maniere, e che date le due superficie la sola condizione di equivalenza non basta per determinare la forma delle corrispondenze.

12. Per integrare la (26) è dunque necessario di assoggettare arbitrariamente la rappresentazione equivalente cercata ad una seconda condizione, lo che può esser fatto senza togliere generalità col lasciare indeterminata una delle corrispondenze sotto forma di funzione arbitraria, e determinando poi successivamente questa nei singoli casi in modo che resti soddisfatta la seconda condizione prescelta. Consideriamo dunque come data la corrispondenza

$$u_1 = \theta(u, v), \tag{28}$$

da cui si trarrà:

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = q$$

essendo p e q delle funzioni di u e di v che dobbiamo ritenere note. Ponendo per brevità

$$\frac{c\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E'G' - F'^2}} = V$$

l'equazione differenziale (27) prenderà la forma

$$\frac{\partial v_1}{\partial u} q - \frac{\partial v_1}{\partial v} p = V$$

ove V, per mezzo della (28), può essere espresso in funzione delle variabili v_1, v ad u soltanto. È noto come l'integrale generale di questa ultima equazione a differenze parziali è dato da una funzione arbitraria delle due costanti arbitrarie provenienti dalle integrazioni di due delle seguenti equazioni a differenze totali

$$\frac{V}{dv_1} - \frac{q}{du} = 0, \quad \frac{V}{dv_1} + \frac{p}{dv} = 0, \quad \frac{q}{du} + \frac{p}{dv} = 0. \tag{29}$$

Ora l'ultima di queste, posta sotto la forma

$$p \cdot du + q \cdot dv = \frac{\partial u_1}{\partial u} du + \frac{\partial u_1}{\partial v} dv = du_1 = 0$$

è immediatamente integrabile e dà:

$$u_1 = f_{u_1}(u, v) = k_1 = \textit{costante}. \tag{30}$$

Questa relazione dovendo coesistere colla prima e la seconda delle (29) ci dà poi il mezzo di ridurre l'integrazione di queste a sem-

plici qnadrature: ed infatti sostituendovi a V il suo valore se ne deduce:

$$dv_1\sqrt{E'G'-F'^2}= \frac{c.du\sqrt{EG-F^2}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}}$$

$$dv_1\sqrt{E'G'-F'^2}=-\frac{c.dv\sqrt{EG-F^2}}{\frac{\partial u_1}{\partial u}}$$

ove dai secondi membri si può eliminare rispettivamente v od u per mezzo della (30), e nelle integrazioni u_1 deve esser considerato come costante. Così le variabili restano separate e si può scrivere

$$\int_{u_1=cost.} dv_1\sqrt{E'G'-F'^2}=\int_{u_1=cost.}\frac{c.du.\sqrt{E_uG_u-F_u^2}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)_u}+k_2$$

$$\int_{u_1=cost.} dv_1\sqrt{E'G'-F'^2}=-\int_{u_1=cost.}\frac{c.dv.\sqrt{E_vG_v-F_v^2}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)_v}+k_3$$

gli indici u,v alle notazioni indicando la eliminazione di v o di u rispettivamente, fatta per mezzo della (30). Per combinare in modo arbitrario due a due le costanti di integrazione k_1, k_2, k_3 basta evidentemente sostituire nelle relazioni soprascritte delle funzioni arbitrarie di k_1 in luogo di k_2 e k_3: così le corrispondenze generali delle rappresentazioni equivalenti saranno

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\theta(u,v)\\ \int_{u_1=cost.} dv_1\sqrt{E'G'-F'^2}&=\Omega(u_1)+\int_{u_1=cost.}\frac{c.du\sqrt{E_uG_u-F_u^2}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)_u}\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\theta(u,v)\\ \int_{u_1=cost.} dv_1\sqrt{E'G-F'^2}&=\Omega(u_1)-\int_{u_1=cost.}\frac{c.dv\sqrt{E_vG_v-F_v^2}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)_v}\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

θ ed Ω essendo simboli di funzioni arbitrarie.

La ricerca delle relazioni fra le linee e fra gli angoli che si corrispondono nelle rappresentazioni equivalenti non è che un caso

speciale dello studio delle rappresentazioni qualunque, al quale ora passiamo.

13. Siano in generale

$$ds = \sqrt{E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2}$$

$$ds' = \sqrt{E'du_1^2 + 2F'du_1dv_1 + G'dv_1^2}$$

gli elementi lineari di due superficie fra i cui punti si suppongono stabilite le corrispondenze qualunque

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_{u_1}(u, v), \\ v_1 &= f_{v_1}(u, v): \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

se si ritengono le notazioni (5) del § 3 l'elemento ds_1 che sulla superficie $S'(E', F', G')$ corrisponde all'elemento ds della superficie $S(E, F, G)$ sarà dato da

$$ds_1 = \sqrt{E_1 du^2 + 2.F_1 du.dv + G_1 dv^2},$$

e quindi avremo per l'espressione analitica del rapporto $n = \frac{ds_1}{ds}$, al quale seguiteremo a dare il nome di *modulo di trasformazione:*

$$n = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{E_1\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2.F_1\frac{du}{dv} + G_1}}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2.F\frac{du}{dv} + G}}.$$

Rappresentando ancora con θ l'angolo che la linea s qualunque della superficie $S(E, F, G)$ fa colla linea coordinata $v = costante$, e con ω l'angolo fra le linee coordinate si ha per altro [vol. I, pag. 11, formule (16)]:

$$\frac{du}{dv} = \frac{sen(\omega - \theta)}{sen\theta}\sqrt{\frac{G}{E}}; \qquad (34)$$

quindi sarà:

$$n^2 = \frac{E_1 G\, sen^2(\omega-\theta) + 2.F_1\sqrt{EG}\, sen\theta.sen(\omega-\theta) + EG_1 sen^2\theta}{EG\, sen^2(\omega-\theta) + 2.F\sqrt{EG}\, sen\theta.sen(\omega-\theta) + GE sen^2\theta}. \qquad (35)$$

È facile però constatare che nel secondo membro di questa relazione il denominatore, sostituendovi ad F il noto suo valore $cos\omega\sqrt{EG}$, si riduce semplicemente ad $EG\, sen^2\omega$: potremo dunque porre

$$n^2 = \frac{1}{sen^2\omega}\left\{\frac{E_1}{E}sen^2(\omega-\theta) + \frac{2.F_1}{\sqrt{EG}}sen\theta\, sen(\omega-\theta) + \frac{G_1}{G}sen^2\theta\right\} \qquad (36)$$

relazione molto importante nella teoria che ci occupa, giacchè dà

la legge secondo cui varia n col variare della direzione θ intorno a un punto qualunque (u, v) della superficie rappresentata.

Se nella (36) si considerano u, v e quindi $\omega, E, F, G, E_1, F_1, G_1$ come costanti, il secondo membro è una funzione finita e continua di θ che ammette due massimi e due minimi fra $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, ed adottando l'unica notazione Θ per i corrispondenti quattro valori di θ, questi saranno dati dalle radici dell'equazione

$$\frac{\partial (n^2)}{\partial \theta} = 0$$

comprese fra 0 e 2π, ossia dalla relazione

$$\frac{E_1}{E} sen\, 2(\omega - \Theta) + \frac{2 . F_1}{\sqrt{EG}} sen(2\Theta - \omega) - \frac{G_1}{G} sen\, 2\Theta = 0,$$

dalla quale si deduce

$$tang\, 2\Theta = \frac{\frac{E_1}{E} sen\, 2\omega - \frac{2 . F_1}{\sqrt{EG}} sen\, \omega}{\frac{E_1}{E} cos\, 2\omega - \frac{2 . F_1}{\sqrt{EG}} cos\, \omega + \frac{G_1}{G}},$$

od anche, per essere $1 : \sqrt{EG} = cos\, \omega : F$, e $2 . cos^2 \omega = 1 + cos\, 2\omega$:

$$\left. tang\, 2\Theta = \frac{sen\, 2\omega \left(\frac{E_1}{E} - \frac{F_1}{F} \right)}{cos\, 2\omega \left(\frac{E_1}{E} - \frac{F_1}{F} \right) + \frac{G_1}{G} - \frac{F_1}{F}} = \frac{sen\, 2\omega}{cos\, 2\omega + \frac{E(G_1 F - G F_1)}{G(E_1 F - E F_1)}} \right\} . \quad (37)$$

Il secondo membro di questa relazione si presenta sotto forma indeterminata quando le coordinate u, v sono ortogonali; però a fare sparire l'indeterminazione basta esprimere $sen\, 2\omega$ e $cos\, 2\omega$ in funzione di E, F, G ponendo:

$$sen\, 2\omega = 2 . sen\, \omega . cos\, \omega = \frac{2 . F \sqrt{EG - F^2}}{EG},$$

$$cos\, 2\omega = cos^2 \omega - sen^2 \omega = \frac{2 . F^2 - EG}{EG},$$

ed infatti in tal guisa si trova

$$tang\, 2\Theta = \frac{2\sqrt{EG - F^2}}{2 . F + E \frac{EG_1 - E_1 G}{E_1 F - E F_1}}, \quad (38)$$

che, per $F=0$, si riduce a:

$$tang\, 2\Theta = \frac{2 . F_1 \sqrt{EG}}{E_1 G - E G_1} . \qquad (39)$$

Nel caso poi in cui si abbia

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G} ,$$

la formula (37) conduce, come potevamo prevedere, ad una indeterminazione assoluta, ed in realtà la rappresentazione essendo allora conforme, il modulo di trasformazione intorno a ciascun punto è invariabile.

Le formule precedenti mostrano che *intorno a ciascun punto le due direzioni lungo le quali il modulo di trasformazione è massimo sono opposte, e che la linea che le comprende taglia ortogonalmente quella lungo la quale in direzioni opposte il modulo suddetto è minimo.*

14. Sia ora θ_1 l'angolo che nella rappresentazione corrisponde all'angolo θ formato dalla linea qualunque s colla linea $v = costante$ al quale daremo d'ora innanzi il nome di azimut della linea s considerata: se si osserva che ponendo l'elemento lineare della superficie rappresentante S' (E', F', G') sotto la solita forma

$$ds_1 = \sqrt{E_1 du^2 + 2 . F_1 du . dv + G_1 dv^2}$$

la linea $v = cost. = k$ della superficie rappresentante viene a corrispondere alla linea $v = cost. = k$ della superficie rappresentata si vede subito che si ha [vedi *Introduzione formula* (16^{bis})]

$$tang\, \theta_1 = \frac{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{E_1 \frac{du}{dv} + F_1} ,$$

ovvero, sostituendo a $\frac{du}{dv}$ il suo valore in funzione dell'azimut θ [formula (34)],

$$tang\, \theta_1 = \frac{\sqrt{E(E_1 G_1 - F_1^2)}\, sen\, \theta}{E_1 \sqrt{G} . sen\, (\omega - \theta) + F_1 \sqrt{E} . sen\, \theta} . \qquad (40)$$

L'angolo θ_1' corrispondente all'azimut $90° + \theta$ sarà quindi dato da:

$$tang\, \theta_1' = \frac{\sqrt{E(E_1 G_1 - F_1^2)}\, cos\, \theta}{-E_1 \sqrt{G} . cos\, (\omega - \theta) + F_1 \sqrt{E} . cos\, \theta}$$

d'onde si trae, con facile calcolo:

$$tang\,\theta_1\,tang\,\theta'_1 =$$

$$= \frac{E(E_1G_1 - F_1^2)\,sen\,2\theta}{sen\,2\theta\,.\,\{E_1^2G\,.\,cos\,2\omega - 2F_1E_1\sqrt{EG}\,.\,cos\,\omega + F_1^2E\} + cos\,2\theta\,.\,\{2F_1E_1\sqrt{EG}\,.\,sen\,\omega - E_1^2G\,.\,sen\,2\omega\}}$$

Questa relazione dimostra come fra 0 e 2π esistano sempre due valori di θ tali che le due direzioni θ_1, θ'_1 corrispondenti alle due direzioni conjugate θ e $\theta + 90°$ sono ortogonali come le rappresentate. Siffatti valori sono quelli che soddisfanno alla condizione

$$tang\,\theta_1\,tang\,\theta'_1 = -1,$$

e sono quindi dati dalle radici dell'equazione

$$sen\,2\theta\,\{E_1G\,.\,cos\,2\omega - 2\,.\,F_1\sqrt{EG}\,.\,cos\,\omega + EG_1\} = cos\,2\theta\,.\,\{E_1G\,sen\,2\omega - 2\,.\,F_1\sqrt{EG}\,.\,sen\,\omega\}$$

Ma questa non differisce dalla equazione che dà i valori di θ corrispondenti ai massimi e minimi del modulo di trasformazione; si può dunque concludere che *in una rappresentazione qualunque alle due direzioni ortogonali della superficie rappresentata lungo le quali il modulo di trasformazione è rispettivamente massimo e minimo, corrispondono due direzioni ortogonali della superficie rappresentante.*

Del resto a tale conclusione si poteva giungere immediatamente osservando che le corrispondenze poste fra le coordinate di due superficie contengono due rappresentazioni reciproche confuse in una sola, ed implicano la reciprocità delle espressioni analitiche degli enti della rappresentazione e la simmetria delle formule rispetto ad E, F, G da un lato e ad E_1, F_1, G_1 dall'altro. Così le due linee della superficie che abbiamo considerata come rappresentante, lungo le quali il modulo di trasformazione è massimo o minimo, nella rappresentazione reciproca di essa sulla superficie rappresentata, fatta cioè per mezzo delle stesse corrispondenze (33) risolute rispetto ad u, v, debbono essere ortogonali, e siccome due rappresentazioni reciproche in realtà conducono alla medesima corrispondenza di linee e di angoli, così evidentemente l'angolo fra le dette linee di massima o minima deformazione lineare degli elementi della superficie rappresentata corrisponde all'angolo fra le linee di massima o minima deformazione della superficie rappresentante.

I successivi elementi lineari che corrispondono ad un massimo e ad un minimo del modulo di trasformazione vengono dunque a costituire sopra ciascuna delle due superficie considerate un doppio sistema di linee ortogonali che si mantengono tali nella

rappresentazione, e che, per questa doppia proprietà che le caratterizza, sono dette *linee principali*. La loro equazione differenziale caratteristica si ottiene poi dalla relazione (38) sostituendovi a $tang\,2\Theta$ il suo valore in funzione di u e v, ossia ponendo in essa:

$$tang\,2\Theta = \frac{2\,.\,tang\,\Theta}{1-tang^2\Theta} = \frac{2\sqrt{EG-F^2}\left(E\frac{du}{dv}+F\right)}{\left(E\frac{du}{dv}+F\right)^2-EG+F^2}.$$

Si trova per tal modo dopo un facile calcolo la relazione:

$$(E_1F-EF_1)\,du^2+(E_1G-EG_1)\,du\,dv+(F_1G-FG_1)\,dv^2=0, \quad (41)$$

che integrata darebbe in coordinate qualunque l'equazione delle linee suddette. Nel caso in cui le coordinate u, v sieno isoterme l'ultima equazione soprascritta prende poi la forma semplicissima seguente

$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2+\frac{G_1-E_1}{F_1}\frac{d\alpha}{d\beta}-1=0. \quad (42)$$

15. Cerchiamo ancora le espressioni analitiche dei massimi e minimi valori del modulo di trasformazione in funzione degli elementi caratteristici E, F, G, E_1, F_1, G_1 delle due superficie, e, perciò, riprendiamo le relazioni

$$\left.\begin{aligned} n^2\,.\,sen^2\omega &= \frac{E_1}{E}sen^2(\omega-\theta)+\frac{2F_1}{\sqrt{EG}}sen\,\theta\,.\,sen\,(\omega-\theta)+\frac{G_1}{G}sen^2\theta \\ 0 &= \frac{E_1}{E}sen\,2\,(\omega-\Theta)+\frac{2F_1}{\sqrt{EG}}sen\,(2\,\Theta-\omega)-\frac{G_1}{G}sen\,2\,\Theta \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

delle quali la prima dà il modulo di trasformazione in generale, in funzione della direzione θ cui esso si riferisce, e la seconda dà le direzioni Θ lungo le quali esso è massimo o minimo. Comprendendo sotto l'unica notazione N tanto i due massimi quanto i due minimi cercati è chiaro che questi sono rappresentati dalle radici N dell'equazione che si ottiene eliminando la direzione θ fra le (43) e considerando n come incognita. La ora detta eliminazione si fa molto facilmente se si osserva che, per essere

$$sen\,(2\,\theta-\omega)=sen\,(\theta-\omega+\theta)=sen\,\theta\,.\,cos\,(\omega-\theta)-cos\,\theta\,.\,sen\,(\omega-\theta),$$

le (43) possono, per $\theta = \Theta$, venire anche scritte come segue:

$$N^2 sen^2\omega = sen(\omega-\Theta)\left\{\frac{E_1}{E} sen(\omega-\Theta) + \frac{F_1}{\sqrt{EG}} sen\Theta\right\} + \\ + sen\Theta\left\{\frac{G_1}{G} sen\Theta + \frac{F_1}{\sqrt{EG}} sen(\omega-\Theta)\right\}$$

$$0 = cos(\omega-\Theta)\left\{\frac{E_1}{E} sen(\omega-\Theta) + \frac{F_1}{\sqrt{EG}} sen\Theta\right\} - \\ - cos\Theta\left\{\frac{G_1}{G} sen\Theta + \frac{F_1}{\sqrt{EG}} sen(\omega-\Theta)\right\}.$$

Ed infatti queste, risolute rispetto alle quantità rinchiuse fra le parentesi grandi dei secondi membri, danno:

$$N^2 sen\omega \,.\, cos(\omega-\Theta) = \frac{G_1}{G} sen\Theta + \frac{F_1}{\sqrt{EG}} sen(\omega-\Theta),$$

$$N^2 sen\omega \,.\, cos\Theta = \frac{E_1}{E} sen(\omega-\Theta) + \frac{F_1}{\sqrt{EG}} sen\Theta,$$

d'onde, ricordando che si ha in generale

$$sen\theta = \frac{sen\omega \,.\, \sqrt{G} \,.\, dv}{ds}, \quad cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right),$$

$$sen(\omega-\theta) = \frac{sen\omega \,.\, \sqrt{E} \,.\, du}{ds}, \quad cos(\omega-\theta) = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(G\frac{dv}{ds} + F\frac{du}{ds}\right),$$

si trae:

$$N^2\left\{G + F\frac{du}{dv}\right\} = G_1 + F_1\frac{du}{dv}$$

$$N^2\left\{E\frac{du}{dv} + F\right\} = E_1\frac{du}{dv} + F_1.$$

L'eliminazione di $\frac{du}{dv}$ dà quindi

$$(G_1 - GN^2)(E_1 - EN^2) - (F_1 - FN^2)^2 = 0, \qquad (44)$$

ossia

$$N^4(EG - F^2) - N^2(E_1G + EG_1 - 2\,.\,FF_1) + G_1E_1 - F_1^2 = 0, \qquad (45)$$

equazione che ammette le quattro radici date dalla formola

$$N = \pm\sqrt{\frac{E_1G + EG_1 - 2\,.\,FF_1 \pm \sqrt{(E_1G - EG_1)^2 + 4(G_1F - GF_1)(E_1F - EF_1)}}{2(EG - F^2)}} \qquad (46)$$

delle quali sono da considerare solo le due che corrispondono al segno + del radicale grande. Una di queste dà i minimi, l'altra i massimi valori del modulo n: rappresentandoli rispettivamente con N_1 ed N_2 si ha poi:

$$\left.\begin{aligned}(N_1)^2+(N_2)^2&=\frac{E_1G+EG_1-2.FF_1}{EG-F^2}\\(N_1)^2-(N_2)^2&=\frac{\sqrt{(E_1G-EG_1)^2+4(G_1F-GF_1)(E_1F-EF_1)}}{EG-F^2}\\(N_1)(N_2)&=\frac{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}{\sqrt{EG-F^2}}\end{aligned}\right\}\cdot(47)$$

Questi due moduli massimo e minimo, danno una idea completa della deformazione che in prossimità di un punto soffre la superficie rappresentata, così essi son detti *moduli principali di trasformazione,* e l'ultima delle (47) dimostra come *in una rappresentazione qualunque il prodotto dei moduli principali di trasformazione è eguale al rapporto fra le aree elementari che si corrispondono,* dacchè queste sono date rispettivamente, come abbiamo già visto, da:

$$d\sigma=du.dv\sqrt{EG-F^2},\quad d\sigma_1=du.dv\sqrt{E_1G_1-F_1^2}.$$

La prima delle (47) poi fa vedere come *la media aritmetica dei quadrati di tutti i moduli di trasformazione intorno a un punto distribuiti equabilmente rispetto all'azimut* è eguale alla media aritmetica dei quadrati del massimo e minimo di essi:* ed infatti considerando n^2 come variabile intorno ad un punto, e quindi come una funzione dell'azimut θ, la media di tutti i valori che n^2 prende fra i valori o e 2π di θ si ottiene evidentemente dividendo l'integrale definito

$$\int_0^{2\pi} n^2.d\theta$$

per l'intervallo $\theta_2-\theta_1$ corrispondente a questo integrale, ossia per

$$\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi.$$

* Il teorema non sarebbe più vero se per variabile indipendente non si assumesse l'azimut od una quantità proporzionale ad esso.

Ora si ha in generale

$$\int_0^{2\pi} sen^2\theta \,.\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - cos\, 2\theta)\, d\theta = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} sen^2(\omega - \theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} sen^2(\theta - \omega)\, d\theta = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} sen\theta \,.\, sen(\omega - \theta) \,.\, d\theta = sen\,\omega \int_0^{2\pi} sen\,\theta \,.\, cos\,\theta \,.\, d\theta - cos\,\omega \int_0^{2\pi} sen^2\theta \,.\, d\theta = -\pi \,.\, cos\,\omega,$$

quindi, ricordando la relazione (36), si trova

$$\frac{\int_0^{2\pi} n^2 \,.\, d\theta}{\int_0^{2\pi} d\theta} = \frac{1}{2 \,.\, sen^2\omega}\left(\frac{E_1}{E} - \frac{2F_1}{\sqrt{EG}}\, cos\,\omega + \frac{G_1}{G}\right),$$

ed anche, esprimendo $sen\,\omega$ e $cos\,\omega$ in funzione di E, F, G,

$$\frac{\int_0^{2\pi} n^2 \,.\, d\theta}{\int_0^{2\pi} d\theta} = \frac{1}{2(EG - F^2)}(E_1G + G_1E - 2FF_1) = \frac{(N_1)^2 + (N_2)^2}{2}$$

come abbiamo sopra enunciato.

16. Tutte queste proprietà del massimo e del minimo modulo di trasformazione e molte altre vengono messe complessivamente in evidenza se si suppone che le due superficie date siano riferite alle line principali della rappresentazione che si vuole studiare definite nel § 14, giacchè allora la sintesi completa delle deformazioni lineari ed azimutali diviene estremamente facile per mezzo di considerazioni geometriche elementari. Ed in vero, scegliendo per linee coordinate ortogonali su ciascuna superficie le linee principali suddette, le corrispondenze vengono ad avere necessariamente la forma:

$$u_1 = f_{u_1}(u), \quad v_1 = f_{v_1}(v)$$

e quindi [vedi relazioni (5)] le espressioni degli elementi lineari che si corrispondono divengono:

$$ds = \sqrt{E.du^2 + G.dv^2}, \quad ds_1 = \sqrt{E_1 du^2 + G_1 dv^2}$$

e la relazione fondamentale (36) dà:

$$n^2 = \frac{E_1}{E} cos^2\theta + \frac{G_1}{G} sen^2\theta. \qquad (48)$$

Ora per ciascun punto u, v considerando θ ed n come variabili, la (48) coincide coll'equazione di un'ellisse riferita ad un sistema di coordinate polari col polo nel centro, e l'asse polare diretto secondo uno degli assi principali: i semiassi della ellisse sono rispettivamente dati da $\sqrt{\frac{E}{E_1}}$, e da $\sqrt{\frac{G}{G_1}}$, ed $\frac{1}{n}$ è il raggio vettore. Se dunque si suppone descritta una tale ellisse sul piano tangente nel punto u, v della superficie rappresentata, col centro in questo punto e gli assi $2\sqrt{\frac{E}{E_1}}$, $2\sqrt{\frac{G}{G_1}}$ disposti secondo le tangenti alle linee principali, l'alterazione che subisce nella rappresentazione l'elemento di una linea s, che fa l'angolo θ colla linea principale coincidente coll'asse $2\sqrt{\frac{E}{E_1}}$, viene ad essere rappresentata dall'inversa del raggio vettore ellittico che è tangente alla linea s medesima. Perciò la ellisse suddetta prende il nome di *indicatrice delle deformazioni lineari.*

Del resto questa curva offre un mezzo semplicissimo di costruire geometricamente anche gli azimut che si corrispondono nella rappresentazione, e che in generale sono vincolati, come abbiamo visto [§ 14, formula (40)] della relazione

$$tang\,\theta_1 = \frac{\sqrt{E(E_1G_1 - F_1^2)}.sen\,\theta}{E_1\sqrt{G}.sen(\omega - \theta) + F_1\sqrt{E}.sen\theta},$$

che nel caso qui considerato si riduce a

$$tang\,\theta_1 = \sqrt{\frac{EG_1}{E_1G}}\,tang\,\theta. \qquad (49)$$

Sia infatti (fig. 65) ABA' l'ellisse indicatrice del punto C, e supponiamo per fissare le idee che sia $\sqrt{\frac{E}{E_1}} = CA'$ il suo semiasse maggiore, origine delle anomalie θ: se si circoscrive col centro in C un cerchio di raggio $\sqrt{\frac{E}{E_1}}$, esso è incontrato dal prolungamento dell'ordinata MP del punto qualunque $M(n,\theta)$ dell'ellisse, in un punto M', ed è facile vedere che si ha

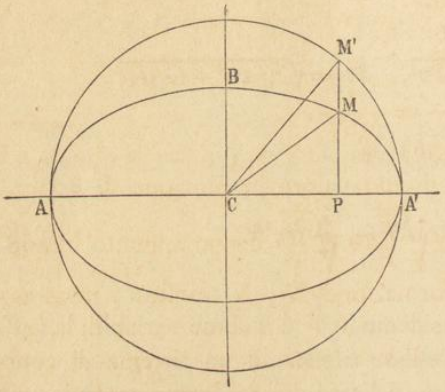

Fig. 65.

$$\frac{MP}{M'P} = \frac{CB}{CA'} = \sqrt{\frac{E_1 G}{E G_1}},$$

giacchè in coordinate cartesiane l'espressione analitica dell'ordinata del punto qualunque M dell'ellisse è

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

e quella dell'ordinata del punto M', che sul cerchio circoscritto corrisponde alla stessa ascissa x, è:

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Se si rappresenta con α l'angolo $M'CA'$, dalla fig. 65 si trae

$$tang\,\alpha = \frac{Y}{y}\,tang\,\theta = \sqrt{\frac{E G_1}{E_1 G}}\,tang\,\theta,$$

relazione che, confrontata colla (49), osservando che α e θ si annullano contemporaneamente, da $\alpha = \theta_1$. L'angolo PCM' è dunque l'azimut che nella rappresentazione corrisponde all'angolo MCP, cosicchè l'ellisse indicatrice dà anche la legge delle alterazioni azimutali intorno ad un punto.

Se si considerano le direzioni θ come distribuite equabilmente intorno al punto u, v, è facile dimostrare che *la media aritmetica di tutte le inverse dei quadrati dei moduli di trasformazione è eguale*

al prodotto delle inverse del massimo e minimo dei moduli stessi, ossia che si ha (vedi § 15)

$$\frac{\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{n^2}}{\pi} = \frac{1}{N_1 N_2}.$$

Ed invero, sostituendo ad n_2 il suo valore in funzione di θ [formula (48)] ed osservando che $\sqrt{\frac{E_1}{E}}$ e $\sqrt{\frac{G_1}{G}}$ danno appunto in questo caso i due moduli di trasformazione N_2, N_1 minimo e massimo si ottiene

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{n^2} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(N_2)^2 cos^2\theta + (N_1)^2 sen^2\theta} = \int_0^{\pi} \frac{\frac{d\theta}{(N_1)^2 sen^2\theta}}{1 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 cotg^2\theta},$$

ossia

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{n^2} = -\frac{1}{N_1 N_2}\left[arc\,tag\left(\frac{N_2}{N_1} cotg\,\theta\right)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{N_1 N_2}$$

come era da dimostrare.

17. Gli elementi dell'ellisse indicatrice restano completamente determinati dalle relazioni generali (38) e (46), la prima delle quali dà le direzioni e la seconda i valori dei suoi assi in funzione di quantità note: per conseguenza la relazione (49), posta sotto la forma

$$N_2 tang\,\theta_1 = N_1 tang\,\theta' \qquad (50)$$

può servire al calcolo degli angoli che si corrispondono. Se si considera sulla superficie rappresentata una seconda direzione definita dall'angolo θ'' che essa fa nel punto (u, v) colla linea principale lungo cui il modulo di trasformazione è N_2, o, ciò che vale lo stesso, dall'angolo $\theta'' + \Theta_1$ che in (u, v) fa colla linea coordinata $v = cost$, avremo infatti:

$$N_2 tang\,\theta_2 = N_1 tang\,\theta'',$$

θ_2 essendo l'angolo che nella rappresentazione corrisponde a θ'', e quindi sarà

$$tang(\theta_2 - \theta_1) = N_1 N_2 \frac{tang\,\theta'' - tang\,\theta'}{(N_2)^2 + (N_1)^2\, tang\,\theta' . tang\,\theta''} \qquad (51)$$

od anche, ponendo $\alpha = \theta'' - \theta'$, $\alpha_1 = \theta_2 - \theta_1$ e sostituendo a θ' la notazione generale θ:

$$tang\,\alpha_1 = \frac{N_1 N_2 tang\,\alpha}{(N_2)^2 cos^2\theta + \{(N_1)^2 - (N_2)^2\} sen\,\theta \,.\, cos\,\theta \,.\, tang\,\alpha + (N_1)^2 sen^2\theta} \quad (52)$$

relazione che dà l'angolo α_1 in funzione del suo corrispondente α, e della direzione θ o $\theta + \Theta_1$ che è necessaria per individuarlo sulla superficie rappresentata. Dalla (52) si trae senz'altro la condizione alla quale devono soddisfare la direzione iniziale θ e l'angolo α affinchè questo non resti alterato nella rappresentazione, condizione che è data evidentemente da

$$(N_2)^2 cos^2\theta + \{(N_1)^2 - (N_2)^2\} sen\,\theta \,.\, cos\,\theta \,.\, tang\,\alpha + (N_1)^2 sen^2\theta - N_1 N_2 = 0. \quad (53)$$

Introducendo nuovamente le due direzioni coniugate θ'', θ' che comprendono l'angolo α, e che sono legate a questo dalla relazione

$$tang\,\alpha = \frac{tang\,\theta'' - tang\,\theta'}{1 + tang\,\theta'' tang\,\theta'},$$

e scrivendo θ' in luogo di θ la (53) dà poi:

$$tang\,\theta' tang\,\theta'' = \frac{(N_2)^2 - N_1 N_2}{N_1 N_2 - (N_1)^2} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (54)$$

d'onde si conclude che in *un punto qualunque per ciascuna direzione* θ' *esiste sempre un' altra direzione* θ'' *tale che l'angolo compreso fra loro resta inalterato nella rappresentazione.* Tali direzioni diconsi due a due *coniugate.*

È molto facile costruire geometricamente la direzione coniugata ad una direzione data; ed invero immaginiamo che nel piano tangente al punto u, v della superficie rappresentata sia tracciata un' iperbole cogli assi A_u, A_v tangenti alle linee principali della rappresentazione in quel punto, e tali che si abbia $\frac{A_u}{A_v} = \frac{N_2}{N_1}$: per una ben nota proprietà dell'iperbole, gli angoli θ', θ'' formati da due diametri coniugati qualunque coll'asse reale sono legati dalla relazione

$$tang\,\theta' \,.\, tang\,\theta'' = \frac{N_2}{N_1}, \quad (55)$$

e quindi le direzioni delle linee della superficie rappresentata, ad

essi tangenti formano una coppia di direzioni coniugate della rappresentazione. Reciprocamente due direzioni coniugate qualunque si confondono sempre colle direzioni di una coppia di diametri coniugati dell'iperbole suddetta, perciò questa prende il nome di *indicatrice azimutale della rappresentazione* che si considera. Giova notare che se invece del piano tangente alla superficie rappresentata si vuol far uso del piano tangente alla superficie rappresentante basta considerare su questo un'ellisse ed un'iperbole che abbiano rispettivamente per assi le inverse degli assi dell'ellisse e dell'iperbole indicate nei paragrafi precedenti, per ottenere in modo analogo a quello sopra esposto la sintesi della deformazione lineare ed angolare e le coppie delle direzioni coniugate della rappresentazione.

18. L'espressione analitica adatta al calcolo diretto della deformazione $\delta = \theta_1 - \theta$ sofferta dall'angolo θ nella rappresentazione si trae senza difficoltà dalla formula (50), che dà:

$$tang\,\delta = \frac{(N_1 - N_2)\,tang\,\theta}{N_2 + N_1 tang^2\theta}. \qquad (56)$$

Di qui è facile, discutendo le radici dell'equazione

$$\frac{d\,tang\,\delta}{d\,\theta} = 0,$$

vedere come col variare di θ fra 0° e 360° la deformazione δ ammette due massimi e due minimi, e due soltanto, che corrispondono alle direzioni τ date dalla relazione

$$tang^2\tau = \frac{N_2}{N_1}. \qquad (57)$$

E questa dimostra a sua volta che i *quattro azimut della superficie rappresentata che corrispondono ai due massimi ed ai due minimi di deformazione azimutale non costituiscono che due uniche direzioni, le quali si confondono colle direzioni degli asintoti dell'iperbole indicatrice.*

Sia ancora τ_1 l'angolo azimutale corrispondente ad una delle direzioni τ di massima o di minima deformazione angolare, dimodochè si abbia (formula 50):

$$tang\,\tau_1 = \frac{N_1}{N_2}\,tang\,\tau.$$

Moltiplicando questa relazione membro a membro colla (57) avremo

$$tang\,\tau_1\,tang\,\tau = 1, \qquad (58)$$

da cui si conclude che i due angoli τ_1 e τ sono complementari.

Per la deformazione D di un angolo caratterizzato dalle due direzioni θ', θ'' alle quali competono rispettivamente le deformazioni azimutali δ', δ'' si trova poi:

$$tang\,D = \frac{(N_1 - N_2)(tang\,\theta'' - tang\,\theta')\{N_2 - N_1\,tang\,\theta'\,tang\,\theta''\}}{(N_2 + N_1\,tang^2\theta')(N_2 + N_1\,tang^2\theta'') + (N_1 - N_2)^2\,tang\,\theta'\,tang\,\theta''}. \qquad (59)$$

CAPITOLO X.

RIDUZIONE DEI PROBLEMI DI GEODESIA ELLISSOIDICA ALLA SFERA.

1. Fra le rappresentazioni conformi di una superficie sopra un altra merita, geodeticamente parlando, specialissima attenzione quella dell'ellisoide di rivoluzione sulla sfera, giacchè, scelto convenientemente il complesso di conformità, dà il mezzo, a causa della piccolezza dell'eccentricità terrestre, di ridurre la soluzione dei principali problemi di geodesia ellissoidica, già direttamente trattati nei precedenti capitoli, a quella degli analoghi problemi sferici, che non presenta nè difficoltà analitiche, nè complicazione eccessiva di calcoli.

Per applicare le formule generali delle rappresentazioni, conformi al caso in cui la superficie da rappresentare è un ellissoide di rivoluzione, è necessario anzitutto di porre l'elemento lineare di questa superficie, sotto la forma isoterma

$$ds = \sqrt{\lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)},$$

ed a ciò si giunge senza difficoltà, pur ritenendo per linee coordinate i meridiani ed i paralleli, col porre, nelle consuete notazioni degli elementi geodetici fondamentali,

$$dv = \frac{\rho}{r} d\varphi, \qquad (1)$$

nel qual caso si trae:

$$ds = r\sqrt{dv^2 + d\omega^2}. \qquad (2)$$

Dalla relazione (1) si ha poi, sostituendo a ρ ed r i loro valori in funzione della latitudine geografica φ,

$$v = \int \frac{(1 - e^2)d\varphi}{\cos\varphi(1 - e^2.sen^2\varphi)} + C = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e^2 \int \frac{\cos\varphi . d\varphi}{1 - e^2.sen^2\varphi} + C,$$

d'onde, osservando che è

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int \frac{\operatorname{sen}\varphi \,.\, d\varphi}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \operatorname{sen}\varphi}{1 - \operatorname{sen}\varphi} = \log \,.\, \operatorname{cotg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\int \frac{e^2 \,.\, \cos\varphi \,.\, d\varphi}{1 - e^2 \,.\, \operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{e}{2} \log \frac{1 + e \,.\, \operatorname{sen}\varphi}{1 - e \,.\, \operatorname{sen}\varphi} = \log \left(\frac{1 + e \,.\, \operatorname{sen}\varphi}{1 - e \,.\, \operatorname{sen}\varphi}\right)^{\frac{e}{2}},$$

e ponendo nell'integrare $C = \log k$, si ottiene

$$v = \log \left\{ k \left(\frac{1 - e \,.\, \operatorname{sen}\varphi}{1 + e \,.\, \operatorname{sen}\varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \operatorname{cotg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) \right\} \qquad (3)$$

il logaritmo essendo naturale.

Per $v = costante$ si ha $\varphi = costante$ e si ottiene quindi un parallelo dell'ellissoide, cosicchè l'ausiliaria v, della quale si fa ampio uso in Geografia Matematica, può essere scelta a rappresentare il parametro caratteristico dei paralleli come la latitudine geografica, geocentrica o ridotta, e noi, per designare la proprietà principale che la distingue da queste, le daremo il nome di *Latitudine Isoterma*.

Nella (3) poi k rappresenta una costante arbitraria, che si determina assegnando il valore che deve prender la latitudine isoterma in corrispondenza ad un determinato parallelo. Dacchè vi ha l'uso di contare le latitudini in gradi, conviene evidentemente dar loro un origine comune ammettendo che all'equatore si abbia contemporaneamente $v = \varphi = \psi = u = 0$, ($\psi = latitudine\ geocentrica$), nel qual caso dalla (3) si vede che la costante arbitraria k deve esser supposta eguale all'unità.

2. Una sfera di raggio R può esser considerata come il limite al quale tende col decrescere dell'eccentricità un'ellissoide di rivoluzione, in cui R sia il semiasse maggiore: riferendo dunque la sfera ad un sistema di meridiani e di paralleli sferici e rappresentando con Ω, V i parametri isotermi di queste due famiglie di linee e con Φ la corrispondente latitudine geografica, l'elemento lineare sferico sarà dato da

$$ds_1 = R \,.\, \cos\Phi \sqrt{dV^2 + d\Omega^2}, \qquad (4)$$

essendo

$$V = \log \,.\, \operatorname{cotg}\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right). \qquad (5)$$

Ne segue che tutte le rappresentazioni conformi dell'ellissoide (2)

sulla sfera (4) sono contenute (vedi Capitolo IX, §§ 5 e 7) nelle formule generali

$$\Omega \pm i.V = \Psi(\omega \pm i.v)$$

$$n = \frac{R.\cos\Phi}{r}.\sqrt{\Psi_1\Psi_2'}$$

e si distinguono fra di loro dalle varie forme particolari della funzione arbitraria Ψ.

Quando la rappresentazione conforme che si vuole stabilire deve servire per la sopra accennata riduzione dei problemi di geodesia ellissoidica ai problemi analoghi sulla sfera è evidentemente utile di determinare il complesso di conformità Ψ per modo che ai meridiani ed ai paralleli ellissoidici corrispondano rispettivamente i meridiani ed i paralleli sferici, nel qual caso le corrispondenze sono necessariamente della forma

$$\Omega = f_\Omega(\omega), \quad V = f_V(v),$$

ed il modulo di trasformazione deve esser funzione della sola φ (Capitolo IX, § 8). È facile vedere che queste condizioni non possono essere soddisfatte a meno che la funzione arbitraria Ψ non sia lineare rispetto al complesso $\omega \pm iv$; porremo dunque

$$\left.\begin{aligned} \Omega \pm iV &= c(\omega \pm iv) + c' \\ n &= \frac{c.R.\cos\Phi}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

supponendo che c e c' sieno due costanti arbitrarie, e che c' possa essere anche un complesso immaginario.

3. Se nelle (6) si facesse $c = 1$, $c' = 0$ a ciascun punto dell'ellissoide verrebbe a corrispondere un punto della sfera e reciprocamente, in modo che l'immagine della superficie ellissoidica presa in complesso si estenderebbe senza duplicazioni su tutta la sfera: considerando allora una rete di triangoli geodetici sull'ellissoide, l'immagine di ciascuno di essi sarebbe data da un triangolo curvilineo della sfera, in cui i lati si allontanerebbero così poco dai cerchii massimi che ne congiungono gli estremi che nelle quistioni in cui un'estrema precisione non è richiesta si potrebbe fare astrazione da siffatto deviamento e, dacchè la rappresentazione conserva gli angoli, sarebbe possibile sostituire alla risoluzione della rete sferoidica quella delle rete sferica e risalire dalle coordinate sferiche Ω, V dei vertici di questa, calcolate trigonometricamente, alle coordinate geografiche φ, ω dei vertici geodetici corrispondenti.

Ma siccome nei calcoli geodetici è sempre una parte dello sferoide che si prende a considerare, così conviene usufruire dell'indeterminazione delle due costanti arbitrarie che compariscono nelle (6) e del raggio R della sfera rappresentante per rendere le immagini sferiche più somiglianti, per così dire, ed eguali in grandezza alle figure che rappresentano. È facile vedere però che supponendo complessa la costante c', la sua parte reale non fa che spostare l'origine delle longitudini sferiche che è arbitraria; non si perde quindi generalità ammettendo che c' sia un semplice immaginario, che per comodità di notazione introdurremo sotto forma logaritmica e con segno negativo, ponendo:

$$c' = -i \,.\, log\, K.$$

Inoltre, per maggiore semplicità di formule, considereremo in luogo delle latitudini geografiche Φ e φ i loro rispettivi complementi che rappresenteremo con Z e ζ, cosicchè la rappresentazione conforme dell'ellissoide sulla sfera resterà individuata dalle corrispondenze

$$\Omega = c \,.\, \omega, \quad V = c \,.\, u - log\, K,$$

ossia dalle

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= c \,.\, \omega, \\ tang\frac{Z}{2} &= K\left(tang\frac{\zeta}{2}\right)^{c}\left(\frac{1 + e \,.\, cos\,\zeta}{1 - e \,.\, cos\,\zeta}\right)^{\frac{c \,.\, e}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

il modulo di trasformazione essendo dato dalla relazione:

$$n = \frac{c \,.\, R \,.\, sen\, Z}{a \,.\, sen\,\zeta}\sqrt{1 - e^2 \,.\, cos^2\,\zeta}. \qquad (8)$$

4. Ora il modulo di trasformazione n essendo costante lungo ciascun parallelo, affinchè le figure rappresentanti siano meno che è possibile diverse dalle rappresentate è necessario evidentemente scegliere c, K ed R per modo che lungo uno dei paralleli centrali della regione ellissoidica che si vuol rappresentare il modulo suddetto sia eguale all'unità, e che nel passare da questo parallelo ai paralleli vicini, la deformazione delle aree, e quindi quella delle lunghezze, sia la minima possibile. Alla latitudine geografica φ_0 del parallelo centrale lungo il quale, per essere $n = 1$, gli elementi di area rimangono inalterati noi daremo con *Gauss* il nome di *Latitudine normale della rappresentazione* ed indicheremo d'ora innanzi con ζ_0, Z_0, Φ_0, i valori di ζ, Z, Φ, corrispondenti a questa.

Ciò posto, indicando con $\frac{dn}{d\zeta_0}$, $\frac{d^2n}{d\zeta_0^2}$, $\frac{d^3n}{d\zeta_0^3}$, ... i valori delle derivate successive del modulo di trasformazione prese rispetto alla collatitudine ζ sotto la latitudine normale, avremo evidentemente

$$n = n_0 + (\zeta - \zeta_0)\frac{dn}{d\zeta_0} + \frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2}\frac{d^2n}{d\zeta_0^2} + \frac{(\zeta-\zeta_0)^3}{2.3}\frac{d^3n}{d\zeta_0^3} + \cdots,$$

d'onde si vede che la deformazione lineare in prossimità al parallelo normale è tanto minore quanto più grande è il numero dei termini che nella serie soprascritta si possono rendere nulli col determinare convenientemente le tre costanti arbitrarie della rappresentazione; quindi i più convenienti valori di queste debbono esser tratti dalle tre condizioni coesistenti

$$n_0 = 1, \quad \frac{dn}{d\zeta_0} = 0, \quad \frac{d^2n}{d\zeta_0^2} = 0. \tag{9}$$

5. Dalla relazione (8), derivando rispetto a ζ, si ottiene senza difficoltà

$$\frac{dn}{d\zeta} = \frac{c.R}{a}\left(\frac{\cos Z}{\operatorname{sen}\zeta}\frac{dZ}{d\zeta}\sqrt{1-e^2.\cos^2\zeta} - \frac{(1-e^2)\cos\zeta.\operatorname{sen}Z}{\operatorname{sen}^2\zeta\sqrt{1-e^2.\cos^2\zeta}}\right),$$

mentre la seconda della (7), messa sotto forma logaritmica e differenziata, dà

$$\frac{dZ}{\operatorname{sen}Z} = \frac{c.d\zeta}{\operatorname{sen}\zeta} - \frac{c.e^2.\operatorname{sen}\zeta.d\zeta}{1-e^2.\cos^2\zeta} = \frac{(1-e^2).c.d\zeta}{\operatorname{sen}\zeta(1-e^2.\cos^2\zeta)},$$

ossia

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \frac{(1-e^2)c.\operatorname{sen}Z}{\operatorname{sen}\zeta(1-e^2.\cos^2\zeta)}. \tag{10}$$

Quindi abbiamo

$$\frac{dn}{d\zeta} = \frac{c.R(1-e^2)\operatorname{sen}Z}{a.\operatorname{sen}^2\zeta\sqrt{1-e^2.\cos^2\zeta}}(c.\cos Z - \cos\zeta), \tag{11}$$

relazione in cui il secondo membro non può divenir nullo in generale a meno che non sia:

$$c.\cos Z - \cos\zeta = 0. \tag{12}$$

Questa condizione determina quindi la costante c se si conosce il valore di Z_0 corrispondente al valore di ζ_0.

Poniamo per brevità

$$F(\zeta) = \frac{c.R(1-e^2)\operatorname{sen}Z}{a.\operatorname{sen}^2\zeta\sqrt{1-e^2.\cos^2\zeta}},$$

in modo che la (11) divenga

$$\frac{dn}{d\zeta} = F(\zeta)(c \cdot \cos Z - \cos\zeta):$$

rappresentando con $F'(\zeta)$ la derivata totale di $F(\zeta)$ presa rispetto a ζ avremo:

$$\frac{d^2n}{d\zeta^2} = F'(\zeta)(c \cdot \cos Z - \cos\zeta) - F(\zeta)\left(c \cdot \frac{dZ}{d\zeta} \operatorname{sen} Z - \operatorname{sen}\zeta\right):$$

d'onde risulta che se la costante c è stata determinata per mezzo della (12), affinchè $\frac{d^2n}{d\zeta^2}$ si annulli è necessario e sufficiente che si abbia

$$c \cdot \frac{dZ}{d\zeta} \operatorname{sen} Z - \operatorname{sen}\zeta = 0,$$

giacchè $F'(\zeta)$ non può essere in generale nè zero, nè infinitamente grande. Sostituendo in questa ultima relazione a $\frac{dZ}{d\zeta}$ il suo valore (10) la condizione precedente prende poi la forma

$$\frac{c^2 \cdot \operatorname{sen}^2 Z(1-e^2)}{\operatorname{sen}\zeta(1-e^2 \cdot \cos^2\zeta)} - \operatorname{sen}\zeta = 0. \qquad (13)$$

Se si introduce ancora come incognita la latitudine sferica Φ_0 (od il suo complemento Z_0) corrispondente alla latitudine normale φ_0 della rappresentazione, e si tien conto della seconda delle corrispondenze (7), le tre condizioni fondamentali (9) si trasformano quindi nelle quattro seguenti

$$\left.\begin{aligned} c \cdot R \cdot \operatorname{sen} Z_0 \sqrt{1-e^2 \cdot \cos^2\zeta_0} &= a \cdot \operatorname{sen}\zeta_0 \\ c \cdot \cos Z_0 &= \cos\zeta_0 \\ c^2(1-e^2)\operatorname{sen}^2 Z_0 &= \operatorname{sen}^2\zeta_0(1-e^2 \cdot \cos^2\zeta_0) \\ \operatorname{tang}\frac{Z_0}{2} &= K\left(\operatorname{tang}\frac{\zeta_0}{2}\right)^c \left(\frac{1+e \cdot \cos\zeta_0}{1-e \cdot \cos\zeta_0}\right)^{\frac{c \cdot e}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

che determinano simultaneamente le quattro quantità c, K, R, Z_0 cercate, in funzione della latitudine normale φ_0 che deve supporsi data.

La risoluzione di queste equazioni riesce semplicissima, ed infatti eliminando Z_0 fra la seconda e la terza si deduce

$$c^2(1-e^2) = 1 - e^2 \cdot \cos^2\zeta_0 - e^2 \cdot \cos^2\zeta_0 \operatorname{sen}^2\zeta_0,$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{1 + \frac{e^2 . sen^4 \zeta_0}{1 - e^2}} \\ c &= \sqrt{1 + \frac{e^2 . cos^4 \varphi_0}{1 - e^2}} \end{aligned}\right\} . \tag{15}$$

L'eliminazione di c fra la prima e la terza delle (14) dà poi

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^4 . cos^2 \zeta_0} = \frac{a . sen^2 \zeta_0}{c^2 . sen^2 Z_0 \sqrt{1 - e^2}} \\ R &= \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 . sen^2 \varphi_0} = \frac{a . cos^2 \varphi_0}{c^2 . cos^2 \Phi_0 \sqrt{1 - e^2}} \end{aligned}\right\} . \tag{16}$$

Introducendo poi nella seconda delle (14) in luogo di c il suo valore (15) in funzione della collatitudine normale ζ_0 si trova:

$$\left.\begin{aligned} cos\, Z_0 &= \frac{cos\, \zeta_0 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 + e^2 . sen^4 \zeta_0}} \\ sen\, \Phi_0 &= \frac{sen\, \varphi_0 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 + e^2 . cos^4 \varphi_0}} \end{aligned}\right\} . \tag{17}$$

Finalmente, determinata la costante c e la latitudine normale sferica Φ_0, si deduce K dall'ultima delle (14), ponendo

$$\left.\begin{aligned} K &= tang \frac{Z_0}{2} \left(cotg \frac{\zeta_0}{2} \right)^c \left(\frac{1 - e . cos\, \zeta_0}{1 + e . cos\, \zeta_0} \right)^{\frac{c.e}{2}} \\ K &= \frac{tang \left(45° - \frac{\Phi_0}{2} \right)}{\left[tang . \left(45° - \frac{\varphi_0}{2} \right) \right]^c} \left(\frac{1 - e . sen\, \varphi_0}{1 + e . sen\, \varphi_0} \right)^{\frac{c.e}{2}} \end{aligned}\right\} . \tag{18}$$

La formula (16) mostra che la sfera rappresentatrice più conveniente ha per raggio la media geometrica dei raggi di curvatura principali ρ_0, N_0 dell'ellissoide corrispondenti alla latitudine normale φ_0, e che per conseguenza tale sfera si identifica colla cosiddetta sfera osculatrice lungo il parallelo normale della rappresentazione. Ciò potevamo prevedere da quanto abbiamo esposto nel Capitolo III relativamente a siffatta sfera ausiliaria, che deve esser considerata come la sfera più intima coll'ellissoide lungo il parallelo suddetto o, a meglio dire, nel campo ellissoidico di cui questo è il parallelo

medio. Vedremo fra breve come, quando si tratta dell'ellissoide terrestre, l'intimità fra un campo notevolmente esteso, per esempio di cinque o sei gradi in latitudine, ed illimitato in longitudine, colla relativa sfera osculatrice è così grande da permettere di considerare dentro di esso, geodeticamente parlando, la sfera e l'ellissoide come applicabili l'una sull'altra.

6. È facile vedere che in prossimità del parallelo normale della rappresentazione caratterizzata nel paragrafo precedente ad una geodetica dell'ellissoide corrisponde una linea estremamente poco diversa da una geodetica della sfera, ossia che gli archi delle geodetiche ellissoidiche vengono ad essere sensibilmente rappresentati da archi di cerchii massimi. Infatti, indicando secondo il solito con h_s h_s', le curvature geodetiche di due linee corrispondenti della rappresentazione, la prima appartenente all'ellissoide, avremo [Capitolo IX, formula (19)]

$$h_s' = \frac{h_s}{n} - \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial s'},$$

essendo $\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial s'}$ la derivata dell'inversa del modulo di trasformazione n, presa nella direzione s' ortogonale alla linea s che si considera. Ora nel caso nostro n è funzione della sola φ e quindi si ha

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{n}\right)}{\partial s'} = \frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial s'},$$

mentre se indichiamo con θ l'azimut in un punto qualunque della linea s, evidentemente nella direzione s' è

$$\rho \,.\, d\varphi = -\, ds' \,.\, sen\,\theta,$$

giacchè all'elemento ds' viene a corrispondere l'azimut $90° + \theta$. La precedente relazione fra le curvature geodetiche che si corrispondono può dunque esser posta sotto la forma

$$h_s' = \frac{h_s}{n} + \frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi}\,\frac{sen\,\theta}{\rho} \qquad (19)$$

e, se la linea s è una geodetica dell'ellissoide, si riduce a

$$h_s' = \frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi}\,\frac{sen\,\theta}{\rho}.$$

D'altra parte, distinguendo con l'indice *zero* le notazioni che si riferiscono alla latitudine normale φ_0, ed indicando con $\Delta\varphi$ la differenza fra questa ed una latitudine qualunque, si ha in generale:

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)_0 + \Delta\varphi\left(\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi}\right)_0 + \frac{\Delta\varphi^2}{1.2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi^2}\right)_0 + \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi^3}\right)_0 + \cdots,$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi} = -\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\zeta} = \frac{1}{n^2}\frac{dn}{d\zeta},$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi^2} = \frac{2}{n^3}\left(\frac{dn}{d\zeta}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\frac{d^2n}{d\zeta^2},$$

e quindi, a causa delle condizioni fondamentali (9), è

$$\frac{1}{n} = 1 + \frac{\Delta\varphi^3}{6}\left(\frac{d^3\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi^3}\right)_0 + \cdots$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi} = \frac{\Delta\varphi^2}{2}\left(\frac{d^3\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi^3}\right)_0 + \cdots$$

Sostituendo nella (19) si trae:

$$h_s - h_s' = \frac{\Delta\varphi^2}{2}\left(\frac{d^3\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi^3}\right)_0 \left\{\frac{sen\,\theta}{\rho} + \frac{h_s . \Delta\varphi}{3}\right\} + \cdots \qquad (20)$$

e, nel caso che la s sia una geodetica dell'ellissoide

$$-h_s' = \frac{\Delta\varphi^2}{2}\frac{sen\,\theta}{\rho}\left(\frac{d^3\left(\frac{1}{n}\right)}{d\varphi^3}\right)_0 + \cdots$$

Di qui si vede che la differenza fra le curvature geodetiche h_s ed h_s' si riduce ad una quantità piccola del terzo ordine qualunque sia la natura della linea s, dappoichè la quantità $\frac{sen\,\theta}{\rho}$ deve essere evidentemente considerata come del 1.° ordine delle grandezze. Daremo in seguito le formule per mezzo delle quali il valore della suddetta differenza puo esser calcolato: frattanto si può concludere che in prossimità al parallelo normale le linee dell'ellissoide, considerate come enti geo-

metrici speciali di questa superficie, non cambiano di natura nella rappresentazione, conservano cioè il loro significato e le loro proprietà geometriche rispetto alla sfera rappresentatrice; così le linee a curvatura geodetica costante dell'ellissoide vengono sensibilmente rappresentate da cerchii della sfera, e le geodetiche da geodetiche: la delimitazione del campo dentro cui tale proprietà può considerarsi come pienamente verificata dipende naturalmente dall'ordine di approssimazione che si ritiene nella misura delle lunghezze; però dalla discussione della formula (20) si vede come, col crescere di $\Delta\varphi$, le geodetiche dell'ellissoide tendano a perdere la loro natura assai più lentamente di ogni altra linea, e tanto più lentamente quanto più per questa h_s differisce da zero.

7. Un'analisi un poco più profonda della quistione trattata nel numero precedente permette però di estendere la rappresentazione per scopo geodetico anche al di là del campo di applicabilità sopra considerato, giacchè fornisce le formule atte al passaggio dagli enti ellissoidici a quelli che rigorosamente loro corrispondono. Noi limiteremo le nostre ricerche al caso in cui si hanno soltanto da considerare delle geodetiche ellissoidiche.

Siano A e B gli estremi di un arco s di geodetica ellissoidica, A', B' i punti che loro corrispondono sulla sfera rappresentatrice ed S l'arco di cerchio massimo che li congiunge su questa. Immaginiamo una seconda rete di meridiani sferici che si incontrino nei poli di tale cerchio massimo considerato come un equatore della sfera, e rappresentiamo con Φ' la latitudine e con Ω' la longitudine dei punti sferici riferiti a queste nuove linee coordinate. Rispetto ad esse l'elemento lineare sferico è dato evidentemente da

$$ds_1 = R\sqrt{d\Phi'^2 + \cos^2\Phi' . d\Omega'^2}; \qquad (21)$$

ma è utile anche qui introdurre invece della latitudine geografica Φ' la latitudine isoterma V' che corrisponde al nuovo sistema di coordinate Ω', Φ', e che è legata alla latitudine geografica stessa dalla relazione [vedi § 2, formula (5)]

$$V' = \log.\cot g\left(45° - \frac{\Phi'}{2}\right), \qquad (22)$$

nel qual caso la (21) si riduce (vedi § 2) alla forma isoterma

$$ds_1 = R.\cos\Phi'\sqrt{dV'^2 + d\Omega'^2} = R.\cos\Phi' . dV'\sqrt{1 + \left(\frac{d\Omega'}{dV'}\right)^2}. \qquad (23)$$

Per l'elemento ds dell'ellissoide, cui corrisponde ds_1 sulla sfera, abbiamo poi

$$ds = \frac{R.\cos\Phi'}{n}\sqrt{dV'^2 + d\Omega'^2} = \frac{R.\cos\Phi'.dV'}{n}\sqrt{1+\left(\frac{d\Omega'}{dV'}\right)^2}, \quad (24)$$

e le (23) e (24) valgono qualunque sia la natura della linea s. Se si vuole esprimere che questa è una geodetica dell'ellissoide, come la quistione che trattiamo porta a supporre, si deve togliere il valore di $\frac{d\Omega'}{dV'}$ dalla equazione delle geodetiche, che è in generale (vol. I, pagina 88).

$$\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du.dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2 = 2.ds.d\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)$$

e che, per la forma (24) dell'elemento lineare si riduce a:

$$\frac{\partial\left(\frac{\cos^2\Phi'}{n^2}\right)}{\partial V'}\sqrt{dV'^2 + d\Omega'^2} = \frac{2.\cos\Phi'}{n}d\left(\frac{\frac{\cos\Phi'}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\Omega'}{dV'}\right)^2}}\right).$$

Questa equazione, per essere

$$\frac{\partial\left(\frac{\cos^2\Phi'}{n^2}\right)}{\partial V'} = \frac{2\cos\Phi'}{n}\frac{\partial\left(\frac{\cos\Phi}{n}\right)}{\partial V'},$$

si trasforma poi nella seguente:

$$\frac{\partial\left(\frac{\cos\Phi'}{n}\right)}{\partial V'}\sqrt{dV'^2 + d\Omega'^2} = d\left(\frac{\frac{\cos\Phi'}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\Omega'}{dV'}\right)^2}}\right). \quad (25)$$

Indicando ancora con θ' l'azimut variabile che la linea s_1 corrispondente ad s fa coi nuovi meridiani sferici $\Omega' = cost$ si ha per altro nella (25)

$$\frac{d\Omega'}{dV'} = tang\,\theta',$$

giacchè $R.\cos\Phi'.dV'$, $R.\cos\Phi'.d\Omega'$ sono gli elementi delle nuove linee coordinate cui è stata riferita la sfera: per conseguenza, sostituendo nella (25) stessa, avremo

$$\frac{\partial\left(\frac{\cos\Phi'}{n}\right)}{\partial V'}d\Omega' = sen\,\theta'.d\left(\frac{\cos\Phi'.\cos\theta'}{n}\right). \quad (26)$$

L'integrazione di questa equazione differenziale non si può eseguire in generale, ma nel caso particolare che studiamo la linea s_1, come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, non si discosta che di pochissimo dal nuovo equatore sferico S, e, per conseguenza, l'azimut θ' ha sempre un valore così prossimo a 90° che è evidentemente permesso, almeno in una prima approssimazione, di sostituire nella (26) al seno di θ' l'unità ed al coseno la cotangente, ponendo

$$\frac{\partial\left(\frac{\cos\Phi'}{n}\right)}{\partial V'} d\Omega' = d\left(\frac{\cos\Phi' \cdot cotg\,\theta'}{n}\right),$$

e quindi:

$$\frac{\cos\Phi' cot\,\theta'}{n} = \int \frac{\partial\left(\frac{\cos\Phi'}{n}\right)}{\partial V'} d\Omega' + costante. \qquad (27)$$

Inoltre il valore della latitudine Φ' lungo la linea s_1 è sempre estremamente piccolo e, prossimamente, dell'ordine stesso di $90° - \theta'$; perciò dentro l'approssimazione tenuta nella (27) si può introdurre in questa rispettivamente 1, $d\Phi'$, $\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \Phi'}$ in luogo di $\cos\Phi'$, $dV' = \frac{d\Phi'}{\cos\Phi'}$, $\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial V'}$, dandole la forma seguente:

$$\frac{cotg\,\theta'}{n} = \int \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \Phi'} d\Omega' + costante. \qquad (28)$$

Ciò posto, rappresentiamo con θ'_0 ed n_1 i valori che assumono θ' ed n nel punto $A'(\Delta\Omega' = 0,\ \Omega' = \Omega'_0)$ origine dell'arco sferico di cerchio massimo S: dalla (28), fra i limiti Ω'_0 ed Ω', avremo:

$$cotg\,\theta' = \frac{n \cdot cotg\,\theta'_0}{n_1} + n \int_{\Omega'_0}^{\Omega'} \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \Phi'} d\Omega' \qquad (29)$$

ove le quantità n e $\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \Phi'}$ debbono esser considerate come funzioni

della sola Ω', l'eliminazione dell'altra variabile Φ' potendo teoreticamente esser fatta per mezzo dell'equazione in Φ', Ω' della curva s_1 alla quale l'azimut θ' si riferisce. Indicando, per brevità, con Λ_0 il valore che prende la quantità

$$-n\frac{\partial\frac{1}{n}}{\partial\Phi'}$$

nel punto Ω'_0, e ponendo in generale

$$\left.\begin{aligned}\Lambda=-n\frac{\partial\frac{1}{n}}{\partial\Phi'}&=\Lambda_0+\lambda_1\Delta\Omega'+\lambda_2\Delta\Omega'^2+\dots\\ n&=n_1(1+\mu_1\Delta\Omega'+\mu_2\Delta\Omega'^2+\dots)\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \mu_1, \mu_2, \dots$ saranno quindi delle costanti e, per conseguenza, osservando che si ha

$$\frac{1}{1+\mu_1.\Delta\Omega'+\mu_2.\Delta\Omega'^2+\dots}=1-\mu_1.\Delta\Omega'-(\mu_2-\mu_1^2)\Delta\Omega'^2+\dots,$$

ed eseguendo l'integrazione accennata nella (29), si trarrà, con ovvie riduzioni:

$$cotg\theta'=(1+\mu_1\Delta\Omega'+\mu_2\Delta\Omega'^2+\dots)\,cotg\theta'_0-\Lambda_0\Delta\Omega'-\frac{\mu_1\Lambda_0+\lambda_1}{2}\Delta\Omega'^2+\dots\qquad(31)$$

Questa è l'equazione che rappresenta approssimativamente la geodetica s dell'ellissoide considerata; per comparare il suo andamento con quello della curva s_1 che le corrisponde sulla sfera rappresentatrice è però necessario dedurre anche l'equazione di quest'ultima linea, ed a ciò si riesce facilmente, dentro l'approssimazione tenuta nella (31), ricordando che si ha in generale

$$dV'=d\Omega'.cotg\,\theta',$$

sostituendo a $cotg\,\theta'$ il suo valore tolto dalla (31) medesima ed integrando: per tal modo si ottiene:

$$V'=\left(\Delta\Omega'+\frac{\mu_1}{2}\Delta\Omega'^2+\dots\right)cotg\,\theta'_0-\frac{\Lambda_0}{2}\Delta\Omega'^2-\frac{\Lambda_0\mu_1+\lambda_1}{6}\Delta\Omega'^3+\dots\qquad(32)$$

Agli estremi dell'arco s di geodetica ellissoidica corrispondono due punti della s_1 che appartengono altresì all'equatore sferico S e che perciò hanno latitudini isoterme e geografiche nulle rispetto a questo, mentre le longitudini sono poi Ω'_0 ed Ω'_0+S, almeno se si suppone l'arco S di cerchio massimo contato in angolo: la coppia

di valori $V'=0$, $\Delta\Omega'=S$ deve dunque soddisfare all'equazione (32) e quindi si deve avere

$$cotg\,\theta'_0=\frac{S\left(\Lambda_0+\frac{\Lambda_0\mu_1+\lambda_1}{3}S+\ldots\right)}{2\left(1+\frac{\mu_1}{2}S+\ldots\right)},$$

ossia:

$$cotg\,\theta'_0=\frac{S}{2}\left\{\Lambda_0+\frac{S}{6}(2.\lambda_1-\mu_1\Lambda_0)+\ldots\right\}. \qquad (33)$$

Il valore θ'_1 di θ' che corrisponde all'altro estremo della geodetica s si deduce poi dalla (31) introducendovi in luogo di $\Delta\Omega'$ il relativo valore S e sostituendo a $cotg\,\theta'_0$ l'espressione in S trovata sopra: in tal guisa si trova:

$$cotg\,\theta'_1=-\frac{S}{2}\left\{\Lambda_0+\frac{S}{6}(4.\lambda_1+\mu_1\Lambda_0)+\ldots\right\}. \qquad (34)$$

Ciò posto sieno α_1, α_2 gli azimut ellissoidici agli estremi della geodetica s: dacchè la rappresentazione qui discussa è una rappresentazione conforme, gli stessi angoli rappresentano anche gli azimut sferici agli estremi della linea s_1 corrispondente ad s riferita agli antichi meridiani sferici $\Omega=costante$; ed è facile vedere come, indicando con $\alpha_1+\Delta\alpha_1$ ed $\alpha_2+\Delta\alpha_2$ gli azimut che nei suddetti punti fa con questi meridiani l'arco sferico di cerchio massimo S, si ha nelle prestabilite notazioni:

$$\Delta\alpha_1=90^\circ-\theta'_0,\quad \Delta\alpha_2=90^\circ-\theta'_1.$$

Porremo adunque

$$tang\,\Delta\alpha_1=\frac{S}{2}\left\{\Lambda_0+\frac{S}{6}(2.\lambda_1-\mu_1\Lambda_0)+\ldots\right\}$$

$$tang\,\Delta\alpha_2=-\frac{S}{2}\left\{\Lambda_0+\frac{S}{6}(4.\lambda_1+\mu_1\Lambda_0)+\ldots\right\}$$

o più semplicemente, a causa della piccolezza dei valori di $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ (vedi paragrafo precedente):

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha_1&=\frac{S}{2}\left\{\Lambda_0+\frac{S}{6}(2.\lambda_1-\mu_1\Lambda_0)+\ldots\right\}\\ \Delta\alpha_2&=-\frac{S}{2}\left\{\Lambda_0+\frac{S}{6}(4.\lambda_1+\mu_1\Lambda_0)+\ldots\right\}\end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

Per far uso di queste formule e per renderne esplicito il significato analitico resta da esprimere Λ_0, λ_1, e μ_1 in funzione dei dati diretti del problema, e per questo osserveremo anzitutto come, se si rappresentano con n_2 e Λ_1 i valori che prendono le funzioni n e $-n\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \Phi'}$ nel punto $\Omega' = \Omega'_0 + S$, $\Phi' = 0$ ossia all'estremo B della geodetica s, si ottiene

$$\Lambda_1 = \Lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \ldots,$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 1 + \mu_1 S + \mu_2 S^2 + \ldots,$$

d'onde si trae

$$S\left(\frac{\Lambda_0}{3} + \frac{\Lambda_1}{6}\right)\sqrt[6]{\frac{n_1}{n_2}} = \frac{S\left\{\Lambda_0 + \frac{1}{3}(\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \ldots)\right\}}{2(1 + \mu_1 S + \mu_2 S^2 + \ldots)^{1/6}}$$

$$S\left(\frac{\Lambda_0}{6} + \frac{\Lambda_1}{3}\right)\sqrt[6]{\frac{n_2}{n_1}} = \frac{S}{2}\left\{\Lambda_0 + \frac{2}{3}(\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \ldots)\right\}(1 + \mu_1 S + \mu_2 S^2 + \ldots)^{1/6},$$

od anche, con ovvii sviluppi in serie:

$$S\left(\frac{\Lambda_0}{3} + \frac{\Lambda_1}{6}\right)\sqrt[6]{\frac{n_1}{n_2}} = \frac{S}{2}\left\{\Lambda_0 + \frac{S}{6}(2\lambda_1 - \mu_1\Lambda_0) + \ldots\right\},$$

$$S\left(\frac{\Lambda_0}{6} + \frac{\Lambda_1}{3}\right)\sqrt[6]{\frac{n_2}{n_1}} = \frac{S}{2}\left\{\Lambda_0 + \frac{S}{6}(4\lambda_1 + \mu_1\Lambda_0) + \ldots\right\}.$$

Confrontando queste colle (35) si vede che, dentro l'approssimazione quivi ritenuta, si può porre

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= S\left(\frac{\Lambda_0}{3} + \frac{\Lambda_1}{6}\right)\sqrt[6]{\frac{n_1}{n_2}} \\ \Delta\alpha_2 &= -S\left(\frac{\Lambda_0}{6} + \frac{\Lambda_1}{3}\right)\sqrt[6]{\frac{n_2}{n_1}} \end{aligned}\right\}, \qquad (36)$$

nelle quali relazioni non abbiamo più che da occuparci delle quantità Λ_0 e Λ_1, giacchè in luogo di S si può introdurre evidentemente il valore più che abbastanza approssimato $\frac{s}{\sqrt{\rho N}}$, ed il valore del rapporto $\frac{n_2}{n_1}$ può esser dedotto da formule generali già premesse, e del resto differisce sì poco dall'unità che dentro l'approssimazione tenuta si può fare anche astrazione da tale differenza.

Il modulo di trasformazione n essendo nel caso nostro funzione della sola Φ, si ha per altro

$$\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \Phi'} = \frac{d\frac{1}{n}}{d\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi'},$$

mentre d'altra parte, se si osserva che è

$$\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\Phi} = -\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{dZ} = -\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dZ},$$

e si sostituiscono a $\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\zeta}$ ed a $\frac{d\zeta}{dZ}$ i valori che si traggono per tali derivate dalle relazioni (8) e (10), si trova

$$\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\Phi} = \frac{a \,.\, sen\,\zeta\,(c \,.\, cos\, Z - cos\,\zeta)}{c^2 \,.\, R \,.\, sen^2\, Z\sqrt{1 - e^2 \,.\, cos^2\zeta}};$$

per conseguenza, rappresentando con φ_1, Φ_1, e con φ_2, Φ_2, le latitudini ellissoidiche e sferiche degli estremi della geodetica s, avremo:

$$\Lambda_0 = -n_1 \frac{\partial\left(\frac{1}{n_1}\right)}{\partial \Phi'} = \frac{sen\,\varphi_1 - c \,.\, sen\,\Phi_1}{c \,.\, cos\,\Phi_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi'}\right)_1$$

$$\Lambda_1 = -n_2 \frac{\partial\left(\frac{1}{n_2}\right)}{\partial \Phi'} = \frac{sen\,\varphi_2 - c \,.\, sen\,\Phi_2}{c \,.\, cos\,\Phi_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi'}\right)_2$$

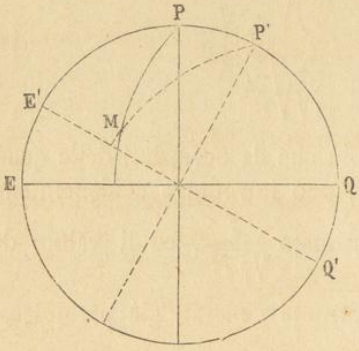

Fig. 66.

ove gli indici alle parentesi degli ultimi membri indicano che i valori delle quantità rinchiuse in esse corrispondono rispettivamente agli estremi di s suddetti. Sieno ora, nella fig. 66, P il polo in cui s'intersecano i meridiani fondamentali $\Omega = cost.$ della sfera rappresentatrice, P' invece il polo in cui si intersecano i meridiani ausiliarii $\Omega' = cost.$ e sia M un punto qualunque di coordinate Φ, Ω e Φ', Ω' rispettivamente. Il triangolo sferico $P'MP$ darà, indicando con Ω'_p la

longitudine di P rispetto ai meridiani ausiliarii e con L la distanza angolare PP' compresa fra i due poli suddetti:

$$sen\,\Phi = sen\,\Phi' cos\,L + cos\,\Phi'\,sen\,L\,cos\,(\Omega'_p - \Omega').$$

Derivando parzialmente rispetto a Φ' avremo quindi, in generale

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi'} = \frac{cos\,\Phi' cos\,L - sen\,\Phi' sen\,L\,.\,cos\,(\Omega'_p - \Omega')}{cos\,\Phi};$$

però nel caso speciale che ci occupa si devono considerare soltanto dei valori della derivata parziale $\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi'}$ corrispondenti a punti situati sull'equatore ausiliario $\Phi' = 0$, e quindi sarà

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi'} = \frac{cos\,L}{cor\,\Phi};$$

inoltre nel triangolo sferico sopra considerato il lato $P'M$ diviene allora di 90°, e l'angolo PMP' nelle notazioni precedenti è $\alpha_1 + \Delta\alpha_1 - 90°$, ovvero $\alpha_2 + \Delta\alpha_2 - 90°$ secondo che si considera l'uno o l'altro degli estremi dell'arco sferico S: si ha quindi

$$cos\,L = -cos\,\Phi\,sen\,(\alpha_1 + \Delta\alpha_1)$$

ovvero

$$cos\,L = -cos\,\Phi\,sen\,(\alpha_2 + \Delta\alpha_2),$$

e, riassumendo:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi'}\right)_1 = -sen\,(\alpha_1 + \Delta\alpha_1),$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi'}\right)_2 = -sen\,(\alpha_2 + \Delta\alpha_2).$$

Sostituendo nelle precedenti espressioni di Λ_0 e Λ_1 si trova

$$\Lambda_0 = \frac{c\,.\,sen\,\Phi_1 - sen\,\varphi_1}{c\,.\,cos\,\Phi_1}\,sen\,(\alpha_1 + \Delta\alpha_1)$$

$$\Lambda_1 = \frac{c\,.\,sen\,\Phi_2 - sen\,\varphi_2}{c\,.\,cos\,\Phi_2}\,sen\,(\alpha_2 + \Delta\alpha_2),$$

o, più semplicemente, a causa della estrema piccolezza delle correzioni $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_0 &= \frac{c\,.\,sen\,\Phi_1 - sen\,\varphi_1}{c\,.\,cos\,\Phi_1}\,sen\,\alpha_1\\ \Lambda_1 &= \frac{c\,.\,sen\,\Phi_2 - sen\,\varphi_2}{c\,.\,cos\,\Phi_2}\,sen\,\alpha_2\end{aligned}\right\}. \qquad (37)$$

Queste sono le formole dalle quali possono essere calcolate le ausiliarie Λ_0 e Λ_1. Lungo il parallelo normale della rappresentazione si ha $c \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \varphi = 0$, quindi, come era da prevedere, i valori di Λ si annullano qualunque sia la direzione della geodetica s: in ogni altro punto poi Λ prende dei valori tanto più piccoli quanto più il punto è prossimo al parallelo suddetto. Se si pone in generale

$$\chi = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \varphi}{c \cdot \cos \Phi} \tag{38}$$

e nella relazione (36) si trascurano i fattori $\sqrt[6]{\frac{n_1}{n_2}}$, $\sqrt[6]{\frac{n_2}{n_1}}$ come estremamente prossimi all'unità, si ha finalmente:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= +\frac{s}{3 \cdot R \cdot \operatorname{sen} 1''}\left(\chi_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + \frac{1}{2}\chi_2 \operatorname{sen}\alpha_2\right) \\ \Delta\alpha_2 &= -\frac{s}{3 \cdot R \cdot \operatorname{sen} 1''}\left(\frac{1}{2}\chi_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + \chi_2 \operatorname{sen}\alpha_2\right) \end{aligned}\right\}. \tag{39}$$

Nelle applicazioni è però da tener presente che, in queste formule, α_1 ed α_2 non sono gli azimut reciproci corrispondenti agli estremi di s, ma bensì gli azimut geodetici, riferiti cioè sempre alla direzione crescente di questo arco.

8. Cerchiamo ancora la differenza fra la lunghezza dell'arco di geodetica s e la lunghezza S dell'arco di equatore sferico ausiliario, compreso fra gli estremi della linea s_1 corrispondente ad s. Ritenendo le coordinate sferiche ausiliarie Ω', Φ', V', ϑ', all'elemento $d\sigma$ dell'ellissoide, corrispondente all'elemento

$$ds_1 = R \cdot \cos\Phi' \sqrt{dV'^2 + d\Omega'^2}$$

della sfera rappresentatrice, per essere

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{d\Omega'}{dV'},$$

può esser data la forma

$$d\sigma = \frac{R \cos\Phi' \cdot d\Omega'}{n \cdot \operatorname{sen}\vartheta'};$$

dimodochè si ha, in generale, per una curva qualunque dell'ellissoide,

$$\sigma = \int \frac{R \cos\Phi' \cdot d\Omega'}{n \cdot \operatorname{sen}\vartheta'} + \text{costante}, \tag{40}$$

ove Φ', n, θ' s'intendono espressi in funzione di Ω' per mezzo dell'equazione in Φ', Ω' della curva considerata.

Se si specifica l'arco σ colla condizione che esso si identifichi coll'arco s di geodetica ellissoidica, è poi da porre nella (40), ritenendo le notazioni stabilite più sopra [formule (30)],

$$n = n_1(1 + \mu_1 . \Delta\Omega' + \mu_2 . \Delta\Omega'^2 + \ldots),$$

e l'integrale deve esser limitato fra i valori Ω'_0 ed $\Omega'_0 + S$ della variabile Ω': inoltre si potrà, almeno in una prima approssimazione, introdurre l'unità in luogo di $sen\theta'$ e di $cos\,\Phi'$, per modo che si avrà

$$s = \frac{R}{n_1} \int_{\Omega'_0}^{\Omega'_0 + S} \frac{d\Omega'}{1 + \mu_1 . \Delta\Omega' + \mu_2 . \Delta\Omega'^2 + \ldots},$$

da cui si trae facilmente:

$$s = \frac{R.S}{n_1}\left(1 - \frac{\mu_1 S}{2} - \ldots\right).$$

Ma rappresentando ancora con n_2 il valore di n all'estremo della geodetica s ove è $\Omega' = \Omega'_0 + S$, si ha per altro [formule (30)]

$$\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} = \frac{1}{n_1\sqrt{1 + \mu_1 . S + \mu_2 . S^2 + \ldots}} = \frac{1}{n_1}\left(1 - \frac{\mu_1 S}{2} - \ldots\right);$$

perciò l'espressione sopra ottenuta per s, limitando l'approssimazione ai termini in S^2, può anche essere scritta come segue

$$s = \frac{R . S . sen\,1''}{\sqrt{n_1 n_2}} = \frac{S\sqrt{\rho N} . sen\,1''}{\sqrt{n_1 n_2}}, \qquad (41)$$

ove è stato aggiunto il fattore $sen\,1''$ affinchè s, come si suole, rimanga espresso in lunghezza.

9. È facile vedere come le formule (39) e (41) danno in pratica un'approssimazione più che sufficiente anche per archi geodetici eccezionalmente lunghi e per distanze rilevanti dal parallelo normale della rappresentazione, come per esempio di sei o sette grad di latitudine. Dentro tali ampii limiti le correzioni $\Delta\alpha$ negli azimut

raggiungono appena qualche decimo di secondo, e la quantità

$$s\sqrt{\rho . N}\, sen\, 1'' \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}\right),$$

che dà la correzione da farsi alla lunghezza $s\sqrt{\rho . N}\, sen\, 1''$ dell'arco sferico di cerchio massimo S per passare al corrispondente arco s di geodetica, è una quantità così piccola che i termini inferiori di un ordine ad essa escono affatto dai limiti di precisione cui possiamo aspirare coi nostri mezzi di misura. La rappresentazione conforme precedentemente discussa dà in conseguenza un modo tanto semplice quanto elegante di risolvere per mezzo delle sole formule di trigonometria sferica i problemi di geodesia ellissoidica trattati nei Capitoli V e VIII. Supponiamo infatti che di una rete di triangoli geodetici siano noti dall'osservazione gli angoli (compensati) ed una base, non solo, ma anche la posizione geografica φ_1, ω_1 di uno degli estremi di questa ed il suo orientamento α_1 (azimut), ed immaginiamo la rappresentazione conforme dell'ellissoide sulla sfera, individuata dalle formule ricavate nel § 5 e qui sotto riassunte

$$\left.\begin{aligned} sen\,\Phi_0 &= \frac{sen\,\varphi_0\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2+e^2 . cos^4\varphi_0}}, \\ c &= \sqrt{1+\frac{e^2 . cos^4\varphi_0}{1-e^2}}, \\ R &= \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 . sen^2\varphi_0} = \sqrt{\rho_0 N_0}, \\ K &= \frac{tang\left(45^\circ - \frac{\Phi_0}{2}\right)}{\left[tang\left(45^\circ - \frac{\varphi_0}{2}\right)\right]^c}\left(\frac{1-e\,.\,sen\,\varphi_0}{1+e\,.\,sen\,\varphi_0}\right)^{\frac{ce}{2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

intendendo che φ_0 rappresenti la latitudine del parallelo medio (prossimamente) della zona lungo la quale si estende la rete geodetica considerata. A ciascuno dei triangoli sferoidici corrisponde allora sulla sfera di raggio R un triangolo curvilineo che ha esattamente gli stessi angoli e che, se i lati sferoidici non sono troppo distanti dal parallelo normale φ_0, può esser considerato come un triangolo sferico o, altrimenti, può essere ricondotto al triangolo sferico che

ha gli stessi vertici, per mezzo delle formule

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \frac{c \cdot sen\,\Phi - sen\,\varphi}{c \cdot cos\,\Phi} \\ \Delta\alpha_1 &= \frac{s}{3 \cdot R \cdot sen\,1''}\left(\chi_1 \cdot sen\,\alpha_1 + \frac{1}{2}\chi_2 \cdot sen\,\alpha_2\right) \\ \Delta\alpha_2 &= -\frac{s}{3 \cdot R \cdot sen\,1}\left(\chi_2 \cdot sen\,\alpha_2 + \frac{1}{2}\chi_1 \cdot sen\,\alpha_1\right) \\ s &= \frac{S \cdot \sqrt{\rho N} \cdot sen\,1''}{\sqrt{n_1 n_2}} \\ S &= \frac{s \cdot \sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{\rho N} \cdot sen\,1''} \\ n &= \frac{c \cdot R \cdot cos\,\Phi}{a \cdot sen\,\varphi}\sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

dedotte nei §§ 7, 8 e 3, e che possono esser calcolate con valori grossolanamente approssimati della latitudine sferoidica φ. La quinta delle relazioni (43) soprascritte dà il mezzo di passare dalla base geodetica data alla corrispondente base sferica, e si può quindi risolvere tutta la rete sferica coi metodi già altrove esposti pel caso di triangoli sferici di piccoli lati. Le corrispondenze generali della rappresentazione (§ 3)

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= c \cdot \omega \\ tang\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right) &= K \cdot tang\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)^c \left(\frac{1 + e \cdot sen\,\varphi}{1 - e \cdot sen\,\varphi}\right)^{\frac{ce}{2}} \\ n &= \frac{c \cdot R \cdot cos\,\Phi}{a \cdot cos\,\varphi}\sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

permettono inoltre di calcolare le coordinate sferiche Φ_1, Ω_1 del punto sferico corrispondente al punto ellissoidico dato φ_1, ω_1, e successivamente tutte quelle degli altri vertici sferici, giacchè congiungendo gli estremi di ciascun arco (lato) sferico col polo della sfera rappresentatrice si ottiene un triangolo sferico in cui due lati sono i complementi delle latitudini sferiche, l'angolo nel polo è la differenza di longitudine sferica che separa i due estremi dell'arco suddetto, e gli altri angoli o sono gli azimut sferoidici relativi ai lati della rete geodetica considerata, o almeno si possono dedurre da questi per mezzo delle correzioni $\Delta\alpha$ calcolate colle formule (43). È però opportuno il notare come per lo più le usuali formule di trigono-

metria sferica mal si convengono in pratica alla risoluzione di questi triangoli, a causa della piccolezza dei lati della rete sferica, ed è quindi utile piuttosto anche qui ricorrere alle relazioni stabilite già nel § 11 del Capitolo VIII, per un caso analogo e che sono:

$$\left.\begin{aligned}
cotg\frac{\alpha_{m+1}-\Delta\Omega_m}{2} &= \frac{sen\left(45^\circ+\frac{\Phi_m+S_m}{2}\right)}{sen\left(45^\circ+\frac{\Phi_m-S_m}{2}\right)}\,cotg\frac{\alpha_m}{2}\\
cotg\frac{\alpha_{m+1}+\Delta\Omega_m}{2} &= \frac{cos\left(45^\circ+\frac{\Phi_m+S_m}{2}\right)}{cos\left(45^\circ+\frac{\Phi_m-S_m}{2}\right)}\,cotg\frac{\alpha_m}{2}\\
cotg\,\Psi &= sen\,\Phi_m\,tang\frac{\Delta\Omega_m}{2}\\
90^\circ-\Psi &= \frac{\Delta\Omega_m}{2}\,sen\,\Phi_m\left\{1-\left(\frac{\Delta\Omega_m\,sen\,1'}{2}\right)^2 cos^2\Phi_m\right\}\\
\Delta\Phi_m &= \frac{S_m\,sen\,(\Psi-\alpha_m)}{sen\,\Psi}\left\{1-\frac{S^2 sen^2 1''}{6}\,cos^2(\Psi-\alpha_m)\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(45)$$

L'angolo Ψ è una ausiliaria di cui il significato geometrico è indicato nel sopracitato Capitolo, ed è necessario fare speciale attenzione alla grandezza dell'azimut di partenza α_m, per introdurre nelle formule Ψ od il supplemento a 180° a seconda dei casi: l'indice m poi si riferisce al numero d'ordine che nella rete ha il lato S, o piuttosto il suo estremo *di partenza,* quello cioè di cui si suppone che sia stata già precedentemente calcolata la posizione sferica. Invece delle (45) si possono con ugual facilità applicare anche le formule seguenti, nelle quali l'angolo θ è una ausiliaria di cui è ovvio intendere il significato geometrico:

$$\left.\begin{aligned}
tang\,\theta &= cos\,\alpha_m\,tang\,S_m\\
tang\,\Delta\Omega_m &= tang\,\alpha_m\,sen\,\theta\,.\,sen\,(\Phi_m+\theta)\\
tan\,\beta &= sen\,\alpha_m sen\,S_m tang\,(\Phi_m+\theta)\\
sen\,\gamma &= sen\,\alpha_m tang\frac{S_m}{2}\,sen\,\theta\\
sen\,\delta &= tang\,\beta\,.\,tang\frac{\Delta\Omega_m}{2}\,cos\,(\Phi_m+\theta)\\
\Phi_{m+1} &= \Phi_m+\theta-\delta\\
\alpha_{m+1} &= \alpha_m+\beta-\gamma.
\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Queste poi si riducono, con sviluppi in serie rispetto alle quantità θ, β, γ, δ, S che debbono considerarsi come piccole, alla forma

$$\left.\begin{aligned}
\theta &= S_m \cos\alpha_m \left\{1 + \frac{S_m^2 \operatorname{sen}^2 1'' \operatorname{sen}^2 \alpha_m}{3}\right\} \\
\Delta\Omega_m &= \frac{\theta \,.\, tang\,\alpha_m}{\cos(\Phi + \theta)} \left\{1 - \frac{\theta^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 1''}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{tang^2\alpha_m}{\cos^2(\Phi+\theta)}\right)\right\} \\
\beta &= S_m \operatorname{sen}\alpha_m tang(\Phi_m + \theta)\left\{1 - \frac{S_m^2}{3}\left[\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^2\alpha_m tang^2(\Phi_m+\theta)\right]\right\} \\
\gamma &= \frac{\theta \,.\, S_m \,.\, \operatorname{sen} 1''}{2} \operatorname{sen}\alpha_m \\
\delta &= \frac{\beta \,.\, \Delta\Omega_m \,.\, \operatorname{sen} 1''}{2} \cos(\Phi_m + \theta) \\
\Phi_{m+1} &= \Phi_m - \theta - \delta \\
\alpha_{m+1} &= \alpha_m + \beta - \gamma
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

sotto la quale si introducono in calcolo. Ottenuti i valori delle coordinate sferiche per tutti i punti della rete rappresentante si potrebbe poi passare a quelle dei vertici della rete sferoidica per mezzo delle formule di corrispondenza (44).

10. Le formule (46) che sono date senza dimostrazione da *Gauss* * nello sviluppo della teoria qui esposta, si deducono molto semplicemente come segue.

Sia P (fig. 67) il polo della sfera rappresentatrice, M il punto di coordinate Φ, Ω, $MN = S$ l'arco di cerchio massimo, contato a partire da M verso N, che fa l'azimut α col meridiano sferico PM: e siano da cercare le coordinate Φ_1, Ω_1,

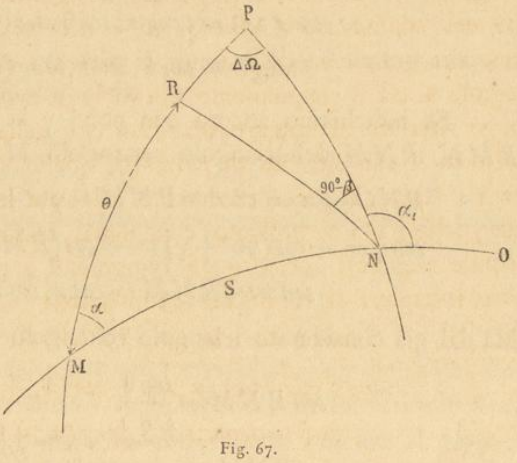

Fig. 67.

* *Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie. Erste Abhandlung. Gauss. Werke.* Band. IV.

dell'estremo N e l'azimut $PNO = \alpha_1$, che la direzione positiva nell'arco S fà in N. Se si immagina il cerchio massimo RN che passando per tale estremo N, è perpendicolare in R al meridiano PM si viene a scindere il triangolo obliquangolo PMN in due triangoli rettangoli PRN, RNM, dei quali il secondo, indicando con θ il lato RM, dà

$$tang\,\theta = cos\,\alpha\,.\,tang\,S,$$

che è la prima delle (46), e

$$\left.\begin{aligned} tang\,\overline{RN} &= sen\,\theta\,.\,tang\,\alpha \\ sen\,\overline{RN} &= sen\,S\,.\,sen\,\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (k)$$

Ora dal triangolo RPN, osservando che si ha

$$PR = PM - RM = 90° - \Phi - \theta,$$

e rappresentando con β il complemento dell'angolo PNR, si trae:

$$tang\,\overline{RN} = tang\,\Delta\Omega\,.\,sen\,[90° - (\Phi + \theta)]$$

$$tang\,[90° - (\Phi + \theta)] = sen\,\overline{RN}\,.\,tang\,(90° - \beta)$$

e quindi, tenendo conto delle precedenti relazioni (k), avremo:

$$tang\,\Delta\Omega = tang\,\alpha\,.\,sen\,\theta\,.\,sec\,(\Phi + \theta)$$

$$tang\,\beta = sen\,\alpha\,.\,sen\,s\,.\,tang\,(\Phi + \theta).$$

Se indichiamo ancora con $90° + \gamma$ la somma dei due angoli RMN, RNM del triangolo rettangolo MRN, sarà poi

$$PNO = \alpha_1 = 180° - PNM - 90° + \beta = \alpha + \beta - \gamma,$$

$$sen\,\gamma = -cos\,(90° + \gamma) = -cos\,(RMN + RNM) =$$

$$sen\,\alpha\,sen\,RNM - cos\,\alpha\,.\,cos\,RNM.$$

Ma dal già considerato triangolo rettangolo MRN si deduce ancora

$$sen\,RNM = \frac{sen\,\theta}{sen\,S}$$

$$cos\,RNM = sen\,\alpha\,.\,cos\,\theta = \frac{sen\,\alpha\,.\,sen\,\theta}{cos\,\alpha\,.\,tang\,S}$$

quindi avremo:

$$sen\,\gamma = sen\,\alpha\,.\,sen\,\theta\left(\frac{1 - cos\,S}{sen\,S}\right) = sen\,\alpha\,.\,sen\,\theta\,.\,tang\,\frac{S}{2}.$$

Per dedurre finalmente la quinta delle (46) notiamo anzitutto

come il significato geometrico della ausiliaria δ resta perfettamente determinato della sesta delle (46) medesime, che mostra come δ non sia altro che la differenza di latitudine fra i due punti R ed N della fig. 67, e come si abbia per conseguenza

$$\delta = PN - PR.$$

Ora dal triangolo rettangolo PNR, applicando le note analogie di *Delambre* si ricava

$$sen\frac{\delta}{2} = \frac{sen\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\Delta\Omega}{2}} sen\frac{\overline{RN}}{2},$$

$$cos\frac{\delta}{2} = \frac{cos\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\Delta\Omega}{2}} cos\frac{\overline{RN}}{2},$$

e, da queste, moltiplicandole membro a membro:

$$sen\,\delta = \frac{sen\,\beta \,.\, sen\,\overline{RN}}{2\,.\,cos^2\frac{\Delta\Omega}{2}}.$$

Per esprimere $sen\,\overline{RN}$ in funzione di β, ω e $\Phi + \theta$ basta tornare al triangolo rettangolo PRN che dà

$$sen\,\overline{RN} = \frac{tang\,\beta}{tang\,(\Phi+\theta)} = \frac{cos\,(\Phi+\theta)}{cos\,\beta} sen\,\Delta\Omega,$$

e quindi, sostituendo nella precedente espressione di $sen\,\delta$ si trova:

$$sen\,\delta = tang\,\beta \,.\, tang\frac{\Delta\Omega}{2} \,.\, cos\,(\Phi+\theta)$$

come si voleva dimostrare.

11. Il passaggio dalle latitudini sferoidiche alle latitudini sferiche corrispondenti per mezzo della seconda delle formule (44) condurrebbe a dei calcoli assai lunghi, mentre poi per il passaggio reciproco dalle latitudini sferiche alle corrispondenti latitudini ellissoidiche converrebbe ricorrere, con anche maggior complicazione, al metodo delle successive approssimazioni. Ma è facile vedere come i due passaggi ora indicati possano essere resi semplicissimi contando le differenze di latitudine sempre a partire dal parallelo normale sferoidico o sferico, a seconda dei casi, e trasformando

convenientemente la seconda delle (44), in modo che essa dia la corrispondenza fra le differenze delle latitudini sferoidiche e sferiche invece della corrispondenza fra le latitudini assolute.

Sia infatti da dedurre la latitudine sferica Φ corrispondente ad una data latitudine sferoidica φ, e poniamo

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi$$

indicando, come precedentemente, con φ_0 la latitudine normale della rappresentazione e con Φ_0 la corrispondente latitudine sferica: dacchè la latitudine sferica qualunque Φ è una funzione nota di φ, si avrà, almeno per valori di $\Delta\varphi$ relativamente piccoli,

$$\Delta\Phi = \Delta\varphi\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)_0 + \frac{\Delta\varphi^2}{1.2}\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)_0 + \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}\right)_0 + \dots, \qquad (48)$$

l'indice delle parentesi significando che i valori delle derivate successive rinchiuse in esse corrispondono al valore φ_0 della variabile indipendente. Ora dalla formula (10) del § 5 si trae

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{c(1-e^2)\cos\Phi}{\cos\varphi(1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi)},$$

e quindi:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\frac{c(1-e^2)\cos\Phi}{\cos^2\varphi(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^2}\{c(1-e^2)\operatorname{sen}\Phi - \operatorname{sen}\varphi[1+e^2(2-3\operatorname{sen}^2\varphi)]\}. \qquad (49)$$

Ricordando che, per una delle condizioni della rappresentazione qui considerata [§ 5 formule (14)] è $c.\operatorname{sen}\Phi_0 = \operatorname{sen}\varphi_0$, queste ultime relazioni danno:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)_0 &= \frac{c(1-e^2)\cos\Phi_0}{\cos\varphi_0(1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi_0)} = \frac{\cos\varphi_0}{c.\cos\Phi_0}\\ \left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)_0 &= \frac{3.e^2.c(1-e^2)\cos\Phi_0\operatorname{sen}\varphi_0}{(1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi_0)^2} = \frac{3.e^2.\cos^4\varphi_0\operatorname{sen}\varphi_0}{c^3(1-e^2)\cos^3\Phi_0}\end{aligned}\right\}. \qquad (50)$$

Se si deriva poi nuovamente la (49) rispetto a φ si ottiene:

$$\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3} = \frac{c(1-e^2)\cos\Phi}{\cos^3\varphi(1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi)^3}\left\{\begin{aligned}&-c^2(1-e^2)\cos 2\Phi + 1 + \operatorname{sen}^2\varphi -\\ &-3.c(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi.\operatorname{sen}\Phi[1+e^2(2-3.\operatorname{sen}^2\varphi)] +\\ &+2.e^2(1-2.\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^4\varphi) +\\ &+e^4(6\operatorname{sen}^2\varphi - 13.\operatorname{sen}^4\varphi + 9.\operatorname{sen}^6\varphi)\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

ove, nella parentesi grande del secondo membro, la parte indipendente da e^2 si riduce a

$$c^2(sen^2\Phi - cos^2\Phi) - 3\,.\,c\,.\,sen\varphi\,sen\Phi + 2\,.\,sen^2\varphi + cos^2\varphi.$$

Ma per $\varphi = \varphi_0$ la seconda delle (14) dà

$$c^2\,.\,sen^2\Phi_0 + 2\,.\,sen^2\varphi_0 - 3\,.\,c\,.\,sen\varphi_0 sen\,\Phi_0 = 0,$$

e quindi dell'espressione precedente rimane

$$cos^2\varphi_0 - c^2\,.\,cos^2\Phi_0 = 1 - sen^2\varphi_0 - c^2 + c^2\,.\,sen^2\Phi_0 = 1 - e^2,$$

quantità che, a causa della relazione (15), è eguale a

$$-\frac{e^2\,.\,cos^4\varphi_0}{1-e^2}.$$

Il valore di $\left(\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}\right)_0$ pertanto è dell'ordine di e^2.

Eseguendo completamente l'eliminazione di c e di Φ dalla parentesi grande della (51) per mezzo delle condizioni (14) e (15) del § 5, si trova, dopo facili riduzioni,

$$\left(\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}\right)_0 = \frac{3\,.\,e^2\,.\,cos^3\varphi_0}{c^5(1-e^2)^2cos^5\Phi_0}\left\{cos^2\varphi_0 cos\,2\,\varphi_0 + e^2\,.\,sen^2\varphi_0(4 - 7\,sen^2\varphi_0 + 3\,sen^4\varphi_0)\right\}. \quad (52)$$

Analogamente, derivando la (51) rispetto a φ, si ha:

$$= \frac{c(1-e^2)\cos\Phi}{cos^4\varphi\,(1-e^2sen^2\varphi)^4}\left\{\begin{array}{l} c^3\,(1-e^2)^3 sen\,\Phi\,(5 - 6\,.\,sen^2\Phi) + 5\,.\,sen\varphi + sen^3\varphi + \\ +3\,.\,c^2(1-e^2)^2 sen\varphi\left(\begin{array}{l}-2+4\,.\,sen^2\Phi + \\ +2\,.\,e^2(-2+4\,.\,sen^2\Phi+3\,.\,sen^2\varphi - 6\,.\,sen^2\varphi\,.\,sen^2\Phi)\end{array}\right) + \\ +c(1-e^2)\,sen\Phi\left\{\begin{array}{l}-4-7\,.\,sen^2\varphi + \\ +e^2(-8+4\,.\,sen^2\varphi+26\,.\,sen^4\varphi) + \\ +e^4(-36\,.\,sen^2\varphi+88\,.\,sen^4\varphi-63\,.\,sen^6\varphi)\end{array}\right\} + \\ +e^2(4\,.\,sen\varphi - 17\,.\,sen^3\varphi - 5\,.\,sen^5\varphi) + \\ +e^4(24\,.\,sen\varphi - 80\,.\,sen^3\varphi + 91\,.\,sen^5\varphi - 17\,.\,sen^7\varphi) + \\ +e^6(24\,.\,sen^3\varphi - 68\,.\,sen^5\varphi + 65\,.\,sen^7\varphi - 27\,.\,sen^9\varphi)\end{array}\right\} \quad (53)$$

d'onde, trascurando i termini in e^6, si trae

$$\left(\frac{d^4\Phi}{d\varphi^4}\right) = -\frac{16\,.\,e^2\,.\,sen\varphi\,.\,cos^4\varphi}{c^7(1-e^2)^3cos^7\Phi}\left\{cos^4\varphi - \frac{e^2}{16}\left(\begin{array}{l}49 - 160\,.\,sen^2\varphi + \\ +173\,.\,sen^4\varphi - 62\,.\,sen^6\varphi\end{array}\right)\right\}. \quad (54)$$

L'espressione generale di $\frac{d^5\Phi}{d\varphi^5}$ riesce molto complicata, giacchè proviene dalla derivazione della (53) rispetto a φ; ma, trascurando i termini in e^4, e^6, e^8, si riesce assai semplicemente a trarre dalla (53) stessa il valore di $\left(\frac{d^5\Phi}{d\varphi^5}\right)_0$ che è dato da:

$$\left(\frac{d^5\Phi}{d\varphi^5}\right)_0 = -\frac{16.e^2}{\cos^2\varphi_0}\left\{1-\frac{11}{4}\operatorname{sen}^2\varphi_0+\frac{7}{4}\operatorname{sen}^4\varphi_0\right\} = -16.e^2\left(1-\frac{7}{4}\operatorname{sen}^2\varphi_0\right). \quad (55)$$

Riassumendo e sostituendo nello sviluppo (48) alle derivate $\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}\right)_0$, ... le loro espressioni date dalle (50), (52), (54) e (55), si ottiene, coll'approssimazione del sesto ordine inclusivamente,

$$\begin{aligned}\Delta\Phi = {} & \Delta\varphi.\frac{\cos\varphi_0}{c.\cos\Phi_0} + \\ & +\Delta\varphi^2.\frac{3.e^2.\cos^4\varphi_0\operatorname{sen}\varphi_0\operatorname{sen}1''}{2.c^3(1-e^2)\cos^3\Phi_0} + \\ & +\Delta\varphi^3.\frac{e^2.\cos^3\varphi_0\operatorname{sen}^2 1''}{2.c^5(1-e^2)^2\cos^5\Phi_0}\left\{\cos^2\varphi_0\cos 2\varphi_0+e^2.\operatorname{sen}^2\varphi_0(4-7.\operatorname{sen}^2\varphi_0+3.\operatorname{sen}^4\varphi_0)\right\} - \\ & -\Delta\varphi^4.\frac{2.e^2.\cos^4\varphi_0\operatorname{sen}\varphi_0\operatorname{sen}^3 1''}{3.c^7(1-e^2)^3\cos^7\Phi_0}\left\{\cos^4\varphi_0-e^2\left(\frac{49}{16}-10.\operatorname{sen}^2\varphi_0+\frac{173}{16}\operatorname{sen}^4\varphi_0-\frac{62}{16}\operatorname{sen}^6\varphi_0\right)\right\} - \\ & -\Delta\varphi^5.\frac{2.e^2.\operatorname{sen}^4 1''}{15}\left(1-\frac{7}{4}\operatorname{sen}^2\varphi_0\right)\end{aligned} \quad (56)$$

ove abbiamo aggiunti i fattori $\operatorname{sen} 1''$, $\operatorname{sen}^2 1''$..., perchè $\Delta\Phi$, $\Delta\varphi$ si suppongono espressi in secondi. Questa formola è molto conveniente al calcolo di $\Delta\Phi$, giacchè i coefficienti delle potenze di $\Delta\varphi$ nel secondo membro non solo sono calcolabili assai speditamente, ma sono altresì delle costanti che possono supporsi calcolate insieme alle costanti della rappresentazione considerata. Per questo motivo sarebbe semplicissimo il tener anche conto dei termini dei primi ordini successivi al 6.°: ma già l'ultimo termine della (56) dà, come è facile verificare, una precisione spinta più che ad $\frac{1}{360000}$ delle lunghezze anche per $\Delta\varphi$ eccezionalmente grande, per esempio, per $\Delta\varphi = 10°$, precisione maggiore di quella cui possiamo aspirare coi nostri metodi di misura: d'altra parte è da notare che la rappresentazione qui studiata non si suppone estesa che ad una zona

limitata in latitudine dentro una ventina di gradi, giacchè se questo limite dovesse esser superato la risoluzione dei triangoli elementari della rete rappresentante più lontani dal parallelo normale condurrebbe a calcoli assai complicati, cosicchè conviene piuttosto spezzar la zona in due o più parti e rappresentare poi ciascuna delle parti sopra una sfera speciale.

12. Il problema reciproco a quello discusso nel paragrafo precedente si risolve in modo analogo con la stessa semplicità; ed infatti considerando φ come funzione di Φ si può porre

$$\Delta\varphi = \Delta\Phi \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\Phi}\right)_0 + \frac{\Delta\Phi^2}{1.2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\Phi^2}\right)_0 + \frac{\Delta\Phi^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{d\Phi^3}\right)_0 + \dots \qquad (57)$$

ove i valori delle derivate $\frac{d\varphi}{d\Phi}$, $\frac{d^2\varphi}{d\Phi^2}$, $\frac{d^3\varphi}{d\Phi^3}$, ... per il valore Φ_0 della variabile indipendente Φ si possono trarre da quelli delle derivate reciproche $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$, $\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}$, ... già sopra sviluppate, per mezzo delle note relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\Phi} &= \frac{1}{\frac{d\Phi}{d\varphi}} \\
\frac{d^2\varphi}{d\Phi^2} &= -\frac{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^3} \\
\frac{d^3\varphi}{d\Phi^3} &= \frac{3\cdot\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)^2 - \frac{d\Phi}{d\varphi}\cdot\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}}{\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^5} \\
\frac{d^4\varphi}{d\Phi^4} &= \frac{-15\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)^3 + 10\frac{d\Phi}{d\varphi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3} - \frac{d^4\Phi}{d\varphi^4}\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^7} \\
\frac{d^5\varphi}{d\Phi^5} &= \frac{1}{\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^9}\left\{\begin{aligned}
&105\cdot\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)^4 - 105\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi}\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)^2\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3} + \\
&+10\cdot\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2\left(\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}\right)^2 + 15\cdot\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot\frac{d^4\Phi}{d\varphi^4} - \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^3\frac{d\Phi^5}{d\varphi^5}
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \cdot (58)$$

Limitando l'approssimazione alle quantità dal 6.° ordine inclusivo come abbiamo fatto nella (56), e tenendo conto delle (50), (52), (54) e (55) si trova per tal modo assai facilmente:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d\varphi}{d\Phi}\right)_0 &= \frac{c.\cos\Phi_0}{\cos\varphi_0} \\
\left(\frac{d^2\varphi}{d\Phi^2}\right)_0 &= -\frac{3.e^2.\cos\varphi_0 sen\varphi_0}{1-e^2} \\
\left(\frac{d^3\varphi}{d\Phi^3}\right)_0 &= -\frac{3.e^2}{c.\cos\varphi_0\cos\Phi_0(1-e^2)^2}\{\cos^2\varphi_0.\cos 2\varphi_0 - e^2.sen^2\varphi_0(5-11.sen^2\varphi_0+6.sen^4\varphi_0)\} \\
\left(\frac{d^4\varphi}{d\Phi^4}\right)_0 &= \frac{16.e^2.sen\varphi_0}{c^2.\cos\varphi_0\cos^2\Phi_0(1-e^2)^3}\left\{\cos^4\varphi_0 + e^2\left(\begin{matrix}\frac{41}{16} - \frac{25}{2}sen^2\varphi_0 + \\ + \frac{277}{16}sen^4\varphi_0 - \frac{59}{8}sen^6\varphi_0\end{matrix}\right)\right\} \\
\left(\frac{d^5\varphi}{d\Phi^5}\right)_0 &= 16.e^2\left(1-\frac{7}{4}sen^2\varphi_0\right).
\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Sostituendo nello sviluppo (57) avremo quindi

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varphi = {} & \Delta\Phi.\frac{c.\cos\Phi_0}{\cos\varphi_0} - \\
& -\Delta\Phi^2.\frac{3.e^2.sen2\varphi_0 sen1''}{4(1-e^2)} - \\
& -\Delta\Phi^3.\frac{e^2\{\cos^2\varphi_0\cos 2\varphi_0 - e^2.sen^2\varphi_0(5-11.sen^2\varphi_0+6.sen^4\varphi_0)\}sen^2 1''}{2.c(1-e^2)^2\cos\varphi_0\cos\Phi_0} + \\
& +\Delta\Phi^4.\frac{2.e^2.sen\varphi_0 sen^3 1''}{3.e^2(1-e^2)^3\cos\varphi_0\cos^2\Phi_0}\left\{\cos^4\varphi_0 + e^2\left(\begin{matrix}\frac{14}{16} - \frac{25}{2}sen^2\varphi_0 + \\ + \frac{277}{16}sen^4\varphi_0 - \frac{59}{8}sen^6\varphi_0\end{matrix}\right)\right\} + \\
& +\Delta\Phi^5.\frac{2.e^2.sen^4 1''}{15}\left(1-\frac{7}{4}sen^2\varphi_0\right)
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

formula che offre, per la pratica, gli stessi vantaggi della già discussa (56).

13. Per i casi in cui sia da applicare la quarta o la quinta delle relazioni (43) per tener conto della differenza fra la lunghezza di un arco di geodetica e quella dell'arco di cerchio massimo che gli corrisponde sulla sfera rappresentatrice, conviene, con un metodo analogo a quello tenuto nei paragrafi precedenti, dedurre una

formula più comoda dell'ultima delle (43) per il calcolo del valore n_φ del modulo di trasformazione che corrisponde ad una data latitudine sferoidica o sferica, e che differisce in ogni caso estremamente poco dall'unità, almeno nei limiti entro i quali si suppone estesa la rappresentazione.

Per ciò basta ricordare come, per le condizioni (9) fondamentali della rappresentazione, si abbia:

$$n_\varphi = 1 + \frac{(\zeta-\zeta_0)^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3n}{d\zeta^3}\right)_0 + \frac{(\zeta-\zeta_0)^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4n}{d\zeta^4}\right)_0 + \dots,$$

ossia:

$$n_\varphi = 1 + \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3n}{d\varphi^3}\right)_0 + \frac{\Delta\varphi^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4n}{d\varphi^4}\right)_0 + \dots \qquad (61)$$

essendo $\Delta\varphi$, come precedentemente, la differenza fra la latitudine geografica qualunque φ e la latitudine normale della rappresentazione, e $\left(\frac{d^3n}{d\varphi^3}\right)_0$, $\left(\frac{d^4n}{d\varphi^4}\right)_0$, ... i valori che sotto la latitudine normale assumono le derivate terza, quarta, ecc., di n prese rispetto a φ. Ora dalla relazione (11) del § 5 si ha

$$\frac{dn}{d\varphi} = -\frac{c.R(1-e^2)\cos\Phi}{a.\cos^2\varphi\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi}}(c.\operatorname{sen}\Phi - \operatorname{sen}\varphi),$$

da cui ponendo, come nel paragrafo suddetto,

$$F(\varphi) = -\frac{c.R(1-e^2)\cos\Phi}{a.\cos^2\varphi\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi}}, \qquad (62)$$

e derivando rispetto a φ, si trae:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2n}{d\varphi^2} &= F'(\varphi)(c.\operatorname{sen}\Phi - \operatorname{sen}\varphi) + F(\varphi)\left(c.\cos\Phi\frac{d\Phi}{d\varphi} - \cos\varphi\right)\\
\frac{d^3n}{d\varphi^3} &= F''(\varphi)(c.\operatorname{sen}\Phi - \operatorname{sen}\varphi) + 2.F'(\varphi)\left(c.\cos\Phi\frac{d\Phi}{d\varphi} - \cos\varphi\right) +\\
&\quad + F(\varphi)\left[c.\cos\Phi\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - c.\operatorname{sen}\Phi\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 + \operatorname{sen}\varphi\right]\\
\frac{d^4n}{d\varphi^4} &= F'''(\varphi)(c.\operatorname{sen}\Phi - \operatorname{sen}\varphi) + 3.F''(\varphi)\left(c.\cos\Phi\frac{d\Phi}{d\varphi} - \cos\varphi\right) +\\
&\quad + 3.F'(\varphi)\left[c.\cos\Phi\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - c.\operatorname{sen}\Phi\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 + \operatorname{sen}\varphi\right] +\\
&\quad + F(\varphi)\left[c.\cos\Phi\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3} - 3.c.\operatorname{sen}\Phi\frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - c.\cos\Phi\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^3 + \cos\varphi\right]
\end{aligned}\right\}. \qquad (63)$$

Ricordando che, per le condizioni (13) e (14), è

$$c \,.\, sen\,\Phi_0 = sen\,\varphi_0$$

$$c \,.\, cos\Phi_0 \left(\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi}\right)_0 = cos\,\varphi_0$$

si trova quindi

$$\left(\frac{d^3 n}{d\,\varphi^3}\right)_0 = -\frac{c\,.\,R(1-e^2)\,cos\Phi_0}{a.cos^2\varphi_0\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}}\left\{c.cos\Phi_0.\left(\frac{d^2\Phi}{d\,\varphi^2}\right)_0 - c.sen\Phi_0\left(\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi}\right)_0^2 + sen\varphi_0\right\}, \quad (64)$$

e se nello sviluppo (61) si ritiene l'approssimazione del quarto ordine inclusivo, in questa ultima relazione sono da rigettare come trascurabili i termini in e^4, e vi si può porre

$$\left(\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi}\right)_0 = \frac{c.cos\Phi_0}{cos\,\varphi_0}(1-e^2+e^2 sen^2\varphi_0),$$

$$\left(\frac{d^2\Phi}{d\,\varphi^2}\right)_0 = 3.e^2.sen\varphi_0 cos\varphi_0,$$

nel qual caso essa si riduce con facili trasformazioni a

$$\frac{d^3 n}{d\,\varphi^3} = -\frac{4.e^2.c.R(1-e^2)sen\varphi_0 cos\Phi_0}{a\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}}$$

o, più semplicemente, a

$$\frac{d^3 n}{d\,\varphi^3} = -4.e^2.sen\varphi_0 cos\,\varphi_0. \quad (65)$$

È facile vedere inoltre che, dentro l'approssimazione sopra indicata, nella (61) è trascurabile il termine in $\frac{d^4 n}{d\,\varphi^4}$, giacchè riesce moltiplicato per e^2; ed infatti dall'ultima delle (63) si trae

$$\left(\frac{d^4 n}{d\,\varphi^4}\right)_0 = F'''(\varphi_0)\,(c.sen\Phi_0 - sen\varphi_0) + 3.F''(\varphi_0)\left[c.cos\Phi_0\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)_0 - cos\varphi_0\right] +$$

$$+3.F'(\varphi_0)\left\{c.cos\Phi_0\left(\frac{d^2\Phi}{d\,\varphi^2}\right)_0 - c.sen\Phi_0\left(\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi}\right)_0^2 + sen\,\varphi_0\right\} +$$

$$+F(\varphi_0)\left\{c.cos\Phi_0.\left(\frac{d^3\Phi}{d\,\varphi^3}\right)_0 - 3.c.sen\Phi_0\left(\frac{d^2\Phi}{d\,\varphi^2}\right)_0\left(\frac{d\Phi}{d\,\varphi}\right)_0 - c.cos\Phi_0\left(\frac{d\Phi}{d\,\varphi}\right)_0^3 + cos\varphi_0\right\}$$

ove sono da rigettare anche i termini in e^2, e si ha quindi da porre

$$c=1, \quad \Phi_0=\varphi_0, \quad \left(\frac{d^3\Phi}{d\,\varphi^3}\right)_0 = \left(\frac{d^2\Phi}{d\,\varphi^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\Phi}{d\,\varphi}\right)_0 = 1;$$

ossia:

$$\left(\frac{d^4 n}{d\varphi^4}\right)_0 = 0.$$

Così per lo sviluppo (61) si trova, coll'approssimazione del quarto ordine inclusivo,

$$n = 1 - \frac{e^2}{3} \Delta\varphi^3 sen^3 1'' sen\, 2\varphi_0 \qquad (66)$$

formula che dà n, in funzione della differenza di latitudine sferoidica $\Delta\varphi$, e che evidentemente può scriversi, colla stessa approssimazione, anche come segue

$$n = 1 - \frac{e^2}{3} \Delta\Phi^3 . sen^3 1'' sen 2\varphi_0 \qquad (67)$$

per il caso in cui si cerchi il valore di n corrispondente ad una data latitudine sferica, giacchè la differenza fra $\Delta\varphi$ e $\Delta\Phi$, come si rileva dalla (56) o dalla (60), è dell'ordine di e^2.

Il quinto ordine, trascurato nelle (66) e (67), si compone del termine in $e^4 . \Delta\varphi^3$ e di quello in $e^2 . \Delta\varphi^4$, dei quali il primo, per valori di $\Delta\varphi$ molto grandi è una piccola frazione del secondo, e questo non assume un valore apprezzabile (ossia di uno o due milionesimi) che per $\Delta\varphi > 10°$. Solo nel caso (non pratico) in cui la rappresentazione sferica abbracciasse una zona estesa più di venti gradi in latitudine sarebbe quindi da tenerne conto, lo che, del resto, non presenterebbe nè difficoltà analitiche, nè complicazione di calcolo.

CAPITOLO XI.

RICERCA DELLE COSTANTI DELL'ELLISSOIDE TERRESTRE.

1. È opinione invalsa in varii astronomi e geodeti, che per ellissoide terrestre si debba intendere quell'ellissoide a cui il geoide si ridurrebbe se la densità degli elementi terrestri non presentasse discontinuità, o, per meglio dire, se la materia attenuata di densità uniforme, dalla quale si vuol supporre originata la terra, e che si vuole ammettere come proveniente dalla rottura di uno degli anelli ellittici abbandonati dall'atmosfera solare nello spazio del nostro sistema planetario, si fosse condensata intorno ad un nucleo, rimanendo soggetta ad un raffreddamento equabile, e ad una rotazione intorno al nostro asse polare. Tuttavia questo ellissoide ideale, che non resta così che vagamente delineato, non è mai stato nettamente definito, ed entra nella discussione in modo diremmo quasi indiretto, per mezzo delle attrazioni locali, considerate come conseguenze della deviazione fra tale superficie e quella del geoide: invece è stato lungamente discusso, ed ancora si continua a discutere, se alla ricerca di queste attrazioni locali sia applicabile o no il metodo dei minimi quadrati, mentre, a causa delle ondulazioni continentali del geoide, le loro grandezze non possono essere distribuite in modo casuale. È chiaro per altro che simili discussioni mancano di ogni fondamento fino a che si parla dell'ellissoide terrestre sotto una forma assoluta senza prima togliere questa superficie dalla nebulosità di cui la si circonda; ed è in ciò affatto inutile il fermare l'attenzione sopra la probabilità e l'attendibilità delle ipotesi sulla origine della terra, dacchè pure ammettendo queste ipotesi non per ciò l'ellissoide ideale suddetto resta meno indeterminato. Ed infatti per determinarlo non solo farebbe d'uopo di conoscere la densità

e lo stato fisico di tutta la materia di quel globo ideale in un'epoca data ed avere la legge di raffreddamento successivo, ma bisognerebbe pur sempre considerare uno stato di equilibrio termico affatto arbitrario. È quindi impossibile, praticamente parlando, di farsi un concetto preciso dello sferoide ideale suddetto, e, per conseguenza, è pure impossibile di parlare di attrazioni locali in senso assoluto, e queste non acquistano un senso determinato che in relazione ad un ellissoide definito altrimenti, e scelto in guisa più o meno arbitraria.

Questo concetto non anche formulato fin qui, è però già entrato nel campo delle ricerche scientifiche e spesso ora si fa uso non di un solo, ma di più ellissoidi come superficie di confronto e di riferimento, a seconda delle regioni terrestri che si hanno da considerare, cosicchè ad uno stesso punto terrestre competono varii valori dell'attrazione locale a seconda dell'ellissoide al quale si riferisce. Per ellissoide terrestre va quindi inteso l'ellissoide di riferimento scelto in modo più o meno arbitrario a rappresentare l'intera superficie della terra.

Ma se nella scelta che si fa di un ellissoide per riferire ad esso tutta la superficie del geoide od una sua regione, non è possibile rimuovere completamente l'arbitrarietà, tale scelta deve però esser fatta per modo che le due superficie nella regione considerata o nella loro totalità si discostino poco l'una dall'altra: quanto più piccole saranno le deviazioni, tanto meno le geodetiche del geoide e quelle dell'ellissoide differiranno le une dalle altre, e con tanta maggior precisione le figure tracciate sul geoide, e non risolvibili con regole matematiche definite, potranno essere risolute come ellissoidiche. Rappresentando adunque con h l'altezza di un punto qualunque del geoide al disopra (o al disotto) dell'ellissoide, contata lungo la normale a questo, si presenta spontaneamente l'idea di scegliere, per caratterizzare la minima deviazione fra le due superficie, la condizione $\Sigma h = 0$, o l'altra $\Sigma h\,h = minimum$ dentro la regione che si considera se si tratta di determinare un ellissoide secondario, o per tutta la superficie terrestre se si tratta di determinare l'ellissoide terrestre.

Tuttavia i valori di h non sono conosciuti a priori, nè sono direttamente esprimibili in generale per mezzo di quantità osservabili: il confronto delle misure geodetiche colle osservazioni astronomiche dà invece in modo assai semplice le differenze fra le coordinate astronomiche dei punti del geoide, e le coordinate geografiche

dei punti corrispondenti (vedi Capitolo I, § 6) dell'ellissoide. Perciò si suole giudicare della prossimità delle due superficie non per mezzo delle distanze assolute fra i punti corrispondentisi, ma per mezzo della deviazione θ delle normali che geodeticamente si corrispondono (attrazioni locali, vedi Capitolo I, § 6): è quindi logico e conveniente sostituire alla condizione assoluta

$$[hh] = minimum$$

sopra considerata, la condizione relativa

$$[\theta\theta] = minimum \qquad (1)$$

che fino ad un certo punto le equivale. È sotto questo aspetto affatto speciale che alla ricerca delle costanti di un ellissoide parziale di riferimento, o dell'ellissoide terrestre definito come sopra è detto, è applicabile il calcolo dei minimi quadrati, e ciò indipendentemente dalla legge di distribuzione delle attrazioni locali, che non hanno nulla di comune con una classe di errori di osservazione, ma sono invece costanti determinabili con un errore probabile molto minore della loro grandezza.

Sieno ora sulla cosiddetta sfera celeste (fig. 68) P un polo, EQ l'equatore, PO il primo meridiano, Z lo zenit vero, Z' lo zenit ellissoidico e quindi ZZ' l'attrazione locale di un punto qualunque del geoide, e rappresentiamo con $\xi = Z'R$ e con $\eta = ZR$ rispettivamente le componenti di questa attrazione locale nel senso del meridiano e del parallelo, e con ψ l'azimut astronomico PZZ' del piano ZZ' in cui essa agisce; indichiamo inoltre con l e λ la latitudine e la longitudine astronomica, e con φ' ed ω' le corrispondenti quantità ellissoidiche: si avrà

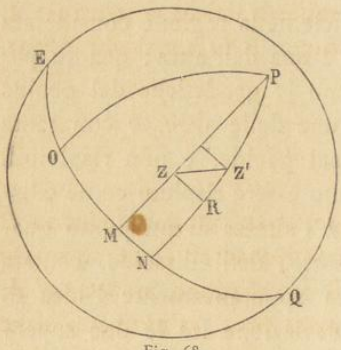

Fig. 68.

$$ZP = 90° - l, \quad Z'P = 90° - \varphi', \quad OPM = \lambda, \quad OPN = \omega',$$
$$Z'ZR = 90° - \psi, \quad Z'R = \xi = \varphi' - l, \quad ZR = \eta,$$

ed il triangolo sferico $ZZ'R$ darà

$$sen\,\xi = sen\,\theta \,.\, cos\,\psi,$$
$$tang\,\eta = tang\,\theta \,.\, sen\,\psi,$$

da cui, coll'approssimazione delle quantità di secondo ordine inclu-

sivamente rispetto a θ, osservando che dentro questa approssimazione si può porre

$$ZR = \eta = MN . \cos l = (\omega' - \lambda) \cos l,$$

avremo:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \theta . \cos\psi = \varphi' - l \\ \eta &= \theta . \operatorname{sen}\psi = (\omega' - \lambda) \cos l \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

L'approssimazione suddetta riesce qui più che sufficiente giacchè il valore di θ non risulta mai in pratica maggiore di 1' e quindi già le quantità di secondo ordine non raggiungono che una frazione piccolissima degli errori che non possiamo rimuovere dalle misure delle quantità φ', ω', l e λ per mezzo delle quali i valori di ξ ed η rimangono direttamente determinati. Dalle equazioni (2) si deduce

$$\theta^2 = \xi^2 + \eta^2$$

e per conseguenza la condizione (1) che deve servire di base alla determinazione dell'ellissoide di riferimento si riduce all'altra

$$[\xi\xi] + [\eta\eta] = \textit{minimo}, \quad (3)$$

che giustifica il metodo tenuto fin qui dai geodeti in tale ricerca.

2. La determinazione di un ellissoide parziale o generale di riferimento è così condotta alla formazione delle equazioni fondamentali

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi' - l \\ \eta_\omega &= (\omega' - \lambda) \cos l \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

per il massimo numero di punti possibile, equazioni che debbono in realtà essere risolute col metodo dei minimi quadrati come se i varii ξ ed η fossero dei veri errori residuali di osservazione, *provenienti da un sistema di equazioni generate dello stesso peso,* quantunque siano invece quantità fisiche determinabili con una precisione relativamente assai grande, ma non sempre eguale. Gli elementi di cui disponiamo per la formazione delle suddette equazioni sono quelli forniti dalle osservazioni astronomiche (latitudini, longitudini ed azimut) e quelli dedotti dalle misure geodetiche: i primi entrano direttamente nella costituzione delle (4), i secondi servono per formare le espressioni analitiche delle latitudini, delle longitudini e degli azimut geodetici in funzione delle attrazioni locali in latitudine, longitudine ed azimut corrispondenti ad un punto iniziale da cui le

misure geodetiche vengono ad emanare. Il confronto degli azimut astronomici cogli ellissoidici poi conduce come quello delle latitudini e delle longitudini, a stabilire delle condizioni analoghe alle (4), sotto la forma

$$\eta_\chi = (\alpha' - A)\,cotg\,l, \tag{5}$$

nella quale α' rappresenta un azimut ellissoidico, ed A l'azimut astronomico corrispondente, e che si deduce dalla seconda delle (4) ricordando la relazione che lega l'attrazione locale in azimut all'attrazione locale in longitudine [vedi vol. I, pag. 213, formula (43)].

Per ciascun punto B in cui è stato osservato astronomicamente oltre alla longitudine anche l'azimut si hanno dunque due distinte espressioni della componente η, le quali non differiscono fra loro che per gli errori di cui rimangono affette le quantità esperimentali ω', α', λ ed A: tali espressioni prima di essere introdotte nella condizione fondamentale (3) del minimo debbono evidentemente essere combinate fra loro in un unico risultato tenendo conto dei relativi pesi p_ω, p_α che, in generale, sono molto diversi e dei quali indicheremo in seguito il modo di determinazione. In altri termini nella (3) è da porre

$$\eta = \frac{p_\omega \eta_\omega + p_\alpha \eta_\alpha}{p_\omega + p_\alpha} \tag{6}$$

giacchè essa non si riferisce ad un sistema di veri e proprii errori, ma rappresenta soltanto la condizione di minima deviazione media del sistema delle normali ellissoidiche, dal sistema delle corrispondenti verticali, e quindi ciascuna componente η o ξ non può entrarvi che una sola volta in linea di calcolo.*

---

* Andrae nel *Danske Gradmaaling* pone in evidenza la diversità fra i due valori esperimentali di η introducendo sotto forma esplicita anche l'errore f commesso nel trasportare l'azimut originale da un punto ad un altro, ossia nel calcolare α' per mezzo di una rete di triangoli interposta fra il punto B ed il suo centro di emanazione, ed in tal modo sostituisce alla nostra condizione (3) la condizione

$$[\xi\xi] + [\eta\eta] + [pff] = 0,$$

l'espressione analitica delle quantità f essendo dedotta dal confronto delle espressioni di η_ω e η_α, e p rappresentando il peso di f, scelta per unità di peso la determinazione di uno qualunque dei valori ξ, ed η_ω. Ciò equivale in ultima analisi a considerare come esenti da errore le determinazioni di η fatte per mezzo della seconda delle nostre (4), ed a risolvere il problema qui discusso sotto il

È qui necessario di ricordare che le misure geodetiche sono fatte in realtà in punti non appartenenti nè al geoide, nè all'ellissoide, e che per il calcolo delle quantità ellissoidiche φ', ω', α' è necessario invece supporre che le reti geodetiche giacciano sull'ellissoide stesso: bisognerebbe quindi anzitutto poter ridurre le misure fatte a quelle che si sarebbero ottenute nei punti corrispondenti di questa superficie. Per quanto si riferisce agli angoli azimutali (*differenze di azimut*) noi abbiamo discusso questo problema nel § 19 del Capitolo V, e mostrato come la correzione per ciascuna direzione sia data dalla quantità

$$\theta \,.\, h \,.\, sen\, \psi \,.\, sen\, 1'',$$

ove h rappresenta l'altezza angolare del punto osservato sull'orizzonte del punto di osservazione. Nella massima parte dei casi tale correzione riesce di molto inferiore agli errori di osservazione e per conseguenza non sarebbe da tenerne conto che in punti isolati e rarissimi delle triangolazioni, lo che sarebbe però possibile soltanto in una seconda approssimazione, dopo aver determinato i valori prossimi θ delle attrazioni locali e le corrispondenti direzioni ψ. È però da notare che in un angolo l'influenza dell'attrazione locale anche nei sopraindicati punti eccezionali è sempre molto inferiore all'attrazione locale stessa e che nella compensazione di una rete viene in parte corretta e distribuita anche negli altri angoli in proporzione del loro peso e della loro prossimità al punto influenzato, per lo che una nuova compensazione che si facesse tenendo conto, in una seconda approssimazione, anche delle correzioni dovute all'attrazione locale, condurrebbe a risultati poco diversi dalla prima; è quindi giustificato pienamente il principio accettato oggidì da tutti i geodeti di considerare gli angoli compensati di una rete come appartenenti all'ellissoide di riferimento.

---

seguente punto di vista: « date le equazioni generate

$$y_1 + \Delta y_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + l_1,$$
$$y_2 + \Delta y_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + l_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n + \Delta y_n = a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots + l_n,$$

ove le quantità y sono da considerare come osservazioni indirette, ed i Δy come errori residuali di osservazione, determinare i valori più probabili degli x, compatibilmente colla condizione $[yy] = minimo$ » accettando per soluzione la condizione

$$[yy] + [\Delta y \,.\, \Delta y] = minimo.$$

Resta a parlare della riduzione che debbono subire le distanze, o, per meglio dire, le basi geodetiche, per essere trasportate dal geoide all'ellissoide. Sia perciò s' un arco di geodetica tracciata sul geoide ed s_1 l'arco corrispondente di geodetica ellissoidica, compreso cioè fra i piedi delle due normali abbassate sull'ellissoide dalle estremità di s'. È facile vedere come, a meno di quantità infinitamente piccole di secondo ordine, la corrispondenza fra gli elementi di tali curve può esser stabilita scegliendo come variabile indipendente l'arco s contato lungo la s', proiettando normalmente l'elemento ds, sul piano osculatore della s_1 nel punto M corrispondente al considerato valore di s, e quindi conducendo per gli estremi di questa proiezione le normali alla curva s_1 che intercetteranno su di questa l'elemento ds_1. Chiamando con ρ il raggio di curvatura della s_1 nel punto M, con n la distanza fra l'elemento ds_1 e la proiezione sopraindicata di ds, con μ l'angolo che la direzione di questa proiezione fa colla direzione di ds_1 e finalmente con λ l'angolo che la direzione ds fa col piano osculatore del punto considerato M della s_1 si ha evidentemente

$$ds_1 = \frac{\rho \cdot ds}{\rho + h} \cos\mu \cdot \cos\lambda,$$

e le quantità μ e λ debbono esser considerate come dell'ordine delle attrazioni locali, ed h rappresenta prossimamente la distanza fra l'ellissoide e il geoide nel punto M, dimodochè $\frac{h}{\rho}$ è in ogni caso una frazione molto piccola. Sviluppando in serie e ritenendo l'approssimazione del secondo ordine rispetto alle quantità suddette avremo pertanto

$$ds_1 = ds\left(1 - \frac{h}{\rho} + \frac{h^2}{\rho^2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right),$$

d'onde, integrando fra i limiti *zero* ed s' di s si trova

$$s' - s_1 = \int_0^{s'} \frac{h \cdot ds}{\rho} - \int_0^{s'} \frac{h^2 \cdot ds}{\rho^2} + \int_0^{s'} \frac{\mu^2 \cdot ds}{2} + \int_0^{s'} \frac{\lambda^2 \cdot ds}{2}. \qquad (7)$$

È facile constatare che nel secondo membro il solo primo termine ha un valore apprezzabile relativamente alla precisione con cui la base s' può supporsi misurata, ed infatti, sia partendo da considerazioni teoretiche, sia attenendoci ai risultati ottenuti fin'ora, è da ammettere che i valori di μ e di λ non sorpassino pochi secondi; ora

anche ponendo come limite massimo 1′ si ha

$$\int_0^s \frac{ds \cdot \mu^2}{2} < 0{,}000\,000\,04 \cdot s$$

$$\int_0^s \frac{ds \cdot \lambda^2}{2} < 0{,}000\,000\,04 \cdot s.$$

In quanto al valore massimo di h, esso è estremamente piccolo quando si tratti di ellissoidi di riferimento parziali: nel caso dell'ellissoide generale le considerazioni puramente teoriche lo farebbero ascendere anche a qualche centinaio di metri, mentre i risultati esperimentali lo ridurrebbero a poche diecine: in ogni modo conviene ricordare che l'incertezza di qualche centinaio di metri rimane pur sempre nella determinazione degli assi dell'ellissoide stesso: ponendo come caso limite un chilometro si avrebbe pur sempre

$$\int_0^s \frac{h^2 \cdot ds}{\rho^2} < 0{,}000\,000\,03 \cdot s;$$

sarà dunque in ogni caso più che sufficiente porre

$$s' - s_1 = \int_0^s \frac{h \cdot ds}{\rho}, \qquad (8)$$

come già *Bessel* aveva dedotto per altra via* (e come più rigorosamente vedremo in altro luogo), o piuttosto, chiamando con h_m il valore medio di h lungo la linea s e, al solito, con a il semiasse maggiore dell'ellissoide di riferimento (od un suo qualsiasi valore approssimato):

$$s' - s_1 = \frac{h_m}{a} s'. \qquad (9)$$

Questa correzione non è in generale trascurabile, ma non può esser fatta che con certe riserve (vedi capitolo seguente) in una seconda approssimazione dopo che una prima approssimazione ha dato il valore di h_m nel modo che sarà esposto in seguito.

3. Ciò premesso, faremo ora astrazione dalle riduzioni sopra discusse e considereremo date delle reti ellissoidiche tracciate fra punti in cui astronomicamente sieno state determinate le latitudini, le longitudidi e gli azimut. Le distanze geodetiche fra

---

* *Astr. Nachr. Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten, etc.*

tali punti, che diremo *punti principali,* possono supporsi determinate per mezzo delle triangolazioni suddette applicando i metodi altrove esposti od altri che indicheremo, per modo che siano formate sull'ellissoide una o più nuove reti principali che debbano servire alla sua determinazione. Si presentano allora due modi diversi di stabilire le equazioni fondamentali (4) e (5), il primo dei quali consiste nell'introdurre in esse le espressioni di φ', ω' ed α' in funzione dei valori che queste quantità assumono sopra un ellissoide arbitrario, e degli aumenti che le costanti fondamentali a ed e di questo ellissoide debbono subire per passare all'ellissoide cercato, ed il secondo nell'introdurre le distanze medesime (o delle lunghezze loro equivalenti come ad esempio le distanze fra i paralleli corrispondenti ai loro estremi e gli archi di parallelo) invece delle latitudini, longitudini ed azimut suddetti. Noi esporremo successivamente questi due metodi, notando che il primo è il più generale, e che l'importanza del secondo consiste specialmente nell'uso che ne è stato fatto nei lavori classici.

Sieno in generale φ, ω le coordinate geografiche (ellissoidiche) di un punto B qualunque, riferite ad un ellissoide provvisorio di costanti a ed e e calcolate per mezzo della distanza geodetica s che congiunge B ad un altro punto A, assumendo per dati di partenza la posizione astronomica $l_0 = latitudine$, $\lambda_0 = longitudine$ di questo e l'azimut A_0 osservato astronomicamente in A per s: rappresentiamo inoltre con $\delta\varphi_0$, $\delta\omega_0$, $\delta\alpha_0$ le attrazioni locali in latitudine, longitudine ed azimut nel punto di emanazione A per modo che si abbia in questo [equazioni (4) e (5)]

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \delta\varphi_0, \\ \eta_0 &= \delta\omega_0 \cos l_0 = \delta\alpha_0 \operatorname{cotg} l_0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

ed indichiamo finalmente con δa, δe le differenze cercate fra le costanti dell'ellissoide definitivo di riferimento e quelle dell'ellissoide provvisorio adottato. Le espressioni di φ', ω', α' necessarie a costituire le equazioni (4) e (5) relative al punto B si ottengono dalle formule (16), (17), (18), (28), (30), (31) e (37) del Capitolo VIII, nelle quali però vanno aggiunti i termini di secondo ordine rispetto alla distanza geodetica s ed invece i termini che sono di secondo ordine rispetto alle variazioni $\delta\varphi_0$, $\delta\alpha_0$, δa, δe, o che contengono il fattore e^2 riescono in ogni caso affatto trascurabili in confronto alla approssimazione colla quale possono essere ottenuti i valori astronomici l, λ ed A che compariscono direttamente nelle

(4) e (5) medesime. Ed in realtà anche ponendo come limiti delle suddette variazioni, molto maggiori di quelli che si hanno in pratica, per $\delta\varphi$ e $\delta\alpha$ un minuto primo, per δa un migliaio di metri e per δe un decimo dell'eccentricità Besseliana, i termini di secondo ordine suddetti non si riducono che a qualche centesimo di secondo anche per le massime distanze geodetiche che si hanno da considerare fra i varii punti B e i diversi centri di emanazione A. Riassumendo pertanto le formule citate, completandole nel modo indicato, ed osservando che la loro approssimazione non si altera se in luogo di $\frac{1}{\rho}$ ed $\frac{1}{N}$, si pone $\frac{1}{a}$, avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\Delta\varphi_\varphi &= -\frac{s^2.sen^2\alpha}{2.a^2.cos^2\varphi}\,\delta\varphi \\
\delta\Delta\varphi_\alpha &= -\left(\frac{s.sen\,\alpha}{a} + \frac{s^2.sen\alpha.cos\alpha.tang\varphi}{a^2}\right)\delta\alpha \\
\delta\Delta\varphi_a &= -\left(\frac{s.cos\alpha}{a^2.sen\,1''} - \frac{s^2.sen^2\alpha.tang\varphi}{a^3.sen\,1''}\right)\delta a \\
\delta\Delta\varphi_e &= \left(\frac{2.s.cos\alpha}{a.sen\,1''}\,(1-{}^3/_2 sen^2\varphi) - \frac{s^2.tang\varphi}{a^2.sen\,1''}\,[sen^2\alpha(1-2.sen^2\varphi)+3.cos^2\alpha.cos^2\varphi]\right)e.\delta e \\
\delta\Delta\omega_\varphi &= \left(\frac{s.sen\alpha.sen\varphi}{a.cos^2\varphi} + \frac{s^2.sen\alpha.cos\alpha}{a^2.cos^3\varphi}\,(1+sen^2\varphi)\right)\delta\varphi \\
\delta\Delta\omega_\alpha &= \left(\frac{s.cos\alpha}{a.cos\varphi} + \frac{s^2.sen\varphi(cos^2\alpha-sen^2\alpha)}{a^2.cos^2\varphi}\right)\delta\alpha \\
\delta\Delta\omega_a &= -\left(\frac{s.sen\alpha}{a^2.cos\varphi.sen\,1''} + \frac{2.s^2.sen\alpha.cos\alpha.sen\varphi}{a^3.cos^2\varphi.sen\,1''}\right)\delta a \\
\delta\Delta\omega_e &= -\left(\frac{s.sen\alpha.sen^2\varphi}{a.cos\varphi.sen\,1''} + \frac{2.s^2.sen\alpha.cos\alpha.sen^3\varphi}{a^2.cos^2\varphi.sen\,1''}\right)e.\delta e \\
\delta\Delta\alpha_\varphi &= \left(\frac{s.sen\alpha}{a.cos^2\varphi} + \frac{2.s^2.sen\alpha.cos\alpha.sen\varphi}{a^2.cos^3\varphi}\right)\delta\varphi \\
\delta\Delta\alpha_\alpha &= \left(\frac{s.cos.\alpha.tang\varphi}{a} + \frac{s^2(cos^2\alpha-sen^2\alpha)(1+sen^2\varphi)}{2.a^2.cos^2\varphi}\right)\delta\alpha \\
\delta\Delta\alpha_a &= -\left(\frac{s.sen\alpha.tang\varphi}{a^2.sen\,1''} + \frac{s^2.sen\alpha.cos\alpha(1+sen^2\varphi)}{a^3.cos^2\varphi.sen\,1''}\right)\delta a \\
\delta\Delta\alpha_e &= -\left(\frac{s.sen\alpha.tang\varphi.sen^2\varphi}{a.sen\,1''} + \frac{s^2.sen\alpha.cos\alpha.sen^2\varphi(1+sen^2\varphi)}{a^2.cos^2\varphi.sen\,1''} + \frac{s^2.sen\alpha.cos\alpha.cos^2\varphi}{a^2.sen\,1''}\right)e.\delta e\,.
\end{aligned}\right\}\ (11)$$

Per altro in generale le distanze s dal centro di emanazione A ed i relativi azimut α non sono dati direttamente, ed è quindi conveniente di trasformare queste formule introducendo invece delle suddette quantità le equivalenti differenze $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ fra le coordinate geografiche dei punti B e quelle del centro A. Per ciò basta osservare che dentro l'approssimazione tenuta nelle (11) si può porre [vedi Capitolo VIII formule (15) e (22)] nei termini di primo ordine:

$$\frac{s.\cos\alpha}{a} = \Delta\varphi.\mathrm{sen}\,1'' + {}^1/_2\Delta\omega^2.\mathrm{sen}\varphi.\cos\varphi.\mathrm{sen}^2\,1'',$$

$$\frac{s.\mathrm{sen}\alpha}{a} = \Delta\omega.\cos\varphi.\mathrm{sen}\,1'' - \Delta\omega.\Delta\varphi.\mathrm{sen}\varphi.\mathrm{sen}^2\,1'',$$

e nei termini di secondo ordine:

$$\frac{s.\cos\alpha}{a} = \Delta\varphi.\mathrm{sen}\,1'',$$

$$\frac{s.\mathrm{sen}\alpha}{a} = \Delta\omega.\cos\varphi.\mathrm{sen}\,1''.$$

Per tal guisa si trova:

$$\delta\Delta\varphi_\varphi = -{}^1/_2\Delta\omega^2.\mathrm{sen}^2\,1''.\delta\varphi$$

$$\delta\Delta\varphi_\alpha = -\Delta\omega.\cos\varphi.\mathrm{sen}\,1''.\delta\alpha$$

$$\delta\Delta\varphi_a = -\frac{1}{a}\left(\Delta\varphi - {}^1/_2\Delta\omega^2.\mathrm{sen}\varphi.\cos\varphi.\mathrm{sen}\,1''\right)\delta a$$

$$\delta\Delta\varphi_e = \left\{2.\Delta\varphi\left(1 - {}^3/_2\mathrm{sen}^2\varphi\right) + {}^1/_2\Delta\omega^2.\cos\varphi.\mathrm{sen}^3\varphi.\mathrm{sen}\,1'' - 3.\Delta\varphi.{}^2\cos\varphi.\mathrm{sen}\varphi.\mathrm{sen}\,1''\right\}e.\delta e$$

$$\delta\Delta\omega_\varphi = \left(\Delta\omega.\mathrm{tang}\varphi.\mathrm{sen}\,1'' + \Delta\omega.\Delta\varphi.\sec^2\varphi.\mathrm{sen}^2\,1''\right)\delta\varphi$$

$$\delta\Delta\omega_\alpha = \left(\Delta\varphi.\sec\varphi.\mathrm{sen}\,1'' + \Delta\varphi^2.\mathrm{tang}\varphi.\sec\varphi.\mathrm{sen}^2\,1'' - {}^1/_2\Delta\omega^2.\mathrm{sen}\varphi.\mathrm{sen}\,1''\right)\delta\alpha$$

$$\delta\Delta\omega_a = -\frac{1}{a}\left(\Delta\omega + \Delta\omega.\Delta\varphi.\mathrm{tang}\varphi.\mathrm{sen}\,1''\right)\delta a$$

$$\delta\Delta\omega_e = -\left(\Delta\omega.\mathrm{sen}^2\varphi + \Delta\omega.\Delta\varphi.\mathrm{sen}^2\varphi.\mathrm{tang}\varphi.\mathrm{sen}\,1''\right)e.\delta e$$

$$\delta\Delta\alpha_\varphi = \left(\Delta\omega.\sec\varphi.\mathrm{sen}\,1'' + \Delta\omega.\Delta\varphi.\mathrm{tang}\varphi.\sec\varphi.\mathrm{sen}^2\,1''\right)\delta\varphi$$

$$\delta\Delta\alpha_\alpha = \left(\Delta\varphi.\mathrm{tang}\varphi.\mathrm{sen}\,1'' + {}^1/_2\Delta\varphi^2\left(1 + \mathrm{sen}^2\varphi\right)\sec^2\varphi.\mathrm{sen}^2\,1'' - {}^1/_2\Delta\omega^2.\mathrm{sen}^2\,1''\right)\delta\alpha$$

$$\delta\Delta\alpha_a = -\frac{1}{a}\left(\Delta\omega.\mathrm{sen}\varphi + \Delta\omega.\Delta\varphi.\sec\varphi.\mathrm{sen}\,1''\right)\delta a$$

$$\delta\Delta\alpha_e = -\left(\Delta\omega.\mathrm{sen}^3\varphi + \Delta\omega.\Delta\varphi.\sec\varphi.\mathrm{sen}^2\varphi.\mathrm{sen}\,1'' - \Delta\omega.\Delta\varphi.\cos^3\varphi.\mathrm{sen}\,1''\right)e.\delta e$$

(12

e per conseguenza, ricordando le relazioni (10), per le espressioni analitiche delle coordinate φ', ω', α' riferite all'ellissoide definitivo si ottiene:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi' &= \varphi + (1 - {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen^2 1'') \xi_0 - \Delta\omega . sen l_0 . sen 1'' . \eta_0 - \\
&\quad - (\Delta\varphi - {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen l_0 . cos l_0 sen 1'') \frac{\delta a}{a} + \\
&\quad + \{2 . \Delta\varphi (1 - {}^3/_2 sen^2 l_0) + {}^1/_2 \Delta\omega^2 . cos\, l_0 sen^3 l_0 sen 1'' - 3 . \Delta\varphi^2 . cos\, l_0 . sen l_0 . sen 1''\} e . \delta e \\
\omega' &= \omega + (\Delta\omega . tang\, l_0 + \Delta\omega . \Delta\varphi . sec^2 l_0 sen 1'') sen 1'' . \xi_0 + \\
&\quad + (1 + \Delta\varphi . tang\, l_0 sen 1'' + \Delta\varphi^2 . tang^2 l_0 sen^2 1'' - {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen^2 l_0 sen^2 1'') sec\, l_0 \eta_0 - \\
&\quad - (\Delta\omega + \Delta\omega . \Delta\varphi . tang\, l_0 . sen 1'') \frac{\delta a}{a} - \\
&\quad - (\Delta\omega + \Delta\omega . \Delta\varphi . tang\, l_0 . sen 1'') sen^2 l_0 . e . \delta e \\
\alpha' &= \alpha + (\Delta\omega . sec\, l_0 + \Delta\omega . \Delta\varphi . tang\, l_0 sec\, l_0 sen 1'') sen 1'' . \xi_0 + \\
&\quad + [1 + \Delta\varphi . tang\, l_0 sen 1'' + {}^1/_2 \Delta\varphi^2 (1 + sen^2 l_0) sec^2 l_0 sen^2 1'' - {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen^2 1''] tang\, l_0 . \eta_0 - \\
&\quad - (\Delta\omega . sen l_0 + \Delta\omega . \Delta\varphi . sec\, l_0 sen 1'') \frac{\delta a}{a} - \\
&\quad - (\Delta\omega . sen l_0 + \Delta\omega . \Delta\varphi . sec\, l_0 . sen 1'' - \Delta\omega . \Delta\varphi . cos\, l_0 cotg^2 l_0 sen 1'') sen^2 l_0 e . \delta e .
\end{aligned}
\right\} (12)^{bis}
$$

Quindi le equazioni (4) e (5) corrispondenti al punto qualunque B, che differisce dal punto di emanazione A per $\Delta\varphi$ in latitudine e per $\Delta\omega$ in longitudine, e che ha φ, ω, α per coordinate geografiche sull'ellissoide provvisorio ed l, λ, A per coordinate astronomiche, saranno:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \varphi - l + (1 - {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen^2 1'') \xi_0 - \Delta\omega . sen\, l_0 sen 1'' . \eta_0 - \\
&\quad - (\Delta\varphi - {}^1/_4 \Delta\omega^2 . sen 2 l_0 sen 1'') \frac{\delta a}{a} + \\
&\quad + [2 . \Delta\varphi (1 - {}^3/_2 sen^2 l_0) + {}^1/_4 \Delta\omega^2 . sen 2 l_0 sen^2 l_0 sen 1'' - {}^3/_2 \Delta\varphi^2 . sen 2 l_0 sen 1''] e . \delta e \\
\eta_\omega &= (\omega - \lambda) cos\, l + (\Delta\omega . sen l_0 + \Delta\omega . \Delta\varphi . sec\, l_0 sen 1'') cos\, l . sec\, l_0 . sen 1'' \xi_0 + \\
&\quad + (1 + \Delta\varphi . tang\, l_0 . sen 1'' + \Delta\varphi^2 . tang^2 l_0 . sen^2 1'' - {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen^2 l_0 sen^2 1'') cos\, l . sec\, l_0 \eta_0 - \\
&\quad - (\Delta\omega + \Delta\omega . \Delta\varphi . tang\, l_0 . sen 1'') cos\, l . \frac{\delta a}{a} - \\
&\quad - (\Delta\omega + \Delta\omega . \Delta\varphi . tang\, l_0 . sen 1'') cos\, l . sen^2 l_0 e . \delta e
\end{aligned}
$$

$$\eta_\alpha = (\alpha - A)\cot g\, l + (\Delta\omega + \Delta\omega.\Delta\varphi.\tan g\, l_0.sen\,1')\cot g\, l.sec\, l_0 sen\,1''\xi_0 +$$

$$+\{1 + \Delta\varphi.\tan g\, l_0 sen\,1'' + {}^1/_2\Delta\varphi^2(1 + sen^2 l_0)sec^2 l_0 sen^2 1'' - {}^1/_2\Delta\omega^2 sen^2 1''\}\cot g\, l.\tan g\, l_0.\eta_0 -$$

$$-(\Delta\omega.sen\, l_0 + \Delta\omega.\Delta\varphi.sec\, l_0 sen\,1'')\cot g\, l.\frac{\delta a}{a} -$$

$$-(\Delta\omega.sen\, l_0 + \Delta\omega.\Delta\varphi.sec\, l_0.sen\,1'' - \Delta\omega.\Delta\varphi.cos\, l_0 cotg^2 l_0 sen\,1'')sen^2 l_0 cotg\, l.e.\delta e.$$

È da notare che per costituire l'ultima di queste relazioni col confronto degli azimut α ed A non è affatto necessario considerare proprio l'azimut della geodetica s che congiunge B con A, ma basta considerare uno qualunque degli azimut geodetici dei lati emananti da B ed appartenenti alla rete da cui la geodetica s rimane determinata in lunghezza, e confrontarlo coll'azimut osservato astronomicamente per lo stesso lato.

Se si osserva che dentro l'approssimazione tenuta si ha

$$cos\, l = cos\, l_0(1 - \Delta\varphi.sen\,1''\tan g\, l_0 - {}^1/_2\Delta\varphi^2.sen^2 1''),$$

$$\cot g\, l = \cot g\, l_0\left(1 - \frac{\Delta\varphi.sen\,1''}{sen\, l_0 cos\, l_0} + \frac{\Delta\varphi^2.sen^2 1''}{sen^2 l_0}\right),$$

le precedenti relazioni prendono le forme seguenti, che sono notevolissime per la loro semplicità e le più comode per il calcolo:

$$\xi = \varphi - l + (1 - {}^1/_2\Delta\omega^2.sen^2 1'')\xi_0 - \Delta\omega.sen\, l_0 sen\,1''.\eta_0 -$$

$$-(\Delta\varphi - {}^1/_4\Delta\omega^2.sen\, 2 l_0 sen\,1'')\frac{\delta a}{a} +$$

$$+\{2.\Delta\varphi(1 - {}^3/_2 sen^2 l_0) + {}^1/_4\Delta\omega^2.sen\, 2 l_0 sen^2 l_0 sen\,1'' - {}^3/_2\Delta\varphi^2.sen\, 2 l_0 sen\,1''\}e.\delta e$$

$$\eta_\omega = (\omega - \lambda)cos\, l + \Delta\omega.sen\, l_0.sen\,1''(1 + \Delta\varphi.\cot g\, l_0 sen\,1'')\xi_0 +$$

$$+\{1 - {}^1/_2(\Delta\varphi^2 + \Delta\omega^2.sen^2 l_0)sen^2 1''\}\eta_0 - \Delta\omega.cos\, l_0\frac{\delta a}{a} - \Delta\omega.cos\, l_0 sen^2 l_0 e.\delta e \qquad (13$$

$$\eta_\alpha = (\alpha - A)\cot g\, l + \Delta\omega.cosec\, l_0 sen\,1''(1 - \Delta\varphi.\cot g\, l_0 sen\,1'')\xi_0 +$$

$$+\{1 - \Delta\varphi.\cot g\, l_0 sen\,1'' + {}^1/_2\Delta\varphi^2.cosec\, l_0(1 + cos^2 l_0)sen^2 1'' - {}^1/_2\Delta\omega^2.sen^2 1''\}\eta_0 -$$

$$-\Delta\omega.cos\, l_0\frac{\delta a}{a} - \Delta\omega.sen^2 l_0 cos\, l_0(1 - \Delta\varphi.cotg^2 l_0 sen\,1'')e.\delta e.$$

4. Queste formule non sono generali, giacchè il grado assoluto della loro approssimazione dipende dalle ampiezze di $\Delta\omega$, e $\Delta\varphi$: non possono essere quindi applicate che fra i limiti di queste quan-

tità, entro i quali il prodotto dei loro cubi per i valori prossimi di una delle quantità ξ_0, η_0, $\frac{\delta a}{a}$, $e.\delta e$ espresso in secondi non sorpassa gli errori probabili delle quantità l, λ, ed A astronomicamente osservate. Un facile calcolo approssimativo, fatto coi già citati massimi valori ascrivibili alle incognite sopra indicate fa vedere come i limiti suddetti sieno di circa $\pm$ 10° in latitudine e in longitudine, e come possano spingersi anche a 15 o 20 gradi se si ripete il calcolo con una seconda approssimazione, come, teoricamente parlando almeno, è sempre necessario di fare per correggere le basi e gli angoli delle reti geodetiche dall'influenza delle attrazioni locali. In realtà anche per regioni più estese le (13) potrebbero servire a costituir le equazioni fondamentali (4) e (5) relative a tutti i punti, considerandoli raggruppati intorno a varii centri di emanazione non troppo discosti, e passando dalle equazioni relative ad un centro a quelle relative ad un altro prossimo per mezzo delle equazioni di uno dei centri riferito all'altro. Ed invero se

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_1 + b_1\xi_0' + c_1\eta_0' + f_1\delta a + g_1\delta e \\ \eta &= a_1' + b_1'\xi_0' + c_1'\eta_0' + f_1'\delta a + g_1'\delta e \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

sono le equazioni di un punto B riferito al centro secondario $A\,(\xi_0', \eta_0')$, [η provenendo dalla combinazione (6)], e

$$\left.\begin{aligned} \xi_0' &= a_2 + b_2\xi_0 + c_2\eta_0 + f_2\delta a + g_2\delta e \\ \eta_0' &= a_2' + b_2'\xi_0 + c_2'\eta_0 + f_2'\delta a + g_2'\delta e \end{aligned}\right\} \qquad (14^{bis})$$

sono quelle del centro secondario A' rispetto al centro principale $A(\xi_0, \eta_0)$, con delle semplici sostituzioni si avrebbero le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \xi = {} & a_1 + b_1a_2 + c_1a_2' + (b_1b_2 + c_1b_2')\xi_0 + (b_1c_2 + c_1c_2')\eta_0 + \\ & + (f_1 + b_1f_2 + c_1f_2')\delta a + (g_1 + b_1g_2 + c_1g_2')\delta e, \\ \eta = {} & a_1' + b_1'a_2 + c_1'a_2' + (b_1'b_2 + c_1'b_2')\xi_0 + (b_1'c_2 + c_1'c_2')\eta_0 + \\ & + (f_1' + b_1'f_2 + c_1'f_2')\delta a + (g_1' + b_1'g_2 + c_1'g_2')\delta e, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

ove nei secondi membri non compariscano che gli elementi ξ_0, η_0 del centro di emanazione principale A, e che, per conseguenza, equivalgono alle equazioni del punto B riferito direttamente a questo centro.

Tuttavia è conveniente di partire da un punto di vista più generale, considerando bensì le equazioni (14) come dedotte dalle (13) rispetto ad un centro secondario A', ma non facendo ipotesi

restrittive sulla posizione di questo rispetto al centro principale *A*, o, in altri termini, sviluppando anche le relazioni generali che permettono di stabilire le equazioni generate (4) e (5) per un punto *qualunque* dell'Ellissoide. Naturalmente queste equazioni sono più complicate ed assai meno comode delle (13), e debbono esser considerate come convenienti a stabilir soltanto le equazioni (14^{bis}) necessarie a passare dalle espressioni dei valori di ξ ed η, relative ad un centro secondario, a quelle relative al centro principale.

5. In questo nuovo sviluppo seguiremo assai da vicino l'analisi data dal sig. Helmert (*Theorieen der Höheren Geodäsie*) come quella che, quantunque meno diretta, ci permette di stabilire alcune formule e di fare alcune considerazioni molto importanti per la Geodesia teoretica sull'ellissoide. Riterremo tutte le notazioni stabilite nei Capitoli III ed VIII, e partiremo dalla relazione fondamentale

$$s = a \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{1 - e^2 . \cos^2 u} \qquad (16)$$

[vedi pag. 147, formula (63)], che lega l'arco di geodetica s alla sua immagine θ sulla sfera ausiliaria Besseliana, per cercare le espressioni analitiche degli spostamenti elementari in latitudine, longitudine ed azimut, che uno degli estremi (vedi fig. 69) di s soffre se si suppone che la geodetica ruoti per un angolo infinitamente

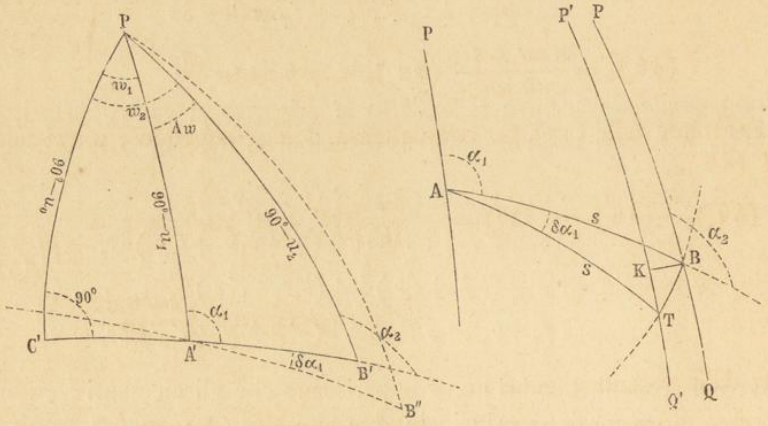

Fig. 69.

piccolo intorno all'altro estremo considerato come fisso, ossia che l'azimut α_1 varii di $\delta\alpha_1$. Rappresentando con $(\delta\theta)_\alpha$ e $(\delta u)_\alpha$ le corrispondenti variazioni in θ ed u, e differenziando la (16), l'arco s

ritenuto come costante, avremo:

$$\left.\begin{aligned} s &= a\int_{\theta_1+(\delta\theta_1)_\alpha}^{\theta_2+(\delta\theta_2)_\alpha} \sqrt{1-e^2.\cos^2(u+\delta u)}\; d[\theta+(\delta\theta)_\alpha], \\ 0 &= W_2(\delta\theta_2)_\alpha - W_1(\delta\theta_1)_\alpha + e^2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos u.\operatorname{sen} u}{W}(\delta u)_\alpha\, d\theta \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

ove si è posto, per semplificare

$$W=\sqrt{1-e^2.\cos^2 u}, \qquad (18)$$

ed ove resta ad esprimere le variazioni $(\delta\theta)_\alpha$ e $(\delta u)_\alpha$ per $\delta\alpha_1$. Perciò ricordiamo che si ha [vedi Capitolo VIII formule (66) e (71)]

$$\cos u_0=\cos u_1.\operatorname{sen}\alpha_1,\quad \operatorname{sen} u=\operatorname{sen} u_0\cos\theta,\quad \cos\theta_1=\frac{\operatorname{sen} u_1}{\operatorname{sen} u_0},$$

nella seconda delle quali l'angolo θ, nel dedurre l'espressione di $(\delta u)_\alpha$, deve esser considerato come costante col variare di α_1, dacchè è la variabile indipendente a cui si riferiscono le variazioni lungo la linea s: con semplici differenziazioni e con facili trasformazioni se ne ricava:

$$\left.\begin{aligned} (\delta u_0)_\alpha &= -\frac{\cos u_1\cos\alpha_1}{\operatorname{sen} u_0}\delta\alpha_1 = \operatorname{sen}\theta_1\delta\alpha_1 \\ (\delta u)_\alpha &= \frac{\cos u_0.\cos\theta}{\cos u}(\delta u_0)_\alpha = \frac{\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta.\cos u_0}{\cos u}\delta\alpha_1 \\ (\delta\theta_1)_\alpha &= \frac{\operatorname{sen} u_1.\cos u_0}{\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}^2 u_0}(\delta u_0)_\alpha = \cos\theta_1\operatorname{cotg} u_0\delta\alpha_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (19)$$

La seconda delle (17), per conseguenza, dà aggiungendo e sottraendo $W_2(\delta\theta_1)_\alpha$,

$$\left.\begin{aligned} (\delta\theta_2)_\alpha-(\delta\theta_1)_\alpha=(\delta\Delta\theta)_\alpha &= -\frac{\delta\alpha_1}{W_2}\Big\{(W_2-W_1)\cos\theta_1\operatorname{cotg} u_0 + \\ &\quad + e^2.\cos u_0\operatorname{sen} u_0\operatorname{sen}\theta_1\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos^2\theta.d\theta}{W}\Big\}; \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

ma dalla relazione generale

$$\operatorname{sen} u_2=\operatorname{sen} u_1\cos(\theta_2-\theta_1)+\cos u_1\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)\cos\alpha_1,$$

che si ricava dal triangolo sferico ausiliario *Besseliano,* si trae

$$(\delta u_2)_\alpha=\frac{1}{\cos u_2}\Big\{[\cos u_1\cos(\theta_2-\theta_1)\cos\alpha_1-\operatorname{sen} u_1\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)](\delta\Delta\theta)_\alpha- \\ -\cos u_1\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)\operatorname{sen}\alpha_1\delta\alpha_1\Big\},$$

relazione cui, per essere,

$$\cos\alpha_2 = [\operatorname{sen} u_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \operatorname{sen} u_1] \sec u_2 \operatorname{cosec}(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \{\cos u_1 \cos\alpha_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)\} \sec u_2 ,$$

può esser data la forma seguente

$$(\delta u_2)_\alpha = \cos\alpha_2 (\delta\Delta\theta)_\alpha - \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)\delta\alpha_1 ,$$

ovvero, sostituendo a $(\delta\Delta\theta)_\alpha$ il suo valore (20):

$$(\delta u_2)_\alpha = -\frac{\delta\alpha_1}{W_2}\left\{ W_2[\cos\theta_1 \operatorname{cotg} u_0 \cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)] - \right.$$
$$\left. - W_1 \cos\theta_1 \operatorname{cotg} u_0 \cos\alpha_2 + e^2 . \cos u_0 \operatorname{sen} u_0 \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\theta_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta}{W} d\theta \right\} . \quad (21)$$

Ora si ha

$$\operatorname{cotg} u_0 = -\operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{tang}\alpha_2 , \quad \operatorname{cotg} u_0 \cos\alpha_2 = -\operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\alpha_2 ,$$
$$\cos\alpha_2 \cos u_0 = -\operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\alpha_2 ;$$

perciò, ponendo

$$\frac{\sqrt{m}}{a} = W_2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - W_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 + e^2 . \operatorname{sen}^2 u_0 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta}{W} \delta\theta , \quad (22)$$

sarà:

$$(\delta u_2)_\alpha = \frac{\sqrt{m} . \operatorname{sen}\alpha_2}{a . W_2} \delta\alpha_1 ; \quad (23)$$

ed osservando quindi che dalle corrispondenze fra la latitudine ridotta e la geografica [vedi Capitolo VIII, formule (57)] si trae in generale

$$(\delta\varphi)_\alpha = (\delta u)_\alpha \frac{1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi}{\sqrt{1 - e^2}} ,$$

si trova finalmente:

$$(\delta\varphi_2)_\alpha = \frac{\sqrt{m} . (1 - e^2 . \operatorname{sen}^2\varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \operatorname{sen}\alpha_2 . \delta\alpha_1 = \frac{\sqrt{m} . \operatorname{sen}\alpha_2}{\rho_2} \delta\alpha_1 . \quad (24)$$

Tale è l'espressione semplicissima dello spostamento in latitudine corrispondente alla variazione $\delta\alpha_1$ dell'azimut iniziale: per avere ora l'espressione dello spostamento elementare in longitudine ricordiamo che si ha

$$\operatorname{cotg}(\theta_2 - \theta_1) \cos u_1 = \operatorname{sen} u_1 \cos\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{cotg}(w_2 - w_1) ,$$

e quindi:

$$\cos u_1 (\delta\Delta\theta)_\alpha = \operatorname{sen}^2(\theta_2 - \theta_1) \left\{ (\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen}\alpha_1 - \cos\alpha_1 \operatorname{cotg}\Delta w)\delta\alpha_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}^2(w_2 - w_1)} (\delta\Delta w)_\alpha \right\}$$

d'onde si trae

$$(\delta\Delta w)_\alpha = \frac{\cos u_1 . sen^2(w_2 - w_1)}{sen\alpha_1 sen^2(\theta_2 - \theta_1)} (\delta\Delta\theta)_\alpha + sen(w_2 - w_1)\{cotg\alpha_1 cos(w_2 - w_1) - \\ - sen u_1 sen(w_2 - w_1)\}\delta\alpha_1 ,$$

od anche, con facili trasformazioni:

$$(\delta\Delta w)_\alpha = \frac{sen\alpha_2}{cos u_2} (\delta\Delta\theta)_\alpha + sen(w_2 - w_1)\{cotg\alpha_1 cos(w_2 - w_1) - \\ - sen u_1 sen(w_2 - w_1)\}\delta\alpha_1 .$$

Introducendo α_2 in luogo di α_1 per mezzo della relazione

$$cos\alpha_2 = cos(w_2 - w_1)cos\alpha_1 - sen(w_2 - w_1)sen\alpha_1 sen u_1$$

si ha poi

$$\left.\begin{aligned}(\delta\Delta w)_\alpha &= \frac{sen\alpha_2}{cos u_2}(\delta\Delta\theta)_\alpha + \frac{cos\alpha_2 sen(w_2 - w_1)}{sen\alpha_1}\delta\alpha_1 = \\ &= \frac{sen\alpha_2}{cos u_2}(\delta\Delta\theta)_\alpha + \frac{cos\alpha_2 . sen(\theta_2 - \theta_1)}{cos u_2}\delta\alpha_1\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

e se si sostituisce a $(\delta\Delta\theta)_\alpha$ il suo valore (20) si ottiene:

$$(\delta\Delta w)_\alpha = \frac{\delta\alpha_1}{W_2 cos u_2}\left\{\begin{aligned}&W_2[cos\alpha_2 sen(\theta_2 - \theta_1) - cos\theta_1 cotg u_0 sen\alpha_2] + \\ &+ W_1 cos\theta_1 cotg u_0 sen\alpha_2 - e^2 . cos u_0 sen u_0 sen\theta_1 sen\alpha_2 \int_0^{\theta_2} \frac{cos^2\theta}{W} d\theta\end{aligned}\right\} . \qquad (26)$$

Ciò posto, ricordiamo che si ha in generale [vedi Capitolo VIII formula (80)]

$$\omega_2 - \omega_1 = \int_{w_1}^{w_2} dw\sqrt{1 - e^2 . cos^2 u} ,$$

d'onde, differenziando,

$$(\delta\omega)_\alpha = W_2(\delta w_2)_\alpha - W_1(\delta w_1)_\alpha + e^2 \int_{w_1}^{w_2} \frac{(\delta u)_\alpha cos u . sen u}{W} dw \qquad (27)$$

ove la variazione $(\delta u)_\alpha$ deve esser calcolata considerando w costante, dacchè w è, in questo caso, la variabile indipendente. Ora dalla relazione

$$cotg u_0 = cotg u . cos w$$

si trae

$$(\delta u)_\alpha = \frac{sen^2 u}{sen^2 u_0 . cos w}(\delta u_0)_\alpha ,$$

e quindi, sostituendo a $(\delta u_0)_\alpha$ il valore dato dalla prima delle (19), avremo:

$$(\delta u)_\alpha = \frac{sen\theta_1 sen^2 u}{cos w \,.\, sen^2 u_0}\,\delta\alpha_1 .$$

Per conseguenza alla (27) può esser data la forma seguente

$$(\delta\omega)_\alpha = W_2(\delta\Delta w)_\alpha + (W_2 - W_1)(\delta w_1)_\alpha + \frac{e^2 .\delta\alpha_1 sen\theta_1}{sen^2 u_0}\int_{w_1}^{w_2} \frac{cos u . sen^3 u}{W . cos w}\, dw,$$

nella quale relazione conviene cambiar di variabile indipendente sotto l'integrale, introducendo θ in luogo di w, come nella (26). Osserviamo perciò che si ha

$$tang\,\theta = tang\, w \,.\, cos\, u_0 ,$$

da cui, considerando w come funzione di θ e differenziando, si ottiene

$$\frac{dw}{cos w} = \frac{cos w}{cos^2\theta \,.\, cos\, u_0}\, d\theta,$$

e, per esprimere u per θ sotto il segno di integrazione nella precedente espressione di $(\delta\omega)_\alpha$, si ha

$$tang\, u \,.\, cotg\, u_0 = cos\, w,$$

$$\frac{cos u . sen^3 u . cos w}{cos^2\theta \,.\, cos\, u_0} = \frac{sen^4 u}{cos^2\theta . sen\, u_0} = sen^3 u_0 cos^2\theta :$$

quindi sarà:

$$(\delta\omega)_\alpha = W_2(\delta\Delta w)_\alpha + (W_2 - W_1)(\delta w_1)_\alpha + e^2 .\delta\alpha_1 sen\theta_1 sen\, u_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{cos^2\theta}{W}\, d\theta. \quad (28)$$

Per esprimere tutte le variazioni, che compariscono nel secondo membro, in funzione di $\delta\alpha_1$ basta osservare che la relazione

$$cos\, w_1 = tang\, u_1 cotg\, u_0$$

dà

$$sen\, w_1 (\delta w_1)_\alpha = \frac{tang\, u_1}{sen^2 u_0}(\delta u_0)_\alpha ,$$

e quindi, a causa della prima delle (19),

$$(\delta w_1)_\alpha = \frac{tang\, u_1 \,.\, sen\,\theta_1}{tang\, u_0 \,.\, sen\, w_1}\,\delta\alpha_1 = \frac{tang\, u_1 \,.\, cos\, u_1}{sen^2 u_0}\,\delta\alpha_1 = \frac{sen\, u_1}{sen^2 u_0}\,\delta\alpha_1 = \frac{cos\,\theta_1}{sen\, u_0}\,\delta\alpha_1 .$$

Sostituendo nella (28) e tenendo conto della (26) avremo pertanto

$$(\delta\omega)_\alpha = \frac{\cos\alpha_2}{\cos u_2}\delta\alpha_1 \left\{ \begin{array}{l} W_2\left\{\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1) - \cos\theta_1 \operatorname{cotg} u_0 \operatorname{tang}\alpha_2 + \dfrac{\cos\theta_1\cos u_2}{\operatorname{sen} u_0 \cos\alpha_2}\right\} + \\ + W_1\left\{\cos\theta_1 \operatorname{cotg} u_0 \operatorname{tang}\alpha_2 - \dfrac{\cos\theta_1\cos u_2}{\cos u_0\cos\alpha_2}\right\} + \\ + e^2.\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}^2 u_0 \left\{\dfrac{\cos u_2}{\operatorname{sen} u_0\cos\alpha_2} - \dfrac{\cos u_0 \operatorname{tang}\alpha_2}{\operatorname{sen} u_0}\right\} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta}{W}\, d\theta \end{array} \right\}$$

relazione da cui, se si osserva che è

$$\operatorname{cotg} u_0 = -\operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{tang}\alpha_2,$$

$$\frac{\cos u_2}{\operatorname{sen} u_0} = \frac{\operatorname{cotg} u_0}{\operatorname{sen}\alpha_2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\cos\alpha_2}, \qquad \frac{\cos u_2}{\cos u_0} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha_2},$$

si deduce:

$$(\delta\omega)_\alpha = \frac{\cos\alpha_2}{\cos u_2}\delta\alpha_1 \left\{ \begin{array}{l} W_2\left\{\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1) + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{tang}^2\alpha_2 - \dfrac{\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^2\alpha_2}\right\} + \\ + W_1\left\{\dfrac{\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^2\alpha_2} - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{tang}^2\alpha_2\right\} + \\ + e^2.\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}^2 u_0\left(\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{tang}^2\alpha_2 - \dfrac{\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^2\alpha_2}\right)\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos^2\theta}{W}\, d\theta \end{array} \right\}$$

e, finalmente, introducendo la notazione (22):

$$(\delta\omega)_\alpha = -\frac{\sqrt{m}\,.\cos\alpha_2}{a\,.\cos u_2}\delta\alpha_1 = -\frac{\sqrt{m}\,.\cos\alpha_2}{r_2}\delta\alpha_1 \qquad (29)$$

che è l'espressione dello spostamento in longitudine cercato, corrispondente alla variazione $\delta\alpha_1$ nell'azimut.

Resta ancora da determinare in funzione di $\delta\alpha_1$ la variazione elementare $(\delta\alpha_2)_\alpha$ sofferta dall'azimut α_2: ora, gli azimut $\alpha_1+\delta\alpha_1$, $\alpha_2+(\delta\alpha_2)_\alpha$ appartenendo ai due punti

$$A(u_1, \alpha_1+\delta\alpha_1), \quad B[u_2+(\delta u_2)_\alpha, \alpha_2+(\delta\alpha_2)_\alpha],$$

della geodetica s nella nuova posizione assunta dopo la rotazione, si ha per il teorema di *Clairaut*

$$\cos u_1 \operatorname{sen}(\alpha_1+\delta\alpha_1) = \cos[u_2+(\delta u_2)_\alpha]\operatorname{sen}[\alpha_2+(\delta\alpha_2)_\alpha]$$

e quindi

$$(\delta\alpha_2)_\alpha = \frac{\cos u_1\cos\alpha_1}{\cos u_2\cos\alpha_2}\delta\alpha_1 + \operatorname{tang} u_2 \operatorname{tang}\alpha_2 (\delta u_2)_\alpha,$$

od anche, sostituendo a $(\delta u_2)_\alpha$ il suo valore (23):

$$(\delta \alpha_2)_\alpha = \left(\frac{\cos u_1 \cos \alpha_1}{\cos u_2 \cos \alpha_2} + \frac{\sqrt{m}}{a.W_2} tang\, u_2 tang\, \alpha_2 sen\, \alpha_2 \right) \delta \alpha_1 . \qquad (30)$$

Se si fa qui uso della seguente relazione (39) per eliminare il primo termine della parentesi del secondo membro avremo poi:

$$(\delta \alpha_2)_\alpha = -\left(\frac{\partial \sqrt{m}}{\partial s} + \frac{\sqrt{m}.\cos \alpha_2 tang\, u_2}{a.W_2} \right) \delta \alpha_1 , \qquad (31)$$

ovvero, introducendo la latitudine geografica in luogo della ridotta,

$$(\delta \alpha_2)_\alpha = -\left(\frac{\partial \sqrt{m}}{\partial s} + \frac{\sqrt{m}.tang\, \varphi_2 \cos \alpha_2}{N_2} \right) \delta \alpha_1 \qquad (32)$$

che è l'espressione analitica cercata.

6. L'ausiliaria m ha un notevole significato analitico che è ora facile di mettere in evidenza. Siano infatti nella fig. 70 PB, BK rispettivamente il meridiano ed il parallelo dell'estremo B della geodetica s ruotante intorno all'origine A, nella sua posizione definita dall'azimut α_1, e sia AT la posizione di s quando l'azimut variabile α_1 è divenuto $\alpha_1 + \delta\alpha_1$. Conducendo il meridiano $P'T$ del punto T si ottiene il triangolo di lati infinitesimi BKT rettangolo in K, che può esser considerato come rettilineo. È facile vedere come in esso si abbia

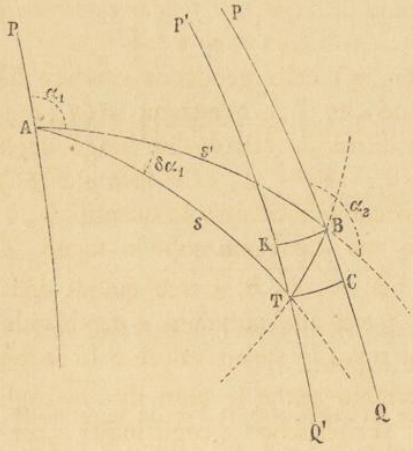

Fig. 70.

$$BK = r_2 \delta\omega = a.\cos u_2 \delta\omega$$

$$TK = -\rho_2 \delta\varphi_2 = -a.\delta u \sqrt{1 - e^2.\cos^2 u_2} = -a.\delta u.W_2 *$$

e quindi, poichè BT può esser considerato come un arco di circonferenza geodetica (vedi Vol. I, Capitolo III, pag. 86) descritta intorno ad A come polo e col raggio geodetico $s = cost.$, e per conseguenza, l'angolo ABT essendo retto, l'angolo $KBT = 90° - QBT$

* Vedi pag. 146.

non è che l'azimut α_2, od il suo supplemento a 180°, secondo la grandezza di α_1, sarà

$$BT = \frac{a \cdot \cos u_2}{\cos \alpha_2} \delta\omega = -\frac{a \cdot W_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} \delta u$$

od anche, tenendo conto delle (23) e (29):

$$TB = \sqrt{m} \cdot \delta \alpha_1 .$$

Di qui, confrontando coll'espressione generale dell'elemento lineare in coordinate geodetiche polari [vedi Vol. I, Capitolo III, formula (18)] si vede che l'espressione analitica del coefficiente

$$m = G = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2$$

è dunque data dalla relazione (22), la quale, appunto per questo, acquista geodeticamente parlando, una grande importanza. Alla quantità m daremo d'ora innanzi il nome di *coefficiente fondamentale delle circonferenze geodetiche.**

Se invece dell'estremo $A(u_1, \alpha_1)$ della geodetica s si sceglie come polo delle coordinate geodetiche l'altro estremo $B(u_2, \alpha_2)$, evidentemente è necessario introdurre in calcolo in luogo degli azimut α_1, α_2 gli azimut $180° + \alpha_1$, $180° + \alpha_2$, e le formule (66) e (71) del Capitolo VIII mostrano come in tal caso le quantità θ_1, θ_2 non cambiano in valore assoluto, ma cambiano solo in segno. Il valore di $\sqrt{m}$ corrispondente al nuovo polo B si trae quindi dalla (22) stessa invertendo gli indici 1 e 2 alle notazioni e cambiando il segno di θ; ma così facendo si trova lo stesso valore e lo stesso segno di prima: distinguendo pertanto anche i valori di $\sqrt{m}$ cogli indici p corrispondenti ai poli cui si riferiscono e cogli indici r corrispondenti ai punti congiunti al polo, si ha in generale

$$\sqrt{m}_{p,r} = \sqrt{m}_{r,p},$$

e, nel caso qui specialmente considerato,

$$\sqrt{m}_{1,2} = \sqrt{m}_{2,1}.$$

---

* In Germania a questa quantità è dato il nome di *reducirte Länge* (vedasi HELMERT, *Theorien der Höheren Geodäsie*).

Per rendere la (22) adatta al calcolo della quantità fondamentale m è necessario eseguire l'integrazione quivi accennata, e, perciò, conviene esprimere anzitutto nella espressione di W la latitudine ridotta in funzione dell'arco ausiliario sferico θ. Ora si ha in generale [vedi Capitolo VIII, pag. 151, formule (71)]

$$sen\,u = sen\,u_0 \cos\theta,$$

e quindi

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-e^2.\cos^2 u}}\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta\,.\,d\theta}{\sqrt{1-e^2.\cos^2 u_0 - e^2.sen^2 u_0 sen^2\theta}},$$

ovvero, introducendo, come già nel § 14 del Capitolo VIII, anche la latitudine geografica [Capitolo VIII, formule (58)]:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta}{W}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{1-e^2.\cos^2 u_0}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta\,(1-e^2.sen^2\varphi_0 sen^2\theta)^{-1/2}\,d\theta.$$

L'integrazione non può essere eseguita che per serie: sviluppando in serie il binomio contenuto sotto il segno integrale nel secondo membro, ed osservando che si ha

$$\cos^2\theta = {}^1/_2(1+\cos 2\theta),$$

$$\cos^2\theta.sen^2\theta = {}^1/_4(1+\cos 2\theta)(1-\cos 2\theta) = {}^1/_4 sen^2 2\theta = {}^1/_8(1-\cos 4\theta),$$

$$\cos^2\theta.sen^4\theta = {}^1/_{16}(1-\cos 4\theta)(1-\cos 2\theta) =$$

$$= {}^1/_{16}(1-{}^1/_2\cos 2\theta - \cos 4\theta + {}^1/_2\cos 6\theta)$$

. . . . . .

si trae

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta}{W}\,d\theta = \frac{1}{2\sqrt{1-e^2.\cos^2 u_0}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1+{}^1/_8 e^2.sen^2\varphi_0 + \frac{3}{64} e^4.sen^4\varphi_0 + \ldots \\ +\left(1-\frac{3}{128} e^4.sen^4\varphi_0 + \ldots\right)\cos 2\theta - \\ -{}^1/_8 e^2.sen^2\varphi_0\left(1+\frac{3}{16} e^2.sen^2\varphi_0 + \ldots\right)\cos 4\theta + \\ +\frac{3}{128} e^4.sen^4\varphi_0(1+\ldots)\cos 6\theta + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Di qui, eseguendo l'integrazione nel secondo membro, moltiplicando

tutto per $e^2.sen^2u_0$ ed osservando che le corrispondenze fondamentali del Capitolo VIII, § 12 [formule (57) e (58)] dànno

$$\frac{sen^2u_0}{\sqrt{1-e^2.cos^2u_0}} = sen\,u_0 sen\,\varphi_0 = \frac{sen^2\varphi_0\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}},$$

si trova:

$$e^2.sen^2u_0\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{cos^2\theta}{W}d\theta =$$

$$= \frac{e^2.sen^2\varphi_0\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}}\left\{\begin{array}{l}\left(1+{}^1/_8 e^2.sen^2\varphi_0+\frac{3}{64}e^4.sen^4\varphi_0+\ldots\right)\Delta\theta+\\ +\left(1-\frac{3}{128}e^4.sen^4\varphi_0+\ldots\right)sen\Delta\theta.cos\,2\theta_m-\\ -\frac{1}{32}e^2.sen^2\varphi_0\left(1+\frac{3}{16}e^2.sen^2\varphi_0+\ldots\right)(sen4\theta_2-sen4\theta_1)+\\ +\frac{3}{128}e^4.sen^4\varphi_0(1+\ldots)(sen\,6\theta_2-sen\,6\theta_1)+\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right. \quad (33)$$

ove, per semplicità di notazione, abbiamo posto

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1,\quad \theta_m=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}. \quad (34)$$

Si ha per altro in generale, come abbiamo già visto anche poco sopra,

$$W=\sqrt{1-e^2.cos^2u}=\sqrt{1-e^2.cos^2u_0}\,\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0 sen^2\theta},$$

da cui, se si sviluppa in serie l'ultimo radicale e si ricorda che è

$$\sqrt{1-e^2.cos^2u_0}=\frac{sen\,u_0}{sen\,\varphi_0}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}},$$

si ottiene

$$W=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}}\left(1-{}^1/_2 e^2.sen^2\varphi_0 sen^2\theta-{}^1/_8 e^4.sen^4\varphi_0 sen^4\theta-{}^1/_{16}e^6.sen^6\varphi_0 sen^6\theta\ldots\right),$$

e per conseguenza:

$$W_2 sen\,\theta_1 cos\,\theta_2 - W_1 sen\,\theta_2 cos\,\theta_1 =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}}\left\{\begin{array}{l}sen\,\Delta\theta+{}^1/_2 e^2.sen^2\varphi_0 sen\,\theta_1 sen\,\theta_2 sen\,\Delta\theta.cos\,2\theta_m+\\ +{}^1/_8 e^4.sen^4\varphi_0 sen\,\theta_1 sen\,\theta_2(sen^3\theta_2 cos\,\theta_2-sen^3\theta_1 cos\,\theta_1)+\\ +{}^1/_{16}e^6.sen^6\varphi_0 sen\,\theta_1 sen\,\theta_2(sen^5\theta_2 cos\,\theta_2-sen^5\theta_1 cos\,\theta_1)+\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Tenendo conto di questa relazione e della (33) e ponendo

$$\left.\begin{aligned} S=\Delta\theta&\left(1+{}^1/_8 e^2.sen^2\varphi_0+\frac{1}{64}e^4.sen^4\varphi_0+\dots\right)-\\ &-\frac{1}{8}e^2.sen^2\varphi_0 sen\,\Delta\theta.cos\,2\theta_m\left(1+\frac{3}{16}e^2.sen^2\varphi_0+\dots\right)-\\ &-\frac{1}{8}e^4.sen^4\varphi_0\left\{sen^5\theta_2 cos\,\theta_2-sen^5\theta_1 cos\,\theta_1+\frac{3}{64}(sen4\theta_2-sen4\theta_1)-\right.\\ &\left.-\frac{3}{16}(sen6\theta_2-sen6\theta_1)\right\}+\dots \end{aligned}\right\}\quad(35)$$

(ove è inutile di dare all'ultimo termine una forma più semplice, giacchè in pratica, introdotto nella (22), esce dai limiti dell'approssimazione compatibile coi nostri metodi di misura) all'espressione generale (22) può finalmente esser data la forma semplicissima:

$$\frac{\sqrt{m}}{a}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}}(-sen\,\Delta\theta+{}^1/_2 S.e^2.sen^2\varphi_0 sen\,\theta_1 cos\,\theta_2).\quad(36)$$

È utile notare come nel problema particolare studiato in questo capitolo le formule (24), (29) e (30) debbono, in ultima analisi, servire al calcolo delle variazioni *finite* che le latitudini, le longitudini e gli azimut subiscono a causa dell'attrazione locale del centro di emanazione e delle variazioni nelle costanti dell'ellissoide di riferimento, ma però non si ha da ritenere che la sola approssimazione del primo ordine assoluto rispetto alle variazioni suddette: i termini in e^2 nel valore di $\sqrt{m}$ possono quindi essere trascurati (vedasi quanto abbiamo detto in proposito nel § 3) e nelle (24), (29) e (30) medesime può, per conseguenza, essere sostituito per $\sqrt{m}$ il suo valore prossimo $-a.sen\,\Delta\theta$, dimodochè sarà da porre

$$\left.\begin{aligned} (\delta\varphi_2)_\alpha&=-\delta\alpha_1(sen\,\Delta\theta.sen\,\alpha_2+e^2\{I\})\\ (\delta\omega_2)_\alpha&=\delta\alpha_1(sen\,\Delta\theta.cos\,\alpha_2 sec\,\varphi_2+e^2\{II\})\\ (\delta\alpha_2)_\alpha&=\delta\alpha_1 sec\,u_2 sec\,\alpha_2(cos\,u_1 cos\,\alpha_1-sen\,\Delta\theta.sen\,u_2 sen\,\alpha_2+e^2\{\dots\})\\ &=\delta\alpha_1(cos\,u_1 cos\,\Delta w\,.sec\,u_2+e^2\{III\}) \end{aligned}\right\}\quad(37)$$

ove *I, II, III* rappresentano quantità che è qui inutile di specificare.

7. Poichè i parametri fondamentali delle coordinate geodetiche polari sono l'arco geodetico s e l'azimut α, il coefficiente m fondamentale delle circonferenze geodetiche deve esser considerato, come già abbiamo fatto nel Capitolo III, § 14, come una funzione

di queste variabili, e noi quivi abbiamo anzi indicato come tale funzione potesse essere sempre dedotta in serie per una superficie qualunque, differenziando le serie di *Weingarten* (vedi vol. I, pag. 102) e, come, in un campo notevolmente esteso intorno al polo geodetico, si riducesse poi alla forma notevolissima seguente:

$$m = s^2 - \frac{s^4}{3 R_1 R_2}.$$

È utile, per certe ricerche di alta geodesia, cercare anche le espressioni rigorose in termini finiti delle prime due derivate di $\sqrt{m}$ rispetto alla variabile s pel caso dell'ellissoide terrestre. Osserviamo pertanto che, se nella espressione rigorosa (22) si considera s come variabile indipendente, ritenendo fissi il polo delle coordinate geodetiche e l'azimut α_1, le quantità u_2, α_2 divengono funzioni di s soltanto, mentre θ_1, ed u_1 rimangono costanti, perlochè si ha derivando parzialmente:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\sqrt{m}}{\partial\theta_2} = -W_2 sen\theta_1 sen\theta_2 - W_1 cos\theta_1 cos\theta_2 + \frac{e^2.cosu_2 sen u_2 sen\theta_1 cos\theta_2}{W_2}\frac{\partial u_2}{\partial\theta_2} +$$

$$+ e^2.sen^2 u_0 sen\theta_1 cos\theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{cos^2\theta}{W}\, d\theta + \frac{e^2.sen^2 u_0 sen\theta_1 sen\theta_2 cos^2\theta_2}{W_2}$$

d'onde, eliminando la quantità

$$e^2.sen^2 u_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{cos^2\theta}{W}\, d\theta$$

per mezzo della (22) stessa, si trae:

$$\frac{\partial\sqrt{m}}{\partial\theta_2} = \sqrt{m}.cotg\theta_2 + \frac{a.e^2.cos u_2 sen u_2 sen\theta_1 cos\theta_2}{W_2}\frac{\partial u_2}{\partial\theta_2} +$$

$$+ \frac{a.e^2.sen^2 u_0 sen\theta_1 sen\theta_2 cos^2\theta_2}{W_2}.$$

Ma si ha in generale [vedi Capitolo VIII, formula (62)]

$$\frac{du}{d\theta} = cos\,\alpha,$$

e quindi

$$\frac{\partial u_2}{\partial\theta_2} = cos\alpha_2 = -\frac{sen\,u_0 sen\theta_2}{cos\,u_2},$$

mentre è

$$sen\,u_2 = sen\,u_0 cos\theta_2:$$

perciò la precedente espressione di $\frac{\partial\sqrt{m}}{\partial\theta_2}$ dà

$$\frac{\partial\sqrt{m}}{\partial\theta_2}=\sqrt{m}.cotg\theta_2-a.W_2\frac{sen\theta_1}{sen\theta_2}.$$

Ricordando poi che è

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{a\sqrt{1-e^2.cos^2u}}=\frac{1}{a.W}$$

si trae

$$\frac{\partial\sqrt{m}}{\partial s}=\frac{\partial\sqrt{m}}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{ds}=\frac{\sqrt{m}.cotg\theta_2}{a.W_2}-\frac{sen\theta_1}{sen\theta_2}, \qquad (38)$$

od anche

$$\frac{\partial\sqrt{m}}{\partial s}=-\frac{cos\alpha_1 cos u_1}{cos\alpha_2 cos u_2}-\frac{\sqrt{m}.tang u_2}{a.W_2 cos\alpha_2}, \qquad (39)$$

giacchè si ha in generale

$$sen u_0 sen\theta=-cos\alpha.cos u, \quad cotg\theta.cos\alpha=-tang u.$$

Col derivare ancora rispetto ad s parzialmente la (38) si troverebbe con facilissime trasformazioni, tenendo conto delle relazioni già sopra citate,

$$\frac{\partial^2\sqrt{m}}{\partial s^2}=-\frac{\sqrt{m}}{a^2.W_2^2}\left(1-\frac{e^2.cos\theta_2 sen u_2 sen u_0)}{W_2^2}\right)=-\frac{\sqrt{m}}{a^2.W_2^2}\left(1-\frac{e^2.sen^2u_2}{W_2^2}\right)$$

da cui si ha

$$\frac{\partial^2\sqrt{m}}{\partial s^2}=-\frac{\sqrt{m}(1-e^2)}{a^2(1-e^2.cos^2u_2)^2}=-\frac{\sqrt{m}(1-e^2.sen^2\varphi_2)^2}{a^2(1-e^2)}=-\frac{\sqrt{m}}{\rho_2 N_2} \qquad (40)$$

essendo, al solito, ρ_2 ed N_2 i raggi di curvatura principali dell'ellissoide sotto la latitudine φ_2: ma quest'ultima importantissima relazione si trae anche direttamente da un teorema generale di *Gauss*, teorema che abbiamo dimostrato nel § 15 del Capitolo III, [vol. I, pag. 105, formula (30)] e che dà la relazione fra la derivata seconda del coefficiente fondamentale $\sqrt{m}$ presa rispetto ad s, e la misura della curvatura in un punto di una superficie qualunque.

8. Cerchiamo ancora le espressioni delle variazioni $(\delta\varphi_2)_\varphi$, $(\delta\omega)_\varphi$, $(\delta\alpha_2)_\varphi$ corrispondenti alla variazione $\delta\varphi_1$ nella latitudine del centro di emanazione; e perciò riprendiamo la formula fondamentale

$$s=a\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\sqrt{1-e^2.cos^2u}.$$

da cui si trae, considerando s come costante:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= W_2(\delta\theta_2)_{\varphi} - W_1(\delta\theta_1)_{\varphi} + e^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos u.\operatorname{sen} u.(\delta u)_{\varphi}}{W}\,d\theta = \\ &= W_2(\delta\Delta\theta)_{\varphi} + (W_2 - W_1)(\delta\theta_1)_{\varphi} + e^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos u\,.\,\operatorname{sen} u\,.(\delta u)_{\varphi}}{W}\,d\theta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Ciò posto, osserviamo che la variazione $(\delta u)_{\varphi}$ in ciascun elemento dell'integrale deve esser presa rispetto ad un valore determinato di θ, e che dalle relazioni

$$\operatorname{tang} u_1 = \operatorname{tang}\varphi_1\sqrt{1-e^2},$$

$$\cos u_0 = \cos u_1 \operatorname{sen}\alpha_1,$$

$$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u_0 \cos\theta,$$

(nella seconda delle quali α_1 va ritenuta costante, come θ nella terza) si ottiene,

$$\left.\begin{aligned} (\delta u_1)_{\varphi} &= \frac{\cos^2 u_1}{\cos^2\varphi_1}\delta\varphi_1\sqrt{1-e^2} = \frac{W_1^2}{\sqrt{1-e^2}}\delta\varphi_1, \\ (\delta u_0)_{\varphi} &= \frac{\operatorname{sen} u_1\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen} u_0}(\delta u_1)_{\varphi} = \frac{\cos\theta_1\operatorname{sen}\alpha_1 W_1^2}{\sqrt{1-e^2}}\delta\varphi_1, \\ (\delta u)_{\varphi} &= \frac{\cos u_0\cos\theta}{\cos u}(\delta u_0)_{\varphi} = \frac{\cos\theta\,.\cos u_0\cos\theta_1\operatorname{sen}\alpha_1 W_1^2}{\cos u\sqrt{1-e^2}}\delta\varphi_1; \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

avremo perciò dalla (41)

$$(\delta\Delta\theta)_{\varphi} = \frac{W_1 - W_2}{W_2}(\delta\theta_1)_{\varphi} - \frac{e^2.\cos u_0\operatorname{sen} u_0\cos\theta_1\operatorname{sen}\alpha_1 W_1^2}{W_2\sqrt{1-e^2}}\,d\varphi_1\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos^2\theta}{W}\,d\theta, \qquad (43)$$

ove il valore dell'integrale del secondo membro è dato dalla precedente formula (33); ma in questo caso noi introdurremo il suo valore prossimo

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos^2\theta}{W}\,d\theta = {}^1/_2(\Delta\theta + \operatorname{sen}\Delta\theta.\cos 2\theta_m) \qquad (44)$$

rigettando i termini che nella (43) comparirebbero moltiplicati per e^4. D'altra parte si ha per mezzo del solito modo di trasformazione molte volte impiegato

$$W_1 - W_2 = \sqrt{1-e^2.\cos^2 u_0}\left\{\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi_0\operatorname{sen}^2\theta_1} - \sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2\varphi_0\operatorname{sen}^2\theta_2}\right\}$$

d'onde, sviluppando in serie rispetto ai seni degli archi θ si deduce:

$$W_1 - W_2 = \frac{e^2 . sen^2\varphi_0 \sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{1-e^2 . sen^2\varphi_0}} (sen^2\theta_2 - sen^2\theta_1) + \ldots = \frac{e^2 . sen^2\varphi_0 sen\Delta\theta . sen 2\theta_m}{2} + e^4\{\ldots\}. \quad (45$$

Finalmente dalla relazione

$$tang\theta_1 = -cotg\, u_1 cos\alpha_1$$

si trova:

$$(\delta\theta_1)_{\varphi} = \frac{cos^2\theta_1 cos\alpha_1}{sen^2 u_1} (\delta u_1)_{\varphi} = \frac{cos\alpha_1}{sen^2 u_0} \frac{W_1^2}{\sqrt{1-e^2}} \delta\varphi_1 . \quad (46)$$

In conseguenza delle (44), (45) e (46) alla (43), tralasciando i termini in e^4, possiamo dare la forma

$$(\delta\Delta\theta)_{\varphi} = \frac{e^2 . \delta\varphi_1}{2} \left\{ cos\alpha_1 sen\Delta\theta\, sen 2\theta_m - cos u_0 sen\alpha_1 sen u_0 cos\theta_1 (\Delta\theta + sen\Delta\theta . cos 2\theta_m) \right\}. \quad (47)$$

Ma dal solito triangolo sferico ausiliario di *Bessel* si ha

$$sen u_2 = sen u_1 cos\Delta\theta + cos u_1 sen\Delta\theta . cos\alpha_1$$

$$(\delta u_2)_{\varphi} = \frac{1}{cos u_2} \left\{ \begin{array}{l} (cos u_1 cos\alpha_1 cos\Delta\theta - sen\Delta\theta . sen u_1)(\delta\Delta\theta)_{\varphi} + \\ + (cos u_1 cos\Delta\theta - sen u_1 sen\Delta\theta . cos\alpha_1)(\delta u_1)_{\varphi} \end{array} \right\},$$

ossia

$$(\delta u_2)_{\varphi} = cos\alpha_2 (\delta\Delta\theta)_{\varphi} + cos\Delta w (\delta u_1)_{\varphi} .$$

Sostituendo a $(\delta\Delta\theta)_{\varphi}$, $(\delta u_1)_{\varphi}$ i loro valori (47) e (42) si trae

$$(\delta u_2)_{\varphi} = (cos\Delta w + e^2\{\ldots\})\, \delta\varphi_1 \quad (48)$$

e, per conseguenza, tenendo conto della corrispondenza fra u_2 e φ_2,

$$(\delta\varphi_2)_{\varphi} = (\delta u_2)_{\varphi} \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} = \delta\varphi_1 (cos\Delta w + e^2\{IV\}). \quad (49)$$

Per la variazione in longitudine, dalla relazione

$$\omega_2 - \omega_1 = \int_{w_1}^{w_2} dw . \sqrt{1 - e^2 . cos^2 u},$$

si ha poi

$$(\delta\omega_2)_{\varphi} = W_2 (\delta w_2)_{\varphi} - W_1 (\delta w_1)_{\varphi} + e^2 \int_{w_1}^{w_2} \frac{cos u . sen u . (\delta u)_{\varphi}}{W} dw,$$

ossia, ricordando la corrispondenza fra dw e $d\theta$ e cambiando di variabile indipendente sotto l'integrale:

$$(\delta\omega)_{\varphi} = W_2 (\delta\Delta w)_{\varphi} + (W_2 - W_1)(\delta w_1)_{\varphi} + e^2 . cos u_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{sen u . (\delta u)_{\varphi}}{W . cos u} d\theta .$$

Per eseguire l'integrazione introdurremo anzitutto in luogo di $(\delta u)_?$ il suo valore (42), ponendo

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{sen\,u.(\delta u)_?}{W.cos\,u}\,d\theta = \frac{W_1^2.\delta\varphi_1 cos\,u_0 sen\alpha_1 cos\theta_1}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta.sen\,u.cos\,\theta}{cos^2 u.W} =$$

$$= \frac{W_1^2 \delta\varphi_1 cos\,u_0 cos\theta_1 sen\alpha_1}{sen\,u_0\sqrt{1-e^2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{tang^2 u.d\theta}{W};$$

svilupperemo quindi in serie W^{-1} sotto l'integrale ed avremo:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{tang^2 u.d\theta}{W} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} tang^2 u.d\theta + e^2\{\ldots\} = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{cos^2 u} + e^2\{\ldots\}.$$

Ma in generale è

$$\frac{d\theta}{cos^2 u} = \frac{dw}{cos\,u_0};$$

quindi, cambiando ancora di variabile indipendente nell'ultimo degli integrali soprascritti, si trova

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{tang^2 u.d\theta}{W} = -\Delta\theta + \int_{w_1}^{w_2} \frac{dw}{cos\,u_0} + e^2\{\ldots\} = -\frac{1}{cos\,u_0}(\Delta\theta.cos\,u_0 - \Delta w) + e^2\{\ldots\}, \quad (50)$$

e, per conseguenza, lasciando i termini in e^4 sarà:

$$(\delta\omega)_? = W_2(\delta\Delta w)_? + (W_2 - W_1)(\delta w_1)_? - e^2.cotg\,u_0 cos\theta_1 sen\alpha_1(\Delta\theta.cos\,u_0 - \Delta w)\delta\varphi_1. \quad (51)$$

Resta ad esprimere le variazioni $(\delta\Delta w)_?$, $(\delta w_1)_?$ in funzione di $\delta\varphi_1$, e, perciò, ricorriamo alle formule

$$\left.\begin{aligned} sen\alpha_1 cotg\,\Delta w &= cotg\,\Delta\theta.cos\,u_1 - sen\,u_1 cos\alpha_1, \\ sen\,u_1 &= -cotg\alpha_1 cotg\,w_1, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

dalle quali si deduce

$$\left.\begin{aligned} (\delta\Delta w)_? &= \left\{(sen\,u_1 cotg\,\Delta\theta + cos\,u_1 cos\alpha_1)(\delta u_1)_? + \frac{cos\,u_1}{sen^2\Delta\theta}(\delta\Delta\theta)_?\right\}\frac{sen^2\Delta w}{sen\,\alpha_1} = \\ &= \frac{sen^2\Delta w.sen\,u_2}{sen\,\alpha_1 sen\,\Delta\theta}(\delta u_1)_? + \frac{cos\,u_1 sen^2\Delta w}{sen\alpha_1 sen^2\Delta\theta}(\delta\Delta\theta)_? = \\ &= tang\,u_2 sen\Delta w.(\delta u_1)_? + \frac{sen\alpha_2}{cos\,u_2}(\delta\Delta\theta)_?, \\ (\delta w_1)_? &= tang\,\alpha_1 cos\,u_1 sen^2 w_1 (\delta u_1)_? = \frac{sen^2\theta_1}{cos\,u_1} tang\alpha_1 (\delta u_1)_?, \end{aligned}\right\} \quad (52^{bis})$$

od anche, sostituendo a $(\delta u_1)_\varphi$, $(\delta \Delta\theta)_\varphi$ e $W_1 - W_2$ i loro valori (42), (47) e (45):

$$\left.\begin{aligned}(\delta\Delta w)_\varphi &= \delta\varphi_1\left\{\frac{W_1^2}{\sqrt{1-e^2}}\,sen\,\Delta w.tang\,u_2 + \right.\\ &+ \frac{e^2.sen\,\alpha_2}{2.cos\,u_2}\left[\begin{matrix}cos\,\alpha_1\,sen\,\Delta\theta\,.\,sen\,2\,\theta_m - \\ -cos\,u_0 sen\,u_0\,sen\,\alpha_1 cos\,\theta_1(\Delta\theta + sen\,\Delta\theta\,.\,cos\,2\theta_m)\end{matrix}\right]\Bigg\} = \\ &= \delta\varphi_1(sen\,\Delta w\,.\,tang\,u_2 + e^2\{\ldots\}),\\ (W_2 - W_1)(\delta w_1)_\varphi &= -\frac{e^2.\,sen^2\varphi_0 sen^2\theta_1 tang\,\alpha_1 sen\,\Delta\theta.sen\,2\,\theta_m}{2.cos\,u_1}\delta\varphi_1 + \ldots\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Quindi la (51) dà:

$$(\delta\omega_2)_\varphi = \delta\varphi_1\{tang\,u_2\,sen\Delta w + e^2\{V\}. \quad (54)$$

Finalmente per la variazione nell'azimut, dalla formula

$$sen\alpha_1 cotg\,\alpha_2 = cos\alpha_1 cos\Delta\theta - tang\,u_1 sen\Delta\theta$$

avremo

$$\left.\begin{aligned}(\delta\alpha_2)_\varphi &= \frac{sen^2\alpha_2}{sen\alpha_1}\left\{(\delta\Delta\theta)_\varphi(cos\alpha_1 sen\Delta\theta + tang\,u_1 cos\Delta\theta) + (\delta u_1)_\varphi\frac{sen\Delta\theta}{cos^2 u_1}\right\} = \\ &= \frac{sen^2\alpha_2 sen\Delta\theta}{sen\alpha_1 cos^2 u_1}(\delta u_1)_\varphi + \frac{sen^2\alpha_2 sen\,u_2}{sen\alpha_1 cos\,u_1}(\delta\Delta\theta)_\varphi,\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

da cui, sostituendo a $(\delta u_1)_\varphi$, $(\delta\Delta\theta)_\varphi$ i loro valori (42) e (47), si trova:

$$(\delta\alpha_2)_\varphi = \delta\varphi_1\left(\frac{sen\Delta w}{cos\,u_2} + e^2\{VI\}\right). \quad (56)$$

9. Le variazioni $(\delta\varphi_2)_a$, $(\delta\omega_2)_a$, $(\delta\alpha_2)_a$ che in φ_2, ω_2, α_2 corrispondono alla variazione δa nel semiasse dell'ellissoide terrestre si ottengono sotto una forma molto semplice nel modo seguente. Dalla solita relazione fondamentale (16), osservando che col cambiare del solo elemento a restano costanti u_1, θ_1 ed il valore di u corrispondente ad un dato valore di θ, e considerando s come costante, si ottiene:

$$0 = \frac{s\,.\,\delta a}{a\,.\,sen\,1''} + a.W_2(\delta\theta_2)_a.$$

Ma, per essere $(\delta\theta_1)_a = 0$, si può porre

$$(\delta\theta_2)_a = (\delta\Delta\theta)_a,$$

e quindi si ha:

$$(\delta\Delta\theta)_a = -\frac{s.\delta a}{a^2.W_2.sen\,1''}. \qquad (57)$$

Dalla formula

$$sen\,u_2 = sen\,u_1 sen(\theta_2-\theta_1)+cos\,u_1 cos\alpha_1 sen(\theta_2-\theta_1)$$

si trae per altro

$$(\delta u_2)_a = -\frac{sen\,u_1 sen\,\Delta\theta - cos\,u_1 cos\alpha_1 cos\,\Delta\theta}{cos\,u_2}(\delta\Delta\theta)_a,$$

mentre la nota relazione fra i tre lati e due angoli di un triangolo sferico dà in generale:

$$-cos\,u.cos\,\alpha = sen\,u_1 sen\,(\theta-\theta_1) - cos\,u_1 cos\,\alpha_1 cos\,(\theta-\theta_1).$$

Quindi sarà

$$(\delta u_2)_a = (\delta\Delta\theta)_a cos\,\alpha_2,$$

d'onde, sostituendo a $(\delta\Delta\theta)_a$ il suo valore (57), si trova

$$(\delta u_2)_a = -\frac{s.\delta a.cos\alpha_2}{a^2.W_2.sen\,1''}, \qquad (58)$$

od anche, tenendo conto delle relazioni (57) e (58) del Capitolo VIII,

$$\left.\begin{aligned}(\delta\varphi_2)_a &= -\frac{s.\delta a.cos\alpha_2}{a^2(1-e^2)sen\,1''}(1-e^2.sen^2\varphi)^{3/2} = -\frac{s.\delta a.cos\alpha_2}{a.\rho_2.sen\,1''} = \\ &= -\frac{\delta a}{a}\left(\frac{s.cos\alpha_2}{a.sen\,1''}+e^2\{VII\}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Analogamente per la longitudine, dalla relazione

$$\omega_2-\omega_1 = \int_{w_1}^{w_2} dw\sqrt{1-e^2.cos^2 u}$$

si ricava

$$(\delta\omega)_a = W_2(\delta w_2)_a,$$

mentre la corrispondenza

$$tang\,\theta = cos\,u_0\,tang\,w$$

dà:

$$(\delta w_2)_a = \frac{cos^2 w_2}{cos\,u_0.cos^2\theta_2}(\delta\Delta\theta)_a = \frac{cos\,u_0}{cos^2 u_2}(\delta\Delta\theta)_a = \frac{sen\alpha_2}{cos\,u_2}(\delta\Delta\theta)_a;$$

quindi, sostituendo e tenendo conto della (57), avremo:

$$(\delta\omega)_a = -\frac{s.\delta a.sen\alpha_2}{a^2.cos\,u_2.sen\,1''} = -\frac{s.\delta a.sen\alpha_2}{a.r_2.sen\,1''}. \qquad (60)$$

Finalmente dalla condizione

$$\cos u_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = \text{costante}$$

si ottiene

$$(\delta\alpha_2)_a = \operatorname{tang} \alpha_2 \operatorname{tang} u_2 (\delta u_2)_a ,$$

d'onde, tenendo conto della (58), si trova

$$(\delta\alpha_2)_a = -\frac{s \cdot \delta a \cdot \operatorname{sen} \alpha_2 \operatorname{tang} u_2}{a \cdot W_2 \cdot \operatorname{sen} 1''} , \tag{61}$$

ovvero, se si esprime u_2 in funzione di φ_2 per mezzo delle corrispondenze (57) e (58) del Cap. VIII:

$$\left.\begin{aligned} (\delta\alpha_2)_a &= -\frac{s \cdot \delta a \cdot \operatorname{tang} \varphi_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{a^2 \cdot \operatorname{sen} 1''} \sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi_2} = \\ &= -\frac{s \cdot \delta a \cdot \operatorname{tang} \varphi_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{a \cdot N_2 \cdot \operatorname{sen} 1''} = -\frac{\delta a}{a}\left(\frac{s \operatorname{tang} \varphi_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{a \cdot \operatorname{sen} 1''} + e^2 \{IX\}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{62}$$

10. Restano da cercare per ultimo le variazioni $(\delta\varphi_2)_e$, $(\delta\omega_2)_e$, $(\delta\alpha_2)_e$ che subiscono φ_2, ω_2 ed α_2 a causa della variazione δe nell'eccentricità. Perciò riprendendo la formula

$$s = a \int_{\theta_1}^{\theta_2} W \cdot d\theta ,$$

osserviamo che se vi si considerano s come costante e θ_1, θ_2 ed u come funzioni implicite di e, differenziando e ponendo al solito

$$(\delta\theta_2)_e = (\delta\Delta\theta)_e + (\delta\theta_1)_e ,$$

si ha

$$\left.\begin{aligned} 0 = W_2 (\delta\Delta\theta)_e + (W_2 - W_1)(\delta\theta_1)_e + \\ + e^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos u \cdot \operatorname{sen} u \cdot (\delta u)_e}{W} d\theta - e \cdot \delta e \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2 u}{W} d\theta , \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

ove sotto gli integrali la latitudine u deve esser considerata come funzione di θ, e $(\delta u)_e$ rappresenta la variazione subita da u in corrispondenza ad un dato valore di θ stesso; ora dalla relazione

$$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u_0 \cos\theta ,$$

considerando θ come costante, si ha

$$(\delta u)_e = \frac{(\delta u_0)_e \cos\theta \cdot \cos u_0}{\cos u} ,$$

e, dalle

$$\operatorname{tang} u_1 = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tang} \varphi_1 ,$$

$$\cos u_0 = \cos u_1 \operatorname{sen} \alpha_1 ,$$

si trae, considerando costanti φ_1 ed α_1,

$$\left.\begin{aligned}
(\delta u_1)_e &= -\frac{e\,.\,\delta e}{\sqrt{1-e^2}}\,tang\,\varphi_1 cos^2 u_1 = -\frac{e\,.\,\delta e}{1-e^2}\,sen\,u_1 cos\,u_1,\\
(\delta u_0)_e &= \frac{(\delta u_1)_e sen\,\alpha_1 sen\,u_1}{sen\,u_0} = (\delta u_1)_e sen\,\alpha_1 cos\,\theta_1 = -\frac{e\,.\,\delta e}{1-e^2}\,sen\,u_1 cos\,u_0 cos\,\theta_1,\\
(\delta u)_e &= -\frac{e\,.\,\delta e\,.\,sen\,u_1 cos\,\theta_1 cos^2 u_0 cos\,\theta}{(1-e^2)\,cos\,u};
\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

quindi la (63) si riduce alla forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
0 = W_2(\delta\Delta\theta)_e + (W_2 - W_1)(\delta\theta_1)_e - \\
- e\,.\,\delta e\left\{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{W} - sen^2 u_0\left(1-\frac{e^2\,.\,cos^2 u_0 cos^2\theta_1}{1-e^2}\right)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{cos^2\theta}{W}\,d\theta\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Ma abbiamo

$$tang\,\theta_1 = -\,cotg\,u_1 cos\,\alpha_1,$$

e, perciò,

$$(\delta\theta_1)_e = \frac{cos^2\theta_1 cos\,\alpha_1}{sen^2 u_1}(\delta u_1)_e,$$

ossia, tenendo conto della prima delle (64),

$$(\delta\theta_1)_e = -\frac{e\,.\,\delta e}{1-e^2}\,\frac{cos^2\theta_1 cos\,\alpha_1 cos\,u_1}{sen\,u_1} = \frac{e\,.\,\delta e}{1-e^2}\,sen\,\theta_1 cos\,\theta_1:$$

per conseguenza, sostituendo nella (65) e risolvendola rispetto alla variazione $(\delta\Delta\theta)_e$, si otterrà:

$$\left.\begin{aligned}
(\delta\Delta\theta)_e = \frac{e\,.\,\delta e}{W_2}\left\{\frac{sen\,\theta_1 cos\,\theta_1(W_1 - W_2)}{1-e^2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{W} - \right. \\
\left. - sen^2 u_0\left(1-\frac{e^2\,.\,cos^2 u_0 cos^2\theta_1}{1-e^2}\right)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{cos^2\theta}{W}\,d\theta\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Si ha per altro, col solito metodo di trasformazione,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{W} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2 cos^2 u_0}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\,.\,sen^2\varphi_0 sen^2\theta}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2\,.\,sen^2\varphi_0}}{\sqrt{1-e^2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\left[1+\frac{e^2}{2}\,sen^2\varphi_0 sen^2\theta + e^4(\ldots)\right],$$

d'onde:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{W} = \frac{\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi_0}}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \Delta\theta + \frac{e^2.sen^2\varphi_0}{4}\Delta\theta - \right.$$
$$\left. - \frac{e^2.sen^2\varphi_0}{4} sen\Delta\theta\,.\cos 2\theta_m + e^4(\ldots) \right\}. \qquad (67)$$

Le espressioni per serie delle quantità

$$sen^2 u_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta}{W} d\theta, \quad W_1 - W_2$$

sono state già dedotte nei paragrafi precedenti; se si tiene conto pertanto delle (33), (45) e (67), dalla (66) si trova, con facili trasformazioni e riduzioni,

$$(\delta\Delta\theta)_e = \frac{W_0.e.\delta e}{(1-e^2)W_2} \left\{ \begin{array}{l} \Delta\theta\left\{1 - {}^1/_2 sen^2\varphi_0 - {}^1/_4 e^2.sen^2\varphi_0 (1 + {}^1/_4 sen^2\varphi_0 - 2\,sen^2\varphi_0 \cos^2\theta_1)\right\} - \\ - {}^1/_2 sen^2\varphi_0\,.\,sen\Delta\theta.\cos 2\theta_m (1 - {}^1/_2 e^2 - e^2.\cos^2\theta_1 \cos^2\varphi_0) + \\ + {}^1/_4 e^2.sen^2\varphi_0 sen\Delta\theta.sen\,2\theta_m (sen\,2\theta_1 + {}^1/_2 sen^2\varphi_0 \cos\Delta\theta.\cos 2\theta_m) + \\ + e^4\{\ldots\} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

ove, per altro, nel caso nostro, i termini in e^2 dentro parentesi possono essere trascurati per le ragioni già esposte nel § 3, e, per lo stesso motivo, il fattore fuori parentesi può considerarsi eguale ad $e.\delta e$. Scriveremo quindi semplicemente:

$$(\delta\Delta\theta)_e = e.\delta e\left\{\Delta\theta\left(1 - {}^1/_2 sen^2\varphi_0\right) - {}^1/_2 sen\Delta\theta\,.\cos 2\theta_m sen^2\varphi_0 + e^2 H\right\}. \qquad (69)$$

Ciò posto riprendiamo la formula

$$sen\,u_2 = sen\,u_1 \cos\Delta\theta + \cos u_1 sen\Delta\theta\,.\cos\alpha_1,$$

e differenziamo rispetto alla nostra variabile e: avremo in tal guisa

$$(\delta u_2)_e = \frac{(\delta u_1)_e}{\cos u_2}(\cos u_1 \cos\Delta\theta - sen\,u_1 \cos\alpha_1 sen\Delta\theta) -$$
$$- \frac{(\delta\Delta\theta)_e}{\cos u_2}(sen\,u_1 sen\Delta\theta - \cos u_1 \cos\Delta\theta\,.\cos\alpha_1),$$

e, di qui, per la nota relazione fra i tre lati ed un angolo di un triangolo sferico:

$$(\delta u_2)_e = (\delta\Delta\theta)_e \cos\alpha_2 + (\delta u_1)_e \cos\Delta w.$$

Introducendo nel secondo membro in luogo delle variazioni che vi compariscono le loro espressioni (69) e (64) si trae

$$\left.\begin{aligned}(\delta u_2)_e = e\,.\,\delta e\{&\Delta\theta\,.\,\cos\alpha_2(1-{}^1/_2 sen^2\varphi_0)-\\ -{}^1/_2 sen\,&\Delta\theta\,.\,\cos 2\theta_m sen^2\varphi_0\cos\alpha_2-\cos\Delta w\,.\,sen\,u_1\cos u_1+e^2(\ldots)\}\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

e, finalmente, tenendo conto delle relazioni (57) e (58) del Capitolo VIII, ed osservando che si ha in generale

$$(\delta\varphi_2)_e = \frac{e\,.\,\delta e}{1-e^2}\,sen\varphi_2\cos\varphi_2 + \frac{(\delta u_2)_e\cos^2\varphi_2}{\cos^2 u_2\sqrt{1-e^2}},$$

e che, dentro l'approssimazione tenuta nella (70), i termini in e^3 sono da tralasciare otterremo:

$$(\delta\varphi_2)_e = e\,.\,\delta e\left\{\begin{aligned}&\Delta\theta\,.\,\cos\alpha_2(1-{}^1/_2 sen^2\varphi_0)-{}^1/_2 sen\,\Delta\theta\,.\,\cos 2\theta_m sen^2\varphi_0\cos\alpha_2-\\ &-\cos\Delta w\,.\,sen\,u_1\cos u_1+sen\,\varphi_2\cos\varphi_2+e^2\{X\}\end{aligned}\right\}. \quad (71)$$

Analogamente per la longitudine si ha dal solito integrale fondamentale che lega ω_2 all'angolo w:

$$(\delta\omega_2)_e = W_2(\delta w_2)_e - W_1(\delta w_1)_e - e\,.\,\delta e\int_{w_1}^{w_2}\frac{\cos^2 u\,.\,dw}{W} + e^2\int_{w_1}^{w_2}\frac{\cos u\,.\,sen\,u(\delta u)_e}{W}\,dw,$$

e, di qui, ricordando che è in generale

$$dw = \frac{d\theta\,.\,\cos u_0}{\cos^2 u},$$

cambiando di variabile indipendente negli integrali, e sostituendo a $(\delta u)_e$ il suo valore (64) si trae facilmente:

$$\left.\begin{aligned}(\delta\omega_2)_e = {}& W_2(\delta\Delta w)_e + (W_2 - W_1)(\delta w_1)_e -\\ &- e\,.\,\delta e\,.\,\cos u_0\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{W} - \frac{e^3\,.\,\delta e\,.\,\cos^3 u_0 sen^2 u_1}{(1-e^2)\,sen^2 u_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{tang^2 u\,.\,d\theta}{W}\end{aligned}\right\}. \quad (72)$$

In questa formula non rimane che da esprimere le variazioni $(\delta\Delta w)_e$ e $(\delta w_1)_e$ in funzione della variazione δe, giacchè i valori delle quantità

$$W_2 - W_1,\quad \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{W},\quad \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{tang^2 u\,.\,d\theta}{W}$$

sono già stati trovati precedentemente [formule (45), (67) e (50)]. Ora è facile vedere come le relazioni differenziali (52^{bis}), cambiando

nelle variazioni gli indici φ in e, valgono ancora per questo caso giacchè provengono dalle formule generali (52) considerando in queste le quantità Δw e w_1 come funzioni di u_1 e di $\Delta\theta$ che nelle (52) stesse sono anche adesso da considerare come le sole variabili dipendenti implicitamente da e: porremo pertanto

$$(\delta\Delta w)_e = tang\, u_2 sen\, \Delta w\, (\delta u_1)_e + \frac{sen\, \alpha_2}{cos\, u_2}(\delta\Delta\theta)_e,$$

$$(\delta w_1)_e = sen^2\theta_1 . tang\, \alpha_1 sec\, u_1 (\delta u_1)_e,$$

e, per conseguenza, sostituendo a $(\delta u_1)_e$, $(\delta\Delta\theta)_e$ i loro valori (64) e (69) avremo:

$$\left.\begin{aligned}(\delta\Delta w)_e &= -e.\delta e.\frac{sen\,\alpha^2}{cos\, u_2}\left[sen\, u_1 sen\, u_2 sen\, \Delta\theta - \Delta\theta\left(1-\frac{sen^2\varphi_0}{2}\right)+\right.\\ &\qquad \left.+\,{}^1/_2 sen\,\Delta\theta . cos\, 2\theta_m sen^2\varphi_0 + e^2 . H\right],\\ (\delta w_1)_e &= -\frac{e.\delta e}{1-e^2} sen^2\theta_1 sen\, u_1 tang\, \alpha_1 = \frac{e.\delta e}{1-e^2} cos\, u_0 sen\, \theta_1 cos\, \theta_1 .\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Se si tien conto delle (45), (50), (67) e (73) la relazione (72) dà quindi, dopo ovvie trasformazioni e riduzioni,

$$(\delta\omega_2)_e = \frac{e.\delta e.sen\,\alpha_2}{cos\, u_2}\left\{\Delta\theta\left(sen^2 u - \frac{sen^2\varphi_0}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - sen\,\Delta\theta\,(sen\, u_1 sen\, u_2 + {}^1/_2 sen^2\varphi_0 cos\, 2\theta_m) + e^2\{XI\}\right\}$$

od anche:

$$\left.\begin{aligned}(\delta\omega_2)_e = \frac{e.\delta e.sen\,\alpha_2}{2.cos\, u_2}\Big\{&\Delta\theta . sen^2\varphi_0 cos\, 2\theta_2 - \\ &- sen\,\Delta\theta . sen\, u_1 sen\, u_2 (3 - tang\,\theta_1 tang\,\theta_2) + e^2\{XI\}\Big\}\end{aligned}\right\}. \quad (74)$$

Per ultimo, passando alla variazione $(\delta\alpha_2)_e$ nell'azimut, osserviamo (come già alla fine del paragrafo precedente) che dalla relazione

$$sen\,\alpha_1 cotg\,\alpha_2 = cos\,\Delta\theta . cos\,\alpha_1 - sen\,\Delta\theta . tang\, u_1,$$

considerando α_1 come costante, si trae:

$$(\delta\alpha_2) = \frac{sen^2\alpha_2 . sen\,\Delta\theta}{sen\,\alpha_1 cos^2 u_1}(\delta u_1)_e + \frac{sen^2\alpha_2 sen\, u_2}{sen\,\alpha_1 cos\, u_1}(\delta\Delta\theta)_e .$$

Sostituendo a $(\delta u_1)_e$, $(\delta \Delta\theta)_e$ i loro valori (64) e (69) se ne deduce con facili riduzioni:

$$(\delta\alpha_2)_e = \frac{e\,.\,\delta e\,.\,sen\,\alpha_2}{cos\,u_2}\left\{\begin{array}{l}\Delta\theta\,.\,sen\,u_2\left(1-\frac{sen^2\varphi_0}{2}\right)-sen\,\Delta\theta\,.\,sen\,u_1- \\ -\tfrac{1}{2}sen\,u_2 sen^2\varphi_0 sen\,\Delta\theta\,.\,cos\,2\,\theta_m + e^2\{XII\}\end{array}\right\}. \quad (75)$$

11. Riassumendo le relazioni stabilite in questi ultimi paragrafi [formule (37), (49), (54), (56), (59), (60), (62), (71), (74) e (75)] in un'unica tabella analoga alla tabella (12) del § 3 avremo

$$\left.\begin{array}{l}
(\delta\varphi_2)_a = -(sen\,\Delta\theta\,.\,sen\,\alpha_2 + e^2\{I\})\,\delta\alpha_1, \\
(\delta\omega_2)_a = (sen\,\Delta\theta\,.\,cos\,\alpha_2\,.\,sec\,\varphi_2 + e^2\{II\})\,\delta\alpha_1, \\
(\delta\alpha_2)_a = (cos\,u_1 sec\,u_2 cos\,\Delta w + e^2\{III\})\,\delta\alpha_1, \\
(\delta\varphi_2)_\varphi = (cos\,\Delta w + e^2\{IV\})\,\delta\varphi_1, \\
(\delta\omega_2)_\varphi = (tang\,u_2 sen\,\Delta w + e^2\{V\})\,\delta\varphi_1, \\
(\delta\alpha_2)_\varphi = (sec\,u_2\,.\,sen\,\Delta w + e^2\{VI\})\,\delta\varphi_1, \\
(\delta\varphi_2)_a = -\left(\frac{s\,.\,cos\,\alpha_2}{a\,.\,sen\,1''} + e^2\{VII\}\right)\frac{\delta a}{a}, \\
(\delta\omega_2)_a = -\frac{s\,.\,sen\,\alpha_2}{a\,.\,cos\,u_2 sen\,1''}\cdot\frac{\delta a}{a}, \\
(\delta\alpha_2)_a = -\left(\frac{s\,.\,tang\,\varphi_2 sen\,\alpha_2}{a\,.\,sen\,1''} + e^2\{IX\}\right)\frac{\delta a}{a}, \\
(\delta\varphi_2)_e = \left[\begin{array}{l}\Delta\theta\,.\,sen\,1''\,.\,cos\,\alpha_2\left(1-\tfrac{1}{2}sen^2\varphi_0\right)-\tfrac{1}{2}sen\,\Delta\theta\,.\,cos\,2\,\theta_m sen^2\varphi_0 cos\,\alpha_2- \\ -cos\,\Delta w\,.\,sen\,u_1 cos\,u_1 + sen\,u_2 cos\,u_2 + e^2\{X\}\end{array}\right]\frac{e\,.\,\delta e}{sen\,1''}, \\
(\delta\omega_2)_e = \frac{sen\,\alpha_2}{2\,.\,cos\,u_2}\left[\begin{array}{l}\Delta\theta\,.\,sen\,1''\,.\,sen^2\varphi_0 cos\,2\,\theta_2- \\ -sen\,\Delta\theta\,.\,sen\,u_1 sen\,u_2\,(3-tang\,\theta_1 tang\,\theta_2) + e^2\{XI\}\end{array}\right]\frac{e\,.\,\delta e}{sen\,1''}, \\
(\delta\alpha_2)_e = \frac{sen\,\alpha_2}{cos\,u_2}\left[\begin{array}{l}\Delta\theta\,.\,sen\,1''\,.\,sen\,u_2\left(1-\frac{sen^2\varphi_0}{2}\right)-sen\,\Delta\theta\,.\,sen\,u_1- \\ -\tfrac{1}{2}sen\,u_2 sen^2\varphi_0\,.\,sen\,\Delta\theta\,.\,cos\,2\,\theta_m + e^2\{XII\}\end{array}\right]\frac{e\,.\,\delta e}{sen\,1''},
\end{array}\right\} \quad (76)$$

dalle quali formule, tenendo conto delle (10) che legano nel caso nostro le variazioni $\delta\varphi_1$, $\delta\alpha_1$, $\delta\omega_1$ alle attrazioni locali corrispondenti, si ottengono le seguenti espressioni analitiche delle coordinate φ', ω', α' riferite all'ellissoide definitivo cercato e provenienti dal

centro di emanazione ξ_0, η_0:

$$\varphi' = \varphi + \cos\Delta w \,.\, \xi_0 - \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{tang} l_0 \,.\, \eta_0 - \frac{s \,.\, \cos\alpha}{a \,.\, \operatorname{sen} 1''} \frac{\delta a}{a} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} 1'' \,.\, \cos\alpha \,(1 - {}^1\!/_2 \operatorname{sen}^2\Phi_0) - \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \cos 2\theta_m \operatorname{sen}^2\Phi_0 \cos\alpha - \\ - \cos\Delta w \,.\, \operatorname{sen} l_0 \cos l_0 + \operatorname{sen} l \,.\, \cos l \end{bmatrix} \frac{e \,.\, \delta e}{\operatorname{sen} 1''},$$

$$\omega' = \omega + \operatorname{tang} l \,.\, \operatorname{sen}\Delta w \,.\, \xi_0 + (1 + \operatorname{sen} l_0 \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \cos\alpha \,.\, \sec l) \sec l_0 \eta_0 -$$

$$- \frac{s \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{a \,.\, \cos l \,.\, \operatorname{sen} 1''} \frac{\delta a}{a} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2 \,.\, \cos l} \begin{bmatrix} \Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} 1'' \,.\, \operatorname{sen}^2\Phi_0 \cos 2\theta_m - \\ - \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} l_0 \operatorname{sen} l \,(3 - \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2) \end{bmatrix} \frac{e \,.\, \delta e}{\operatorname{sen} 1''}, \qquad (77)$$

$$\alpha' = \alpha + \operatorname{sen}\Delta w \,.\, \sec l \,.\, \xi_0 + \cos\Delta w \,.\, \sec l \,.\, \operatorname{sen} l_0 \,.\, \eta_0 - \frac{s \,.\, \operatorname{tang} l \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{a \,.\, \operatorname{sen} 1''} \frac{\delta a}{a} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos l} \begin{bmatrix} \Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} 1'' \,.\, \operatorname{sen} l \,(1 - {}^1\!/_2 \operatorname{sen}^2\Phi_0) - \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} l_0 - - \\ - {}^1\!/_2 \operatorname{sen} l \,.\, \operatorname{sen}^2\Phi_0 \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \cos 2\theta_m \end{bmatrix} \frac{e \,.\, \delta e}{\operatorname{sen} 1''}.$$

In queste formule abbiamo introdotto la notazione Φ_0 in luogo di φ_0 perchè sia a prima giunta visibile che tale quantità non è la latitudine geografica del centro di emanazione, ma la latitudine del parallelo che tocca la geodetica s nel punto che serve di origine all'arco ausiliario θ.

Dalle (77) si ottengono senz'altro le espressioni cercate delle componenti dell'attrazione locale nel punto qualunque B legato al punto di emanazione A dalla geodetica s, alla quale corrispondono $\Delta\theta$ e Δw nel triangolo ausiliario Besseliano; tali espressioni sono le seguenti

$$\xi = \varphi - l + \cos\Delta w \,.\, \xi_0 - \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{tang} l_0 \,.\, \eta_0 - \frac{s \,.\, \cos\alpha}{a \,.\, \operatorname{sen} 1''} \frac{\delta a}{a} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} 1'' \,.\, \cos\alpha \,(1 - {}^1\!/_2 \operatorname{sen}^2\Phi_0) - {}^1\!/_2 \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \cos 2\theta_m \operatorname{sen}^2\Phi_0 \cos\alpha - \\ - \cos\Delta w \,.\, \operatorname{sen} l_0 \cos l_0 + \operatorname{sen} l \,.\, \cos l \end{bmatrix} \frac{e \,.\, \delta e}{\operatorname{sen} 1''},$$

$$\eta_\omega = (\omega - \lambda) \cos l + \operatorname{sen} l \,.\, \operatorname{sen}\Delta w \,.\, \xi_0 + (1 + \operatorname{sen} l_0 \,.\, \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \cos\alpha \,.\, \sec l) \frac{\cos l}{\cos l_0} \eta_0 -$$

$$- \frac{s \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{a \,.\, \operatorname{sen} 1''} \frac{\delta a}{a} + {}^1\!/_2 \operatorname{sen}\alpha \begin{bmatrix} \Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} 1'' \,.\, \operatorname{sen}^2\Phi_0 \,.\, \cos 2\theta_2 - \\ - \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} l_0 \operatorname{sen} l \,(3 - \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2) \end{bmatrix} \frac{e \,.\, \delta e}{\operatorname{sen} 1''}, \qquad (78$$

$$\eta_\alpha = (\alpha - A) \operatorname{cotg} l + \operatorname{cosec} l \,.\, \operatorname{sen}\Delta w \,.\, \xi_0 + \cos\Delta w \,.\, \operatorname{cosec} l \,.\, \operatorname{sen} l_0 \,.\, \eta_0 -$$

$$- \frac{s \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{a \,.\, \operatorname{sen} 1''} \frac{\delta a}{a} + \operatorname{sen}\alpha \begin{bmatrix} \Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} 1'' \,(1 - {}^1\!/_2 \operatorname{sen}^2\Phi_0) - \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \operatorname{sen} l_0 \operatorname{cosec} l - \\ - {}^1\!/_2 \operatorname{sen}^2\Phi_0 \,.\, \operatorname{sen}\Delta\theta \,.\, \cos 2\theta_m \end{bmatrix} \frac{e \,.\, \delta e}{\operatorname{sen} 1''},$$

e sono complete nei termini di 1.° ordine assoluto, qualunque sia cioè la distanza fra il punto B ed il suo centro di emanazione A. Sarebbe facilissimo tener conto anche del secondo ordine assoluto (ossia dei termini in e^2), calcolando dagli sviluppi dei paragrafi precedenti le quantità *I, II, III, IV, V, VI, VII, IX, X, XI* e *XII* che entrano nelle (76) e che abbiamo trascurate nel passare da queste alle (78): osserviamo anzi in proposito come, a scapito della semplicità, tali sviluppi sieno qui stati condotti per modo da permettere di costruire con un semplice riepilogo le espressioni delle quantità suddette; ed infatti alle prime nove delle relazioni (76), fatta astrazione dai termini in e^2, saremmo potuti giungere pressochè direttamente per mezzo della differenziazione delle formule di trigonometria sferica corrispondenti al triangolo ausiliario Besseliano. Ma abbiamo già a più riprese accennato come il valore dei termini di secondo ordine assoluto nelle (78) risulta in ogni caso molto più piccolo dell'incertezza che si ha nelle misure dirette delle quantità astronomiche l, λ ed A, ammesso, s'intende, che si parta da valori di a ed e sufficientemente approssimati: che se a calcoli fatti le correzioni $\delta a, \delta e$ determinate risultassero forti, converrebbe pur sempre, per non introdurre una troppo grande complicazione di formule, e, con questa, il pericolo di errori di calcolo, ricorrere ad una seconda approssimazione correggendo anzitutto per mezzo delle sei ultime delle (76) i varii valori di φ, ω, α, per ripetere il calcolo assumendo i nuovi valori di a ed e come dati di partenza.

È inoltre da notare come quantunque le (78), nelle quali senza alterare l'approssimazione tenuta si può porre $\Delta\omega$ ed $\frac{s}{a.sen\,1''}$ rispettivamente in luogo di Δw e di $\Delta\theta$, sembrino a prima giunta semplici almeno quanto le (13), mentre presentano su di queste il vantaggio della generalità, tuttavia in pratica la loro costituzione richiede molto più lavoro di quella delle (13), perchè in queste non entrano che le differenze $\Delta\omega$, $\Delta\varphi$ di longitudine e di latitudine e le latitudini l_0 ed l dei punti A e B, mentre nelle (78) entrano le ausiliarie Φ_0 che debbono essere calcolate per mezzo degli azimut di partenza delle geodetiche s che congiungono i punti B col loro centro di emanazione A: in altri termini per applicare le (78) è necessario, o colla risoluzione di triangoli successivi crescenti (Capitolo V), se le distanze non sono eccessivamente grandi, o indirettamente per mezzo delle coordinate geografiche (Capitolo VIII, § 28), determinare anzitutto le coordinate geodetiche polari dei punti B, considerando A

come il loro polo. Saranno quindi le formule (13) da applicare in generale, e le (78) non dovranno essere adoperate che per costituire le equazioni fondamentali (15) dei centri secondarii (vedi § 4), necessarie per passare dalle equazioni fondamentali dei punti *B* riferiti ad un centro secondario a quelle relative al centro principale.

12. Trovate, applicando sia le (13), sia le (78), le due espressioni (η_ω, η_α) della componente η dell'attrazione locale in un punto in cui e longitudine ed azimut sono stati determinati astronomicamente, è necessario, per mezzo della formula (6), combinare i due risultati in un unico valore tenendo conto dei loro pesi p_ω, p_α. La ricerca di questi pesi ha in sè qualche cosa di arbitrario, e deve esser fatta volta per volta discutendo i dati geodetici ed astronomici che hanno servito a costituire le due espressioni di η suddette. Conviene per altro osservare come in ciò si possa far sempre astrazione dai pesi parziali delle determinazioni dei coefficienti delle incognite ξ_0, η_0, δa, δe delle equazioni fondamentali che dànno η_ω ed η_α, perocchè non è necessario conoscere tali coefficienti che con una approssimazione relativamente grossolana e molto minore di quella con cui le quantità che entrano nella loro costituzione sono geodeticamente determinate. Le uniche quantità che debbono esser dunque considerate come sperimentali sono i sei elementi φ, ω, α, l, λ, A, fra i quali solo i quattro ultimi compariscono in η_ω ed η_α: ora mentre i pesi degli elementi astronomici l, λ, A sono da considerare come dati, e non sono di solito notevolmente diversi fra loro *, i pesi degli elementi geodetici φ, ω, α dipendono dalla precisione sia lineare sia angolare delle triangolazioni e dalle distanze geodetiche fra i punti di emanazione e i punti ai quali le coordinate considerate si riferiscono. La determinazione di tali pesi deve quindi esser fatta colle norme stabilite nel Capitolo VII, calcolando l'errore medio della distanza geodetica s e quello del suo azimut iniziale, come provenienti dalla combinazione di un certo numero d'angoli geodetici e partendo dall'errore medio dell'unità di peso di ogni singola misura di angolo (Capitolo VII, parte IV) e dall'errore medio delle basi geodetiche introdotte nel calcolo di compensazione delle reti. È perciò necessario di conoscere ancora le espressioni delle varia-

* Per ciascuna determinazione complessiva di latitudine e di azimut si può ammettere in media un errore probabile di $0'',2$, e per ciascuna determinazione di longitudine telegrafica, di $0^s,02$.

zioni $(\delta\varphi)_{s,\alpha}$, $(\delta\omega)_{s,\alpha}$, $(\delta\alpha)_{s,\alpha}$, che le coordinate subiscono quando la distanza s varia della sua differenziale δs e nello stesso tempo l'azimut iniziale α_1 si cambia in $\alpha_1 + \delta\alpha_1$. Ora dalle note relazioni $\rho . d\varphi = ds . \cos\alpha$, $r . d\omega = ds . \operatorname{sen}\alpha$, $\cos u . \operatorname{sen}\alpha = costante$ si trova in questo caso:

$$\left.\begin{aligned}
(\delta\varphi_2)_s &= \frac{\delta s . \cos\alpha_2}{\rho_2 . \operatorname{sen} 1''} = \frac{\delta s . \cos\alpha_2}{a . \operatorname{sen} 1''}(1 + e^2\{XIII\}),\\
(\delta\omega_2)_s &= \frac{\delta s . \operatorname{sen}\alpha_2}{r_2 \operatorname{sen} 1''} = \frac{\delta s . \operatorname{sen}\alpha_2}{a . \cos\varphi_2 . \operatorname{sen} 1''}(1 + e^2\{XIV\}),\\
(\delta\alpha_2)_s &= tang\, u_2 tang\alpha_2 (\delta u_2)_s = \frac{\delta s . tang\varphi_2 . sen\alpha_2}{a . sen\, 1''}(1 + e^2\{XV\}),
\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

e quindi, tenendo conto delle prime tre formole (76), avremo in generale, tralasciando l'indice 2 che diviene superfluo, osservando che a meno dei termini in e^2 le quantità $\Delta\theta$ e Δw non differiscono rispettivamente da $\frac{s}{a . \operatorname{sen} 1''}$ e da $\Delta\omega$, e ritenendo il solo primo ordine assoluto:

$$\left.\begin{aligned}
(\delta\varphi)_{s,\alpha} &= \frac{\delta s . \cos\alpha}{a . \operatorname{sen} 1''} - \delta\alpha_1 . \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a . \operatorname{sen} 1''}\right)\operatorname{sen}\alpha\\
(\delta\omega)_{s,\alpha} &= \frac{\delta s . \operatorname{sen}\alpha}{a . \cos\varphi . \operatorname{sen} 1''} + \delta\alpha_1 . \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a . \operatorname{sen} 1''}\right)\cos\alpha\\
(\delta\alpha)_{s,\alpha} &= \frac{\delta s . tang\varphi . \operatorname{sen}\alpha}{a . \operatorname{sen} 1''} + \frac{\delta\alpha_1 . \cos\Delta\omega . \cos\varphi_1}{\cos\varphi}
\end{aligned}\right\} . \quad (80)$$

Da queste espressioni differenziali e dagli errori medii m_λ, m_l m_A di λ, l ed A, che si devono considerare come dati, si può passare agli errori medii m_ω, m_α ed ai pesi p_ω, p_α delle determinazioni r_ω ed r_α colle regole già esposte nel Capitolo VII, considerando s ed α come funzioni note dei dati delle triangolazioni compensate; ma dacchè è in ogni caso sufficiente avere per m_ω ed m_α, dei valori approssimati, conviene in pratica considerare δs e $\delta\alpha$ come indipendenti e calcolare i corrispondenti errori medii tenendo conto soltanto della distanza s e dell'errore medio chilometrico da una parte, e dall'altra del minimo numero degli angoli della rete che è necessario di combinare per ottenere α dall'azimut iniziale che ha servito per l'orientamento della rete. Ricordiamo però che qui l'errore medio corrispondente a $\delta\alpha$ deve esser calcolato in base soltanto ai semplici errori delle osservazioni compensate della rete, giac-

chè di quanto concerne le attrazioni locali è già stato tenuto conto in parte con la compensazione della rete stessa, e in parte nel costituire le formule fondamentali (13) e (78).

Dalle (80) è facile vedere con un computo approssimativo, e partendo dagli errori medii unitarii limiti che si sogliono considerare quali tolleranze nei grandi lavori di geodesia $\left(\frac{1}{100000}\right.$ nelle lunghezze, e $3''$ nelle osservazioni singole di una direzione$\left.\right)$, come, in generale, l'errore medio nelle determinazioni delle coordinate ellissoidiche ω, φ è molto minore dell'errore medio nella determinazione dell'azimut α (in media $^1/_5$ od $^1/_6$), e non sorpassa sensibilmente, se non per distanze geodetiche estremamente grandi, l'errore medio delle determinazioni astronomiche l, λ ed A. Per ciò la maggior parte dei geodeti sogliono, in quanto si riferisce alla determinazione delle costanti terrestri e delle attrazioni locali, considerare le quantità φ, ω, l, λ, A come esenti da errore, e si limitano a ritenere il solo azimut α come una quantità esperimentale, cui corrisponde un certo peso frazionario. Però il rapporto (in media circa 25) fra i pesi p_ω e p_α delle determinazioni η_ω, η_α non risulta così grande da giustificare pienamente un simile modo di procedere.

13. Noi ammetteremo ora costituite le equazioni fondamentali

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a + b.\xi_0 + c.\eta_0 + d.\delta a + f.\delta e \\ \eta &= a' + b'.\xi_0 + c'.\eta_0 + d'.\delta a + f'.\delta e \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

per tutti i punti legati geodeticamente a ciascun centro principale di emanazione. Nel caso che si tratti di determinare l'ellissoide principale di riferimento (ellissoide terrestre) i centri di emanazione saranno parecchi, giacchè non tutte le reti geodetiche possono essere collegate fra di loro: si avranno dunque tanti sistemi della forma (81) quanti sono i centri di emanazione geodeticamente isolati, e per ciascuno di questi vi saranno due incognite da determinare (componenti delle attrazioni locali di partenza) oltre le due incognite δa e δe comuni a tutte le equazioni indistintamente. Non ci fermeremo sulla determinazione di queste incognite, che, come abbiamo visto, deve essere fatta in base alla condizione fondamentale

$$[\xi\xi] + [\eta\eta] = \textit{minimo},$$

e, per conseguenza, col metodo dei minimi quadrati.

Seguendo questo metodo si sogliono, oltre alle incognite, determinare i loro pesi ed i loro errori medii, considerando le equazioni della forma (81) come delle equazioni generate propriamente dette: noi accenneremo che, teoricamente parlando, questa seconda determinazione non ha il suo consueto significato, ed anzi che un significato matematico e preciso di tali ausiliarie di precisione non esiste, giacchè le quantità ξ ed η non sono errori casuali di osservazione, ma quantità determinabili, che devono avere un carattere sistematico ben definito, dipendendo non solo dalle ondulazioni parziali del geoide, ma anche dalle ondulazioni continentali relative alle regioni in cui le reti geodetiche si estendono. Si suole far notare come dalla discussione delle attrazioni locali già determinate rispetto a dati ellissoidi di riferimento non solo tale carattere sistematico non risulta, ma resta anzi infirmata la sua possibilità. Noi riportiamo qui il quadro delle attrazioni locali in latitudine calcolate da *Bessel* rispetto al suo ellissoide terrestre*, del quale abbiamo già date le costanti nel Capitolo I, e che è fondamentale in geodesia, giacchè ad esso si riferiscono tutte le nostre tavole geodetiche.

ARCHI DI MERIDIANO	STAZIONI	ξ
		"
1.° Peruviano	Tarqui	— 0,606
	Cotchesqui	+ 0,606
1.° Indiano	Trivandeporum	— 0,271
	Paudree	+ 0,271
2.° Indiano	Punnæ	— 1,470
	Putchappolliam	— 1,712
	Dodagoontah	+ 4,016
	Namthabad	— 1,447
	Daumeragidda	— 0,065
	Takal K'hera	+ 3,537
	Kullianpoor	— 2,859
Francese	Formentera	+ 0,955
	Montjouy	+ 4,115
	Barcellona	+ 0,764
	Carcassonne	— 0,433
	Evaux	— 6,447
	Panthéon	— 1,099
	Dünkirk	+ 2,144

* *Astron. Nachr.* 19, pag. 97.

ARCHI DI MERIDIANO	STAZIONI	ξ
		$''$
Inglese	Dunnose	$-1{,}816$
	Greenwich	$+1{,}396$
	Blenheim	$+2{,}705$
	Arburyhill	$+1{,}395$
	Clifton	$-3{,}679$
Hannoverese	Göttingen	$-2{,}493$
	Altona	$+2{,}493$
Danese	Lauenburg	$+0{,}451$
	Lysabbel	$-0{,}451$
Prussiano	Trunz	$-0{,}907$
	Königsberg	$-1{,}448$
	Memel	$+2{,}355$
Russo	Belin	$-1{,}732$
	Nemesch	$-2{,}384$
	Jacobstadt	$+1{,}826$
	Bristen	$+2{,}627$
	Dorpat	$-1{,}044$
	Hochland	$+0{,}607$
Svedese	Malörn	$+0{,}560$
	Pahlawara	$-0{,}560$

Riportiamo ancora il riepilogo delle attrazioni locali calcolate nella più recente determinazione dello sferoide terrestre dal signor *Clarke**, e riferite ai seguenti valori delle costanti

$$a = 20926202 \text{ piedi inglesi}$$

$$b = 20854895 \quad » \quad »$$

$$\mathfrak{a} = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{293{,}465}.$$

* CLARKE, *Geodesy*. (Oxford, 1880.)

N.°	STAZIONI	Lat. osserv.			ξ
		°	′	″	″
1	Saxaford	60	49	37,21	+ 1,453
2	North Rona	59	07	15,19	+ 0,081
3	Great Stirling	57	27	49,12	— 0,710
4	Kellie Law	56	14	53,60	— 1,089
5	Durham	54	46	06,20	— 1,453
6	Clifton	53	27	29,50	— 2,486
7	Arbury	52	13	26,59	+ 1,180
8	Greenwich	51	28	38,30	+ 0,778
9	Dunkirk	51	02	08,41	— 1,252
10	Dunnose	50	37	06,54	— 1,691
11	Panthéon	48	50	47,98	— 2,618
12	Carcassonne	43	12	54,30	— 1,228
13	Barcelona	41	22	47,90	+ 0,573
14	Montjouy	41	21	44,96	+ 3,927
15	Formentera	38	39	53,17	+ 4,524
16	Fuglenæs	70	40	11,23	+ 0,029
17	Stuor-oivi	68	40	58,40	— 1,423
18	Tornea	65	49	44,57	+ 3,911
19	Kilpi-maki	62	38	05,25	— 1,258
20	Hogland	60	05	09,84	— 0,422
21	Dorpat	58	22	47,56	— 1,483
22	Jacobstadt	56	30	04,97	+ 2,247
23	Nemesch	54	39	04,16	— 0,221
24	Belin	52	02	42,16	+ 0,108
25	Kremenetz	50	05	49,95	— 2,232
26	Ssuprunkowzi	48	45	03,04	+ 2,588
27	Wodolui	47	01	24,98	+ 1,133
28	Staro Nekrassowka . .	45	20	02,94	— 2,973
29	Cotchesqui	+ 0	02	31,22	+ 0,586
30	Tarqui	— 3	04	31,90	— 0,585
31	Cape Point	34	21	06,26	— 0,161
32	Zwart Kop	34	13	32,13	+ 0,983
33	Royal Observatory . .	33	56	03,20	— 0,637
34	Heerenlogement	31	58	09,11	+ 0,198
35	North End	29	44	17,66	— 0,380

N.°	STAZIONI	Lat. osserv.	ξ
		° ′ ″	″
36	Shahpur	32 01 34,06	— 3,550
37	Khimnana	30 22 11,78	+ 0,141
38	Kaliana	29 30 48,32	+ 3,652
39	Garinda	27 55 30,02	— 1,904
40	Khamor	25 45 10,93	+ 1,993
41	Kalianpur	24 07 10,79	— 1,392
42	Fikri	22 01 03,77	— 2,949
43	Walwari	20 44 21,27	+ 4,532
44	Damargida	18 03 14,82	+ 1,240
45	Darur	16 09 46,13	+ 4,362
46	Honur	14 55 21,51	— 3,684
47	Bangalore	12 59 51,79	+ 2,903
48	Patchapaliam	10 59 41,06	— 2,204
49	Kudankulam	8 12 10,44	— 3,138
N.°	STAZIONI	Long. osserv.	η
		° ′ ″	″
50	Vizagapatam	+ 6 21 35,44	+ 0,649
51	Hydrabad	+ 1 35 28,29	+ 2,121
52	Bombay	— 4 06 44,00	— 4,050
53	Mangalore	— 2 04 52,61	— 2,924
54	Bangalore	+ 0 39 20,62	— 0,303
55	Madras	+ 3 19 08,26	+ 4,499
56	Bellary	0 00 00,00	— 0,050

Il sig. *Clarke* considerando questi valori di ξ ed η come delle deviazioni casuali ha trovato

$$0{,}674\sqrt{\frac{285{,}763}{56+8}}\,1'',645$$

per la *differenza* (errore), *probabile* fra una coordinata astronomica qualunque e la corrispondente coordinata ellissoidica, e *Andrae* (*Problèmes de haute Géodésie.* Copenhague, 1881) osserva in proposito che *cette grandeur ne serait guère moindre si elle avait seulement été determinée par une triangulation isolée embrassant une étendue de pays relativement petite, où les déviations verticales proviennent exclusivement des petites ondulations partout présentes.*

Per mostrare poi quanto piccola sia la deviazione fra il geoide e l'ellissoide corrispondente a questi risultati il signor *Clarke** ha ricercato per tre dei più lunghi archi di meridiano compresi nelle misure sottoposte a calcolo, considerandoli come isolati, le curve che riproducono meglio le osservazioni, supponendo per due che tali curve debbano essere delle ellissi e per il terzo che la curva sia piana, ma data dalla relazione più generale

$$\rho = A + 2B\cos 2\varphi + 2C\cos 4\varphi,$$

ove ρ è il raggio di curvatura, φ la latitudine, A, B, C delle costanti da determinare col metodo dei minimi quadrati. Se si immaginano tali curve sperimentali sovrapposte ai corrispondenti archi di meridiano geografico in modo che abbiano l'estremo sud comune con questi e che le normali in tal punto divergano fra loro dell'attrazione locale in latitudine, e si rappresenta con ζ la distanza fra le curve e l'ellissoide terrestre contata sulla normale ellissoidica, si ottengono le seguenti deviazioni lineari, la distanza ζ essendo espressa in piedi inglesi:

ANGLO-FRANCESE		RUSSO		INDIANO	
Latitudine	ζ	Latitudine	ζ	Latitudine	ζ
°		°		°	
60	— 2,7	70	+ 4,1	32	— 4,2
58	— 3,6	68	+ 3,8	30	+ 3,8
56	— 1,8	66	+ 3,1	28	+ 8,3
54	+ 1,9	64	+ 2,0	26	+ 9,3
52	+ 6,8	62	+ 0,8	24	+ 6,9
50	+ 11,8	60	— 0,5	22	+ 2,1
48	+ 16,1	58	— 1,8	20	— 4,3
46	+ 18,8	56	— 2,9	18	— 11,1
44	+ 18,9	54	— 3,7	16	— 16,7
42	+ 15,7	52	— 4,0	14	— 19,6
40	+ 8,1	50	— 3,7	12	— 18,5
		48	— 2,7	10	— 11,8

Ma se questa notevole e più che soddisfacente coincidenza può far vedere che in generale le deviazioni del geoide dalla forma ellissoidica sono molto minori di quello che risulterebbe dal calcolo diretto delle attrazioni delle masse continentali, il numero delle stazioni astronomiche è ancora indubitatamente troppo piccolo per

* CLARKE, *Geodesy*, 319 e 320.

potere scindere le influenze delle attrazioni puramente locali, ossia delle piccole ondulazioni casuali del geoide, da quelle delle grandi ondulazioni nelle quali sole il carattere sistematico si può presentare. Inoltre i risultati fin qui conosciuti provengono dalle misure di archi di meridiano non collegate fra loro, e vedremo in seguito come con ciò, moltiplicandosi le incognite del problema assai più che questo non consenta, si vengano a determinare delle attrazioni locali non comparabili fra loro a meno che arco per arco; finalmente è da notare come tutte le misure si riferiscano a regioni continentali, per cui le deviazioni sistematiche generali non possono esser che parzialmente poste in evidenza dai valori delle attrazioni locali calcolate, lo che val quanto dire che l'ellissoide terrestre calcolato non si avvicina in media al geoide quanto si avvicinerebbe se fosse possibile estendere le misure geodetiche ed astronomiche anche nelle regioni oceaniche.* Le conclusioni definitive sul carattere sistematico delle attrazioni locali non possono quindi a parer nostro essere tratte finora, e non potranno risultare che da una molto più numerosa serie di determinazioni astronomiche, tale da permettere anzitutto la ricerca delle piccole onde locali, per introdurre in calcolo le quantità osservate già corrette dall'influenza di queste.

Ma, quantunque ai pesi ed agli errori medii dei valori di δa, δe, ξ_0 ed η_0, calcolati dalle equazioni normali corrispondenti alle forme generate (81), per le ragioni sopra esposte, non sia possibile l'assegnare un significato preciso, il calcolo delle ausiliarie di precisione non è per questo meno importante, giacchè da esse soltanto si può avere un'idea dell'incertezza che si deve attribuire ai risultati. Tale idea sarà tanto più precisa quanto meno delineato risulterà il carattere sistematico inerente alle attrazioni locali: soltanto nel caso in cui questo carattere risultasse ben definito converrebbe anzitutto scindere i valori trovati per le quantità ξ ed η relative ai diversi punti, in due parti, l'una corrispondente alle onde continentali e l'altra alle onde puramente locali, considerando soltanto quest'ultima come un errore residuale di osservazione e la prima come una quantità nota, per calcolare con tali dati le ausiliarie di precisione cercate. Con ciò non rimane esclusa completamente l'arbitrarietà, giacchè in pratica non sarà in nessun caso possibile di

* Merita speciale attenzione la considerazione che, ammesse le onde continentali, tutte le osservazioni astronomico-geodetiche debbono condurre ad un Ellissoide troppo piccolo e troppo schiacciato. I risultati col pendolo dovrebbero quindi dare uno schiacciamento minore, mentre succede proprio il contrario.

determinare i veri valori delle costanti della funzione scelta a rappresentare la sistematicità osservata, e forse neanche la natura di questa funzione, cosicchè la suddetta scissione non potrà esser fatta che molto grossolanamente; ma è ovvio che qui non si tratta che di ricondurre prossimamente la distribuzione degli errori residuali delle equazioni fondamentali alla legge su cui poggia il metodo dei minimi quadrati, ed a ciò anche una scissione grossolana è sempre sufficiente.

Nell'eseguire i calcoli è poi da tener presente che quantunque l'errore probabile di a raggiunga in generale qualche centinaio di metri, e quello di e sia una frazione notevole di questa quantità, e quindi le ultime due cifre di a espresso in metri, e le frazioni decimali dello schiacciamento riescano illusorie, è necessario tenere anche queste cifre per modo che i logaritmi di a e di e e delle altre costanti che ne dipendono rimangano determinati esattamente almeno con sette decimali, senza di che nelle applicazioni si cadrebbe in incertezze sulla grandezza dell'ellissoide adottato.

14. Determinati i valori delle componenti dell'attrazione locale per tutti i punti geodetici principali restano naturalmente determinate altresì le coordinate geografiche di questi punti rispetto all'ellissoide definitivo, per mezzo delle relazioni fondamentali (4) e (5) che dánno

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= l + \xi \\ \omega' &= \lambda + \eta \,.\, sec\, l \\ \alpha' &= A + \eta \,.\, tang\, l \end{aligned}\right\} . \qquad (82)$$

L'ultima di queste relazioni serve a calcolare gli orientamenti definitivi delle reti geodetiche considerate come appartenenti al nuovo ellissoide, indipendenti cioè dall'influenza delle attrazioni locali. Di tali orientamenti va fatto uso per dedurre le coordinate geografiche dei punti secondarî delle reti medesime, ove non si preferisca di calcolare dalle formule (12^{bis}) o (77) le correzioni da fare alle coordinate φ ed ω riferite all'Ellissoide provvisorio, partendo dai dati astronomici di uno dei punti geodetici principali.

È importante notare come nella costituzione dei secondi membri delle equazioni (81), che dánno le componenti delle attrazioni locali, i termini in δa e δe rappresentano le differenze fra queste componenti rispetto all'ellissoide definitivo e quelle analoghe rispetto all'ellissoide provvisorio introdotto in calcolo, per lo che se in un caso, puramente ipotetico, i due ellissoidi coincidessero, le componenti cercate, e quindi le differenze $\varphi' - l$, $\omega' - \lambda$, $\alpha' - A$, ri-

marrebbero espresse solo in funzione dei termini in ξ_0 ed η_0, ma le nuove coordinate φ', ω' ed α' non risulterebbero eguali alle provvisorie φ, ω ed α. I termini che nelle (81) dipendono da ξ_0 ed η_0 costituiscono quindi gli spostamenti che si devono dare ai punti geodetici principali per rendere compatibili fra loro gli orientamenti osservati per le varie geodetiche congiungenti, e le posizioni geografiche dei loro estremi; costituiscono in altre parole le correzioni che corrispondono alla compensazione dei gruppi di reti trigonometriche introdotte in calcolo, compensazione che rimane implicitamente fatta risolvendo le (81) medesime col metodo dei minimi quadrati.

Ciascun valore di η determinato per punti ove azimut e longitudine sono stati astronomicamente osservati permette, applicando il teorema di *Laplace* generalizzato, di giudicare della precisione della triangolazione che congiunge il corrispondente punto geodetico principale al centro di emanazione. Abbiamo già mostrato infatti come la quantità che nella costituzione delle equazioni (13) o (78) deve esser considerata come meno precisa (e molto meno) di ogni altra, è l'azimut α che viene composto per mezzo di varî angoli di una rete trigonometrica, e che rimane affetto da un errore eguale alla somma degli errori commessi sia nella misura diretta di questi angoli, sia nel considerarli come appartenenti all'ellissoide cercato, mentre non sono che angoli geodetici osservati in punti e fra punti esterni a tale superficie. Ponendo quindi in evidenza questo errore complessivo, che rappresenteremo con ε, l'ultima delle (13), in cui è da introdurre $\alpha - \varepsilon$ in luogo di α ed η in luogo di η_α, darà

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon = {} & \alpha - A - \eta_1 . tang\, l + \Delta\omega . cosec\, l_0 . tang\, l . sen\, 1'' (1 - \Delta\varphi . cotg\, l_0 . sen\, 1'') \xi_0 + \\ & + \left\{1 - \Delta\varphi . cotg\, l_0 . sen 1'' + {}^1/_2 \Delta\varphi^2 . cosec\, l_0 (1 + cos^2 l_0) sen^2 1'' - {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen^2 1''\right\} \eta_0 . tang\, l - \\ & - \Delta\omega . cos\, l_0 . tang\, l . \frac{\delta a}{a} - \Delta\omega . sen^2 l_0 . tang\, l . cos\, l_0 (1 - \Delta\varphi . cotg^3 l_0 . sen\, 1'') e . \delta e ,\end{aligned}\right\} \quad (83$$

ed analogamente dall'ultima delle (78) si trarrà:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon = {} & \alpha - A - \eta_1 . tang\, l + sec\, l . sen\, \Delta w . \xi_0 + sec\, l . sen^2 l . sen l_0 . cos\, \Delta w . \eta_0 - \\ & - \frac{s . sen\, \alpha . tang\, l}{a . sen\, 1''} \frac{\delta a}{a} + sen\, \alpha . tang\, l \left[\begin{matrix} \Delta\theta . sen\, 1'' (1 - {}^1/_2 sen^2 \Phi_0) - \\ - sen\, \Delta\theta . sen\, l_0 . cosec\, l - {}^1/_2 sen^2 \Phi_0 sen\, \Delta\theta . cos 2\theta_m \end{matrix}\right] \frac{e . \delta e}{sen\, 1''} .\end{aligned}\right\} \quad (84$$

A queste equazioni si suol dare un'altra forma introducendo in luogo di η il suo valore in funzione della longitudine ω provvisoria (o della longitudine definitiva ω', lo che vale lo stesso) dato

dalla seconda delle (13) o dalla seconda delle (78), secondo che si considera la (83) o la (84). Dalla (83) si ha in tal modo

$$\varepsilon = \alpha - A - (\omega - \lambda)\,sen\,l + \xi_0 . \Delta\omega . sen\,1'' . tang\,l . cotg\,l_0 . cos\,l_0 \left\{ 1 - \frac{\Delta\varphi . sen\,1'' (1 + sen^2 l_0)}{sen\,l_0 . cos\,l_0} \right\} +$$

$$+ \eta_0 . tang\,l \left\{ \Delta\varphi . cotg\,l_0 . sen\,1'' + {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen^2 1'' . cos^2 l_0 - {}^1/_2 \Delta\varphi^2 . sen^2 1'' \left(1 - \frac{1 + cos^2 l_0}{sen\,l_0} \right) \right\} +$$

$$+ e . \delta e . \Delta\omega . \Delta\varphi . cos^3 l_0 . sen\,1'',$$

e, da questa, ricordando che dentro l'approssimazione tenuta si può porre

$$tang\,l = tang\,l_0 \left(1 + \frac{\Delta\varphi . sen\,1''}{sen\,l_0 . cos\,l_0} \right),$$

e rigettando i termini di ordine superiore al secondo, si trae:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = {} & \alpha - A - (\omega - \lambda)\,sen\,l + \xi_0 . \Delta\omega . sen\,1'' . cos\,l_0 (1 - \Delta\varphi . sen\,1'' . tang\,l_0) + \\ & + \eta_0\,sen\,1'' \left(\Delta\varphi + {}^1/_2 \Delta\omega^2 . sen\,l_0 . cos\,l_0 . sen\,1'' + \frac{2 . \Delta\varphi^2 . sen^2 l_0 . sen\,1''}{sen\,2\,l_0} \right) + \\ & + e . \delta e . \Delta\omega . \Delta\varphi . cos^3 l_0 . sen\,1''. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Omettiamo la formula analoga a quest'ultima ma proveniente dalla (84), giacchè nella sostituzione indicata più sopra non si presentano in questo caso notevoli semplificazioni da fare.

Per ben comprendere il significato delle precedenti espressioni dell'errore ε è necessario ricordare che la condizione fondamentale

$$(\omega' - \lambda)\,sen\,l = \alpha' - A \quad (86)$$

che, pel teorema di Laplace generalizzato, deve esistere fra l'attrazione locale in azimut e l'attrazione locale in longitudine, è affatto indipendente dalla natura della superficie di riferimento scelta per studiare il geoide, e suppone soltanto che le verticali geoidiche entro il campo terrestre considerato facciano angoli molto piccoli colle corrispondenti normali della superficie di riferimento stessa, per modo che negli sviluppi in serie i termini dipendenti dai quadrati di siffatte divergenze siano trascurabili. Le (83), (84) ed (85) non sono quindi, come è stato detto, relazioni più generali della (86), sono anzi semplicemente l'applicazione di questa al caso in cui per superficie di riferimento sia stato scelto l'ellissoide di rivoluzione: soltanto pongono anche in evidenza gli errori di misura delle reti geodetiche col confronto di due enti dei quali uno (l'azimut dedotto) è molto influenzato da questi errori.

15. Passeremo ora a sviluppare il secondo metodo che fu usato per determinare le costanti di un ellissoide di riferimento parziale o generale, metodo che, quantunque meno rigoroso del precedente, presenta tuttavia certi vantaggi, specialmente se i punti geodetici principali da considerare sono disposti come in molti dei grandi lavori geodetici già eseguiti, ed ha, in ogni caso, una grande importanza storica. D'altronde esso ci dà occasione di stabilire delle formule che sono in geodesia ellissoidica di notevole interesse. Abbiamo già indicato nel § 3 come tale metodo consista in ultima analisi nell'introdurre nelle equazioni fondamentali (4), in luogo delle coordinate geografiche, le distanze geodetiche fra i paralleli, e le lunghezze degli archi di parallelo corrispondenti alle geodetiche misurate. Convien aggiungere subito che, quantunque un arco di geodetica noto in lunghezza ed orientamento basti teoreticamente per determinare un arco di parallelo ed uno di meridiano, questo secondo metodo è più particolarmente adattato al caso in cui le triangolazioni che si considerano si estendono in catene lungo le linee geografiche coordinate, in modo che ciascun arco di geodetica calcolato da una catena speciale di triangoli non dia che o un arco di parallelo od un arco di meridiano. Inoltre si deve ammettere che i due punti geodetici principali che limitano ciascuna di tali geodetiche non siano troppo lontani, giacchè il metodo qui discusso si riduce a dedurre le costanti di un elissoide, comparando le lunghezze dei gradi di parallelo e di quelli di meridiano sotto latitudini diverse.

Ciò posto esporremo anzitutto i metodi più convenienti per calcolare la distanza ellissoidica fra i paralleli che passano per due punti congiunti da una triangolazione della quale è conosciuto l'orientamento, o dalla geodetica corrispondente. Nel caso in cui si tratti di una catena di triangoli orientati, estesa lungo un meridiano, il procedimento più ovvio è quello già indicato nel Capitolo V (Vol. I, pag. 178): è vero che nelle formule (21) di tale capitolo, le quali debbono essere applicate per cercare la quantità quivi indicata con σ, entra la latitudine ellissoidica di uno degli estremi della triangolazione, latitudine che a priori non è conosciuta: ma la quantità σ è un termine di correzione sempre molto piccolo, e, precisamente, di secondo ordine rispetto alla distanza fra l'estremo e il meridiano considerato, perlochè è sempre più che sufficiente la precisione che si ottiene introducendo nelle (21) suddette invece di φ la corrispondente latitudine astronomica osservata.

Un procedimento analogo può essere impiegato anche nel caso in cui sia da determinare la distanza fra i paralleli che limitano una geodetica qualunque tracciata fra due punti geodetici principali: ed infatti siano A, B (fig. 71) questi punti, ed immaginiamo dal punto B condotta la geodetica ellissoidica BC normale al meridiano di A; per mezzo del triangolo geodetico ABC rettangolo in C, nel quale si suppongono noti l'angolo in A (azimut della geodetica) ed il lato BA, si potrà calcolare l'arco di geodetica CB e l'arco di meridiano AC, per modo che per avere l'arco DA, che misura la distanza fra i paralleli DB ed AE, non rimarrà che da calcolare l'arco DC, che è evidentemente una quantità di secondo ordine rispetto alla CB, e quindi anche rispetto ad s, e che, se si conoscesse la latitudine geografica Φ del punto C, potrebbe esser calcolato dallo sviluppo (47) del Capitolo VIII (Vol. II, pag. 139), dal quale si avrebbe, indicando con S il lato CB:

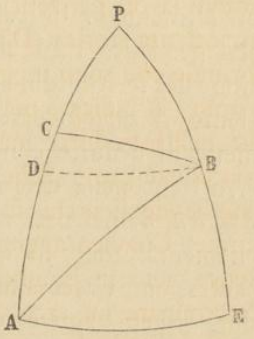

Fig. 71.

$$DC = \vartheta = \frac{S^2 . tang\,\Phi}{2N}. \qquad (87)$$

Il calcolo rigoroso di Φ è per altro assai complicato, e, dacchè ϑ è in generale una correzione assai piccola, conviene introdurre in luogo di Φ il suo valore prossimo calcolato dalle formule seguenti

$$\left.\begin{aligned} sen\,\alpha_2 &= \frac{sen\,\alpha_1 cos\,u_1}{cos\,u_2}, \\ cos\,U &= sen(\alpha_2 + \tau)\,cos\,u_2), \\ tang\,\Phi &= \frac{tang\,U}{\sqrt{1-e^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

nelle quali u_1, u_2 ed U rappresentano le latitudini ridotte dei punti A, B, C e τ è l'angolo in B proveniente dalla risoluzione del triangolo sferoidico CBA. È inutile il dire che in luogo delle latitudini geografiche dei punti B ed A nel calcolo delle (88) sono da introdurre le latitudini astronomiche osservate, e che la prima di tali formule diviene superflua ove l'azimut α_2 sia stato astronomicamente osservato.

16. Anche lo sviluppo

$$\sigma = s \cdot \cos\alpha - \frac{s^2 \cdot sen^2\alpha \cdot tang\,\varphi}{2N} - \frac{s^3 \cdot sen\,\alpha \cdot sen\,2\alpha}{12 N^2 \cdot \cos^2\varphi}\left(1 + 2 \cdot sen^2\varphi + \frac{e^2 \cdot \cos^4\varphi}{1 - e^2}\right) + \ldots \qquad (89)$$

già dedotto nel Capitolo VIII [pag. 139, formula (47)] darebbe un altro modo di calcolare l'arco σ di meridiano corrispondente alla geodetica s ed all'orientamento α: ma siccome l'approssimazione del terzo ordine non si può considerare in generale come sufficiente, il calcolo diverrebbe molto complicato. Però la (89) permette di dedurre con semplici differenziazioni le espressioni degli errori che nella determinazione di σ corrispondono agli errori $\delta\alpha$, $\delta\varphi$, δa, δe nei dati α, φ, a ed e, dati che, implicitamente od esplicitamente, sono in questa determinazione sempre necessarii. Tali espressioni, trascurando secondo il solito le quantità di secondo ordine rispetto agli errori elementari, sono le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\delta\sigma_\alpha &= -s \cdot sen\,\alpha \cdot \delta\alpha \cdot sen\,1''\left(1 + \frac{s \cdot \cos\alpha \cdot tang\,\varphi}{N} + \frac{s^2(1 + 2 \cdot sen^2\varphi)(\cos^2\alpha + \cos 2\alpha)}{6 \cdot N^2 \cdot \cos^2\varphi}\right),\\
\delta\sigma_\varphi &= -\frac{s^2 \cdot sen^2\alpha \cdot \delta\varphi \cdot sen\,1''}{2 \cdot N \cdot \cos^2\varphi} + \ldots,\\
\delta\sigma_a &= \frac{s^2 \cdot sen^2\alpha \cdot tang\,\varphi \cdot \delta a}{2 \cdot a \cdot N} + \ldots,\\
\delta\sigma_e &= -\frac{s^2 \cdot sen^2\alpha \cdot sen^3\varphi \cdot e \cdot \delta e}{2 \cdot a \cdot \cos\varphi\,(1 - e^2 \cdot sen^2\varphi)^{3/2}} + \ldots,
\end{aligned}\right\} \qquad (90$$

dalle quali risulta che quando l'azimut iniziale è molto piccolo, ossia quando la geodetica considerata non si allontana da un meridiano, il valore di σ calcolato è pressochè indipendente dagli errori elementari dei dati, e non è affetto che dall'errore commesso nella misura diretta della geodetica s medesima. Resta così già in parte giustificato quanto abbiamo detto più sopra sulla influenza della disposizione delle triangolazioni e dei punti geodetici principali sulla precisione ed applicabilità del metodo di ricerca che andiamo esponendo.

Nella maggior parte dei casi le reti trigonometriche che collegano i punti geodetici principali oltre che alla determinazione delle costanti terrestri servono per scopo geografico e cartografico, dimodochè di tali punti vengono determinate le posizioni geografiche coi metodi indicati nel Cap. VIII, rispetto all'ellissoide di riferimento Besseliano. In tal caso si possono calcolare le distanze σ

per mezzo dei procedimenti sviluppati nel Capitolo II (§§ 12 e 15). A prima giunta parrebbe che le formule quivi dedotte non convenissero a questo caso, giacchè in esse l'influenza di un errore nell'eccentricità o nel semiasse dell'ellissoide di riferimento è più che sensibile nei valori dell'arco di meridiano: si deve per altro notare che le latitudini introdotte in calcolo non sono già le latitudini osservate, ma provengono dalla risoluzione di una rete trigonometrica che si è fatta giacere sull'ellissoide arbitrario per modo da far rimanere inalterati i rapporti fra le distanze; per conseguenza l'approssimazione che si ottiene applicando le suddette formule è in realtà identica a quella che corrisponde agli altri procedimenti indicati ed è caratterizzata dalle relazioni (90).

17. Tutti i metodi precedenti ammettono che sia determinato l'orientamento ellissoidico della catena di triangoli che si considera o della geodetica s che le equivale: ma in pratica tale orientamento non può essere ottenuto che per mezzo di osservazioni astronomiche di azimut, cosicchè rimane sempre affetto dall'attrazione locale, la quale può assumere un valore relativamente notevole. Abbiamo visto, è vero, che nel caso in cui la catena o la geodetica non si distacchi da un meridiano l'influenza dell'errore di orientamento diviene estremamente piccola nell'arco σ calcolato, ma, ad ogni modo, se in ambedue gli estremi della geodetica s sono state fatte osservazioni di azimut, si hanno per essa due orientamenti diversi che non si possono comparare o ridurre ad un unico risultato, perchè per ciò sarebbe necessario conoscere le costanti dell'ellissoide definitivo cercato. Si potrebbero calcolare i due valori di σ corrispondenti ai due orientamenti ed assumere come valore più probabile di questa quantità la loro media aritmetica, considerandola come corrispondente al meridiano di longitudine media fra i meridiani che limitano l'arco s, ma quando si voglia considerare il meridiano medio suddetto è molto più semplice e conveniente ricorrere ad altre formule atte a dare direttamente σ in funzione di ambedue gli azimut estremi di s.

Sieno pertanto (fig. 72) P il polo dell'ellissoide ausiliario, A e B i due punti fra i quali corre la geodetica s, e rappresentiamo con α_1 ed α_2 gli azimut reciproci PAB, $360° - PBA$ provenienti dall'osservazione, intendendo che se la geodetica s non è un lato diretto della triangolazione, gli azimut α_1, α_2 sieno rispettivamente stati dedotti dai due osservati per mezzo dei metodi altrove esposti, ma prendendo successivamente ciascuno di questi azimut a

base del calcolo. Sieno inoltre D, C i punti nei quali i paralleli BC, AD degli estremi di s incontrano i meridiani PA, PB, in modo che per l'arco di meridiano σ cercato si abbia:

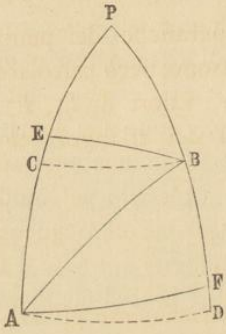

Fig. 72.

$$\sigma = AC = BD$$

Se dal punto A immaginiamo condotta la geodetica AF perpendicolare al meridiano di B, e dal punto B la geodetica BE perpendicolare al meridiano di A, ponendo

$$AE = K_1,\ BF = K_2,\ CE = k_1,\ DF = k_2,$$

si trae:

$$\sigma = K_1 - k_1 = K_2 + k_2 = \frac{K_1 + K_2}{2} + \frac{k_2 - k_1}{2}. \qquad (91)$$

I segni nel termine di correzione

$$+\frac{k_2 - k_1}{2}$$

cambiano, geometricamente parlando, se α_1 non è minore di 90° o se ambedue i punti A e B non sono dalla stessa parte dell'equatore, ma analiticamente la (91) si può considerare come generale perchè del cambiamento nei segni si tien conto esprimendo k_1 e k_2 in funzione dell'azimut e della latitudine.

Le quantità K_1 e K_2 si possono calcolare risolvendo i triangoli sferoidici AEB, BAF nei quali si conoscono rispettivamente gli elementi

$$AB = s,\quad A = \alpha_1,\quad E = 90°,$$

$$AB = s,\quad B = \alpha_2 - 180°,\quad F = 90°;$$

per la determinazione di σ non restano dunque che a trovare i valori di k_1 e k_2.

Sieno l_2 e L_2 le latitudini astronomiche, u_2 ed U_2 le latitudini ridotte dei punti B ed E, e ρ'_m il raggio di curvatura meridiana sotto la latitudine $\frac{l_2 + L_2}{2}$: l'arco k_1 essendo di secondo ordine rispetto ad s, si può evidentemente porre con più che sufficiente approssimazione [vedi Capitolo II, formula (35)]

$$k_1 = \rho'_m \operatorname{sen} 1'' (L_2 - l_2), \qquad (92)$$

ed analogamente per k_2

$$k_2 = \rho''_m \, sen\, 1'' (L_1 - l_1), \tag{93}$$

essendo l_1, L_1 le latitudini astronomiche o geografiche dei punti A ed F. Dalle formule (92) e (93) non si possono però calcolare le correzioni k_1, k_2 se prima non si determinano i valori di L_1, L_2. Ora rappresentando con ε_1, ε_2 gli eccessi sferici dei triangoli sferoidici BAF ed AEB, si ottiene

$$\text{angolo } BAF = 270° - \alpha_2 + \varepsilon_1,$$
$$\text{angolo } EBA = \ 90° - \alpha_1 + \varepsilon_2,$$

e, per conseguenza, indicando con A_1 ed A_2 rispettivamente gli azimut delle geodetiche AF e BE in A e B avremo:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 270° - \alpha_2 + \alpha_1 + \varepsilon_1, \\ A_2 &= \ 90° + \alpha_2 - \alpha_1 + \varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

La nota relazione fra le latitudini ridotte e gli azimut lungo una geodetica darà quindi

$$\left.\begin{aligned} cos\, U_1 &= cos\, u_1 \, sen\, A_1, \\ cos\, U_2 &= cos\, u_2 \, sen\, A_2, \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

dalle quali formule si calcoleranno i valori di U_1 ed U_2, e da questi i valori cercati di L_1 ed L_2 per mezzo delle solite corrispondenze fra le latitudini ridotte e le geografiche. Questo metodo di calcolo è dovuto a *Struve*.

18. Il procedimento proposto ed adottato da *Bessel* nel suo classico lavoro *Gradmessung in Ostpreussen* è invece il seguente. Riteniamo le notazioni stabilite nel Capitolo VIII, e riprendiamo le formule fondamentali relative al triangolo sferico ausiliario Besseliano

$$\left.\begin{aligned} s &= a \int_0^\theta d\theta \, . \sqrt{1 - e^2 . cos^2 u}, \\ sen\, u &= sen\, u_1 cos\, \theta + cos\, u_1 \, cos\, \alpha_1 sen\, \theta, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

che corrispondono all'ipotesi in cui l'origine dell'arco θ sia nel punto $s = 0$, e dalle quali si ricava con ovvii sviluppi in serie:

$$\left.\begin{aligned} s &= a \int_0^\theta d\theta \left(1 - {}^1\!/_2 e^2 . cos^2 u - {}^1\!/_8 e^4 . cos^4 u - \ldots\right), \\ sen\, u &= sen\, u_1 + \theta \, . \, cos\, u_1 cos\, \alpha_1 - {}^1\!/_2 \theta^2 . sen\, u_1 - {}^1\!/_6 \theta^3 . cos\, u_1 sen\, \alpha_1 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Sostituendo nella prima di queste a $cos^2 u$ il suo valore dedotto dalla seconda si trova

$$s = a \int_0^{\theta} d\theta \left\{ \begin{array}{l} 1 - {}^1/_2 e^2 . cos^2 u_1 - {}^1/_8 e^4 . cos^4 u_1 - \dots \\ + e^2 . \theta . sen\, u_1 cos\, u_1 cos\, \alpha_1 - \dfrac{e^2 . \theta^2}{2} (sen^2 u_1 - cos^2 u_1 cos^2 \alpha_1) + \dots \end{array} \right\},$$

e quindi, integrando fra i limiti indicati, avremo:

$$s = a\,\theta \left\{ \begin{array}{l} 1 - {}^1/_2 e^2 . cos^2 u_1 - {}^1/_8 e^4 . cos^4 u_1 - \dots \\ + {}^1/_2 e^2 . \theta . sen\, u_1 cos\, u_1 cos\, \alpha_1 - \dfrac{e^2 . \theta^2}{6} (sen^2 u_1 - cos^2 u_1 cos^2 \alpha_1) + \dots \end{array} \right\}. \quad (98)$$

L'arco σ di meridiano compreso fra i paralleli che limitano la geodetica s può ottenersi evidentemente dalla stessa formola (98) facendovi $\alpha_1 = 0$, nel qual caso, come si vede dalla seconda delle (96), si ha $\theta = u - u_1$; potremo dunque porre:

$$\sigma = a(u - u_1) \left(1 - \frac{e^2 . cos^2 u_1}{2} - \frac{e^4 . cos^4 u_1}{8} \right) + \left. \begin{array}{l} + \dfrac{a . e^2 (u - u_1)^2}{2} cos\, u_1 sen\, u_1 - \dfrac{a . e^2 (u - u_1)^3}{6} (sen^2 u_1 - cos^2 u_1) + \dots \end{array} \right\}. \quad (99)$$

Considerando per altro l'arco u come una funzione di θ caratterizzata dalla seconda delle (96) si ha

$$u = u_1 + \theta \left(\frac{du}{d\theta} \right)_0 + \frac{\theta^2}{1.2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)_0 + \frac{\theta^3}{1.2.3} \left(\frac{d^3 u}{d\theta^3} \right)_0 + \dots$$

ove $\left(\frac{du}{d\theta} \right)_0$, $\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)_0$, ... rappresentano i valori che prendono le derivate totali successive di u rispetto a θ per $\theta = 0$, e che si ricavano senza difficoltà dalla seconda delle formule (97), dalla quale si ottiene, in generale,

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{cos\, u_1 cos\, \alpha_1}{cos\, u} - \frac{\theta . sen\, u_1}{cos\, u} - \dots,$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{cos\, u_1 sen\, u . cos\, \alpha_1}{cos^2 u} \frac{du}{d\theta} - \frac{\theta . sen\, u_1 sen\, u}{cos^2 u} \frac{du}{d\theta} - \frac{sen\, u_1}{cos\, u},$$

. . . . . .

e per $\theta = 0$ ed $u = u_1$:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = \cos \alpha_1,$$

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_0 = -\operatorname{tang} u_1 \operatorname{sen}^2 \alpha_1.$$

Per conseguenza avremo

$$u - u_1 = \theta \cdot \cos \alpha_1 - \frac{\theta^2}{2} \operatorname{tang} u_1 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \ldots,$$

ed alla (99) potremo dare la forma seguente:

$$\sigma = a(u-u_1)\left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{e^2 \cdot \cos^2 u_1}{2} - \dfrac{e^4 \cdot \cos^4 u_1}{8} + \dfrac{e^2 \cdot \theta}{2} \cos u_1 \operatorname{sen} u_1 \cos \alpha_1 - \\ - \dfrac{e^2 \cdot \theta^2}{1.2}(3 \cdot \operatorname{sen}^2 u_1 - \operatorname{sen}^2 u_1 \cos^2 \alpha_1 - 2 \cdot \cos^2 u_1 \cos^2 \alpha_1) + \ldots \end{array}\right\}$$

Paragonando questa relazione colla (98) e chiamando per un momento con Ω la quantità che nella (98) stessa è racchiusa fra le parentesi grandi del secondo membro è facile vedere peraltro che si ha

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{(u-u_1)}{\theta} \frac{\left(\Omega - \dfrac{e^2 \cdot \theta^2}{12} \operatorname{sen}^2 u_1 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \ldots\right)}{\Omega};$$

quindi se si tiene l'approssimazione del terzo ordine inclusivamente, e si osserva che θ è dell'ordine di $\frac{s}{a}$, ed Ω è della forma $(1 + e^2 \cdot m)$, potremo scrivere:

$$\sigma = \frac{s \cdot (u-u_1)}{\theta}\left(1 - \frac{e^2 \cdot \theta^2}{12} \operatorname{sen}^2 u_1 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \ldots\right). \qquad (100)$$

Questa formula è già molto notevole e può essere impiegata nel calcolo di σ ove si voglia far uso di uno solo degli azimut estremi di s.

Per introdurre in calcolo il secondo azimut α_2 *reciproco* dell'azimut α_1 si ricorre al teorema di *Clairaut* che dà

$$\cos u_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = -\cos u_2 \operatorname{sen} \alpha_2,$$

dimodochè la (100) può trasformarsi nella seguente

$$\sigma = \frac{s(u-u_1)}{\theta}\left(1 + \frac{e^2 \cdot \theta^2}{12} \frac{\operatorname{sen}^2 u_1 \cos u_2}{\cos u_1} \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + \ldots\right),$$

e può quindi essere resa simmetrica rispetto alle quantità u_1 ed u_2 po-

nendo con *Bessel,* nel termine di correzione, $sen\, u_2$ in luogo del fattore

$$\frac{sen\, u_1 cos\, u_2}{cos\, u_1},$$

con che non resta alterata l' approssimazione della formula. Avremo dunque

$$\sigma = \frac{s\,(u-u_1)}{\theta}\left(1+\frac{e^2.\theta^2}{12} sen\, u_1 sen\, u_2 sen\, \alpha_1 sen\, \alpha_2\right), \qquad (101)$$

ove per altro resta da esprimere $(u-u_1)$ in funzione di s. Ora dal triangolo ausiliario Besseliano si ha

$$tang\, \frac{u-u_1}{2} = \frac{sen\, \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{sen\, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}\, tang\, \frac{\theta}{2},$$

in modo che, sviluppando in serie le due tangenti, potremo porre

$$(u-u_1)+\frac{(u-u_1)^3}{12}+\frac{(u-u_1)^5}{120}\ldots = \frac{sen\, \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{sen\, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}\left(\theta+\frac{\theta^3}{12}+\frac{\theta^5}{120}+\ldots\right),$$

d'onde, indicando, per semplificare, con Ψ la quantità

$$\frac{sen\, \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{sen\, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}, \qquad (102)$$

col solito metodo delle approssimazioni successive si trae, con facile calcolo, in una seconda approssimazione:

$$\Delta u = \theta\,.\,\Psi\left\{1+\frac{\theta^2}{12}(1-\Psi^2)+\frac{\theta^4}{240}(1-\Psi^2)(2-3\Psi^2)+\ldots\right\}.$$

Sostituendo nella (101) avremo:

$$\sigma = s\,.\,\Psi\left\{1+\frac{\theta^2}{12}(1-\Psi^2)+\frac{e^2.\theta^2}{12} sen\, u_1 sen\, u_2 sen\, \alpha_1 sen\, \alpha_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\theta^4}{240}(1-\Psi^2)(2-3\Psi^2)+\ldots\right\} \qquad (103)$$

Ma dalla (102) si ha

$$1-\Psi^2 = \frac{sen^2\, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} - sen^2\, \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{sen^2\, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}} = -\frac{sen\, \alpha_1 sen\, \alpha_2}{sen^2\, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}},$$

e, d'altra parte, la quantità $\alpha_2 - \alpha_1$ non differisce da 180° che della convergenza dei meridiani, dimodochè la quantità $sen^2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ differisce dall'unità di una quantità piccola di secondo ordine rispetto a θ ed $\frac{s}{a}$; dentro l'approssimazione tenuta nella (103) si può dunque scrivere

$$\sigma = s \cdot \Psi \left\{ 1 - \frac{\theta^2}{12} sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2 (1 - e^2 . sen\,u_1 sen\,u_2) + \right. \\ \left. + \frac{\theta^4}{240} sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2 (2 - 3\,\Psi^2) + \ldots \right\} \quad (104)$$

Il valore di θ non entrando che in termini di correzione potrebbe esser tratto senza errore sensibile dalla formula (69) del Capitolo VIII, introducendo in calcolo una delle latitudini ridotte corrispondenti alle latitudini astronomiche degli estremi di s: però è molto più semplice ed elegante esprimere direttamente θ per s, osservando che dalla precedente (98) si ha

$$a . \theta = \frac{s}{1 - {}^1/_2 e^2 . cos^2 u_1 - \ldots} = s (1 + {}^1/_2 e^2 . cos^2 u_1 + \ldots),$$

od anche, partendo dalla latitudine ridotta u_2 del secondo estremo di s,

$$a . \theta = s (1 + {}^1/_2 e^2 . cos^2 u_2 + \ldots);$$

e se si adotta la media geometrica dei due termini di correzione come valore più di ciascuno di essi prossimo al vero, si ottiene:

$$a . \theta = s (1 + {}^1/_2 e^2 . cos\,u_1 cos\,u_2 + \ldots),$$
$$a^2 . \theta^2 = s^2 (1 + e^2 . cos\,u_1 cos\,u_2 + \ldots).$$

Eliminando θ dalla (104) per mezzo di queste ultime relazioni e osservando che è

$$(1 - e^2 . sen\,u_1 sen\,u_2)(1 + e^2 . cos\,u_1 cos\,u_2) = 1 + e^2 . cos(u_2 + u_1) + e^4 . \{\ldots\}$$

avremo finalmente

$$\sigma = s . \frac{sen \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}}{sen \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}} \left\{ 1 - \frac{s^2}{a^2} sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2 \{1 + e^2 . cos(u_2 + u_1)\} + \right. \\ \left. + \frac{s^4}{240 . a^4} sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2 (2 - 3\,\Psi^2) \right\}, \quad (105)$$

formula che equivale a quella originale di *Bessel,* ed ove il termine in s^4 è così piccolo che può essere sempre trascurato.

Dacchè la quantità $\alpha_2 - \alpha_1$ non differisce da 180° che per la convergenza dei meridiani, l'influenza delle attrazioni locali in azimut $\eta_1 tang\, l_1$, $\eta_2 tang\, l_2$ nel divisore $sen \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ in generale è di un ordine inferiore a quella che esse hanno nel fattore $sen \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$, e quindi è facile vedere che l'errore in σ dovuto a tali attrazioni, dalle quali non è possibile correggere gli azimut se non in una seconda approssimazione, cioè dopo un calcolo approssimativo delle componenti η, è dato prossimamente da:

$$\delta \sigma_\alpha = {}^1/_2 s \,.\, cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} (\eta_1 tang\, l_1 + \eta_2 tang\, l_2) . \qquad (106)$$

Ne risulta, come era prevedibile, che anche in questo procedimento tale errore diviene affatto trascurabile quando la geodetica considerata s non si allontana molto da un meridiano. In quanto alle influenze degli errori nelle costanti a ed e, esse non differiscono da quelle inerenti ai metodi sviluppati nei precedenti paragrafi.

19. È molto importante di ben caratterizzare la differenza fondamentale che passa fra le due classi di procedimenti sopra esposti di calcolare la lunghezza di un arco di meridiano, delle quali l'una si vale dei dati astronomici di un solo degli estremi della geodetica misurata s, e l'altra dei dati di ambedue gli estremi; in questo ultimo caso ove i due estremi sieno sotto longitudini notevolmente diverse non resta più determinato in longitudine il meridiano al quale l'arco σ appartiene, se non si ammette che le attrazioni locali vadano variando con legge lineare lungo la linea s, o, in altri termini, che si possa fare astrazione dalle piccole onde locali del geoide, mentre nel primo caso restano invece maggiormente affetti i risultati dall'influenza dell'attrazione locale dell'azimut astronomico considerato. Ambedue i metodi sono quindi in difetto per geodetiche notevolmente inclinate ai meridiani, nè sarebbe possibile trovare altri metodi che conducessero a risultati più precisi. Anche di qui risulta chiaramente la necessità di allineare lungo i meridiani i punti geodetici principali che debbono servire a determinazioni di archi di meridiano, a meno che non si voglia tener conto degli errori che negli archi calcolati sono dovuti all'influenza delle attrazioni locali in azimut ed in latitudine, nel qual caso si ritorna, in ultima analisi, al metodo di compensazione sviluppato

nella prima parte di questo capitolo. Per azimut molto prossimi a 0° od a 180° tutti gli indicati procedimenti per calcolare σ sono ugualmente buoni: sarà soltanto da tener presente che più rigorosi sono i primi, se per ciascuna geodetica o catena di triangoli si calcolano due distinti archi di meridiano, assumendo successivamente per dati astronomici quelli di ciascuno dei suoi estremi, nel qual caso ciascuno dei due archi di meridiano andrà separatamente introdotto in calcolo come corrispondente ad una longitudine diversa: gli archi ottenuti poi col procedimento di *Bessel* o con quello di *Struve* o con altri analoghi debbono essere considerati come corrispondenti alla longitudine media fra quelle che limitano l'arco di geodetica o la catena di triangoli da cui σ è stato calcolato.

20. Naturalmente osservazioni analoghe alle precedenti debbono esser fatte anche sulla determinazione degli archi di parallelo, e quindi non considereremo che il caso in cui la geodetica o la rete dei triangoli che determinano l'arco corra prossimamente lungo di questo.

Se debbono essere usufruiti soltanto i dati astronomici φ_1, α_1, di uno degli estremi della geodetica s, l'arco di parallelo da determinare è quello che sotto la latitudine φ_1 corre fra i meridiani che limitano la s, ed il procedimento più semplice e più preciso per determinarlo consiste nel calcolare anzitutto coi metodi altrove esposti, e *partendo dai dati astronomici dell'estremo considerato,* la differenza $\Delta\omega_1$ di longitudine fra questo e l'altro estremo. Rappresentando con $\Im_1$ l'arco di parallelo cercato si ha quindi:

$$\Im_1 = \frac{a \cdot \cos\varphi_1}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sen^2\varphi_1}} \Delta\omega_1 sen\, 1'' = a \cdot \cos u_1 \Delta\omega_1 sen\, 1'' . \qquad (107)$$

L'approssimazione del risultato si ottiene facilmente per mezzo dello sviluppo (22) del Capitolo VIII, dal quale si trae

$$\Im_1 = r_1 \Delta\omega_1 sen\, 1'' = s \cdot sen\, \alpha_1 + \frac{s^2 \cdot tang\, \varphi_1 sen\, 2\alpha_1}{2 \cdot N_1} + ecc. \qquad (108)$$

formula che, pure equivalendo alla (107), non conviene al calcolo di $\Im$ solo perchè l'approssimazione del terzo ordine in generale non è sufficiente, ed il termine di quarto ordine riuscirebbe molto complicato. Se si indicano con $\delta\Im_\alpha$, $\delta\Im_\varphi$, $\delta\Im_a$, e $\delta\Im_e$ gli errori corrispondenti in $\Im$ alle variazioni $\delta\alpha$, $\delta\varphi$, δa e δe negli elementi

di calcolo, avremo quindi con semplici differenziazioni:

$$\delta \vartheta_\alpha = \left(s \cdot \cos \alpha_1 + \frac{s^2 \cdot tang\, \varphi_1 \cos 2\alpha_1}{N_1} + \dots \right) \delta \alpha_1 \cdot sen\, 1'',$$

$$\delta \vartheta_\varphi = \frac{s^2 \cdot sen\, 2\alpha_1}{2 \cdot N_1 \cos^2 \varphi_1} \delta \varphi_1 \cdot sen\, 1'' + \dots,$$

$$\delta \vartheta_a = \frac{s \cdot tang\, \varphi_1 sen\, 2\alpha_1}{2 \cdot N_1} \frac{\delta a}{a} + \dots,$$

$$\delta \vartheta_e = \frac{s^2 \cdot sen^2 \varphi_1 \cdot tang\, \varphi_1 \cdot sen\, 2\alpha_1}{2 \cdot a} e \cdot \delta e + \dots,$$

Ne risulta che anche nel calcolo di un arco di parallelo, se la geodetica s non si allontana troppo dal parallelo gli errori δa, δe, $\delta \varphi$ negli elementi a, e e φ hanno influenza piccolissima e trascurabile in pratica; però l'influenza dell'errore nell'azimut, meno che in vicinanza dell'equatore, rimane notevole e si riduce prossimamente a

$$\frac{s^2 \cdot tang\, \varphi_1}{N_1} \delta \alpha_1 sen\, 1'' = \frac{s^2 \cdot tang^2 \varphi_1}{N_1} \eta_1 \cdot sen\, 1''.$$

Nel raro ma possibile caso in cui $\delta \alpha_1$ fosse di $30''$, per s di 300000 metri e $\varphi_1 = 45°$ raggiungerebbe circa 2^m, e non sarebbe completamente trascurabile, ma si dovrebbe quindi scrivere

$$\vartheta = \vartheta_1 - \frac{s^2 \cdot tang^2 \varphi_1}{N_1} \eta_1 \cdot sen\, 1'', \qquad (109)$$

e di questa formula sarà da fare uso invece che della (107), almeno nelle regioni ove le attrazioni locali sono molto notevoli.

21. Il prof. *Iadanza* propone un altro procedimento per calcolare un arco di parallelo da una catena di triangoli distesa lungo di esso, ed è il seguente.

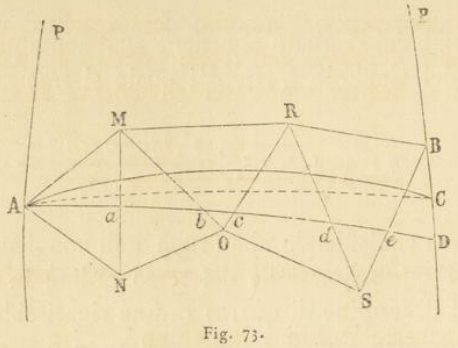

Fig. 73.

Sia $A\,M\,N\,O\,R\,S\,B$ (fig. 73) la catena considerata, $P\,D$ il meridiano del punto B, e supponiamo che con un metodo analogo a quello indicato nel Capitolo V (volume I, pag. 178) pel caso di un arco di meridiano, partendo dall'orientamento osservato in A per la catena siano state calcolate le varie parti $A\,a$, $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$, $d\,e$ dell'arco $A\,D = S$ della geodetica che taglia normalmente in A il meridiano di questo punto, e, più, l'angolo $B\,D\,A$ e l'ultima parte $e\,D$ compresa fra l'ultimo lato della rete ed il meridiano di B. Ottenuti S ed il secondo orientamento $B\,D\,A$, si possono calcolare:

1.° la latitudine Φ del punto D, dallo sviluppo (12) del Capitolo VIII, sviluppo che, protratto fino al 4.° ordine inclusivamente, dà in questo caso

$$\Phi = \varphi_1 - \frac{S^2 . tang\,\varphi_1}{2 . \rho_1 N_1 sen\,1''} - \frac{S^4 . tang\,\varphi_1}{24 . a^4 . sen\,1''} (1 + 3\,tang^2 \varphi_1), \quad (110)$$

essendo φ_1, ρ_1, N_1 gli elementi geodetici di calcolo corrispondenti al punto A;

2.° l'arco σ di meridiano compreso fra i punti C e D, con una delle formule indicate nell'ultima parte del Capitolo II;

3.° l'arco di geodetica s che congiunge i punti A e C di eguale latitudine, dal triangolo $A\,C\,D$, nel quale sono noti i lati $A\,D = S$, $C\,D = \sigma$, e l'angolo $A\,D\,C$ che rappresenteremo con A. In questo calcolo, dacchè l'arco σ è di secondo ordine rispetto all'arco S, conviene valersi della formula

$$\left.\begin{aligned} log\,s = log\,S - M\Big(\frac{\sigma}{S} cos\,A^* + \frac{\sigma^2}{2 . S^2} cos\,2\,A^* + \\ + \frac{\sigma^3}{3 . S^3} cos\,3\,A^* + \ldots\Big), \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

nella quale M rappresenta il modulo dei logaritmi volgari, ed A^* l'angolo A corretto del terzo dell'eccesso sferico del triangolo $A\,C\,D$. Questa formula si deduce molto semplicemente dalla relazione generale

$$s = S\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{S^2} - \frac{2\,\sigma\,cos\,A^*}{S}},$$

ponendo

$$log\,s = log\,S + {}^1\!/_2 log\Big(1 - \frac{2\,\sigma}{S} cos\,A^* + \frac{\sigma^2}{S^2}\Big),$$

e sviluppando in serie l'ultimo logaritmo.

Resta per tal modo da determinare l'arco di parallelo $\mathfrak{H}$ cor-

rispondente alla geodetica s che ne congiunge gli estremi, ed è nota in direzione e lunghezza, e, perciò, il prof. *Iadanza* paragona anzitutto l'arco s colla relativa corda e quindi questa corda coll'arco di parallelo cercato: ma alle sue formule finali si giunge molto più semplicemente osservando che, se si rappresenta, come nel § 5 del Capitolo VIII, con $\Delta\Omega$ la differenza di longitudine sferica fra gli estremi di s sulla sfera che ha per raggio la gran normale N_1 del punto A, coll'approssimazione del 4.° ordine inclusivamente si può porre [Capitolo VIII, formula (27)]

$$\Delta\omega = \Delta\Omega - \frac{e^2 . s^3 . \cos\varphi_1 \cos\alpha_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1}{6 N_1^3 (1 - e^2) \operatorname{sen} 1''},$$

mentre, in questo caso, il triangolo sferico, da cui la quantità $\Delta\Omega$ deve esser calcolata, essendo isoscele, dà

$$\operatorname{sen}\frac{\Delta\Omega}{2} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{s}{2 . N_1 \operatorname{sen} 1''}}{\cos\varphi_1},$$

ossia, sviluppando in serie rispetto a $\Delta\Omega$ ed s:

$$\Delta\Omega = \frac{s}{N_1 \cos\varphi_1 \operatorname{sen} 1''} + \frac{s^3 . \operatorname{tang}^2\varphi_1}{24 . N_1^3 \cos\varphi_1 \operatorname{sen} 1''} + \textit{quinto ordine.}$$

Sostituendo nella soprascritta espressione di $\Delta\omega$, ed osservando che l'arco $\mathfrak{S}$ cercato non è altro che $\Delta\omega . N_1 \cos\varphi_1 \operatorname{sen} 1''$, si ottiene

$$\mathfrak{S} = s + \frac{s^3 . \operatorname{tang}^2\varphi_1}{24 N_1^2} - \frac{e^2 . s^3 . \cos^2\varphi_1 \cos\alpha_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1}{6 N_1^3 (1 - e^2) \operatorname{sen} 1''} + \textit{quinto ordine,} \quad (112)$$

ove però il termine in e^2 può essere trascurato, perchè α_1 non differisce da un retto che per una quantità dell'ordine di $\frac{\sigma}{S}$, dimodochè il detto termine è minore delle quantità del quinto ordine relativo trascurate. Sarebbe molto facile del resto tener conto anche di queste.

22. Per stabilire ora delle formule atte al calcolo di un arco di parallelo in funzione della lunghezza di una geodetica qualunque s e di ambedue gli azimut osservati alle sue estremità, riprendiamo le formule generali (Capitolo VIII, § 19, pag. 165)

$$n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \ldots,$$

$$\Delta\omega = w - {}^{1}/_{2} e^2 . \cos u_0 \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + n - {}^{1}/_{2} tang^2 \frac{E}{2} - {}^{1}/_{4} tang^4 \frac{E}{2} - \ldots\right)(\theta_2 - \theta_1) - \\ - {}^{1}/_{2} tang^2 \frac{E}{2} sen(\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_1) + \\ + {}^{1}/_{8} tang^4 \frac{E}{2} sen\, 2(\theta_2 - \theta_1) \cos 2(\theta_2 + \theta_1) + \ldots \end{array} \right\},$$

$$tang \frac{E}{2} = \frac{e . sen\, u_0}{\sqrt{1 - e^2}},$$

dalle quali, osservando che è

$$tang^2 \frac{E}{2} = \frac{e^2 . sen^2 u_0}{4} + e^4 \{\ldots\},$$

e sviluppando in serie $sen(\theta_2 - \theta_1)$, si trae senza difficoltà:

$$\Delta\omega = w - \frac{\Delta\theta . e^2 . \cos u_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{e^2}{4}\left(1 - sen^2 u_0 \cos^2 \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right) + \\ + \frac{e^2 . \Delta\theta^2}{48} sen^2 u_0 \cos(\theta_2 + \theta_1) + \ldots \end{array} \right\}, \quad (113)$$

Ora dalla relazione fondamentale

$$\cos u_0 = \cos u_1 sen\, \alpha_1 = - \cos u_2 sen\, \alpha_2$$

(ove α_2 è l'azimut reciproco ad α_1), si ha

$$\cos u_0 = \frac{\cos u_1 sen\, \alpha_1 - \cos u_2 sen\, \alpha_2}{2},$$

d'onde, ponendo per semplicità

$$90^\circ + \alpha_m = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 - 180^\circ,$$

$$u_m = \frac{u_2 + u_1}{2}, \quad \Delta u = u_2 - u_1,$$

ed esprimendo u_1, α_1, u_2 ed α_2 in funzione di α_m, u_m, $\Delta\alpha$ e Δu, si trae con ovvii sviluppi in serie:

$$\cos u_0 = \cos u_m sen\, \alpha_m - \frac{\Delta u . \Delta\alpha}{4} sen\, u_m \cos\alpha_m - \frac{\Delta\alpha^2 + \Delta u^2}{8} sen\, \alpha_m \cos u_m + \ldots$$

Ma dal triangolo sferico ausiliario Besseliano si deduce, per mezzo delle analogie di *Nèper,*

$$tang\frac{\Delta\theta}{2}\cos\alpha_m = tang\frac{\Delta u}{2}\cos\frac{\Delta\alpha}{2},$$

$$sen\frac{\Delta\alpha}{2} = tang\frac{\Delta\theta}{2}sen\,\alpha_m tang\,u_m,$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= \Delta\theta\,.\cos\alpha_m + \text{terzo ordine,}\\ \Delta\alpha &= \Delta\theta\,.sen\,\alpha_m tang\,u_m + \text{terzo ordine.}\end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Quindi, sostituendo nella precedente espressione di $\cos u_0$, avremo con facili riduzioni:

$$\cos u_0 = \cos u_m\, sen\,\alpha_m\left[1 - \frac{\Delta\theta^2}{8\cos^2 u_m}(sen^2 u_m + \cos^2\alpha_m) + \text{quarto ordine}\right].$$

Se si sostituisce nulla (113) e si osserva che, per essere in generale

$$sen\,u_0\cos\theta = sen\,u,$$

si ha evidentemente

$$sen\,u_m = sen\,u_0\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2} + \text{secondo ordine,}$$

si trova

$$\Delta\omega = w - \frac{e^2.\Delta\theta.\cos u_m sen\alpha_m}{2}\left\{1 + \frac{e^2.\cos^2 u_m}{4} - \frac{\Delta\theta^2}{8\cos^2 u_m}(sen^2 u_m + \cos^2\alpha_m) + \ldots\right\}.$$

Ciò posto ricordiamo che l'angolo w deve esser calcolato dal triangolo sferico ausiliario Besseliano, il quale dà

$$sen\frac{w}{2} = \frac{sen\,\alpha_m}{\cos u_m}sen\frac{\Delta\theta}{2},$$

d'onde, sviluppando in serie rispetto a w ed a $\Delta\theta$, si deduce, col solito metodo delle approssimazioni successive, in una seconda approssimazione

$$w' = \Delta\theta\frac{sen\,\alpha_m}{\cos u_m}\left\{1 - \frac{\Delta\theta^2.sen\,\alpha_m}{24\cos u_m}\left(1 - \frac{sen^2\alpha_m}{\cos^2 u_m}\right)\right\},$$

e nella terza:

$$w = \Delta\theta\frac{sen\,\alpha_m}{\cos u_m}\left\{1 - \frac{\Delta\theta^2}{24}\left(1 - \frac{sen^2\alpha_m}{\cos^2 u_m}\right) + \frac{\Delta\theta^4}{1920}\left(1 - \frac{sen^2\alpha_m}{\cos^2 u_m}\right)\left(1 - 9\frac{sen^2\alpha_m}{\cos^2 u_m}\right)\right\}.$$

Sostituendo nella precedente ultima espressione di $\Delta\omega$ avremo

$$\Delta\omega = \Delta\theta \frac{sen\,\alpha_m}{cos\,u_m} \left\{ \begin{array}{l} 1 - {}^1/_2 e^2 . cos^2 u_m (1 + {}^1/_4 e^2 . cos^2 u_m) - \\ - \frac{\Delta\theta^2}{24} \left\{ 1 - \frac{sen^2 \alpha_m}{cos^2 u_m} - {}^3/_2 e^2 (sen^2 u_m + cos^2 \alpha_m) \right\} + \\ + \frac{\Delta\theta^4}{1920} \left(1 - \frac{sen^2 \alpha_m}{cos^2 u_m} \right) \left(1 - 9 \frac{sen^2 \alpha_m}{cos^2 u_m} \right) + \ldots , \end{array} \right\} \quad (115)$$

ove rimane ad esprimere $\Delta\theta$ in funzione di s. Ora dalla formula (75) del Capitolo VIII (pag. 153), osservando che in essa è

$$\frac{cos^2 \frac{E}{2}}{cos\,E} = \frac{1}{1 - tang^2 \frac{E}{2}},$$

$$tang^2 \frac{E}{2} = \frac{\sqrt{1 - e^2 . cos^2 u_o} - \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 . cos^2 u_o} + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{e^2 . sen^2 u_o}{4} (1 + e^2 - {}^1/_2 e^2 . sen^2 u_o + \ldots),$$

e sviluppando in serie $sen\,\Delta\theta$ e $sen\,2\,\Delta\theta$, si trae

$$\frac{s (1 - {}^1/_4 e^2 . sen^2 u_o - {}^1/_4 e^4 . sen^2 u_o + {}^1/_8 e^4 . sen^4 u_o + \ldots)}{a \sqrt{1 - e^2} (1 + {}^1/_{64} e^4 . sen^4 u_o + \ldots)} =$$

$$= \Delta\theta \left[\begin{array}{l} 1 + {}^1/_4 e^2 . sen^2 u_o (1 + e^2 - {}^1/_2 e^2 . sen^2 u_o + \ldots) \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \ldots \right) cos\,2\,\theta_m + \\ + {}^1/_{64} e^4 . sen^4 u_o - {}^1/_{32} e^4 . sen^4 u_o\, cos^2 2\,\theta_m \end{array} \right],$$

da cui

$$\Delta\theta = \frac{s}{a\sqrt{1 - e^2}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - {}^1/_4 e^2 (1 + e^2) sen^2 u_o (1 + cos\,2\,\theta_m) + \\ + \frac{1}{24} e^2 . \Delta\theta^2 . sen^2 u_o cos\,2\,\theta_m + \frac{3}{32} e^4 . sen^4 u_o (1 + cos\,2\theta_m)^2 + \ldots \end{array} \right\}, \quad (116)$$

ove si è posto $2\,\theta_m = \theta_1 + \theta_2$.

Ma si ha

$$sen^2 u_o (1 + cos\,2\,\theta_m) = 1 - cos^2 u_o + sen^2 u_o cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 - sen^2 u_o sen\,\theta_1 sen\,\theta_2,$$

e, dal triangolo sferico ausiliario,

$$sen\,u_o cos\,\theta_1 = sen\,u_1,$$
$$sen\,u_o cos\,\theta_2 = sen\,u_2,$$
$$sen\,u_o sen\,\theta_1 = - cos\,u_1 cos\,\alpha_1,$$
$$sen\,u_o sen\,\theta_2 = cos\,u_2 cos\,\alpha_2,$$
$$cos\,u_o = cos\,u_1 sen\,\alpha_1 = - cos\,u_2 sen\,\alpha_2;$$

quindi sarà

$$sen^2 u_0(1+\cos 2\theta_m) = 1+sen\,u_1 sen\,u_2+\cos u_1\cos u_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) =$$
$$=1-{}^1/_2\cos\Delta\alpha(\cos 2u_m+\cos\Delta u)-{}^1/_2\cos 2u_m+{}^1/_2\cos\Delta u =$$
$$=1-\cos 2u_m+\frac{\Delta\alpha^2}{4}(1+\cos 2u_m)+\ldots =$$
$$=2.sen^2 u_m+{}^1/_2\Delta\alpha^2.\cos^2 u_m,$$

e, sostituendo a $\Delta\alpha$ il valore (114):

$$sen^2 u_0(1+\cos 2\theta_m) = 2\,sen^2 u_m(1+{}^1/_4\Delta\theta^2.sen^2\alpha_m). \qquad (117)$$

Analogamente si trova:

$$\left.\begin{array}{l} sen^2 u_0\cos 2\theta_m = sen^2 u_0(1+\cos 2\theta_m)-1+\cos^2 u_0 = \\ \quad = 2\,sen^2 u_m-1-\cos u_1\cos u_2 sen\,\alpha_1 sen\,\alpha_2+\Delta\theta^2\{\ldots\}+\ldots = \\ \quad = sen^2 u_m-\cos^2 u_m\cos^2\alpha_m+\Delta\theta^2\{\ldots\}+\ldots \end{array}\right\} \qquad (118)$$

Tenendo conto delle (117) e (118) alla (116) si può dare la forma

$$\Delta\theta=\frac{s}{a.sen\,1''\sqrt{1-e^2}}\left\{\begin{array}{l} 1-{}^1/_2 e^2(1+e^2)\,sen^2 u_m+{}^3/_8 e^4.sen^4 u_m+ \\ +{}^1/_{24}e^2.\Delta\theta^2.\{\cos^2\alpha_m(4.sen^2 u_m-1)-2.sen^2 u_m\}+\ldots \end{array}\right\},$$

che si riduce facilmente a

$$\Delta\theta=\frac{s}{a.sen\,1''}\left\{\begin{array}{l} 1+{}^1/_2 e^2.\cos^2 u_m+\frac{3}{8}e^4.\cos^4 u_m+ \\ +\frac{e^2.s^2}{24.a^2}\{\cos^2\alpha_m(4.sen^2 u_m-1)-2\,sen^2 u_m\}+\ldots \end{array}\right\}$$

se si sviluppa in serie il fattore $(1-e^2)^{-1/2}$ e si introduce $\frac{s}{a}$ in luogo di $\Delta\theta$ nell'ultimo termine di correzione. Sostituendo nella (115) si deduce con facile calcolo

$$\Delta\omega=\frac{s.sen\,\alpha_m}{a.\cos u_m sen\,1''}\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{s^2}{24.a^2}\left[1-\frac{sen^2\alpha_m}{\cos^2 u_m}-e^2\left(\cos^2\alpha_m(4\,sen^2 u_m-1)+sen^2 u_m\right)\right]+ \\ +\frac{s^4}{1920.a^4}\left(1-\frac{sen^2\alpha_m}{\cos^2 u_m}\right)\left(1-9\frac{sen^2\alpha_m}{\cos^2 u_m}\right)+\ldots \end{array}\right\}$$

d'onde, esprimendo dentro la parentesi maggiore del secondo mem-

bro la latitudine ridotta in funzione della geografica, si deduce

$$\Delta\omega = \frac{s\,.\,sen\,\alpha_m}{a\,.\,cos\,u_m sen\,1''}\left\{1-\frac{s^2}{24\,.\,N_m^2}\left[1-\frac{sen^2\alpha_m}{cos^2\varphi_m}+e^2\,.\,cos^2\alpha_m(1-4\,sen^2\varphi_m)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{s^4}{1920\,.\,a^4}\left(1-\frac{sen^2\alpha_m}{cos^2u_m}\right)\left(1-9\frac{sen^2\alpha_m}{cos^2u_m}\right)+\ldots\right\}.$$

Ora $a\,.\,cos\,u_m$ è il raggio del parallelo sotto la latitudine φ_m, quindi per l'arco ϑ cercato di parallelo sotto questa latitudine avremo finalmente

$$\vartheta = s\,.\,cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\left\{1-\frac{s^2}{24\,.\,N_m^2}\left[1-\frac{cos^2\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)}{cos^2\varphi_m}+e^2\,.\,sen^2\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)(1-4sen^2\varphi_m)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{s^4}{1920\,.\,a^4}\left(1-\frac{cos^2\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}}{cos^2u_m}\right)\left(1-9\frac{cos^2\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}}{cos^2u_m}\right)+\ldots\right\} \quad (119)$$

ove però il termine in s^4 non è sensibile che per valori di s maggiori di un milione di metri, quali non si ha mai occasione di considerare nella determinazione dell'ellissoide di riferimento per mezzo di archi di meridiano e di parallelo.

Anche per la formula (119), che è analoga alla (105), è da notare che l'arco ϑ di parallelo non corrisponde affatto alla media delle latitudini astronomiche l_1, l_2 degli estremi dell'arco s corrette delle loro attrazioni locali, se non si ammette che l'attrazione varii linearmente da l_1 ad l_2, ossia che si possa fare astrazione dall'influenza delle piccole onde locali e casuali del geoide. Se quindi l'arco s è molto grande e gli azimut α_1 ed α_2 sono assai diversi da 90° o 270°, conviene piuttosto calcolare due distinti archi di parallelo, corrispondenti rispettivamente agli elementi l_1, α_1 ed l_2, α_2, ed introdurli poi separatamente nel calcolo delle costanti dell'ellissoide di riferimento.

L'influenza delle attrazioni locali n_1 ed n_2 nel valore di ϑ ottenuto per mezzo della (119) è prossimamente data da:

$$\delta\vartheta_\alpha = -\tfrac{1}{2}s\,.\,sen\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\left[1-\frac{s^2}{24N^2}\left(1-.\,\frac{cos^2\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}{cos^2\varphi_m}\right)\right](n_1 tang\,l_1+n_2 tang\,l_2) \quad (120)$$

e nel caso in cui la linea s non si distacchi notevolmente dal parallelo diviene completamente trascurabile insieme alle influenze dovute agli errori negli altri elementi a ed e, influenze, queste ultime, che non differiscono da quelle inerenti ai metodi indicati nei precedenti paragrafi.

23. Resta ora a vedere come dagli archi di meridiano e di parallelo misurati geodeticamente e dalle coordinate astronomiche dei loro estremi si possa risalire alle espressioni delle componenti ξ ed η. Perciò ricordiamo che se φ_2, φ_1 sono le latitudini geografiche degli estremi di un arco di meridiano σ relativo a uno sferoide di costante a ed e, ponendo

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{a-b}{a+b}, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad 2\varphi_m = \varphi_2 + \varphi_1, \\ A &= 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\right)^2 c^6 + \ldots, \\ A.\beta_1 &= \frac{3}{2}c + \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}c^3 + \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}c^5 + \ldots, \\ A.\beta_2 &= \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}c^2 + \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\frac{3}{2}c^4 + \ldots\ldots\ldots \\ A.\beta_3 &= \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}c^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

si ha [vedi Capitolo II, formula (28)]

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \frac{8.a.(1-e^2).A}{(1+\sqrt{1-e^2})^3}\{\Delta\varphi.sen\,1'' - 2.\beta_1 sen\,\Delta\varphi.cos\,2\varphi_m + \\ + \beta_2 sen\,2\Delta\varphi.cos\,4\varphi_m - \ldots\}, \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

e, poichè, rappresentando con G la lunghezza del grado medio di meridiano, è [Capitolo II, formula (30)]

$$G = \frac{2.\pi.a.A(1-e^2)}{45(1+\sqrt{1-e^2})^3}, \quad (123)$$

si può anche scrivere

$$\sigma = \frac{180.G}{\pi}\{\Delta\varphi.sen\,1'' - 2\beta_1 sen\,\Delta\varphi.cos\,2\varphi_m + \beta_2 sen\,2\Delta\varphi.cos\,4\varphi_m - \ldots\},$$

ovvero, per essere $sen\,1'' = \frac{\pi}{648000} = \frac{1}{206264{,}8}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3600.\sigma}{G} = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\beta_1}{sen\,1''} sen\,\Delta\varphi.cos\,2\varphi_m + \\ + \frac{\beta_2}{sen\,1''} sen\,2\Delta\varphi.cos\,4\varphi_m - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (124)$$

Se l_1, l_2 sono le latitudini astronomiche corrispondenti alle latitudini ellissoidiche φ_1, φ_2 si ha per altro

$$l_1 = \varphi_1 + \xi_1, \quad l_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \Delta\varphi = \Delta l - (\xi_2 - \xi_1)$$

$$\varphi_m = l_m - \frac{\xi_2 + \zeta_1}{2},$$

$$sen\,\Delta\varphi = sen\,\Delta l - (\xi_2 - \xi_1)\cos\Delta l \ldots,$$

$$sen\,2\Delta\varphi = sen\,2\Delta l - 2(\xi_2 - \xi_1)\cos 2\Delta l + \ldots,$$

$$\cos 2\varphi_m = \cos 2 l_m + (\xi_2 + \xi_1)\, sen\, 2 l_m + \ldots,$$

$$\cos 4\varphi_m = \cos 4 l_m + 2(\xi_2 + \xi_1)\, sen\, 4 l_m + \ldots,$$

e quindi sarà:

$$\frac{3600 \cdot \sigma}{G} = l_2 - l_1 - \frac{2\beta_1}{sen\,1''} sen\,\Delta l \cdot \cos 2 l_m + \frac{\beta_2}{sen\,1''} sen\,2\Delta l \cdot \cos 4 l_m - \ldots$$

$$+ (\xi_2 - \xi_1)\left\{1 - \frac{2\beta_1}{sen\,1''}\cos\Delta l \cdot \cos 2 l_m + \frac{\beta_2}{sen\,1''}\cos 2\Delta l \cdot \cos 4 l_m + \ldots\right\} +$$

$$+ (\xi_2 + \xi_1)\left\{\frac{2\beta_1}{sen\,1''} sen\,\Delta l \cdot sen\,2 l_m - \frac{2\beta_2}{sen\,1''} sen\,2\Delta l \cdot sen\,4 l_m + \ldots\right\} + \ldots$$

Però il termine in $\xi_2 + \xi_1$ è dell'ordine di $\xi \cdot e^2 \cdot \Delta l$, giacchè β_1 è dell'ordine di c che è dell'ordine di e^2; quindi, per le ragioni già altrove esposte, il termine suddetto può essere tralasciato, insieme al termine in $(\xi_2 - \xi_1)\beta_2$, che è dell'ordine di $\xi \cdot e^4$, e possiamo scrivere semplicemente

$$\left.\begin{aligned}\xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{V}\Bigg[&\frac{3600 \cdot \sigma}{G} - l_2 + l_1 + \frac{2\beta_1}{sen\,1''} sen\,\Delta l \cdot \cos 2 l_m - \\ &- \frac{\beta_2}{sen\,1''} sen\,2\Delta l \cdot \cos 4 l_m + \ldots\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad (125)$$

avendo posto

$$V = 1 - \frac{2\beta_1}{sen\,1''}\cos\Delta l \cdot \cos 2 l_m + \frac{\beta_2}{sen\,1''}\cos 2\Delta l \cdot \cos 4 l_m + \ldots \quad (126)$$

Le costanti G, β_2 e β_1 che compariscono nella precedente espressione di $\xi_2 - \xi_1$ appartengono all'ellissoide di riferimento cercato, e sono quindi funzioni di forma nota delle costanti incognite di questo. Perciò sieno ora G', V', β'_1, β'_2 i valori analoghi a G, V, β_1, β_2 ma relativi ad un ellissoide ausiliario (per esempio all'ellissoide di

Bessel), di costanti a' ed e' note, e poniamo:

$$G=\frac{G'}{1+X}, \quad \beta_1=\beta_1'(1+Y). \tag{127}$$

Le altre costanti $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$ possono esser considerate come delle funzioni di β_1 caratterizzate dalle relazioni (121), per modochè si ha in generale

$$\beta_m=f(\beta_1'+\beta_1' Y)=\beta_m'+\beta_1'\frac{d\beta_m}{d\beta_1'} Y+\frac{\beta_1'^2}{1.2}\frac{d^2\beta_m}{d\beta_1'^2} Y^2+\ldots, \tag{128}$$

e, sostituendo nella (125), sviluppando in serie rispetto agli aumenti X, Y, e facendo, per semplificare,

$$\left.\begin{aligned}
L&=\frac{1}{V'}\left(\frac{3600.\sigma}{G'}-l_2+l_1+\frac{2\beta_1'}{sen\,1''}sen\,\Delta l.cos\,2l_m-\frac{\beta_2'}{sen\,1''}sen\,2\Delta l.cos\,4l_m+\ldots\right),\\
B&=\frac{3600.\sigma}{V'G'},\\
C&=\frac{1}{V'sen\,1''}\left(2\beta_1'sen\,\Delta l.cos\,2l_m-\beta_1'\frac{d\beta_2}{d\beta_1}sen\,2\Delta l.cos\,4l_m+\ldots\right),\\
D&=\frac{1}{V'sen\,1''}\left(2\beta_1'cos\,\Delta l.cos\,2l_m-\beta_1'\frac{d\beta_2}{d\beta_1}cos\,2\Delta l.cos\,4l_m+\ldots\right),
\end{aligned}\right\} \tag{129}$$

si trae

$$\xi_2-\xi_1=L+BX+(LD+C)Y+\textit{secondo ordine rispetto ad X ed Y}. \tag{130}$$

È però da notare che la quantità

$$\frac{3600.\sigma}{G'}-l_2+l_1$$

è dell'ordine delle attrazioni locali, mentre la costante β_1' è dell'ordine di e^2, cosicchè il coefficiente LD è dell'ordine di e^4 e di $e^2.\xi$, e può essere trascurato rispetto a C. Inoltre dalle (121) si trae

$$\beta_1=\frac{3}{2}c-\frac{9}{16}c^3+\ldots,$$

$$\beta_2=\frac{15}{8}c^2-\frac{15}{16}c^4+\ldots,$$

e, da queste:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_2&=\frac{5}{6}\beta_1^2+\frac{5}{54}\beta_1^4+\ldots\\
\beta_1\frac{d\beta_2}{d\beta_1}&=\frac{5}{3}\beta_1^2+\frac{10}{27}\beta_1^4+\ldots
\end{aligned}\right\}. \tag{131}$$

Per conseguenza in luogo delle (129) si può porre

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{V'}\left\{\frac{3600\,.\,\sigma}{G'} - l_2 + l_1 + \frac{2\,\beta_1'}{sen\,1''} sen\,\Delta l\,.\,cos\,2l_m - \left(\frac{5}{6}\beta_1'^2 + \frac{5}{54}\beta_1'^4\right) sen\,2\Delta l\,.\,cos\,4l_m + \ldots\right\}, \\ B &= \frac{1}{V'}\frac{3600\,.\,\sigma}{G'}, \\ C &= \frac{1}{V'}\left\{2\,\beta_1'\,sen\,\Delta l\,.\,cos\,2l_m - \left(\frac{5}{3}\beta_1'^2 + \frac{10}{27}\beta_1'^4\right) sen\,2\,\Delta l\,.\,cos\,4l_m + \ldots\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (132)$$

e per l'espressione cercata della differenza dell'attrazione locale in latitudine avremo:

$$\xi_2 - \xi_1 = BX + CY + L. \quad (133)$$

24. Analogamente sieno ω_2 ed ω_1 le longitudini ellissoidiche degli estremi di un arco $\Im$ di parallelo dell'ellissoide di riferimento cercato, e φ la corrispondente latitudine geografica, per modo che si abbia

$$\Im = \frac{a\,.\,cos\,\varphi}{\sqrt{1 - e^2\,.\,sen^2\varphi}}(\omega_2 - \omega_1)\,sen\,1''.$$

Se si introducono in luogo di ω_2, ω_1 e φ i loro valori in funzione delle corrispondenti quantità astronomiche ponendo

$$\omega_2 = \lambda_2 + \eta_2 sec\,l,$$
$$\omega_1 = \lambda_1 + \eta_1 sec\,l,$$
$$\varphi = l + \xi,$$

e si sviluppa in serie rispetto alle componenti ξ ed η delle attrazioni locali si trova senza difficoltà, dentro la solita approssimazione:

$$\Im = \frac{a\,.\,sen\,1''}{\sqrt{1 - e^2\,.\,sen^2 l}}\left(\Delta\lambda\,.\,cos\,l + \eta_2 - \eta_1 - \xi\,.\,\Delta\lambda\,.\,sen\,l\,.\,sen\,1''\frac{1 - e^2}{1 - e^2\,.\,sen^2 l}\right).$$

Esprimendo anche qui a in funzione del grado medio G per mezzo della relazione (123) e risolvendo rispetto ad $\eta_2 - \eta_1$, avremo quindi

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 - \eta_1 = {} & \frac{2\,.\,\pi\,.\,A\,.\,\Im\,(1 - e^2)\sqrt{1 - e^2\,.\,sen^2 l}}{45\,G\,(1 + \sqrt{1 - e^2})^3\,sen\,1''} - \\ & - \Delta\lambda\,.\,cos\,l + \xi\,.\,\Delta\lambda\,.\,sen\,l\,.\,sen\,1''\frac{1 - e^2}{1 - e^2\,.\,sen^2 l}, \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

ove il valore di A deve essere tratto dalle formule (121), ponendovi

$$c = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5\,.\,e^6}{64} + \ldots$$

Se si eseguisce la sostituzione si trova

$$A = 1 + \frac{9}{64} e^4 + \frac{9}{64} e^6 + \ldots, \tag{135}$$

mentre, con ovvii sviluppi in serie, si ha

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{1 - e^2 . sen^2 l} = 1 - {}^1/_2 e^2 . sen^2 l - {}^1/_8 e^4 . sen^4 l - {}^1/_{16} e^6 . sen^6 l - \ldots, \\ &(1 + \sqrt{1 - e^2})^{-3} = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{9}{16} e^4 + \frac{7}{16} e^6 . + \ldots\right); \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

quindi sarà:

$$\frac{A(1-e^2)\sqrt{1-e^2 . sen^2 l}}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} = \frac{1}{8}\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{e^2}{4}(1 + 2\, sen^2 l) - \frac{e^4}{64}(3 - 8\, sen^2 l + 8\, sen^4 l) - \\ &- \frac{e^6}{256}(5 - 6\, sen^2 l - 8\, sen^4 l + 16\, sen^6 l). \end{aligned}\right. \tag{137}$$

Dalle (121) per altro si ricava

$$\beta_1 = \frac{3}{2} c - \frac{9}{16} c^3 + \ldots = \frac{3}{8} e^2 + \frac{3 . e^4}{16} + \frac{111 . e^6}{1024} + \ldots, \tag{138}$$

e di qui, deducendo per successive approssimazioni il valore di e^2, si ottiene coll'approssimazione dell'ordine di e^6,

$$e^2 = \frac{8}{3}\beta_1 - \frac{32}{9}\beta_1^2 + 4\beta_1^3,$$

e, sostituendo nel secondo membro della (137):

$$\frac{A(1-e^2)\sqrt{1-e^2 . sen^2 l}}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} = \frac{1}{8}\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{2 . \beta_1}{3}(1 + 2 . sen^2 l) + \frac{\beta_1^2}{9}(5 + 24 . sen^2 l - 8 . sen^4 l) - \\ &- \frac{\beta_1^3}{27}(13 + 106 . sen^2 l - 80 . sen^4 l + 32 . sen^6 l) \end{aligned}\right\}.$$

Ciò posto, rappresentiamo con A' e β_1' i valori che assumono A e β_1 sull'ellissoide ausiliario di costanti a' ed e', e ricordiamo che nel paragrafo precedente è stato posto

$$\beta_1 = \beta_1'(1 + Y);$$

la precedente relazione darà

$$\frac{A(1-e^2)\sqrt{1-e^2 . sen^2 l}}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} = \frac{A'(1-e'^2)\sqrt{1-e'^2 . sen^2 l}}{(1+\sqrt{1-e'^2})^3} - \frac{2}{3}\beta_1' Q\, Y, \tag{139}$$

essendo

$$\left.\begin{aligned} Q=1+2\,sen^2 l+\frac{\beta_1'}{3}(5+24\,sen^2 l-8\,sen^4 l)+ \\ +\frac{\beta_1'^2}{6}(13+106\,sen^2 l-80\,sen^4 l+32\,sen^6 l), \end{aligned}\right\} \quad (140)$$

e tralasciati i termini in Y^2 e Y^3 come affatto trascurabili.

Se si osserva che fra il grado medio G' dell'ellissoide provvisorio (grado medio che già abbiamo introdotto in calcolo nel paragrafo precedente) e il semiasse ausiliario a' si ha la relazione

$$\frac{A'(1-e'^2)}{(1+\sqrt{1-e'^2})^3}=\frac{45\,.\,G'}{2\,.\,\pi\,.\,a'},$$

e si ricorda che si è posto

$$G=\frac{G'}{1+X},$$

dalla (134), per mezzo della (139), si deduce

$$\eta_2-\eta_1=\left(\frac{\vartheta\sqrt{1-e'^2\,.\,sen^2 l}}{a'\,.\,sen\,1''}-\frac{4\,.\,\pi\,.\,\vartheta\,.\,\beta_1' Q}{135\,.\,G'\,.\,sen\,1''}\,Y\right)(1+X)- \\ -\Delta\lambda\,.\,sen l+\xi\,.\,\Delta\lambda\,.\,sen l\,.\,sen\,1''\frac{1-e'^2}{1-e'^2\,.\,sen^2 l},$$

e, di qui, indicando con N' la gran normale dell'ellissoide provvisorio sotto la latitudine l, tenendo conto della (140), ponendo

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{\vartheta\sqrt{1-e'^2\,.\,sen^2 l}}{a'\,.\,sen\,1''}-\Delta\lambda\,.\,cos l=\frac{\vartheta}{N'\,.\,sen\,1''}-\Delta\lambda\,.\,cos l, \\ D&=\frac{\vartheta}{N'\,.\,sen\,1''}, \\ E&=-\frac{4\,.\,\pi\,.\,\vartheta\,.\,\beta_1'}{135\,.\,G'\,.\,sen\,1''}\left\{1-2\,sen^2 l+\frac{\beta_1}{3}(5+24\,sen^2 l-8\,sen^4 l)-\ldots\right\}, \\ F&=\Delta\lambda\,.\,sen l\,.\,sen\,1''\frac{1-e'^2}{1-e'^2\,.\,sen^2 l}, \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

e trascurando al solito i termini di secondo ordine rispetto alle correzioni X ed Y, avremo finalmente:

$$\eta_2-\eta_1=DX+EY+F\xi+M. \quad (142)$$

È bene notare che teoreticamente il termine $F\xi$, almeno per archi di parallelo non troppo grandi, è inferiore di un ordine relativo ad $\eta_2-\eta_1$ ed agli altri termini del secondo membro della (142), e perciò i geodeti, nel dedurre formule analoghe alla (142) stessa, sogliono considerarlo come trascurabile. Però ciò non è corretto: ed in-

vero per una differenza di longitudine un poco notevole, per esempio di 3°, nel caso in cui ξ sia assai grande, per esempio di 20″, il termine suddetto può raggiungere un valore anche superiore alla quantità cercata $\eta_2 - \eta_1$ (nel caso indicato tale valore è maggiore di 1″).

25. Se i varii archi di meridiano e di parallelo misurati fra paralleli o fra meridiani astronomicamente noti fossero isolati l'uno dall'altro, ciascuno di essi darebbe un'equazione della forma (133) o (142) indipendente dalle altre, e con una incognita che non comparirebbe nelle altre: non riescirebbe quindi possibile in verun modo avere le attrazioni locali dei punti geodetici principali, ma si potrebbero soltanto determinare le differenze $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1$ fra le componenti degli estremi di ciascun arco. È quindi da supporre che lungo ciascun meridiano e ciascun parallelo considerato siano stati misurati varii archi successivi, o per meglio dire, che lungo ciascun arco misurato geodeticamente sieno state fatte parecchie stazioni astronomiche, nel qual caso, scegliendo sopra un meridiano il punto principale qualunque ξ_0, η_0 come origine di un arco di meridiano e di uno di parallelo e applicando le (133) e (142), si potranno costituire, o direttamente o per mezzo di sottrazioni successive, i due seguenti gruppi di equazioni

Arco meridiano.	*Arco di parallelo.*
$\xi_1 = \xi_0 + B_1 X + C_1 Y + L_1$	$\eta' = \eta_0 + D' X + E' Y + F' \xi_0 + M'$
$\xi_2 = \xi_0 + B_2 X + C_2 Y + L_2$	$\eta'' = \eta_0 + D'' X + E'' Y + F'' \xi_0 + M''$
$\xi_3 = \xi_0 + B_3 X + C_3 Y + L_3$	$\eta''' = \eta_0 + D''' X + E''' Y + F''' \xi_0 + M'''$
. . . . .	. . . . .

ove entrano come nuove incognite da determinare col metodo dei minimi quadrati le componenti η_0, ξ_0 dell'attrazione locale dell'origine arbitraria suddetta. Se si considera poi il reticolato di meridiani e di paralleli indicato schematicamente nella fig. 74 avremo il

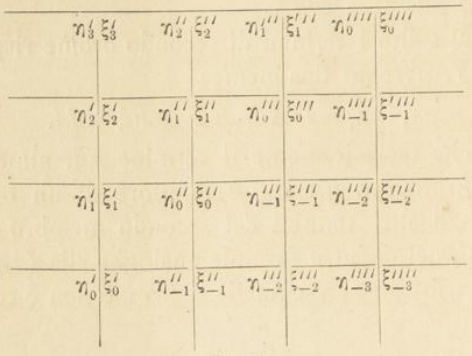

Fig. 74.

seguente quadro di equazioni da stabilire:

Archi di meridiano.	*Archi di parallelo.*
$\xi'_0 = \xi'_0$	$\eta'_0 = \eta'_0$
$\xi'_1 = \xi'_0 + B'_1 X + C'_1 Y + L'_1$	$\eta'_1 = \eta''_0 + D'_1 X + E'_1 Y + F'_1 \xi''_0 + M'_1$
$\xi'_2 = \xi'_0 + B'_2 X + C'_2 Y + L'_2$	$\eta'_2 = \eta'''_0 + D'_2 X + E'_2 Y + F'_2 \xi'''_0 + M'_2$
$\xi'_3 = \xi'_0 + B'_3 X + C'_3 Y + L'_3$	$\eta'_3 = \eta''''_0 + D'_3 X + E'_3 Y + F'_3 \xi''''_0 + M'_3$
. . . . .	. . . . .
$\xi''_{-1} = \xi''_0 + B''_{-1} X + C''_{-1} Y + L''_{-1}$	$\eta''_{-1} = \eta'_2 + D''_{-1} X + E''_{-1} Y + F''_{-1} \xi'_0 + M''_{-1}$
$\xi''_0 = \xi''_0$	$\eta''_0 = \eta''_0$
$\xi''_1 = \xi''_0 + B''_1 X + C''_1 Y + L''_1$	$\eta''_1 = \eta'''_0 + D''_1 X + E''_1 Y + F''_1 \xi'''_0 + M''_1$
$\xi''_2 = \xi''_0 + B''_2 X + C''_2 Y + L''_2$	$\eta''_2 = \eta''''_0 + D''_2 X + E''_2 Y + F''_2 \xi''''_0 + M''_2$
. . . . .	. . . . .
$\xi'''_{-2} = \xi'''_0 + B'''_{-2} X + C'''_{-2} Y + L'''_{-2}$	$\eta'''_{-2} = \eta'_0 + D'''_{-2} X + E'''_{-2} Y + F'''_{-2} \xi'_0 + M'''_{-2}$
$\xi'''_{-1} = \xi'''_0 + B'''_{-1} X + C'''_{-1} Y + L'''_{-1}$	$\eta'''_{-1} = \eta''_0 + D'''_{-1} X + E'''_{-1} Y + F'''_{-1} \xi''_0 + M'''_{-1}$
$\xi'''_0 = \xi'''_0$	$\eta'''_0 = \eta'''_0$
$\xi'''_1 = \xi'''_0 + B'''_1 X + C'''_1 Y + L'''_1$	$\eta'''_1 = \eta''''_0 + D'''_1 X + E'''_1 Y + F'''_1 \xi''''_0 + M'''_1$
. . . . .	. . . . .

(143)

nelle quali gli accenti alle notazioni distinguono le quantità che si riferiscono ai diversi meridiani considerati, e le varie coppie di componenti ξ_0, η_0, che compariscono come incognite nei secondi membri oltre alle quantità X ed Y, sono tante quanti sono tali meridiani. Ciò, se non si aggiungono altre condizioni, costituisce l'inferiorità di questo metodo di ricerca rispetto al metodo generale esposto nella prima parte del capitolo, giacchè mentre là per ciascun gruppo di reti fra loro collegate basta scegliere arbitrariamente la sola attrazione locale di un punto affinchè tutte le attrazioni locali degli altri punti principali del gruppo rimangano determinate rispetto ad un ellissoide dato, in questo ultimo metodo si viene ad accrescere considerevolmente il numero delle incognite arbitrariamente aggiunte, che, in ultima analisi, rimangono arbitrariamente determinate qualunque sia il procedimento che si adotta per risolvere le equazioni generate (143). È facile riconoscere quale sia la causa matematica

di tale disparità fra i due metodi: ed infatti nel primo i punti principali restano determinati per mezzo di un sistema di coordinate geodetiche polari, che deve esser considerato come indeformabile, ossia come tale che, dato il centro di emanazione o polo, e la direzione dell'asse polare, può essere adagiato in un'unica maniera sopra l'elissoide cercato, e sopra il geoide; ma nel secondo metodo non restano determinate che le lunghezze delle linee di una rete di maglie quadrangolari, e la rete, data la posizione di un nodo e la direzione di una linea, può essere deformata ed adagiata successivamente sull'ellissoide e sul geoide in un numero infinito di maniere senza alterare sensibilmente le lunghezze suddette.

26. Astrazione fatta dal maggior numero di incognite introdotte in calcolo, le equazioni (143) equivalgono alle (81) del primo metodo di compensazione, e sono da risolvere coi minimi quadrati, cogli avvertimenti indicati nel § 13. Ottenuti poi i valori più probabili delle correzioni X, Y, e quindi, dalle relazioni (127), i valori definitivi del grado medio G e della ausiliaria β_1, restano da determinare le costanti a ed e dell'ellissoide di riferimento cercato. L'espressione diretta dell'eccentricità in funzione di β_1 si deduce dalla (138) che, risoluta per successive approssimazioni, dà:

$$e^2 = \frac{8}{3}\beta_1\left(1 - \frac{4}{3}\beta_1 + 4{,}5\,\beta_1^2 - \dots\right); \qquad (144)$$

però è di vantaggio dedurre direttamente anche la quantità $\sqrt{1-e^2}$ in funzione dell'ausiliaria

$$c = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

della quale si calcola il valore da quello di β_1 per mezzo della relazione

$$c = \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{1}{9}\beta_1^3 + \dots$$

che proviene dalla sopra citata (138). Ottenuto poi il logaritmo di $\sqrt{1-e^2}$ e l'eccentricità e^2, si calcolano finalmente i semiassi a e b cercati dalle formule generali

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{45\,(1+\sqrt{1-e^2})^3 G}{2\,.\,A\,.\,\pi\,(1-e^2)} \\ b &= \frac{45\,(1+\sqrt{1-e^2})^3 G}{2\,.\,A\,.\,\pi\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (145)$$

27. Il metodo sviluppato nell'ultima parte di questo capitolo è il metodo di *Bessel* generalizzato al caso in cui si abbia un numero qualunque di archi di meridiano e di parallelo geodeticamente misurati (nel metodo di *Bessel* propriamente detto è tenuto conto dei soli archi di meridiano, e le attrazioni locali sono considerate come errori residuali di osservazione), ed abbiamo già veduto come presenti il grave inconveniente di introdurre in calcolo molte più incognite di quelle che il problema, matematicamente parlando, non comporti. Ma tale difetto sparisce completamente, e la precisione del metodo di *Bessel* può ridursi equivalente a quella del metodo generale sviluppato pel primo, se alle equazioni generate (143) se ne aggiungono altre che esprimano la indeformabilità delle maglie quadrangolari della rete dei meridiani e dei paralleli in ciascun gruppo di punti geodetici principali legati fra loro, o, in altre parole, che facciano dipendere le componenti arbitrarie ξ_0, η_0 dei varii meridiani di un gruppo da quelle di uno solo di essi scelto arbitrariamente. Siffatte nuove equazioni sono delle forme (13) o (78) e si costituiscono senza difficoltà applicando queste formule al caso dei punti (ξ_0'', η_0''), (ξ_0''', η_0'''),... (vedi fig. 74), considerati come uniti al centro di emanazione ξ_0', η_0' per mezzo delle reti geodetiche dalle quali gli archi del gruppo sono stati calcolati. Soltanto in tali formule è necessario esprimere δa e δe in funzione delle nuove incognite X, Y che loro equivalgono nelle equazioni (143), e, a tale scopo, basta osservare che dalla relazione generale

$$G = \frac{2\pi a A(1-e^2)}{45\,(1+\sqrt{1-e^2})^3},$$

ponendo per semplificare

$$F(e) = \frac{A(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3},$$

si trae

$$G = \frac{G'}{1+X} = 2\pi(a'+\delta a)F(e'+\delta e),$$

ossia, trascurando al solito negli sviluppi in serie le quantità di secondo ordine rispetto alle correzioni X, δa e δe,

$$1-X = \frac{2.\pi.a'.F(e')}{45.G'} + \frac{\delta a.2.\pi.F(e')}{45.G'} + \frac{\delta e.2.\pi.a'.F'(e)}{45.G'},$$

relazione in cui $F'(e)$ rappresenta la derivata di $F(e)$ (presa rispetto

ad e), e che si riduce semplicemente a

$$X = -\frac{\delta a}{a'} - \frac{\delta e . F'(e')}{F(e')}.$$

Ora sviluppando la $F(e)$ in serie si trova [vedi formule (135) e (136)]:

$$F(e) = \frac{1}{8}(1-e^2)\left(1+\frac{9}{64}e^4+\frac{9}{64}e^6+\ldots\right)\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{9}{16}e^4+\frac{7}{16}e^6+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\ldots\right);$$

quindi avremo

$$\frac{F'(e)}{F(e)} = -\frac{e}{2}\,\frac{1+\frac{3}{8}e^2+\frac{15}{64}e^4+\ldots}{1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\ldots} = -\frac{e}{2}\left\{1+\frac{5}{8}e^2+\frac{14}{32}e^4+\ldots\right\},$$

e per conseguenza:

$$X = -\frac{\delta a}{a'} + \frac{\delta e . e'}{2}\left(1+\frac{5}{8}e'^2+\frac{7}{16}e'^4+\ldots\right). \qquad (146)$$

Dalle relazioni (127) e (138) si ha per altro

$$Y = \frac{\frac{d\beta_1'}{de}.\delta e}{\beta_1'} = \frac{\frac{3}{4}e'+\frac{3}{4}e'^3+\frac{333}{512}e'^5+\ldots}{\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{16}e'^4+\frac{111}{1024}e'^6+\ldots}\,\delta e,$$

d'onde si trae

$$\delta e = \frac{e'.Y}{2}\left(1-\frac{1}{2}e'^2-\frac{5}{64}e'^4-\ldots\right), \qquad (147)$$

che è una delle espressioni cercate

Sostituendo poi nella precedente (146) e ricavando il valore di $\frac{\delta a}{a'}$ avremo finalmente

$$\frac{\delta a}{a'} = -X + \frac{e'^2.Y}{4}\left(1+\frac{1}{8}e'^2+\frac{3}{64}e'^4+\ldots\right). \qquad (148)$$

Ma in tali espressioni i termini in e^6, ed anche quelli in e^4 possono essere considerati come affatto trascurabili in ogni caso, e si può porre semplicemente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta a}{a'} &= -X - + \frac{e^2.Y}{4}\\ \delta e &= \frac{e.Y}{2}(1+{}^1/_2 e^2)\end{aligned}\right\}. \qquad (149)$$

CAPITOLO XII.

DEL GEOIDE.

1. Estendiamo l'idea delle coordinate astronomiche al caso di una superficie qualunque col definire per collatitudine astronomica di un punto di una superficie l'angolo piano che la normale in tal punto fa con un asse fisso (asse polare), e per longitudine astronomica l'angolo diedro che il piano che contiene questa normale e una parallela all'asse fisso (piano meridiano) fa con un piano fisso che passi per l'asse, e cerchiamo le equazioni differenziali delle geodetiche della superficie in funzione di queste coordinate. Perciò immaginiamo anzitutto riferita la superficie ad una terna di assi cartesiani, di cui quello delle z coincida coll'asse fisso suddetto, e l'asse delle x sia parallelo al piano fisso scelto come origine delle longitudini; gli angoli V_x, V_y, V_z che la normale in un punto $M(x, y, z)$ qualunque della superficie forma cogli assi cartesiani sono dati allora in funzione della latitudine astronomica L e della longitudine Λ dalle note relazioni seguenti

$$\left.\begin{aligned} \cos V_x &= \cos L \,.\, \cos \Lambda, \\ \cos V_y &= \cos L \,.\, \operatorname{sen} \Lambda, \\ \cos V_z &= \operatorname{sen} L, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

come risulta dai due triangoli sferici $M'QK$, $M'QR$ della seguente fig. 75, nella quale CM' rappresenta una retta condotta per l'origine delle coordinate, parallelamente alla direzione MV della normale considerata, e CQ la traccia del piano ZCM' sul piano delle xy. Sia

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

l'equazione della superficie considerata, e, per conseguenza siano

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}} \tag{3}$$

le equazioni caratteristiche delle sue geodetiche; a queste equazioni

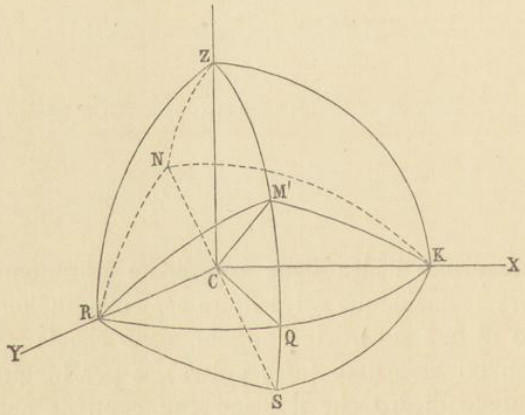

Fig. 75.

daremo altra forma ponendo

$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}, \tag{4}$$

e ricordando che si ha, nelle notazioni prestabilite,

$$\left.\begin{aligned} W.\cos V_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = W.\cos L.\cos \Lambda, \\ W.\cos V_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = W.\cos L.\operatorname{sen} \Lambda, \\ W.\cos V_z &= \frac{\partial F}{\partial z} = W.\operatorname{sen} L, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ove W ha i due segni, che caratterizzano, come è noto, le due direzioni della normale V, corrispondenti alle due faccie della superficie *. Se si considera, come qui faremo, la sola direzione rivolta verso lo *Zenit* astronomico (direzione che corrisponde sul geoide alla

* Gauss, *Ricerche generali sulle superficie curve.*

faccia convesso-convessa), sono da tenere i segni negativi, e le equazioni (3) possono essere scritte come segue

$$\left.\begin{aligned} -ds\,.\cos V_x &= R\,.\,d\frac{dx}{ds}, \\ -ds\,.\cos V_y &= R\,.\,d\frac{dy}{ds}, \\ -ds\,.\cos V_z &= R\,.\,d\frac{dz}{ds}, \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

indicando R una funzione di x, y, z, che si determina senza difficoltà elevando a quadrato e sommando membro a membro le (m). Si trova in tal modo

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

d'onde si vede che R è il raggio di curvatura delle geodetiche (m). Rappresentando con s_x, s_y, s_z gli angoli di direzione di queste curve, ed introducendo per V_x, V_y, V_z i loro valori (1), le (m) si trasformano quindi nelle seguenti

$$\left.\begin{aligned} R\,.\,d(\cos s_x) + \cos L\,.\cos\Lambda\,.\,ds &= 0, \\ R\,.\,d(\cos s_y) + \cos L\,.\,sen\,\Lambda\,.\,ds &= 0, \\ R\,.\,d(\cos s_z) + sen\,L\,.\,ds &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

che potevamo stabilire a priori, giacchè esprimono la proprietà caratteristica delle geodetiche di avere la normale principale diretta secondo la normale alla superficie.

Per esprimere in funzione delle coordinate astronomiche L e Λ anche i coseni di direzione delle curve torniamo alla precedente fig. 75, e conduciamo in essa per l'origine delle coordinate x, y, z la retta NS parallela alla direzione che nel punto M ha la sezione normale formata sulla superficie dal piano meridiano di questo punto*, direzione che, per analogia al caso del geoide, diremo *cardinale Nord-Sud:* il piano $M'CN$ sarà parallelo al piano meridiano di M e conterrà evidentemente l'asse delle z, quindi l'angolo che

---

* Per piano meridiano intendiamo il piano normale, parallelo all'asse fisso (polare), che serve a individuare la longitudine.

la CN fa coll'asse delle z sarà uguale alla latitudine L, e considerando la sola direzione Nord, ed indicando con N_x, N_y, N_z gli angoli che questa fa cogli assi coordinati, dai triangoli sferici NZK, NZR si avrà:

$$\left.\begin{aligned} \cos N_x &= -\cos \Lambda \,.\, \operatorname{sen} L\,, \\ \cos N_y &= -\operatorname{sen} \Lambda \,.\, \operatorname{sen} L\,, \\ \cos N_z &= \cos L\,. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Analogamente indicando con E_x, E_y, E_z gli angoli che fa cogli assi la direzione cardinale Est-Ovest, ossia la direzione che sulla superficie e perpendicolare alla Nord-Sud, ed osservando che essa è normale al piano meridiano del punto M, otterremo

$$\left.\begin{aligned} \cos E_x &= -\operatorname{sen} \Lambda \\ \cos E_y &= \cos \Lambda \\ \cos E_z &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Ora la normale MV della superficie e le direzioni cardinali Nord-Sud ed Est-Ovest del punto M costituiscono una nuova terna di assi cartesiani coi quali la direzione ds di una linea della superficie stessa fa rispettivamente gli angoli 90°, A e 90° $- A$, essendo A l'azimut astronomico della linea: riferendo a tali assi anche gli assi delle x delle y e delle z e tenendo presenti le (7) e (8) si trova quindi:

$$\left.\begin{aligned} \cos s_x = \frac{dx}{ds} &= \cos N_x \cos A + \cos E_x \operatorname{sen} A = \\ &= -\cos \Lambda \,.\, \operatorname{sen} L \,.\, \cos A - \operatorname{sen} \Lambda \,.\, \operatorname{sen} A\,, \\ \cos s_y = \frac{dy}{ds} &= \cos N_y \,.\, \cos A + \cos E_y \operatorname{sen} A = \\ &= -\operatorname{sen} \Lambda \,.\, \operatorname{sen} L \,.\, \cos A + \cos \Lambda \,.\, \operatorname{sen} A\,, \\ \cos s_z = \frac{dz}{ds} &= \cos N_z \cos A + \cos E_z \operatorname{sen} A = \\ &= \cos L \,.\, \cos A. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Sostituendo nelle (6) ed eseguendo le differenziazioni lungo la linea s avremo pertanto come equazioni differenziali delle geo-

detiche della superficie

$$\cos L . \cos \Delta . ds = \cos L . \cos \Lambda . R . \partial_s L - (\operatorname{sen} L . \operatorname{sen} \Lambda . \cos . A - \cos \Lambda . \operatorname{sen} A) R . \partial_s \Lambda -$$
$$- (\operatorname{sen} L . \cos \Lambda . \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} \Lambda . \cos A) R . \partial_s A,$$
$$\cos L . \operatorname{sen} \Lambda . ds = \cos L . \operatorname{sen} \Lambda . \cos A . R . \partial_s L + (\operatorname{sen} L . \cos \Lambda . \cos A + \operatorname{sen} \Lambda . \operatorname{sen} A) R . \partial_s \Lambda -$$
$$- (\operatorname{sen} L . \operatorname{sen} \Lambda . \operatorname{sen} A + \cos \Lambda . \cos A) R . \partial_s A,$$
$$\operatorname{sen} L . ds = \operatorname{sen} L . \cos A . R . \partial_s L + \cos L . \operatorname{sen} A . R . \partial_s A,$$

e queste, prima sommate membro a membro dopo essere state moltiplicate rispettivamente per

$$\cos L . \cos \Lambda, \quad \cos L . \operatorname{sen} \Lambda, \quad \operatorname{sen} L,$$

e, successivamente, coll'eliminazione di ds fra le prime due, dánno

$$\left.\begin{aligned} ds &= R . \cos A . \partial_s L + R . \operatorname{sen} A . \cos L . \partial_s \Lambda, \\ \partial_s A &= \operatorname{sen} L . \partial_s \Lambda . \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Queste elegantissime forme delle equazioni differenziali delle geodetiche in funzione delle coordinate astronomiche di una superficie qualunque sono dovute a *Bessel.**

2. Per integrare tali equazioni è necessario anzitutto esprimere in funzione delle coordinate L e Λ e della differenziale ds della variabile indipendente le variazioni infinitesime $\delta_s L$, $\delta_s \Lambda$ che evidentemente non dipendono dalla natura della curva s. Perciò partiamo dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= W . \cos L . \cos \Lambda, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= W . \cos L . \operatorname{sen} \Lambda, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= W . \operatorname{sen} L, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

* *Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten, etc.* Astr. Nach. 14.

(vedi pag. 344) che, differenziate nella direzione s, dànno:

$$\left.\begin{aligned} d_s\frac{\partial F}{\partial x} &= \cos L.\cos\Lambda.\partial_s W - W.\operatorname{sen} L.\cos\Lambda.\partial_s L - W.\cos L.\operatorname{sen}\Lambda.\partial_s\Lambda, \\ d_s\frac{\partial F}{\partial y} &= \cos L.\operatorname{sen}\Lambda.\partial_s W - W.\operatorname{sen} L.\operatorname{sen}\Lambda.\partial_s L + W.\cos L.\cos\Lambda.\partial_s\Lambda, \\ d_s\frac{\partial F}{\partial z} &= \operatorname{sen} L.\partial_s W + W.\cos L.\partial_s L. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Da queste formule moltiplicate rispettivamente per

$$\cos L.\cos\Lambda, \quad \cos L.\operatorname{sen}\Lambda, \quad \operatorname{sen} L,$$

e sommate membro a membro, si trae

$$\partial_s W = \cos L.\cos\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial x} + \cos L.\operatorname{sen}\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial y} + \operatorname{sen} L.d_s\frac{\partial F}{\partial z}; \quad (13)$$

eliminando invece $\partial_s L$ fra la prima e la seconda si ottiene

$$-W.\cos L.\partial_s\Lambda = \operatorname{sen}\Lambda.\partial_s\frac{\partial F}{\partial x} - \cos\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial y}, \quad (14)$$

e, sostituendo finalmente nella terza a $\partial_s W$ la sua espressione (13), si ha

$$W.\partial_s L = -\operatorname{sen} L.\cos\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial x} - \operatorname{sen} L.\operatorname{sen}\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial y} + \cos L.d_s\frac{\partial F}{\partial z}, \quad (15)$$

relazioni, le (13), (14) e (15), nelle quali è da porre evidentemente:

$$\left.\begin{aligned} d_s\frac{\partial F}{\partial x} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial z}\frac{dz}{ds}\right)ds, \\ d_s\frac{\partial F}{\partial y} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial y.\partial z}\frac{dz}{ds}\right)ds, \\ d_s\frac{\partial F}{\partial z} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial z}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial y.\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{dz}{ds}\right)ds. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Se si introducono per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ le loro espressioni (9) in funzione di L, Λ ed A si trova per altro

$$d_s\frac{\partial F}{\partial x} = -\cos A\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.\cos\Lambda.\operatorname{sen} L + \frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y}.\operatorname{sen}\Lambda.\operatorname{sen} L - \frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial z}.\cos L\right\}ds -$$

$$-\operatorname{sen} A\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.\operatorname{sen}\Lambda - \frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y}.\cos\Lambda\right\}ds,$$

$$d_s\frac{\partial F}{\partial y}=-\cos A\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial y}\,.\cos\Lambda\,.\,\mathrm{sen}\,L+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.\,\mathrm{sen}\,\Lambda\,.\,\mathrm{sen}\,L-\frac{\partial^2 F}{\partial y\,.\,\partial z}\,.\cos L\right\}ds-$$

$$-\mathrm{sen}\,A\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial y}\,.\,\mathrm{sen}\,\Lambda-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.\cos\Lambda\right\}ds,$$

$$d_s\frac{\partial F}{\partial z}=-\cos A\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial z}\,.\cos\Lambda\,.\,\mathrm{sen}\,L+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,.\,\partial z}\,.\,\mathrm{sen}\,\Lambda\,.\,\mathrm{sen}\,L-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,.\cos L\right\}ds-$$

$$-\mathrm{sen}\,A\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial z}\,.\,\mathrm{sen}\,\Lambda-\frac{\partial^2 F}{\partial y\,.\,\partial z}\,.\cos\Lambda\right\},$$

e, per conseguenza, ponendo, per brevità di notazione,

$$\left.\begin{aligned}
M&=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\mathrm{sen}^2\Lambda+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cos^2\Lambda-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,dy}\,\mathrm{sen}\,\Lambda\,.\cos\Lambda,\\
N&=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\mathrm{sen}\,\Lambda\,.\cos\Lambda\,.\,\mathrm{sen}\,L-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial y}\,\mathrm{sen}\,L\,.\cos 2\Lambda-\\
&\quad-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial z}\,\mathrm{sen}\,\Lambda\,.\cos L+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,.\,\partial z}\cos\Lambda\,.\cos L,\\
P&=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\mathrm{sen}^2 L\,.\cos^2\Lambda+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\mathrm{sen}^2 L\,.\,\mathrm{sen}^2\Lambda+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cos^2 L+\\
&\quad-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial y}\mathrm{sen}^2 L\,.\,\mathrm{sen}\,\Lambda\,.\cos\Lambda-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,.\,\partial z}\,\mathrm{sen}\,L\,.\cos L\,.\cos\Lambda-\\
&\quad-2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,.\,\partial z}\,\mathrm{sen}\,L\,.\cos L\,.\,\mathrm{sen}\,\Lambda
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

le precedenti relazioni (14) e (15) possono esser messe sotto le forme

$$\left.\begin{aligned}
W\,.\cos L\,.\,\partial_s\Lambda&=(M\,.\,\mathrm{sen}\,A+N\,.\cos A)\,ds,\\
W\,.\,\partial_s L&=(N\,.\,\mathrm{sen}\,A+P\,.\cos A)\,ds\,.
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

3. Queste espressioni delle differenziali $\partial_s L$ e $\partial_s\Lambda$ valgono per una linea s qualunque; nel caso poi che questa sia una geodetica, le ausiliarie $\frac{M}{W}$, $\frac{N}{W}$ e $\frac{P}{W}$ possono essere facilmente determinate in funzione dei raggi principali R_1, R_2 di curvatura della superficie e delle direzioni delle sue linee principali. Ed infatti sia Ω l'angolo che una delle sezioni normali principali del punto $M(x,y,z)$, della geodetica considerata, per esempio la sezione che ha per raggio di curvatura R_1, fa colla direzione *Nord* definita come nel § 1, e, per conseguenza, sia $A-\Omega$ l'angolo che il piano di tale sezione normale fa col piano osculatore della geodetica per il noto teorema

di Eulero avremo

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2(A-\Omega)}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2(A-\Omega)}{R_2},$$

e quindi, eliminando R fra questa relazione e la prima delle (10), si otterrà

$$\frac{\cos^2(A-\Omega)}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2(A-\Omega)}{R_2} = \cos A \frac{dL}{ds} + \operatorname{sen} A . \cos L \frac{d\Lambda}{ds}.$$

Se per $\frac{dL}{ds}$ e $\frac{d\Lambda}{ds}$ si introducono le espressioni in W, M, N, P, che si ricavano dalle (18), si trova

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\cos^2(A-\Omega)}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2(A-\Omega)}{R_2} = \\ &\quad = \frac{M . \operatorname{sen}^2 A + 2 . N . \operatorname{sen} A . \cos A + P . \cos^2 A}{W}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

e intorno a ciascun punto la (19) deve sussistere qualunque sia A, mentre R_1, R_2, M, N, P e W sono indipendenti da questo angolo. Ponendo successivamente $A = 90°$ ed $A = 0°$ si ottiene pertanto

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{W} &= \frac{\operatorname{sen}^2\Omega}{R_1} + \frac{\cos^2\Omega}{R_2}, \\ \frac{P}{W} &= \frac{\cos^2\Omega}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\Omega}{R_2}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

e queste sono due delle espressioni cercate. Se ne deduce inoltre, sommando e sottraendo membro a membro,

$$\left.\begin{aligned} \frac{M+P}{W} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \\ \frac{M-P}{W} &= \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \cos 2\Omega . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Per avere poi anche l'espressione della terza ausiliaria $\frac{N}{W}$ poniamo successivamente $A = \Omega$, $A = 90° - \Omega$: avremo

$$\frac{1}{R_1} = \frac{M . \operatorname{sen}^2\Omega + N . \operatorname{sen} 2\Omega + P \cos^2\Omega}{W},$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{M . \cos^2\Omega - N . \operatorname{sen} 2\Omega + P \operatorname{sen}^2\Omega}{W},$$

e, sottraendo membro a membro,

$$\frac{N}{W} = \frac{1}{2 . \operatorname{sen} 2\Omega} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{M-P}{2W} \operatorname{cotg} 2\Omega.$$

Se si sostituisce a $\frac{M-P}{W}$ la sua espressione (21) si trova finalmente:

$$\frac{N}{W}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{1-\cos^2 2\Omega}{2\,.\,\mathrm{sen}\,2\Omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\mathrm{sen}\,2\Omega. \qquad (22)$$

4. Alle equazioni generali (18) si può dare anche un'altra forma molto notevole immaginando riferita la superficie $F(x,y,z)=0$ alla già considerata terna di assi cartesiani composta dalle rette condotte per l'origine delle x, y, z parallelamente alla normale del punto $M(x,y,z)$ ed alle direzioni cardinali Nord-Sud ed Est-Ovest di questo punto. Se indichiamo con ζ, σ e ϑ rispettivamente le nuove coordinate, le formule di trasformazione saranno della forma

$$x=a_1\sigma+b_1\vartheta+c_1\zeta,$$
$$y=a_2\sigma+b_2\vartheta+c_2\zeta,$$
$$z=a_3\sigma+b_3\vartheta+c_3\zeta;$$

ora dall'equazione della superficie si trae

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{d\sigma}=a_1\frac{\partial F}{\partial x}+a_2\frac{\partial F}{\partial y}+a_3\frac{\partial F}{\partial z},$$

e $\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma}$ rappresentano i coseni di direzione dell'asse delle σ (ossia della linea Nord-Sud del punto M) rispetto agli antichi assi; quindi, valendoci delle notazioni prestabilite (§ 1), potremo anche scrivere

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos N_x+\frac{\partial F}{\partial y}\cos N_y+\frac{\partial F}{\partial z}\cos N_z,$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial F}{\partial\vartheta}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos E_x+\frac{\partial F}{\partial y}\cos E_y+\frac{\partial F}{\partial z}\cos E_z$$

ove i coseni degli angoli debbono esser considerati come delle costanti. Queste due ultime relazioni differenziate rispetto ad s dánno pertanto

$$d_s\frac{\partial F}{\partial\sigma}=\cos N_x\,.\,d_s\frac{\partial F}{\partial x}+\cos N_y\,.\,d_s\frac{\partial F}{\partial y}+\cos N_z\,.\,d_s\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$d_s\frac{\partial F}{\partial\vartheta}=\cos E_x\,.\,d_s\frac{\partial F}{\partial x}+\cos E_y\,.\,d_s\frac{\partial F}{\partial y}+\cos E_z\,.\,d_s\frac{\partial F}{\partial z},$$

d'onde, tenendo conto delle precedenti (7) ed (8), si trae

$$d_s\frac{\partial F}{\partial \sigma} = -\operatorname{sen} L.\cos\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial x} - \operatorname{sen} L.\operatorname{sen}\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial y} + \cos L.d_s\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$d_s\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\operatorname{sen}\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\Lambda.d_s\frac{\partial F}{\partial y},$$

e, per conseguenza, paragonando colle (14) e (15), avremo:

$$\left.\begin{aligned} W.\cos L.\partial_s\Lambda &= d_s\frac{\partial F}{\partial \tau},\\ W.\partial_s L &= d_s\frac{\partial F}{\partial \sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (n)$$

L'elemento ds giacendo per altro nel piano tangente alla superficie, piano che è parallelo a quello delle $\sigma\tau$, nello sviluppare le differenziali indicate nei secondi membri delle formule precedenti è da porre $d\zeta = 0$, e si ha:

$$d_s\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2}d\sigma + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma.\partial \tau}d\tau,$$

$$d_s\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 F}{d\tau^2}d\tau + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma.\partial \tau}d\sigma;$$

inoltre, poichè gli assi delle σ e delle τ sono rispettivamente paralleli alle direzioni cardinali Nord-Sud ed Est-Ovest del punto M, sarà:

$$d\sigma = \cos A.ds, \quad d\tau = \operatorname{sen} A.ds:$$

quindi le precedenti relazioni differenziali (n) possono essere trasformate nelle

$$\left.\begin{aligned} W.\cos L.\partial_s\Lambda &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}\operatorname{sen} A + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma.\partial \tau}\cos A\right)ds,\\ W.\partial_s L &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2}\cos A + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma.\partial \tau}\operatorname{sen} A\right)ds, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

che sono le equazioni che volevamo stabilire.

5. Torniamo alle equazioni differenziali (10) delle geodetiche, ed osserviamo che la loro integrazione non può esser fatta in generale, ossia senza caratterizzare la superficie, giacchè dalla natura di questa, come risulta dalle relazioni (18) e (23), e come, del resto, è evidente anche a priori, dipendono le variazioni elementari dL e $d\Lambda$ che prendono le coordinate astronomiche quando si passa da un punto all'altro lungo una geodetica. Ci proporremo pertanto di

integrare le (10) pel caso del geoide, ossia di una superficie estremamente poco diversa da un ellissoide di rivoluzione (ellissoide di riferimento), e cercheremo perciò anzitutto l'equazione di tale superficie in coordinate cartesiane, introducendo la distanza h fra i suoi punti e quelli corrispondenti dell'ellissoide (la corrispondenza intesa nel senso del Cap. I, § 6) contata lungo la normale ellissoidica e considerata come una funzione delle coordinate ellissoidiche φ, ω. Affinchè sul geoide le coordinate astronomiche L e Λ rappresentino gli enti propriamente indicati dalla loro denominazione conviene, nel sistema di coordinate cartesiane x, y, z già sopra considerato, scegliere per asse delle z l'asse polare terrestre, cui è parallelo, per determinazione, l'asse minore dell'ellissoide di riferimento scelto a rappresentare la superficie matematica della terra: ponendo inoltre l'origine, che rimane tuttavia arbitraria, al centro di questo ellissoide, ed indicando con x_1, y_1, z_1 le sue coordinate correnti e con n_x, n_y, n_z in generale gli angoli di direzione di una normale ellissoidica, le corrispondenze fra i punti x, y, z del geoide e i punti dell'ellissoide sono date dalle formule

$$\begin{aligned} x &= x_1 + h \cdot \cos n_x, \\ y &= y_1 + h \cdot \cos n_y, \\ z &= z_1 + h \cdot \cos n_z, \end{aligned}$$

che si riducono alle seguenti

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a \cdot \cos\varphi \cdot \cos\omega}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi}} + h \cdot \cos\varphi \cdot \cos\omega, \\ y &= \frac{a \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi}} + h \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\omega, \\ z &= \frac{a(1 - e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi}} + h \cdot \operatorname{sen}\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

esprimendo x_1, y_1, z_1 in funzione delle coordinate geografiche φ ed ω (vedi Cap. I, § 8), ed osservando che dall'equazione dell'ellissoide

$$U(x_1, y_1, z_1) = \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$

o dalle (1) applicate al caso di questa superficie, si deduce

$$\begin{aligned} \cos n_x &= \cos\varphi \cdot \cos\omega, \\ \cos n_y &= \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\omega, \\ \cos n_z &= \operatorname{sen}\varphi. \end{aligned}$$

L'equazione del geoide cercata si ottiene senza difficoltà eliminando φ ed ω fra le (24), che, elevate a quadrato e sommate dopo averne divisa l'ultima per $1-e^2$, dánno

$$F(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{2h}{a}-\frac{h^2}{a^2(1-e^2)}(1-e^2.sen^2\varphi)-1=0 \quad (25)$$

ove il termine in h^2 dentro la precisione compatibile coi nostri mezzi di misura è affatto trascurabile rispetto ai termini in x^2, y^2, z^2 che debbono essere considerati come dell'ordine dell'unità (vedi in seguito §§ 16 e 17).

6. È chiaro che, trascurando le quantità di secondo ordine assoluto rispetto alle attrazioni locali, fra la derivata $\frac{dh}{ds}$ presa in una direzione s caratterizzata dall'azimut ellissoidico α, e la componente θ_α dell'attrazione locale in tale azimut esiste la relazione

$$\frac{dh}{ds}=\theta_\alpha;$$

ed infatti dall'equazione differenziale della superficie

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

introducendo per $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ i loro valori (5) si ottiene

$$cos\,L.cos\,\Lambda.\frac{dx}{ds}+cos\,L.sen\,\Lambda.\frac{dy}{ds}+sen\,L.\frac{dz}{ds}=0, \quad (26)$$

mentre le corrispondenze (24), ricordando che nelle solite notazioni di geodesia ellissoidica è

$$\frac{\rho.d\varphi}{ds}=cos\,\alpha, \quad \frac{r.d\omega}{ds}=sen\,\alpha,$$

dánno dentro l'approssimazione suddetta, ossia a meno dei termini in $\frac{h^2}{a^2}$, $e^2\frac{h}{a}$ e di quelli in $e^2\frac{dh}{ds}$ (quantità, quest'ultima, che evidentemente deve esser considerata tutto al più come dell'ordine di $\frac{e^2.h}{a}$)

$$\frac{dx}{ds}=-cos\,\alpha.sen\,\varphi.cos\,\omega\left(1+\frac{h}{a}\right)-$$

$$-sen\,\alpha.sen\,\omega\left(1+\frac{h}{a}\right)+\frac{dh}{ds}cos\,\varphi.cos\,\omega,$$

$$\frac{dy}{ds} = -\cos\alpha \,.\, sen\varphi \,.\, sen\omega \left(1 + \frac{h}{a}\right) +$$

$$+ sen\alpha \,.\, cos\,\omega \left(1 + \frac{h}{a}\right) + \frac{dh}{ds} cos\varphi \,.\, sen\,\omega,$$

$$\frac{dz}{ds} = cos\varphi \,.\, cos\alpha \left(1 + \frac{h}{a}\right) + \frac{dh}{ds} sen\varphi.$$

Se nella (26) si sostituiscono per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ queste loro espressioni e per $cos\Lambda\, cos L$, $sen\Lambda\, cos L$ e $sen L$ le quantità

$$cos\varphi \,.\, cos\,\omega + \xi \,.\, sen\varphi \,.\, cos\,\omega + \eta \,.\, sen\,\omega,$$
$$cos\varphi \,.\, sen\,\omega + \xi \,.\, sen\varphi \,.\, sen\,\omega - \eta \,.\, cos\,\omega,$$
$$sen\varphi - \xi \,.\, cos\varphi$$

che loro equivalgono dentro l'approssimazione tenuta, si trova con facile calcolo

$$\frac{dh}{ds} = \xi \,.\, cos\alpha + \eta \,.\, sen\alpha, \quad . \qquad (27)$$

d'onde, introducendo in luogo di ξ e di η i loro valori in funzione dell'attrazione locale θ e dell'azimut ψ in cui essa agisce (vedi capitolo precedente, § 1) si trae

$$\frac{dh}{ds} = \theta \,.\, cos(\alpha - \psi) = \theta_\alpha, \qquad (28)$$

come si voleva dimostrare.

7. Se nelle (24) si esprimono φ ed ω in funzione di L e Λ si ottiene dentro la solita approssimazione

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a \,.\, cos L \,.\, cos\Lambda}{\sqrt{1 - e^2 \,.\, sen^2 L}} - \xi \,.\, a \,.\, sen L \,.\, cos\Lambda - \eta \,.\, a \,.\, sen\Lambda + h \,.\, cos L \,.\, cos\Lambda, \\ y &= \frac{a \,.\, cos L \,.\, sen\Lambda}{\sqrt{1 - e^2 \,.\, sen^2 L}} - \xi \,.\, a \,.\, sen L \,.\, sen\Lambda + \eta \,.\, a \,.\, cos\Lambda + h \,.\, cos L \,.\, sen\Lambda, \\ z &= \frac{a(1 - e^2) sen L}{\sqrt{1 - e^2 \,.\, sen^2 L}} + \xi \,.\, a \,.\, cos L + h \,.\, sen L, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

formule queste che rappresentano le corrispondenze fra le coordinate cartesiane del geoide, e le coordinate astronomiche L e Λ, giacchè

le quantità h, ξ ed η debbono essere considerate come delle funzioni sperimentalmente determinabili di L e Λ. Ora derivando totalmente le (29) rispetto all'arco s di una curva geoidica qualunque, caratterizzata dai valori che prende l'azimut astronomico A lungo di essa, ricordando le relazioni (9) e ponendo per semplificare

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2.sen^2 L)^{3/2}}, \\ R_2 &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2.sen^2 L}}, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

si trova:

$$\frac{dx}{ds} = -\cos\Lambda.sen L.\cos A - sen\Lambda.sen A =$$

$$= \frac{dL}{ds}(-R_1 sen L.\cos\Lambda - \xi.a.\cos L.\cos\Lambda - h.sen L.\cos A) +$$

$$+ \frac{d\Lambda}{ds}(-R_2 \cos L.sen\Lambda + \xi.a.sen L.sen\Lambda - \eta.a.\cos\Lambda - h.\cos L.sen\Lambda) -$$

$$- \frac{d\xi}{ds} a.sen L.\cos\Lambda - \frac{d\eta}{ds} a.sen\Lambda + \frac{dh}{ds}\cos L.\cos\Lambda,$$

$$\frac{dy}{ds} = -sen\Lambda.sen L.\cos A + \cos\Lambda.sen A =$$

$$= \frac{dL}{ds}(-R_1 sen L.sen\Lambda - \xi.a.\cos L.sen\Lambda - h.sen L.sen\Lambda) +$$

$$+ \frac{d\Lambda}{ds}(R_2 \cos L.\cos\Lambda - \xi.a.sen L.\cos\Lambda - \eta.a.sen\Lambda + h.\cos L.\cos\Lambda) -$$

$$- \frac{d\xi}{ds} a.sen L.sen\Lambda + \frac{d\eta}{ds} a.\cos\Lambda + \frac{dh}{ds}\cos L.sen\Lambda,$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos L.\cos A =$$

$$= \frac{dL}{ds}(R_1 \cos L - \xi.a.sen L + h.\cos L) + \frac{d\xi}{ds}.a.\cos L + \frac{dh}{ds} sen L.$$

Risolvendo queste equazioni rispetto a $\frac{dL}{ds}$ e a $\frac{d\Lambda}{ds}$ e tenendo conto delle (30) coll'avvertenza che, dentro l'approssimazione tenuta, nei

termini in ξ ed η si può porre $\frac{tang\, L . sen\, A}{a} ds = \delta A = d\alpha$, si deduce

$$\left.\begin{aligned} dL &= \frac{cos\, A(1-e^2 . sen^2 L)^{3/2}}{a(1-e^2)} ds - d\xi - \frac{h}{a^2} cos\, A . ds - \eta . d\alpha, \\ cos\, L . d\Lambda &= \frac{sen\, A(1-e^2 . sen^2 L)^{1/2}}{a} ds - d\eta - \frac{h}{a^2} sen\, A . ds + \xi . d\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

e queste equazioni sono equivalenti, nel caso nostro, alle generali (18) e (23), per cui sarebbe facile trarne i valori che assumono sul geoide le ausiliarie W, M, N e P.

8. Per integrare le (31) è necessario individuare la natura della linea s del geoide, e noi qui supporremo, come abbiamo già detto, che si tratti di una geodetica geoidica, dimodochè alle (31) aggiungeremo una delle (10) (la seconda) proponendoci di integrare le equazioni simultanee

$$\left.\begin{aligned} dL &= \frac{cos\, A . (1-e^2 . sen^2 L)^{3/2}}{a(1-e^2)} ds - d\xi - \frac{h}{a^2} cos\, A . ds - \eta . d\alpha, \\ cos\, L . d\Lambda &= \frac{sen\, A . \sqrt{1-e^2 . sen^2 L}}{a} ds - d\eta - \frac{h}{a^2} sen\, A . ds + \xi . d\alpha, \\ cotg\, L . dA &= \frac{sen\, A . \sqrt{1-e^2 . sen^2 L}}{a} ds - d\eta - \frac{h}{a^2} sen\, A . ds + \xi . d\alpha, \\ dA &= sen\, L . d\Lambda, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

delle quali la penultima proviene dall'eliminazione di $d\Lambda$ fra la seconda e la quarta. Indichiamo, come nel capitolo precedente, con φ', ω', α' rispettivamente la latitudine, la longitudine e l'azimut geografici lungo un arco di geodetica ellissoidica che parta dal punto $\varphi_0 = l_0 + \xi_0$, $\omega_0 = \lambda_0 + \eta_0 sec\, l_0$ (che sull'ellissoide corrisponde geodeticamente all'origine $M(l_0, \lambda_0)$ della geodetica geoidica s_1 che si vuole considerare sotto l'azimut $\alpha_0 = A_0 + \eta_0 tang\, l_0$ corrispondente all'azimut geoidico A_0 di partenza della s_1, e che sia in lunghezza eguale alla s_1 stessa, e poniamo in generale

$$\left.\begin{aligned} L &= \varphi' + \varepsilon_\varphi, \\ \Lambda &= \omega' + \varepsilon_\omega, \\ A &= \alpha' + \varepsilon_\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

intendendo che L, Λ ed A da una parte, φ', ω' ed α' dall'altra sieno i valori della latitudine, della longitudine e dell'azimut corrispondenti ad un comune qualunque valore s degli archi di geo-

detica geoidica ed ellissoidica. Le quantità ε_φ, ε_ω, ε_α sono evidentemente dell'ordine delle attrazioni locali, dimodochè possiamo trascurare negli sviluppi in serie i termini in $e^2\varepsilon_\varphi$, $e^2\varepsilon_\omega$, $e^2\varepsilon_\alpha$, ε_φ^2, ε_ω^2, ε_α^2 e scrivere, nelle consuete notazioni degli elementi geodetici dell'ellissoide,

$$\frac{\cos A\,(1-e^2.\operatorname{sen}^2 L)^{3/2}}{a(1-e^2)} = \frac{\cos\alpha'}{\rho'} - \frac{\operatorname{sen}\alpha'.\varepsilon_\alpha}{\rho'},$$

$$\frac{\operatorname{sen} A.\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2 L}}{a.\cos L} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{r'} + \frac{\cos\alpha'.\varepsilon_\alpha}{r'} + \frac{\operatorname{sen}\alpha'.\operatorname{tang}\varphi'.\varepsilon_\varphi}{r'},$$

$$\frac{\operatorname{sen} A.\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2 L}}{a.\operatorname{cotg} L} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'.\operatorname{sen}\varphi'}{r'} + \frac{\cos\alpha'.\operatorname{tang}\varphi'.\varepsilon_\alpha}{N'} + \frac{\operatorname{sen}\alpha'.\varepsilon_\varphi}{N'.\cos^2\varphi'},$$

o, più semplicemente:

$$\frac{\cos A\,.\,(1-e^2.\operatorname{sen}^2 L)^{3/2}}{a(1-e^2)}\,ds = d\varphi' - \varepsilon_\alpha\cos\varphi'.d\omega',$$

$$\frac{\operatorname{sen} A.\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2 L}}{a.\cos L}\,ds = d\omega' + \varepsilon_\alpha\sec\varphi'.d\varphi' + \varepsilon_\varphi\sec\varphi'.d\alpha',$$

$$\frac{\operatorname{sen} A.\sqrt{1-e^2.\operatorname{sen}^2 L}}{a.\operatorname{cotg} L}\,ds = d\alpha' + \varepsilon_\alpha\operatorname{tang}\varphi'.d\varphi' + \frac{\varepsilon_\varphi.d\alpha'}{\operatorname{sen}\varphi'.\cos\varphi'}.$$

Per mezzo di questi sviluppi e delle corrispondenze (33), osservando che si ha identicamente

$$\cos\varphi'.d\varepsilon_\alpha = d(\varepsilon_\alpha.\cos\varphi') + \varepsilon_\alpha\operatorname{sen}\varphi'.d\varphi',$$

e che, dentro l'approssimazione tenuta, si può scambiare A con α ed L con φ' nei termini dipendenti dalle attrazioni locali, la prima e la terza delle equazioni differenziali (32) si trasformano nelle seguenti

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_\varphi &= -\varepsilon_\alpha\frac{\cos\varphi'}{\operatorname{sen}\varphi'}\,d\alpha' - d\xi - \frac{h}{a^2}\cos\alpha'.ds - \eta.d\alpha', \\ d(\varepsilon_\alpha.\cos\varphi') &= \frac{\varepsilon_\varphi.d\alpha'}{\operatorname{sen}\varphi'} - \left(d\eta + \frac{h}{a^2}\operatorname{sen}\alpha'.ds - \xi.d\alpha'\right)\operatorname{sen}\varphi'. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Se si sommano membro a membro queste relazioni dopo averle rispettivamente moltiplicate per $\cos\alpha'$ e per $\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\varphi'$ si trae

$$\cos\alpha'.d\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\varphi\operatorname{sen}\alpha'.d\alpha' + \operatorname{sen}\alpha'.\operatorname{sen}\varphi'.d(\varepsilon_\alpha\cos\varphi') + \frac{\varepsilon_\alpha\cos\varphi'.\cos\alpha'}{\operatorname{sen}\varphi'}\,d\alpha' =$$

$$= -\cos\alpha'.d\xi - \operatorname{sen}^2\varphi'.\operatorname{sen}\alpha'.d\eta - \frac{h}{a^2}(1-\cos^2\varphi'.\operatorname{sen}^2\alpha')\,ds +$$

$$+ \xi.\operatorname{sen}^2\varphi'.\operatorname{sen}\alpha'.d\alpha' - \eta.\cos\alpha'.d\alpha',$$

ove il primo membro si riduce ad una differenziale esatta, ossia a

$$d(\varepsilon_\alpha \cos\alpha') + d(\varepsilon_\alpha \cos\varphi' . \operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha'),$$

osservando che, dentro l'approssimazione tenuta, è

$$d\varphi' = \operatorname{cotg}\varphi' . \operatorname{cotg}\alpha' . d\alpha',$$

e quindi:

$$d(\operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha') = \frac{\cos\alpha'}{\operatorname{sen}\varphi'} d\alpha'. \qquad (k)$$

Porremo pertanto

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_\varphi \cos\alpha' + \varepsilon_\alpha \cos\varphi' . \operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' = -\int (\cos\alpha' . d\xi + \operatorname{sen}^2\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' . d\eta) - \\ &- \frac{1}{a^2}\int h(1 - \cos^2\varphi' . \operatorname{sen}^2\alpha')\, ds + \int (\xi . \operatorname{sen}^2\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' - \eta . \cos\alpha')\, d\alpha' + C_1 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

rappresentando con C_1 la costante di integrazione da determinare poi per mezzo delle condizioni ai limiti degli integrali.

Analogamente se si sottraggono membro a membro le (34) dopo averle rispettivamente moltiplicate per $\operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\varphi'$ e per $\cos\alpha'$ si trova

$$\operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' . d\varepsilon_\varphi + \frac{\varepsilon_\varphi \cos\alpha'}{\operatorname{sen}\varphi'} d\alpha' + \varepsilon_\alpha \cos\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' . d\alpha' - \cos\alpha' . d(\varepsilon_\alpha \cos\varphi') =$$

$$= -d\xi . \operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' + d\eta . \operatorname{sen}\varphi' . \cos\alpha' - (\eta . \operatorname{sen}\alpha' + \xi . \cos\alpha') \operatorname{sen}\varphi' . d\alpha',$$

d'onde, tenendo conto della precedente relazione (k) ed integrando, avremo:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_\varphi \operatorname{sen}\alpha' . \operatorname{sen}\varphi' - \varepsilon_\alpha \cos\varphi' . \cos\alpha' = -\int (\operatorname{sen}\alpha' . d\xi - \cos\alpha' . d\eta) \operatorname{sen}\varphi' - \\ &- \int (\eta . \operatorname{sen}\alpha' + \xi . \cos\alpha') \operatorname{sen}\varphi' . d\alpha' + C_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Se ora si risolvono le (35) e (36) rispetto alle nostre incognite ε_φ, ε_α si ottiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi (1 - \operatorname{sen}^2\alpha' . \cos^2\varphi') = &-\cos\alpha' \int (\cos\alpha' . d\xi + \operatorname{sen}^2\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' . d\eta) - \\ &- \operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' \int (\operatorname{sen}\alpha' . d\xi - \cos\alpha' . d\eta) \operatorname{sen}\varphi' - \\ &- \cos\alpha' \int (\eta . \cos\alpha' - \xi . \operatorname{sen}^2\varphi' . \operatorname{sen}\alpha')\, d\alpha' - \\ &- \operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' \int (\eta . \operatorname{sen}\alpha' + \xi . \cos\alpha') \operatorname{sen}\varphi' . d\alpha' - \\ &- \frac{\cos\alpha'}{a^2} \int h(1 - \cos^2\varphi' . \operatorname{sen}^2\alpha')\, ds + C_1 \cos\alpha' + C_2 \operatorname{sen}\alpha' . \operatorname{sen}\varphi', \end{aligned}$$

$$\varepsilon_\alpha \cos\varphi'(1-sen^2\alpha'.cos^2\varphi') = -sen\varphi'.sen\alpha'\int(cos\alpha'.d\xi + sen^2\varphi'.sen\alpha'.d\eta) +$$

$$+cos\alpha'\int(sen\alpha'.d\xi - cos\alpha'.d\eta)\,sen\varphi' -$$

$$-sen\varphi'.sen\alpha'\int(\eta.cos\alpha' - \xi.sen^2\varphi'.sen\alpha')\,d\alpha' +$$

$$+cos\alpha'\int(\eta.sen\alpha' + \xi.cos\alpha')\,sen\varphi'.d\alpha' -$$

$$-\frac{sen\varphi'.sen\alpha'}{a^2}\int h(1-cos^2\varphi'.sen^2\alpha')\,ds +$$

$$+C_1 sen\varphi'.sen\alpha' - C_2 cos\alpha';$$

ma lungo la geodetica ellissoidica s, alla quale le quantità ε_φ ed ε_α per ipotesi si riferiscono, si ha

$$\frac{cos\varphi'.sen\alpha'}{\sqrt{1-e^2.sen^2\varphi'}} = costante = sen\beta, \qquad (37)$$

essendo β un angolo ausiliario costante; quindi le precedenti espressioni di ε_φ, ε_α, introducendo per $cos\varphi' sen\alpha'$ il suo valore tratto dalla (37), e ponendo per semplicità di notazione

$$\left.\begin{aligned} cos^2\beta.I &= \int(cos\alpha'.d\xi + sen^2\varphi'.sen\alpha'.d\eta),\\ cos^2\beta.II &= \int(sen\alpha'.d\xi - cos\alpha'.d\eta)\,sen\varphi',\\ cos^2\beta.III &= \int(\eta.cos\alpha' - \xi.sen^2\varphi'.sen\alpha')\,d\alpha',\\ cos^2\beta.IV &= \int(\xi.cos\alpha' + \eta.sen\alpha')\,sen\varphi'.d\alpha', \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

si riducono a

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= -cos\alpha'\left(I + III + \int\frac{h}{a^2}\,ds\right) - sen\alpha'.sen\varphi'(II+IV) +\\ &\quad + \frac{C_1 cos\alpha' + C_2 sen\varphi'.sen\alpha'}{cos^2\beta},\\ cos\varphi'.\varepsilon_\alpha &= -sen\alpha'.sen\varphi'\left(I + III + \int\frac{h}{a^2}\,ds\right) + cos\alpha'(II+IV) +\\ &\quad + \frac{C_1 sen\alpha'.sen\varphi' - C_2 cos\alpha'}{cos^2\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Per dedurre anche l'espressione di ε_ω introduciamo nell'ultima delle (32) in luogo di dA e di $d\Lambda$ i valori che per tali quantità si deducono differenziando le corrispondenze (33); avremo per tal guisa

$$d\omega' + d\varepsilon_\omega = \frac{d\alpha'}{sen\,L} + \frac{d\varepsilon_\alpha}{sen\,L} = \frac{d\alpha'}{sen\,\varphi'} - \frac{\varepsilon_\varphi cos\,\varphi' . d\alpha'}{sen^2\varphi'} + \frac{d\varepsilon_\alpha}{sen\,L},$$

da cui, se si scambia come più sopra L con φ' nel termine dipendente da ε_α, e si tien conto della relazione ellissoidica fra $d\omega'$ e $d\alpha'$, si trae:

$$d\varepsilon_\omega = \frac{d\varepsilon_\alpha}{sen\,\varphi'} - \frac{\varepsilon_\varphi cos\,\varphi' . d\alpha'}{sen^2\varphi'}.$$

Si ha per altro identicamente

$$\frac{d\varepsilon_\alpha}{sen\,\varphi'} = d\frac{\varepsilon_\alpha}{sen\,\varphi'} + \frac{\varepsilon_n cos\,\varphi' . d\varphi'}{sen^2\varphi'},$$

quindi porremo

$$\varepsilon_\omega = \frac{\varepsilon_\alpha}{sen\,\varphi'} + \int \frac{cos\,\varphi'}{sen^2\varphi'} (\varepsilon_\alpha . d\varphi' - \varepsilon_\varphi . d\alpha') + C_3,$$

e, sostituendo ad ε_α ed ε_φ i loro valori (39), otterremo:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\omega = \frac{\varepsilon_\alpha}{sen\,\varphi'} &+ \int \left(I + III + \int \frac{h}{a^2} ds \right) \frac{cos\,\varphi' . cos\,\alpha' . d\alpha' - sen\,\varphi' . sen\,\alpha' . d\varphi'}{sen^2\varphi'} + \\ &+ \int (II + IV) \frac{cos\,\alpha' . d\varphi' + cos\,\varphi' . sen\,\alpha' . sen\,\varphi' . d\alpha'}{sen^2\varphi'} + \\ &+ \int \frac{C_1 sen\,\alpha' . sen\,\varphi' - C_2 cos\,\alpha'}{sen^2\varphi' . cos^2\beta} d\varphi' - \\ &- \int \frac{C_1 cos\,\alpha' + C_2 sen\,\alpha' . sen\,\varphi'}{sen^2\varphi' . cos^2\beta} cos\,\varphi' . d\alpha' + C_3 . \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Se si tien conto delle identità

$$d(cos\,\varphi' . sen\,\alpha') = cos\,\varphi' . cos\,\alpha' . d\alpha' - sen\,\alpha' . sen\,\varphi' . d\varphi',$$

$$-d(cotg\,\varphi' . cos\,\alpha') = cotg\,\varphi' . sen\,\alpha' . d\alpha' + \frac{cos\,\alpha'}{sen^2\varphi'} d\varphi',$$

e si ricorda che, dentro la solita approssimazione, nel secondo membro della (40) si può fare

$$cos\,\varphi' . sen\,\alpha' = sen\,\beta = costante,$$

$$d(cos\,\varphi' . sen\,\alpha') = 0,$$

è facile ridurre la relazione (40) medesima alla forma seguente

$$\varepsilon_\omega = \frac{\varepsilon_\alpha}{sen\,\varphi'} - \int (II+IV).d(cotg\,\varphi'.cos\,\alpha') - C_2 \int \frac{ds}{a.sen^2\varphi'} + C_3,$$

da cui, osservando che è

$$\left.\begin{aligned} \int (II+IV).d(cotg\,\varphi'.cos\,\alpha') = (II+IV)\,cotg\,\varphi'.cos\,\alpha' - \\ - \int cotg\,\varphi'.cos\,\alpha'.d(II+IV) + C_4 \end{aligned}\right\}, \quad (41)$$

sostituendo al differenziale $d(II+IV)$ il suo valore tratto dalla seconda e dalla quarta delle (38), e ponendo, per brevità di notazione,

$$\left.\begin{aligned} cos^2\beta.V &= \int (sen\,\alpha'.d\xi - cos\,\alpha'.d\eta)\,cos\,\varphi'.cos\,\alpha', \\ cos^2\beta.VI &= \int (\xi.cos\,\alpha' + \eta.sen\,\alpha')\,cos\,\varphi'.cos\,\alpha'.d\alpha', \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

si ricava

$$\left.\begin{aligned} cos\,\varphi'.\varepsilon_\omega = -sen\,\alpha'\left((I+III+\int \frac{h}{a^2}ds\right) + cos\,\alpha'.sen\,\varphi'(II+IV) + \\ + cos\,\varphi'(V+VI) + \frac{C_1 sen\,\alpha'.sen\,\varphi' - C_2 cos\,\alpha'}{cos^2\beta.sen\,\varphi'} + \\ + C_2 cos\,\varphi' \int \frac{ds}{a.sen^2\varphi'} + (C_3 - C_4)\,cos\,\varphi'. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

9. Per rendere esplicito il significato degli integrali *I*, *II* e *V*, che dipendono da $d\xi$ e $d\eta$, torniamo alle relazioni fra le componenti ξ ed η dell'attrazione locale nelle due direzioni cardinali Nord-Sud ed Est-Ovest, e le componenti θ_s e θ_v nelle direzioni della geodetica s e delle sue traiettorie ortogonali, caratterizzate cioè dagli azimut α ed $\alpha + 90°$. Tali relazioni, come risulta anche dalle precedenti formule (27) e (28), sono

$$\left.\begin{aligned} \theta_s &= \xi.cos\,\alpha + \eta.sen\,\alpha, \\ \theta_v &= -\xi.sen\,\alpha + \eta.cos\,\alpha, \\ \xi &= \theta_s cos\,\alpha - \theta_v sen\,\alpha, \\ \eta &= \theta_s sen\,\alpha + \theta_v cos\,\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

e dalle due ultime di queste si trova, differenziando:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= (d\theta_s - \theta_v.d\alpha)\,cos\,\alpha - (d\theta_v + \theta_s d\alpha)\,sen\,\alpha, \\ d\eta &= (d\theta_s - \theta_v.d\alpha)\,sen\,\alpha + (d\theta_v + \theta_s d\alpha)\,cos\,\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Se si introducono ancora le notazioni

$$\left.\begin{aligned} dX &= d\theta_s - \theta_\nu . d\alpha, \\ dY &= d\theta_\nu + \theta_s . d\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

e si sostituiscono nelle (38) e (42) a $d\xi$, $d\eta$ le loro espressioni (45) colla solita avvertenza che, dentro l'approssimazione tenuta, si può porre

$$\cos\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}\beta = \text{costante}$$

nei termini dipendenti dalle attrazioni locali, si deduce, dopo facili trasformazioni:

$$\cos^2\beta . I = -\operatorname{sen}\beta \int \cos\alpha' . \cos\varphi' . dY + \int (1 - \operatorname{sen}^2\alpha' . \cos^2\varphi') dX =$$

$$= -\operatorname{sen}\beta \int \cos\alpha' . \cos\varphi' . dY + \cos^2\beta \int dX,$$

$$\cos^2\beta . II = -\int \operatorname{sen}\varphi' . dY,$$

$$\cos^2\beta . V = -\int \cos\varphi' . \cos\alpha' . dY .$$

Dacchè queste relazioni si riferiscono alla geodetica ellissoidica s conviene però introdurre in luogo di φ' ed α' come unica variabile la s, o l'arco sferico che gli corrisponde nel triangolo ausiliario Besseliano (vedi capitolo VIII, § 13), e che qui indicheremo con χ. Ora tale triangolo fornisce le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi' \operatorname{sen}\alpha' &= \cos\varphi'_0 \operatorname{sen}\alpha'_0 + e^2\{\dots\} = \operatorname{sen}\beta + e^2\{\dots\}, \\ \cos\varphi' \cos\alpha' &= -\operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\varphi'_0 + \cos\chi \cos\varphi'_0 \cos\alpha'_0 + e^2\{\dots\}, \\ \operatorname{sen}\varphi' &= \cos\chi \operatorname{sen}\varphi'_0 + \operatorname{sen}\chi \cos\varphi'_0 \cos\alpha'_0 + e^2\{\dots\}, \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

φ_0 ed α'_0 essendo, come abbiamo già supposto, i valori che prendono φ' ed α' all'origine della geodetica s e quindi per $\chi = 0$. Avremo pertanto

$$I = \frac{\operatorname{sen}\varphi'_0 \operatorname{sen}\beta}{\cos^2\beta} \int \operatorname{sen}\chi . dY - \frac{\operatorname{sen}\beta . \cos\varphi'_0 \cos\alpha'_0}{\cos^2\beta} \int \cos\chi . dY + \int dX,$$

$$II = -\frac{\operatorname{sen}\varphi'_0}{\cos^2\beta} \int \cos\chi . dY - \frac{\cos\varphi'_0 \cos\alpha'_0}{\cos^2\beta} \int \operatorname{sen}\chi . dY,$$

$$V = \frac{\operatorname{sen}\varphi'_0}{\cos^2\beta} \int \operatorname{sen}\chi . dY - \frac{\cos\varphi'_0 \cos\alpha'_0}{\cos^2\beta} \int \cos\chi . dY,$$

e, sostituendo nelle (39) e (43) si otterrà:

$$\cos^2\beta\,.\,\varepsilon_\varphi = \operatorname{sen}\alpha'(\operatorname{sen}\varphi'_0\cos\varphi'_0\cos\alpha'_0 - \operatorname{sen}\varphi'\cos\varphi'_0\cos\alpha'_0)\int \operatorname{sen}\chi\,.\,dY -$$

$$-\operatorname{sen}\alpha'(\cos\varphi'_0\cos\alpha'_0\cos\varphi'\cos\alpha' + \operatorname{sen}\varphi'_0\operatorname{sen}\varphi')\int\cos\chi\,.\,dY -$$

$$-\cos\alpha'\int(\eta\,.\cos\alpha' - \xi\,.\,\operatorname{sen}^2\varphi'\,.\operatorname{sen}\alpha')\,d\alpha' -$$

$$-\operatorname{sen}\varphi'.\operatorname{sen}\alpha'\int(\xi\,.\cos\alpha' + \eta\,.\operatorname{sen}\alpha')\operatorname{sen}\varphi'.\,d\alpha' -$$

$$+\cos^2\beta\,.\cos\alpha'\int\left(\frac{h}{a^2}\,ds + dX\right) + C_1\cos\alpha' + C_2\,.\operatorname{sen}\alpha'.\operatorname{sen}\varphi',$$

$$\cos\varphi'.\cos^2\beta\,.\,\varepsilon_\omega = \cos\alpha'(\operatorname{sen}\varphi'_0\cos\varphi'\cos\alpha' - \operatorname{sen}\varphi'\cos\varphi'_0\cos\alpha'_0)\int\operatorname{sen}\chi\,.\,dY -$$

$$-\cos\alpha'(\cos\varphi'\cos\varphi'_0\cos\alpha'_0\cos\alpha' + \operatorname{sen}\varphi'_0\operatorname{sen}\varphi')\int\cos\chi\,.\,dY -$$

$$-\operatorname{sen}\alpha'\int(\eta\,.\cos\alpha' - \xi\,.\,\operatorname{sen}^2\varphi'\operatorname{sen}\alpha')\,d\alpha' +$$

$$+\operatorname{sen}\varphi'.\cos\alpha'\int(\xi\,.\cos\alpha' + \eta\,.\operatorname{sen}\alpha')\operatorname{sen}\varphi'.\,d\alpha' +$$

$$+\cos\varphi'\int(\xi\,.\cos\alpha' + \eta\,.\operatorname{sen}\alpha')\cos\varphi'\cos\alpha'.\,d\alpha' +$$

$$+\cos^2\beta\,.\operatorname{sen}\alpha'\int\left(\frac{h}{a^2}\,ds + dX\right) - C_2\cos\varphi'.\cos^2\beta\int\frac{ds}{a\,.\,\operatorname{sen}^2\varphi'} +$$

$$+\frac{C_1\operatorname{sen}\alpha'.\operatorname{sen}\varphi' - C_2\cos\alpha'}{\operatorname{sen}\varphi'} + (C_3 - C_4)\cos\varphi'.\cos^2\beta,$$

$$\cos^2\beta\,.\cos\varphi'.\,\varepsilon_\alpha = -(\operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\varphi'_0\cos\varphi' + \cos\alpha'\cos\varphi'_0\cos\alpha'_0)\int\operatorname{sen}\chi\,.\,dY -$$

$$-(\cos\alpha'\operatorname{sen}\varphi'_0 - \operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}^2\alpha'\cos\varphi'_0\cos\alpha'_0)\int\cos\chi\,.\,dY -$$

$$-\operatorname{sen}\alpha'.\operatorname{sen}\varphi'\int(\eta\,.\cos\alpha' - \xi\,.\,\operatorname{sen}^2\varphi'.\operatorname{sen}\alpha')\,d\alpha' +$$

$$+\cos\alpha'\int(\xi\,.\cos\alpha' + \eta\,.\operatorname{sen}\alpha')\operatorname{sen}\varphi'.\,d\alpha' -$$

$$-\cos^2\beta\,.\operatorname{sen}\varphi'.\operatorname{sen}\alpha'\int\left(\frac{h}{a^2}\,ds + dX\right) + C_1\operatorname{sen}\alpha'.\operatorname{sen}\varphi' - C_2\cos\alpha'.$$

A queste relazioni poi, notando che dalle (47) si ha

$$sen\varphi' cos\varphi'_0 cos\alpha'_0 - cos\varphi' cos\alpha' sen\varphi'_0 =$$
$$= sen\chi\,(sen^2\varphi'_0 + cos^2\varphi'_0 cos^2\alpha'_0) = sen\chi\, cos^2\beta,$$
$$sen\varphi' sen\varphi'_0 + cos\varphi' cos\varphi'_0 cos\alpha' cos\alpha'_0 = cos\chi\, cos^2\beta,$$

può darsi la seguente forma più semplice

$$\varepsilon_\varphi = sen\alpha'\left\{sen\chi\int sen\chi\,.\,dY + cos\chi\int cos\chi\,.\,dY\right\} -$$
$$-\frac{cos\alpha'}{cos^2\beta}\int(\eta\,.\,cos\alpha' - \xi\,.\,sen^2\varphi'.sen\alpha')\,d\alpha' -$$
$$-\frac{sen\alpha'.sen\varphi'}{cos^2\beta}\int(\xi\,.\,cos\alpha' + \eta\,.\,sen\alpha')\,sen\varphi'.d\alpha' +$$
$$+cos\alpha'\int\left(\frac{h}{a^2}ds + dX\right) + \frac{C_1 cos\alpha' + C_2 sen\varphi'.sen\alpha'}{cos^2\beta}$$

$$cos\varphi'.\varepsilon_\omega = -cos\alpha'\left\{sen\chi\int sen\chi\,.\,dY + cos\chi\int cos\chi\,.\,dY\right\} -$$
$$-\frac{sen\alpha'}{cos^2\beta}\int(\eta\,.\,cos\alpha' - \xi\,.\,sen^2\varphi'.sen\alpha')\,d\alpha' +$$
$$+\frac{sen\varphi'.cos\alpha'}{cos^2\beta}\int(\xi\,.\,cos\alpha' + \eta\,.\,sen\alpha')\,sen\varphi'.d\alpha' +$$
$$+\frac{cos\varphi'}{cos^2\beta}\int(\xi\,.\,cos\alpha' + \eta\,.\,sen\alpha')\,cos\varphi'.cos\alpha'.d\alpha' +$$
$$+sen\alpha'\int\left(\frac{h}{a^2}ds + dX\right) - C_2 cos\varphi'\int\frac{ds}{a\,.\,sen^2\varphi'} +$$
$$+\frac{C_1 sen\alpha' sen\varphi' - C_2 cos\alpha'}{sen\varphi'.cos^2\beta} + (C_3 - C_4)\,cos\varphi',$$

$$cos\varphi'.\varepsilon_\alpha = -cos\alpha'.sen\varphi'\left\{sen\chi\int sen\chi\,.\,dY + cos\chi\int cos\chi\,.\,dY\right\} +$$
$$+cos\varphi'\left\{sen\chi\int cos\chi\,.\,dY - cos\chi\int sen\chi\,.\,dY\right\} -$$
$$-\frac{sen\varphi'.sen\alpha'}{cos^2\beta}\int(\eta\,.\,cos\alpha' - \xi\,.\,sen^2\varphi'.sen\alpha')\,d\alpha' +$$
$$+\frac{cos\alpha'}{cos^2\beta}\int(\xi\,.\,cos\alpha' + \eta\,.\,sen\alpha')\,sen\varphi'.d\alpha' -$$
$$-sen\varphi'.sen\alpha'\int\left(\frac{h}{a^2}ds + dX\right) + \frac{C_1 sen\alpha'.sen\varphi' - C_2 cos\alpha'}{cos^2\beta}.$$

10. Le integrazioni accennate non possono essere eseguite in generale giacchè, a priori, ci è affatto sconosciuta la relazione fra χ e l'attrazione locale lungo la geodetica s, e quindi fra χ ed Y; ma nel caso in cui l'arco s sia di lunghezza limitata, per modo che le quantità $\frac{s}{a}$ e χ possano essere considerate come piccole del primo ordine, dentro l'approssimazione del secondo ordine relativo, ossia dell'ordine di $\xi\frac{s}{a}$, e di $\eta\frac{s}{a}$, nelle formule precedenti si può porre

$$\left.\begin{aligned} &\cos\chi\int\cos\chi\,.\,dY+\operatorname{sen}\chi\int\operatorname{sen}\chi\,.\,dY=\int dY+\frac{s}{a^2}\int s\,.\,dY=\int dY+\ldots,\\ &\operatorname{sen}\chi\int\cos\chi\,.\,dY-\cos\chi\int\operatorname{sen}\chi\,.\,dY=\frac{s}{a}\int dY-\frac{1}{a}\int s\,.\,dY=\frac{1}{a}\int ds\int dY,\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

giacchè la differenza fra χ ed $\frac{s}{a}$ è dell'ordine di $\frac{e^2.s}{a}$. Integrando poi le (46) e tenendo conto delle (44) si trova

$$\left.\begin{aligned} &\int dX=\theta_s-\int\theta_\nu\,d\alpha'+C_5=\quad\xi\,.\cos\alpha'+\eta\,.\operatorname{sen}\alpha'-\int\theta_\nu\,d\alpha'+C_5,\\ &\int dY=\theta_\nu+\int\theta_s\,d\alpha'+C_6=-\xi\,.\operatorname{sen}\alpha'+\eta\,.\cos\alpha'+\int\theta_s\,d\alpha'+C_6;\end{aligned}\right\}\quad(49)$$

inoltre, dentro l'approssimazione del secondo ordine relativo suddetto, si ha:

$$\left.\begin{aligned} &\int(\eta\,.\cos\alpha'-\xi\,.\operatorname{sen}^2\varphi'\,.\operatorname{sen}\alpha')\,d\alpha'=\cos\alpha'\int\eta\,.\,d\alpha'-\operatorname{sen}\alpha'\,.\operatorname{sen}^2\varphi'\int\xi\,.\,d\alpha',\\ &\int(\xi\,.\cos\alpha'+\eta\,.\operatorname{sen}\alpha')\operatorname{sen}\varphi'\,.\,d\alpha'=\operatorname{sen}\varphi'\,.\cos\alpha'\int\xi\,.\,d\alpha+\operatorname{sen}\varphi'\,.\operatorname{sen}\alpha'\int\eta\,.\,d\alpha',\\ &\int(\xi\,.\cos\alpha'+\eta\,.\operatorname{sen}\alpha')\cos\varphi'\,.\cos\alpha'\,.\,d\alpha'=\cos\varphi'\,.\cos^2\alpha'\int\xi\,.\,d\alpha'+\\ &\qquad+\operatorname{sen}\alpha'\,.\cos\alpha'\,.\cos\varphi'\int\eta\,.\,d\alpha';\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

finalmente per determinare le varie costanti di integrazione immaginiamo che tutte le integrazioni sieno estese fra i limiti corrispondenti agli estremi dell'arco di geodetica s, e ricordiamo che all'origine di questo le coordinate ellissoidiche sono

$$\varphi_0'=l_0+\xi_0,\quad\omega_0'=\lambda_0+\eta_0\,sec\,\varphi_0,\quad\alpha_0'=A_0+\eta_0\,tang\,\varphi_0,$$

per modo che le deviazioni ε_φ, ε_ω, ε_α per $s=0$ prendono rispettivamente i valori $-\xi_0$, $-\eta_0 sec\,\varphi'_0$, $-\eta_0 tang\,\varphi'_0$. Le formule (35) e (36) dánno in tal caso

$$C_1 = -\xi_0 cos\,\alpha'_0 - \eta_0 sen^2\varphi'_0 sen\,\alpha'_0,$$

$$C_2 = -\xi_0 sen\,\alpha'_0 sen\,\varphi'_0 + \eta_0 sen\,\varphi'_0 cos\,\alpha'_0,$$

d'onde si vede che nel formare le quantità

$$C_1 cos\,\alpha' + C_2 sen\,\varphi'.sen\,\alpha',$$

$$C_1 sen\,\alpha'.sen\,\varphi' - C_2 cos\,\alpha',$$

dentro l'approssimazione tenuta, si può porre (v. Cap. VIII, §§ 2 e 7):

$$\alpha' = \alpha'_0 + \frac{s\,.\,tang\,\varphi'_0 sen\,\alpha'_0}{a},\quad \varphi' = \varphi'_0 + \frac{s\,.\,cos\,\alpha'_0}{a},$$

$$cos\,\alpha' = cos\,\alpha'_0 - \frac{s}{a} tang\,\varphi'_0 sen^2\alpha'_0,$$

$$sen\,\alpha' = sen\,\alpha'_0 + \frac{s}{\alpha} tang\,\varphi'_0 sen\,\alpha'_0 cos\,\alpha'_0,$$

$$sen\,\varphi' = sen\,\varphi'_0 + \frac{s}{a} cos\,\alpha'_0 cos\,\varphi'_0,$$

$$sen\,\alpha'.sen\,\varphi' = sen\,\varphi'_0 sen\,\alpha'_0 + \frac{s}{a} cos\,\alpha'_0 sen\,\alpha'_0 sec\,\varphi'_0,$$

$$cos^2\alpha'_0 + sen^2\alpha'_0 sen^2\varphi'_0 = 1 - sen^2\beta = cos^2\beta.$$

Con tali avvertenze si deduce

$$C_1 cos\,\alpha' + C_2 sen\,\varphi'.sen\,\alpha' = -\left(\xi_0 - \frac{\eta_0 s}{a} tang\,\varphi'_0 sen\,\alpha'_0\right) cos^2\beta,$$

$$C_1 sen\,\alpha'.sen\,\varphi' - C_2 cos\,\alpha' = -\left(\eta_0 sen\,\varphi'_0 + \frac{\xi_0 s}{a}\frac{sen\,\alpha'_0}{cos\,\varphi'_0}\right) cos^2\beta,$$

e, analogamente dalle formule (40), (41), e (49) si trova:

$$C_3 = -\frac{\eta_0}{cos\,\varphi'_0} + \frac{\eta_0 tang\,\varphi'_0}{sen\,\varphi'_0} = 0,\quad C_4 = 0,$$

$$C_5 = -(\theta_x)_0 = -\xi_0 cos\,\alpha'_0 - \eta_0 sen\,\alpha'_0$$

$$C_6 = -(\theta_y)_0 = \xi_0 sen\,\alpha'_0 - \eta_0 cos\,\alpha'_0.$$

Sostituendo nelle espressioni di ε_φ, ε_ω, ε_α e ricordando che è

$$cos^2\beta = cos^2\alpha' + sen^2\alpha' . sen^2\varphi' = 1 - sen^2\alpha' . cos^2\varphi'$$

si ottiene:

$$L - \varphi' = \varepsilon_\varphi = -\xi_0 - \xi + \xi_0 cos(\alpha' - \alpha'_0) + \frac{\eta_0 s}{a} tang\,\varphi'_0 sen\,\alpha'_0 -$$

$$- \eta_0 sen(\alpha' - \alpha'_0) + sen\,\alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_s d\alpha' + cos\,\alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_\nu d\alpha' -$$

$$- \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \eta . d\alpha' - cos\,\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds ,$$

$$(\Lambda - \omega') cos\,\varphi' = \varepsilon_\omega cos\,\varphi' = -\eta_0 - \eta + \xi_0 sen(\alpha' - \alpha'_0) + \eta_0 cos(\alpha' - \alpha'_0) -$$

$$- \frac{\xi_0 s}{a} sen\,\alpha'_0 tang\,\varphi'_0 + sen\,\alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_\nu d\alpha' - cos\,\alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_s d\alpha' +$$

$$+ \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \xi . d\alpha' - sen\,\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds ,$$

$$(A - \alpha') cos\,\varphi' = \varepsilon_\alpha cos\,\varphi' = -\eta_0 sen\,\varphi'_0 - \eta . sen\,\varphi' + \eta_0 sen\,\varphi' . cos(\alpha' - \alpha'_0) +$$

$$+ \xi_0 sen\,\varphi' . sen(\alpha' - \alpha'_0) - \frac{\xi_0 s}{a} \frac{sen\,\alpha'_0}{cos\,\varphi'_0} - sen\,\varphi' . cos\,\alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_s d\alpha' +$$

$$+ sen\,\varphi' . sen\,\alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_\nu d\alpha' + sen\,\varphi' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \xi . d\alpha' + cos\,\varphi' \int_0^s \frac{ds}{a} \int_0 dY -$$

$$- sen\,\varphi' . sen\,\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds .$$

Queste relazioni si riducono ad una forma semplicissima osservando che nei limiti dell'approssimazione tenuta nel dedurle vi si può porre come del resto abbiamo già implicitamente fatto:

$$\alpha' - \alpha'_0 = \frac{s . tang\,\varphi'_0 sen\,\alpha'_0}{a} ,$$

$$cos(\alpha' - \alpha'_0) = 1 , \quad sen(\alpha' - \alpha'_0) = \alpha' - \alpha'_0 ,$$

$$\int \theta_s d\alpha' = \int (\xi . \cos\alpha' + \eta . \operatorname{sen}\alpha') d\alpha' = \cos\alpha' \int \xi . d\alpha' + \operatorname{sen}\alpha' \int \eta . d\alpha',$$

$$\int \theta_\nu d\alpha' = -\int (\xi . \operatorname{sen}\alpha' - \eta . \cos\alpha') d\alpha' = -\operatorname{sen}\alpha' \int \xi . d\alpha' + \cos\alpha' \int \eta . d\alpha',$$

$$\int_0^s \frac{ds}{a} \int_0^s dY = \int_0^s \theta_\nu \frac{ds}{a} - (\theta_\nu)_0 \int_0^s \frac{ds}{a} + \int_0^s \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_s \frac{ds . d\alpha}{a} = \int_0^s \theta_\nu \frac{ds}{a} - (\theta_\nu)_0 \frac{s}{a} + 3.^{o} \text{ ordine;}$$

per tal modo si deduce

$$\left.\begin{aligned} L - \varphi' &= -\xi - \cos\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ (\lambda - \omega') \cos\varphi' &= -\eta - \operatorname{sen}\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ (A - \alpha') \cos\varphi' &= -\eta . \operatorname{sen}\varphi' + \cos\varphi' \int_0^s \frac{\theta_\nu ds}{a} - \operatorname{sen}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Indicando poi, come nel capitolo precedente, con l e λ le coordinate astronomiche del punto del geoide che corrisponde al punto φ', ω' dell'arco s di geodetica ellissoidica, e con A' l'azimut astronomico che corretto dall'influenza dell'attrazione locale è uguale ad α' si ha per altro

$$l = \varphi' - \xi, \quad \lambda = \omega' - \eta . \sec\varphi', \quad A' = \alpha' - \eta . \operatorname{tang}\varphi',$$

dimodochè le (51) possono anche essere scritte come segue

$$\left.\begin{aligned} L - l &= -\cos\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ \Lambda - \lambda &= -\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\cos\varphi'} \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ A - A' &= \int_0^s \frac{\theta_\nu ds}{a} - \operatorname{tang}\varphi' . \operatorname{sen}\alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

sotto la qual forma dánno gli errori che si commettono nel trasporto della latitudine, della longitudine e dell'azimut lungo una geodetica geoidica se si considera questa come ellissoidica, e determi-

nano quindi anche le correzioni che devono esser fatte all'azimut ed alla lunghezza di un arco di geodetica geoidica per ridurlo all'arco di geodetica ellissoidica corrispondente, che corre cioè fra i punti dell'ellissoide che corrispondono geodeticamente agli estremi dell'arco geoidico. Le espressioni analitiche di tali correzioni, che indicheremo rispettivamente con $\delta\alpha$ e δs, si ottengono dalle formule (80) del capitolo precedente, le prime due delle quali possono essere scritte anche come segue

$$\rho.\delta\Delta\varphi_{s,\alpha} = cos\,\alpha.\delta s - s.sen\,\alpha.\delta\alpha$$
$$r.\delta\Delta\omega_{s,\alpha} = sen\,\alpha.\delta s + s.cos\,\alpha.\delta\alpha,$$

e che, quantunque si riferiscano all'ellissoide, dentro l'approssimazione delle (52) sono evidentemente applicabili anche al geoide. Ponendo $\delta\Delta\varphi_{s,\alpha} = L - l$, $\delta\Delta\omega_{s,\alpha} = \Lambda - \lambda$ si trova

$$\left.\begin{aligned} \delta s &= -\int_0^s \frac{h}{a}\,ds, \\ \delta\alpha &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

come avevamo già dimostrato sommariamente nel precedente capitolo, giacchè l'azimut ellissoidico α_0, cui si riferisce la seconda delle (53), differisce già per ipotesi dall'azimut geoidico iniziale A_0 della geodetica s per la quantità $\eta_0 tang\varphi_0$, che rappresenta l'attrazione locale in azimut.

11. È utile notare che tutte le precedenti relazioni in pratica non sono applicabili che al caso in cui la geodetica geoidica s sia stata misurata direttamente, giacchè i grandi archi di geodetica non possono essere che calcolati per mezzo di una rete di triangoli compensati e risoluti come ellissoidici e come se ad un ellissoide la geodetica appartenesse, e così rimane soltanto da tener conto delle correzioni da farsi alle basi geoidiche per ridurle all'ellissoide di riferimento che si considera.

Dal confronto fra le basi geodetiche fatto per mezzo delle triangolazioni interposte scaturisce un forte argomento contro la conclusione cui, come vedremo, condurrebbero i calcoli delle onde geoidiche fatti colla teorica dell'attrazione Newtoniana, immaginando che le densità terrestri nell'interno della terra siano distribuite equabilmente, e tenendo conto soltanto delle scabrosità visibili della crosta e degli avvallamenti marini. Infatti le differenze fra i valori

continentali di h, così calcolati, e quelli marini raggiungono parecchie centinaia di metri, perlochè le discordanze che si dovrebbero avere fra le basi geodetiche misurate sulle coste e quelle misurate nelle parti centrali dei continenti paragonandole fra loro per mezzo delle triangolazioni congiungenti, dovrebbero essere assai maggiori delle massime che sono fin qui state constatate. Così per due basi relative a due regioni per le quali l'altitudine ellissoidica h differisse in media di 200 metri la discordanza dovrebbe essere maggiore di $\frac{1}{33000}$ delle lunghezze, grandezza che supera di molto quella considerata come *tolleranza* nel trasporto di una lunghezza, mentre le discordanze fra le basi sono sempre minori di questa tolleranza.

Tornando poi alle relazioni (53), si deve notare che l'errore di trasporto degli azimut è di un ordine superiore a quello del trasporto delle latitudini e delle longitudini, e dipende non solo dalla altitudine h dei punti geoidici sull'ellissoide, ma anche dalla deviazione fra i piani osculatori della geodetica geoidica e quelli della geodetica ellissoidica corrispondenti, giacchè questa deviazione è in ciascun punto prossimamente misurata dalla componente θ_v dell'attrazione locale relativa all'azimut $90° + \alpha$. Ed infatti siano (fig. 76) N_e la normale ellissoidica ed N_g la verticale di un punto geoidico qualunque, OS la direzione di un elemento della geodetica

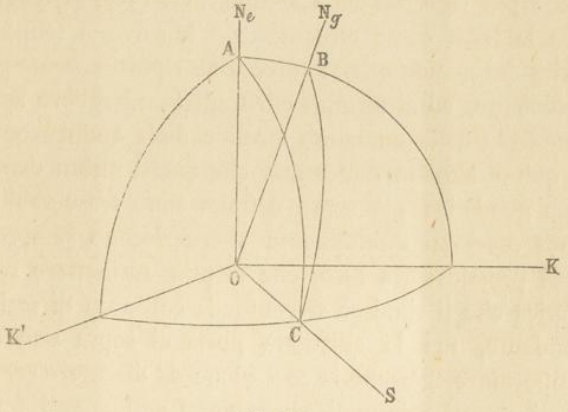

Fig. 76.

ellissoidica s, ed OK la traccia del piano N_eON_g sul piano tangente all'ellissoide, e cerchiamo l'espressione analitica dell'angolo diedro μ che il piano SON_e fa col piano SON_g: nel triangolo sferico ABC, corrispondente al triedro N_eN_gS, si ha evidentemente $c = 0$, $b = 90°$,

$C = \mu$. e l'angolo in A è la differenza fra l'azimut ψ del piano AOK nel quale agisce l'attrazione locale, e l'azimut α della geodetica; avremo pertanto

$$tang\,\mu = tang\,\theta \,.\, sen\,(\psi - \alpha),$$

o, trascurando i termini in θ^3,

$$\mu = \theta \,.\, sen\,(\psi - \alpha), \qquad (54)$$

ed è facile vedere come l'angolo μ dentro l'approssimazione delle (53) rappresenta appunto la deviazione fra i piani osculatori corrispondenti sopraddetti. Esprimendo successivamente nella (54) l'attrazione complessiva θ in funzione delle sue componenti nelle direzioni s e v si ottiene:

$$\theta_s = \mu \,.\, cotg\,(\psi - \alpha),$$

$$\theta_v = \mu,$$

come era da dimostrare.

12. L'azimut geoidico iniziale A_0 che abbiamo considerato nei paragrafi precedenti e che caratterizza la geodetica s se è data la sua origine, non può essere direttamente osservato: come è noto, in sua vece si considera l'azimut nel punto $s = 0$. della sezione verticale corrispondente ad s, ossia che passa per l'altro estremo di quest'arco, e si calcola quindi la differenza fra tale azimut ed A_0 per mezzo delle formule che abbiamo date nel Cap. III (vol. I, pag. 100), o di quelle più rigorose del Capitolo VIII (vol. II, pag. 187), considerando la terra come ellissoidica.* Ma ove si tenga conto delle irregolarità del geoide questa correzione rigorosamente parlando non è più sufficiente, ed ai termini ellissoidici andrebbero aggiunti quelli che dipendono dalle attrazioni locali e dalle ondulazioni geoidiche; bisogna quindi almeno dimostrare che questi ultimi dentro l'approssimazione geodetica già sopra definita sono trascurabili. In pratica gli azimut osservati direttamente si riferiscono sempre, è vero, a punti così prossimi fra loro, che si può ammettere senz'altro che la geodetica che li riunisce si confonda coll'arco di sezione normale corrispondente, ma la quistione posta di sopra non è per questo meno importante, giacchè la correzione da discutere serve altresì per ridurre gli angoli azimutali astronomici agli angoli fra geodetiche.

---

* Nel capitolo terzo abbiamo date anche le formule di riduzione degli azimut pel caso di una superficie qualunque, ma in esse compariscono i raggi principali di curvatura della superficie, i quali nel geoide a priori sono ignoti, e che, nelle piccole ondulazioni locali, variano rapidamente da un punto all'altro.

Sia pertanto $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto geoidico qualunque di latitudine l_0, da cui partano la geodetica $AB = s$ sotto l'azimut A_0 e la corrispondente sezione verticale (normale al geoide nel punto A) sotto l'azimut $A_0 + \delta A = A_1$; l'equazione del piano verticale in A che passa per B sarà della forma

$$M_1(x_0 - X) + M_2(y_0 - Y) + M_3(z_0 - Z) = 0, \qquad (55)$$

essendo X, Y, Z le coordinate correnti (che debbono potersi identificare colle coordinate x_1, y_1, z_1 del punto B) ed M_1, M_2, M_3 i coefficienti angolari del piano, che sono proporzionali ai coseni degli angoli formati cogli assi da una perpendicolare al piano stesso.

L'origine delle longitudini essendo arbitraria, supponiamo che esse vengano contate a partire dal piano meridiano di A, e siano sulla cosiddetta sfera celeste (rappresentata in proiezione dalla fig. 77) O lo zenit del punto A, e P, M, E, K rispettivamente i punti che individuano le direzioni degli assi coordinati delle z, x, y e la direzione di una perpendicolare al piano verticale AB, rappresentato sulla sfera dal cerchio massimo OT; avremo evidentemente

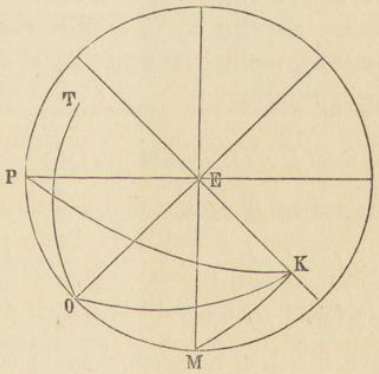

Fig. 77.

$$arco\,OM = l_0, \quad arco\,OK = 90°, \quad arco\,OE = 90°,$$
$$angolo\,POK = 90° + A_1, \quad angolo\,EOK = A_1,$$

ed i tre archi MK, EK, PK rappresenteranno gli angoli K_x, K_y, K_z che la perpendicolare suddetta K fa cogli assi coordinati. Ora i triangoli sferici MOK, POK, EOK dánno

$$\cos K_x = \operatorname{sen} l_0 \operatorname{sen} A_1,$$
$$\cos K_y = \cos A_1,$$
$$\cos K_z = -\cos l_0 \operatorname{sen} A_1,$$

dimodochè dalla precedente equazione (55) si trae la relazione

$$0 = \operatorname{sen} l_0 \operatorname{sen} A_1 (x_0 - x_1) + \cos A_1 (y_0 - y_1) - \cos l_0 \operatorname{sen} A_1 (z_0 - z_1) \qquad (56)$$

che determina A_1.

Per introdurre in luogo delle coordinate cartesiane le coordinate astronomiche dei punti $A(l_0, 0)$ e $B(L_1, \Lambda_1)$ torniamo alle

(29) che, dentro l'approssimazione tenuta nei capitoli precedenti, possono anche scriversi come segue:

$$x = \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2.sen^2 L}} \cos L.\cos\Lambda - \xi.a.sen L.\cos\Lambda - \eta.a.sen\Lambda,$$

$$y = \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2.sen^2 L}} \cos L.sen\Lambda - \xi.a.sen L.sen\Lambda + \eta.a.\cos\Lambda,$$

$$z = \frac{(a+h)(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2.sen^2 L}} sen L + \xi.a.\cos L + \eta.sen L;$$

sostituendo nella (56) ad x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 i loro valori dati da queste relazioni, e trascurando al solito i termini di secondo ordine rispetto ad h, ξ ed η (compresi quelli che contengono tali quantità moltiplicate per e^2) si trova dividendo per $(a+h)$ e dopo facili riduzioni

$$\left.\begin{aligned} sen A_1 \Big(& sen l_0 \cos L_1 \cos\Lambda_1 - sen L_1 \cos l_0 (1-e^2) - e^2.sen l_0 \cos l_0 \frac{\sqrt{1-e^2.sen^2 L}}{\sqrt{1-e^2.sen^2 l_0}} \Big) + \\ & + \cos A_1 \cos L_1 sen\Lambda_1 + \xi_0 sen A_1 - \eta_0 \cos A_1 - \\ & - \xi_1 (sen l_0 sen L_1 \cos\Lambda_1 sen A_1 + sen L_1 sen\Lambda_1 \cos A_1 + \cos l_0 \cos L_1 sen A_1) - \\ & - \eta_1 (sen l_0 sen\Lambda_1 sen A_1 - \cos\Lambda_1 \cos A_1) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

ove ξ_1 ed η_1 rappresentano le componenti dell'attrazione locale del punto B. La parte di questa equazione che dipende dalle attrazioni locali si riduce a forma semplicissima se si osserva che, trattandosi di una correzione dell'ordine di ξ e di η, dentro la solita approssimazione vi si può porre

$$\cos L_1 sen A'_1 = costante = \cos l_0 \cos A_0,$$

A_1 essendo l'azimut in B della geodetica s, e ciò equivale a calcolare i coefficienti di ξ_1 ed η_1 nella (57) come se il geoide fosse una sfera e, quindi, come se gli elementi $90°-L_1$, $90°-l_0$, Λ_1, A_0 ed A'_1 (o invece di A_0 e di A'_1 gli azimut della sezione verticale corrispondenti) appartenessero ad un triangolo sferico. Nella (57) possiamo porre pertanto

$$\begin{aligned} \cos\Lambda_1 sen l_0 sen A_1 sen L_1 + \cos A_1 sen\Lambda_1 sen L_1 + \cos l_0 sen A_1 \cos L_1 = \\ = sen L_1 (sen l_0 sen A_1 \cos\Lambda_1 + \cos A_1 sen\Lambda_1) + sen A'_1 \cos^2 L_1 = \\ = sen L_1 tang L_1 \cos l_0 sen A_1 + sen A'_1 \cos^2 L_1 = \\ = sen A'_1 sen^2 L_1 + sen A'_1 \cos^2 L_1 = sen A'_1, \end{aligned}$$

$$\cos\Lambda_1 \cos A_1 - sen l_0 sen\Lambda_1 sen A_1 = \cos A'_1,$$

cosicchè la relazione che determina l'azimut A_1 della sezione verticale in A fra i punti A e B dati per mezzo delle loro coordinate astronomiche sarà

$$\left.\begin{aligned} &sen\,A_1\left\{sen\,l_0 cos\,L_1 cos\,\Lambda_1 - sen\,L_1 cos\,l_0(1-e^2) - e^2 . sen\,l_0 cos\,l_0 \frac{\sqrt{1-e^2 . sen^2 L}}{\sqrt{1-e^2 . sen\,l_0}}\right\} + \\ &+ cos\,A_1 cos\,L_1 sen\,\Lambda_1 - \xi_1 sen\,A'_1 + \xi_0 sen\,A_1 + \eta_1 cos\,A'_1 - \eta_0 cos\,A_1 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

che, se si divide per

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 . cos^2 U_1}\ \sqrt{1-e^2 . cos^2 U_0}},$$

si riduce con facile trasformazioni a

$$\left.\begin{aligned} &sen\,A_1\{sen\,U_0 cos\,U_1 cos\,\Lambda_1 - sen\,U_1 cos\,U_0 + e^2 . cos\,U_0 (sen\,U_1 - sen\,U_0)\} + \\ &+ cos\,A_1 cos\,U_1 sen\,\Lambda_1 \sqrt{1-e^2 . cos^2 U_0} - \xi_1 sen\,A'_1 + \xi_0 sen\,A_1 + \eta_1 cos\,A'_1 - \\ &- \eta_0 cos\,A_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

introducendo le latitudini ridotte U_0 ed U_1 corrispondenti alle latitudini astronomiche l_0, L_1 e definite dalla solita relazione

$$tang\,U = \sqrt{1-e^2}\,tang\,L.$$

13. La formula analoga alla (59) ma che dà invece l'azimut geoidico A_0 si deduce dalla equazione della geodetica geoidica s che congiunge sul geoide i due punti A e B, equazione che, nelle notazioni dei precedenti paragrafi, si ottiene senza difficoltà dalla

$$cos\,u' . sen\,\alpha' = costante \quad (60)$$

(che lungo la già considerata geodetica ellissoidica s lega l'azimut ellissoidico α' alla latitudine ridotta u' corrispondente alla latitudine ellissoidica φ') introducendovi in luogo di φ' e di α' i loro valori tolti dalle corrispondenze (33). Osservando che dentro la solita approssimazione si può porre $U - \varepsilon_\varphi = u'$, si ottiene così la relazione

$$cos\,(U_1 - \varepsilon_\varphi) . sen\,\alpha' = cos\,(U_0 + \xi_0) . sen\,(A_0 + \eta_0 tang\,l_0), \quad (61)$$

cui vanno aggiunte le altre che si traggono dal triangolo sferico ausiliario Besseliano corrispondente alla geodetica ellissoidica (60), e che sono

$$\left.\begin{aligned} &cos\,\chi = sen\,(U_0 + \xi_0) . sen\,(U_1 - \varepsilon_\varphi) + cos\,(U_0 + \xi_0) . cos\,(U_1 - \varepsilon_\varphi) . cos\,w, \\ &sen\,\chi . cos\,(A_0 + \eta_0 tang\,l_0) = cos\,(U_0 + \xi_0) . sen\,(U_1 - \varepsilon_\varphi) - \\ &\qquad - sen\,(U_0 + \xi_0) . cos\,(U_1 - \varepsilon_\varphi) . cos\,w, \\ &sen\,\chi . sen\,(A_0 + \eta_0 tang\,l_0) = cos\,(U_1 - \varepsilon_\varphi) . sen\,w, \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

w rappresentando il terzo angolo del triangolo, opposto al lato χ, e legato alle differenze di longitudine $\Delta\omega$ e Λ dalle note formule (vedi capitolo VIII, pag. 161 e 184, ove $\cos u_0$, essendo il coseno della massima latitudine ridotta lungo la geodetica s, nelle notazioni di questo capitolo equivale al prodotto $\cos u_0 \operatorname{sen} \alpha_0$):

$$w = \Delta\omega + \frac{e^2 . \chi . \cos u_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{2} + e^4 \{ \ldots \},$$

$$w = \Lambda - \varepsilon_\omega - \eta_0 \sec l_0 + \frac{e^2 . \chi . \cos U_0 \operatorname{sen} A_0}{2} + \ldots$$

Sostituendo nelle due ultime delle (62), e sviluppando rispetto agli elementi di correzione, si trova, dentro la solita approssimazione,

$$\cos U_0 \operatorname{sen} U_1 - \operatorname{sen} U_0 \cos U_1 \cos \Lambda = \operatorname{sen} \chi . \cos A_0 + \xi_0 \cos \chi -$$

$$- \eta_0 \operatorname{tang} l_0 \operatorname{sen} \chi . \operatorname{sen} A_0 + \varepsilon_\varphi (\cos U_1 \cos U_0 + \operatorname{sen} U_1 \operatorname{sen} U_0 \cos \Lambda) +$$

$$+ (\varepsilon_\omega + \eta_0 \sec l_0) \operatorname{sen} U_0 \cos U_1 \operatorname{sen} \Lambda - \frac{e^2 \chi}{2} \cos U_0 \operatorname{sen} U_0 \cos U_1 \operatorname{sen} A_0 \operatorname{sen} \Lambda,$$

$$\cos U_1 \operatorname{sen} \Lambda = \operatorname{sen} \chi . \operatorname{sen} A_0 + \eta_0 \operatorname{tang} l_0 \operatorname{sen} \chi . \cos A_0 -$$

$$- \varepsilon_\varphi \operatorname{sen} U_1 \operatorname{sen} \Lambda + (\varepsilon_\omega + \eta_0 \sec l_0) \cos \Lambda . \cos U_1 -$$

$$- \frac{e^2 \chi}{2} \cos U_0 \operatorname{sen} A_0 \cos U_1 \cos \Lambda,$$

e, per conseguenza, tenendo presente che nei termini dipendenti dalle attrazioni locali e da e^2 senza alterarne l'approssimazione si possono scambiare gli elementi astronomici U_0, U_1, A_0 e Λ coi corrispondenti elementi sferici u_0, u_1, α_0 e w, la precedente formula (59) che determina l'azimut astronomico A_1 può essere scritta anche come segue

$$\operatorname{sen}(A_0 - A_1) . \operatorname{sen} \chi - \xi_0 \operatorname{sen} A_1 \cos \chi + \eta_0 \operatorname{sen} \chi . \operatorname{tang} l_0 \cos (A_0 - A_1) -$$

$$- \varepsilon_\varphi (\operatorname{sen} \alpha_0 \cos u_0 \cos u_1 + \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} u_1 \cos w + \operatorname{sen} u_1 \cos \alpha_0 \operatorname{sen} w) +$$

$$+ (\eta_0 \sec l_0 + \varepsilon_\omega)(\cos u_1 \cos \alpha_0 \cos w - \operatorname{sen} u_0 \cos u_1 \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} w) -$$

$$- \frac{e^2 \chi}{2} \cos u_0 \operatorname{sen} \alpha_0 (\operatorname{sen} u_0 \cos u_1 \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} w - \cos \alpha_0 \cos u_1 \cos w) -$$

$$-\frac{e^2}{2}\cos^2 u_0 \cos\alpha_0 \cos u_1 \operatorname{sen} w + e^2 . \cos u_0 \operatorname{sen}\alpha_0 (\operatorname{sen} u_1 - \operatorname{sen} u_0) -$$

$$-\xi . \operatorname{sen} A'_1 + \xi_0 \operatorname{sen} A_1 + \eta . \cos A'_1 - \eta_0 \cos A_1 = 0,$$

e, facendo uso delle relazioni fra gli elementi del triangolo sferico ausiliario, e notando che in luogo di $\operatorname{sen}(A_0 - A_1)$ e di $\cos(A_0 - A_1)$ si può rispettivamente sostituire $A_0 - A_1 = -\delta A$ e l'unità, si riduce a:

$$\delta A . \operatorname{sen}\chi = 2\xi_0 \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen}^2 \frac{\chi}{2} + \eta_0 \operatorname{tang} l_0 \operatorname{sen}\chi - \xi \operatorname{sen} A'_1 + \eta \cos A'_1 +$$

$$+ \eta_0 \operatorname{sec} l_0 \cos u_1 \cos A'_1 - \eta_0 \cos A_1 - \varepsilon_\varphi \operatorname{sen} A'_1 + \varepsilon_\omega \cos A'_1 \cos u_1 -$$

$$-\frac{e^2}{2}\cos^2 u_0 \cos\alpha_0 \cos u_1 \operatorname{sen} w + e^2 . \cos u_0 \operatorname{sen}\alpha_0 (\operatorname{sen} u_1 - \operatorname{sen} u_0) -$$

$$-\frac{e^2\chi}{2}\cos u_0 \operatorname{sen}\alpha_0 (\operatorname{sen} u_0 \cos u_1 \operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen} w - \cos\alpha_0 \cos u_1 \cos w).$$

La parte del secondo membro che è indipendente dalle attrazioni locali si riferisce evidentemente alla correzione ellissoidica dell'azimut astronomico osservato A_1, e si riduce infatti senza difficoltà alla nota forma di tale correzione (Capitolo VIII, pag. 187) tenendo conto delle relazioni

$$\cos u_1 \operatorname{sen} w = \operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\chi,$$

$$\cos u_1 \cos w = \cos u_0 \cos\chi - \operatorname{sen}\chi \cos\alpha_0 \operatorname{sen} u_0,$$

$$\operatorname{sen} u_1 = \operatorname{sen} u_0 \cos\chi + \cos u_0 \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\alpha_0;$$

se si introducono in luogo di ε_φ ed ε_ω i valori che per tali quantità si traggono dalle (51), e in luogo di $\operatorname{sen}\chi$ il suo valore approssimato $\frac{s}{a}$, e si tralasciano anche i termini in $\frac{\xi s^2}{a^2}$, $\frac{\eta s^2}{a^2}$, ecc. come affatto trascurabili trattandosi di azimut fra punti visibili fra loro, potremo scrivere pertanto

$$\delta A . \frac{s}{a} = \eta_0 \operatorname{tang} l_0 \frac{s}{a} - \eta_0 \cos A_1 + \eta_0 \operatorname{sec} l_0 \cos u_1 \cos A'_1 + \textit{parte ellissoidica},$$

da cui, per essere dentro la solita approssimazione

$$\eta_0 \operatorname{sec} l_0 \cos u_1 \cos A'_1 = \eta_0 \operatorname{sec}\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos\alpha = \eta_0 \cos\alpha_0 - \Delta\varphi . \eta_0 \operatorname{tang}\varphi_0 \cos\alpha_0 -$$

$$-\Delta\alpha . \eta_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = \eta_0 \cos\alpha_0 - \frac{\eta_0 s}{a} \operatorname{tang}\varphi_0,$$

avremo finalmente

$$\delta A = \textit{correzione ellissoidica} \qquad (63)$$

come era da dimostrare.

14. Supponiamo ora che, o in una prima approssimazione, facendo astrazione dalle irregolarità e dalle ondulazioni del geoide, o in una seconda approssimazione, dopo aver ridotte le basi, gli azimut e le misure angolari all'ellissoide di riferimento, sieno stati determinati i valori più probabili delle componenti dell'attrazione locale per tutti i punti geodetici principali di una rete di triangoli o di un complesso di reti, e proponiamoci di costruire le corrispondenti ondulazioni geoidiche. È da ricordare anzitutto che nella ricerca di un ellissoide di riferimento parziale o generale che sia fra le incognite da determinare compariscono necessariamente, come abbiamo visto, almeno tante coppie di componenti iniziali ξ_0, η_0 quanti sono i gruppi di reti geodetiche non collegati fra loro ed introdotti in calcolo; è facile convincersi che in ultima analisi ciò equivale a ritenere come ignote le posizioni dei gruppi suddetti considerati come appartenenti all'ellissoide, ed a determinarle a posteriori nel modo il più probabile, per mezzo delle osservazioni astronomiche (affette dall'attrazione locale); ora in tale determinazione non solo non è possibile escludere del tutto l'arbitrarietà, ma inoltre i valori che si ottengono per le componenti ξ ed η dei diversi punti geodetici principali non riescono paragonabili fra loro se non appartengono ad una unica rete o ad un unico gruppo di reti collegate, giacchè i valori fondamentali ξ_0, η_0 dei varii gruppi, valori che fissano le posizioni di questi sull'ellissoide, riescono determinati indipendentemente gli uni dagli altri.

Ciò posto è chiaro che nel trattare della determinazione del geoide non può esser questione di rappresentare geometricamente o con formule analitiche la sua superficie in complesso, ma soltanto e separatamente le varie porzioni di questa superficie sulle quali le misure astronomiche separatamente si estendono, senza possibilità di fissare le loro posizioni assolute rispetto all'ellissoide di riferimento, o, per meglio dire, la posizione assoluta di un unico ellissoide rispetto alle varie zone geoidiche considerate. E neppure è possibile determinare le altitudini ellissoidiche assolute dei punti di ciascuna regione isolata del geoide, ma soltanto si possono avere queste altitudini a meno di una costante. Per la determinazione assoluta delle ondulazioni geoidiche rispetto all'ellissoide scelto per rappresentare la figura matemetica della terra non sono dunque sufficienti le sole misure

astronomico-geodetiche propriamente dette, ma è necessario di ricorrere inoltre alle misure di qualche altro ente variabile colla latitudine e dipendente in modo noto dalle costanti dell'ellissoide terrestre, per mezzo del quale si possano mettere in relazione fra di loro i varii gruppi di reti. Nello stato odierno della scienza l'unico ente che conosciamo di simil genere è l'*accelerazione della gravità;* nella prefazione sono indicati i motivi per i quali delle misure assolute e relative della gravità non è detto in quest'opera; non possiamo qui dunque esporre neanche la teorica completa della determinazione del geoide in generale, ma dobbiamo limitarci a parlare della rappresentazione geometrica ed analitica delle zone geoidiche parziali come risultano dal paragone delle misure geodetiche colle osservazioni astronomiche e che, del resto, servono come di dati fondamentali alla ricerca più generale suddetta, che consiste nel mettere queste zone in relazione fra loro.

15. Dentro una zona corrispondente ad un gruppo dato di reti collegate la determinazione del geoide si riduce alla ricerca delle altitudini *relative* dei suoi punti sull'ellissoide di riferimento (contate sulle normali a questo), prendendo per elementi di calcolo i valori delle attrazioni locali dei punti geodetici principali. È superfluo forse l'aggiungere che, in ciò l'ellissoide non facendo che l'ufficio di superficie di confronto, è indifferente il considerare un'ellissoide parziale piuttosto che l'ellissoide terrestre purchè le attrazioni locali che si introducono in calcolo si riferiscano tutte all'ellissoide considerato. È chiaro inoltre che i soli punti dei quali le altitudini ellissoidiche possono essere determinate direttamente con qualche precisione sono quelli per i quali le attrazioni locali sono state calcolate coi metodi indicati nel capitolo precedente; le altitudini degli altri punti non possono che essere interpolate o direttamente o per mezzo dei valori interpolati delle attrazioni locali corrispondenti. Si deve quindi supporre che i punti geodetici principali sieno tanto numerosi da permettere siffatta interpolazione senza incertezze; sulle densità (per così dire) di tali punti a ciò necessaria nulla si può dire a priori, giacchè siamo qui nel caso della determinazione di una funzione empirica atta a rappresentare un fenomeno affatto sconosciuto, come è quello delle ondulazioni geoidiche locali e generali sovraccavallate: solo prenderanno una grande importanza i controlli dai quali possono esser messe in evidenza delle discordanze che indichino una densità troppo tenue nel complesso delle misure astronomiche, o in certe località speciali ove le ondulazioni parziali hanno

per distanze maggiori a 37 chilometri il valore di ξ rimanendo insensibile.

16. Parrebbe a prima giunta che le ondulazioni parziali e generali del geoide, accavallandosi le une sulle altre, dovessero riprodurre in scala molto ridotta la forma dei continenti, delle isole e del fondo dei mari, ma senza discontinuità, e colla doppia concavità sempre rivolta al centro terrestre.* In tal caso i vertici delle onde continentali od i loro punti di massimo avvallamento sarebbero elevati o depressi rispetto all'ellissoide di riferimento per quantità notevolissime, anche maggiori a 200 metri. Così ad esempio l'arcidiacono Pratt, negli importanti studii che ha pubblicati dell'influenza che i grandi colossi dell'Himmalaya potevano avere sulle misure astronomiche dei gradi Indiani, calcola che la differenza di altitudine ellissoidica fra *Karchi* e *Capo Camorino*, dovuta alla presenza delle montagne asiatiche da una parte, e alle profondità oceaniche dall'altra, dovrebbe essere di 514 piedi inglesi.**

Ma quantunque le determinazioni delle attrazioni locali fatte negli ampii lavori geodetici per ora poggino sulle misure di archi di meridiano e di parallelo non connessi fra loro, senza cioè che sia stato tenuto conto delle equazioni di collegamento fra un arco e l'altro (vedi Capitolo precedente, § 27), e, per conseguenza, le attrazioni locali stesse non siano tutte paragonabili fra loro e non possano dare un'idea precisa delle onde geoidiche in generale, certo è per altro che tutti i risultati fin qui ottenuti sono in contraddizione colla possibilità di tali grandi deviazioni fra il geoide e l'ellissoide e portano anzi a concludere che le ondulazioni geoidiche sieno così tenui da rovesciare una gran parte delle idee geognostiche ancora accettate. Varii geodeti, e fra questi il prof. *Fischer* nel suo libro sopra la figura della terra***, si sono sforzati di dimostrare che le misure di archi di meridiano e di parallelo, trattate col metodo dei minimi quadrati, non sono minimamente sufficienti a determinare le ondulazioni geoidiche, ma possono trarre invece in gravi equivoci, e sostengono che non è possibile fare astrazione nei calcoli dalle attrazioni locali determinate a priori colla teorica Newtoniana. Ma nonostante ciò che è stato detto su tal proposito non

---

* Queste due proprietà della superficie di livello che caratterizza il geoide risultano direttamente dalla teoria dell'attrazione Newtoniana.

** *Philosophical transactions.* Vol. 149, pag. 795.

*** *Untersuchungen über der Gestalt der Erde.* Darmstadt, 1868.

rimane però meno accertato il fatto importantissimo che, astraendo da qualsiasi ellissoide di riferimento, le attrazioni locali calcolate con tale teorica e coi dati geognostici che possiamo avere dall'ispezione e dallo studio esterno dei luoghi non corrispondono in generale alle attrazioni realmente esistenti. Certo molte delle grandi differenze di attrazione locale, come ad esempio sono quelle sopraccitate fra Andrate e Mondovì e nel Caucaso, possono essere spiegate colla presenza delle prossime grandi catene di montagne; anzi il signor *Pechmann** ha mostrato come in certe località montuose, limitando le considerazioni alle irregolarità visibili di densità accertabile, si possano a priori calcolare attrazioni locali che concordano meravigliosamente con le osservate. Così egli nelle vicinanze di *Innsbruck* per quattro stazioni astronomiche allineate prossimamente lungo un meridiano, applicando il metodo di calcolo sviluppato nel suo lavoro qui citato in nota, ottenne i seguenti risultati:

Fra i punti	DIFFERENZA DI LATITUDINE ASTRONOMICA		Differenza di latitudine geodetica	DIFFERENZE	
	senza la correzione per l'attrazione locale	con la correzione per l'attrazione locale		senza la correzione per l'attrazione locale	con la correzione per l'attrazione locale
	′ ″	′ ″	′ ″	″	″
s_2 ed s_1	0.39,70	0.42,96	0.43,51	+ 3,81	+ 0,55
s_3 » s_1	1.12 34	1.21,41	1.21,92	+ 9,58	+ 0,51
s_4 » s_1	1.39,09	1.54,71	1.54,47	+ 15,38	— 0,24
s_3 » s_2	0.32,64	0.38,45	0.38,41	+ 5,77	— 0,04
s_4 » s_2	0.59,39	1.11,75	1.10,96	+ 11,57	— 0,79
s_4 » s_3	0.26,75	0.33,30	0.32,55	+ 5,80	— 0,75

Uguale e forse anzi maggiore concordanza fra le attrazioni locali calcolate ed osservate trovò per sei stazioni nelle vicinanze di *Klagenfurt,* ed anche abbastanza soddisfacente gli riuscì l'applicazione delle sue formule al caso di punti relativamente assai distanti, cioè *Innsbruck* e *Klagenfurt* (diff. di latitudine circa 39′).** Ciò serve senza dubbio a far vedere come i valori a priori delle attrazioni locali, dedotti cioè dai dati geognostici che possiamo avere, possono essere, *in certi casi speciali* e dentro limiti molto ristretti, di grande

* *Die Abweichung der Lothlinie.* Wien, 1863.

** *Die Abweichung der Lothlinie.* Wien, 1865.

importanza per la discussione dei risultati ottenuti col confronto fra le osservazioni astronomiche e le misure geodetiche, *specialmente* poi *ove si tratti delle interpolazioni necessarie alla determinazione delle ondulazioni geoidiche*. E infatti i semplici dati geodetici, che per lo più si riferiscono a punti notevolmente lontani, di rado sono sufficienti a dare la legge di variazione delle attrazioni, giacchè (e un semplice sguardo ai risultati del signor *Pechmann,* od a quelli dei dintorni di Mosca basta a mostrarlo) le variazioni relative a piccole distanze superano spesso i valori assoluti dell'attrazione stessa. Ma per le ondulazioni continentali la cosa è ben diversa, ed i calcoli a priori delle attrazioni locali nella maggior parte dei casi hanno condotto a risultati che sono in piena contraddizione coi fatti. Per gettare una grande sfiducia sopra simili determinazioni a priori basterebbe invero il lavoro intorno a Mosca, ove già una variazione di 15″ nell'attrazione locale si verifica per una distanza di pochi chilometri in una località nella quale, per la regolare conformazione fisica del terreno, meno poteva sospettarsi. Così pure il sig. *Fischer* teoreticamente ascrive alle coste dei continenti delle attrazioni locali di qualche diecina di secondi, ma in pratica non si verificano, e l'arcidiacono *Pratt,* dopo varii pentimenti che mostrano le difficoltà e le arbitrarietà di un tal genere di calcoli *, fissa per i tre punti

---

* *Philosophical Transactions,* vol. 145, 149 e 151. In una prima memoria, tenendo conto soltanto dell'influenza della catena dell'Himmalaya, ottenne i seguenti valori della componente ξ:

per Kaliana	27″,853
» Kalianpur	11, 968
» Damaragidda	6, 908.

Nella seconda memoria, con una revisione dei dati geognostici trovò invece

per Kaliana	27,978
» Kalianpur	12,047
» Damaragidda	6,790

ma in un poscritto, valendosi dei dati del maggiore Strachey's sulla geografia fisica dell'Himmalaya, ridusse di molto tali valori ponendo:

per Kaliana	19″,35
» Kalianpur	10″,28
» Damaragidda	4″,29.

In una terza memoria per altro tornò ad accrescere i soprascritti risultati introdu-

fondamentali dell'arco indiano, Kaliana, Kalianpur e Damaragidda, i seguenti valori a priori della componente ξ

$$\xi_1 = 34'',16, \quad \xi_2 = 21'',06, \quad \xi_3 = 17'',23,$$
$$\xi_2 - \xi_1 = -13'',10,$$
$$\xi_3 - \xi_2 = -3'',83,$$

mentre dal paragone fra le misure geodetiche e le osservazioni astronomiche si ha:

$$\xi_2 - \xi_1 = -5'',24,$$
$$\xi_3 - \xi_2 = +3'',79.$$

Abbiamo riportati questi valori a preferenza di molti altri, che accertano analoghe discordanze, perchè gli sforzi del *Pratt* a spiegare l'anomalia sopra indicata lo condussero per via indiretta a dimostrare chiaramente quanto sia da andar guardinghi nell'emettere delle ipotesi sulle densità sconosciute delle parti inaccessibili della terra. Dopo i primi risultati dei suoi calcoli *Airy** fece osservare come le discordanze fra i valori a priori delle attrazioni locali e gli sperimentali non debbano recar nessuna maraviglia, e sostenne che, in generale, le attrazioni locali effettive hanno sempre da essere molto minori di quelle dovute alle prominenze visibili del nostro pianeta, emettendo un'ipotesi sulle densità dell'interno della terra, che la maggior parte degli astronomi e dei geodeti non hanno accettata. Egli considera l'effetto della pressione che una grande catena di montagne deve esercitare sulla crosta terrestre, cui assegna uno spessore di pochi chilometri (dieci miglia inglesi nei calcoli che acclude, e solo accenna di volo che anche con cento miglia le conseguenze che trae, quantunque ridotte, sarebbero ancora vere), dimostrando come al disotto della catena la crosta dovrebbe deformarsi abbassandosi verso il centro della terra, e producendo così, in

---

cendo in calcolo l'influenza dell'Oceano, ed ottenne

per Kaliana . . . . . 26'',03
» Kalianpur . . . . . 19'',28
» Damaragidda . . . . . 14',73.

Finalmente in una quarta memoria abbandonando i risultati ottenuti coi dati dello Strachey's e modificando di nuovo gli antichi valori corretti per l'influenza dell'Oceano ritenne definitivamente le attrazioni locali indicate nel testo.

* *Phil. Transactions*, vol. 145, anno 1855, pag. 101.

contrapposto alla prominenza esterna *A* (vedi fig. 79), una prominenza interna *B* nella parte fluida o viscosa centrale, alla quale ascrive, anche in prossimità della crosta, una densità notevolmente maggiore di quella della crosta stessa. In tal caso lo spazio *B*, prima occupato

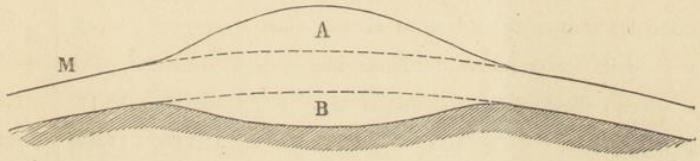

Fig. 79.

dal fluido interno, sarebbe ora riempito dalla materia solida della crosta, materia meno densa del detto fluido, per modo che in un punto esterno *M* l'attrazione della prominenza *A* verrebbe in parte ad essere compensata.

L'arcidiacono *Pratt* nel combattere questa teoria (che fra le altre cose poggia sul postulato del nucleo terrestre fluido, tenuto ormai come inammissibile o almeno come molto dubbio*) emette un'altra ipotesi che riportiamo testualmente:

« At the time when the earth had just ceased to be wholly « fluid, the form must have been a perfect spheroid, with no moun- « tains and valleys nor ocean-hollows. As the crust formed, and « grew continually thicker, contractions and expansions may have « taken place in any of its parts, so as to depress and elevate the « corresponding portions of the surface. If these changes took place « chiefly in a vertical direction, then at any epoch a vertical line « drawn down at a sufficient depth from any place in the surface « will pass through a mass of matter which has remained the same « in amount all through the changes. By the process of expansion « the mountains have been forced up, and the mass thus raised « above the level has produced a corresponding attenuation of mat- « ter below. This attenuation is most likely very trifling as it pro- « bably exists trough a great depth. Whether this cause will pro-

* Thomson and Tait, *Natural Philosophy*. Cambridge, 1883, vol. I. Parte II, pag. 422 e seguente. — *Phil. Trans.* 1863, May, pag. 573. — *On the rigidity of the Earth 1882.* — *On the Stresses caused in the interior of the Earth, etc.*

« duce a sufficient amount of compensation can be determined only « by submitting it to calculation. » *

Ecco ora i risultati dei calcoli fatti dal *Pratt* in appoggio della sua ipotesi:

	Kaliana	Kalianpur	Damaragidda
	"	"	"
Attrazione dell'Himmalaya nel senso del meridiano	27,98	12,05	6,79
» della stessa massa distribuita in			
» uno spessore di 100 miglia	26,44	12,11	6,86
» » » 300 »	21,11	11.68	6,87
» » » 500 »	17,07	9,62	6,67
» » » 1000 »	11,20	7.39	5,22

Da tali risultati deduce quindi le seguenti correzioni da fare alle differenze di latitudine astronomica Kaliana-Kalianpur, Kalianpur-Damaragidda:

		Δ ξ	Δ ξ
		"	"
I.	Non tenendo conto dell'ipotesi	15,93	5,26
II.	Nell'ipotesi di un'attenuazione dello spessore di 100 miglia	1,60	0,00
III.	» » » 300 »	6,50	0,45
IV.	» » » 500 »	8,49	2,31
V.	» » » 1000 »	12,12	3,09

Finalmente ricavando da questi dati i valori dell'ellitticità meri-

---

* « Quando la terra aveva appena cessato di essere completamente fluida « la sua figura deve essere stata quella di uno sferoide perfetto (?) senza mon- « tagne o vallate, e senza cavità oceaniche. A misura che si formava la crosta « e cresceva continuamente in spessore possono essersi prodotte contrazioni ed « espansioni in ciascuna delle sue parti, in modo da elevare o deprimere le corri- « spondenti porzioni della superficie. Se questi cambiamenti si verificarono princi- « palmente in una direzione verticale, in ogni epoca ciascuna verticale prolungata « in basso fino ad una sufficiente profondità deve aver traversato una quantità di « materia che, in complesso, è rimasta la stessa, nonostante i cambiamenti suddetti. « A causa dell'espansione le montagne furono spinte in alto, e la massa in tal « guisa elevata sopra il livello (primitivo) produsse una corrispondente attenua- « zione di materia al disotto; è da credere che questa attenuazione influisca pochis- « simo, poichè probabilmente si estende a gran profondità. Se tal causa può « produrre o no una sufficiente compensazione è solo dai risultati del calcolo « che si può giudicare. » *Philos. Trans.* Vol. 149, pag. 747, 759, 760.

diana ε corrispondenti ai diversi casi sopraindicati ottiene:

nell'ipotesi I. . . . . $\varepsilon = \frac{1}{421}$

» II. . . . . $\varepsilon = \frac{1}{216}$

» III. . . . . $\varepsilon = \frac{1}{280}$

» IV. . . . . $\varepsilon = \frac{1}{286}$

» V. . . . . $\varepsilon = \frac{1}{355}$

Nessuno dei valori di $\Delta\xi$ concordando coi corrispondenti valori osservati, non è qui da discutere l'attendibilità dell'ipotesi del *Pratt,* la quale, come quella di *Airy,* resta affatto arbitraria; ma i risultati ottenuti per l'elliticità meridiana nei varii casi considerati sono molto importanti perchè mostrano quanto la distribuzione delle densità nell'interno della terra può influire sulle direzioni delle verticali, e come i dati geognostici raccolti alla superficie terrestre sieno insufficienti per calcolare le attrazioni, se non si tratta di differenze di attrazione affatto locali.

17. *Faye* in un recente scritto sulla costituzione della crosta terrestre * emette idee analoghe a quelle del *Pratt,* appoggiandole con delle importanti considerazioni fisiche e con dati esperimentali, che crediamo utile di riassumere qui brevemente. Anzitutto discutendo i risultati delle misure di gravità che si trovano riportati dal *Clarke* nel suo trattato di Geodesia, dà le seguenti due tabelle di anomalie osservate nel numero giornaliero delle oscillazioni di un pendolo invariabile, rispetto al numero teoretico (corrispondente cioè all'ellissoide di rivoluzione terrestre):

---

* *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CII e *Association scientifique de France, Bulletins Hebdomadaires,* n.^{i} 309 e 310.

Isole.

STAZIONI	Latitudini	Anomalie	STAZIONI	Latitudini	Anomalie
	°			°	
Spitzberg	80. N.	+ 3,09	Schetland	63. S.	+ 3,90
Portobello	10. N.	+ 3,85	Minicoy	8. N.	+ 3,49
Galapagos	8. S.	+ 2,43	Mowi	21. N.	+ 4,80
S. Tommaso . .	0.	+ 6,86	I. di Francia . .	20. S.	+ 7,16
P. Lout	0.	+ 4,53	Falkland	52. S.	— 3,85
Fernando de N.	4. S.	+ 8,22	I Bonin	27. N.	+ 11,79
Ascensione. . . .	8. S.	+ 6,15	Guam.	13. N.	+ 4,88
S. Elena	16. S.	+ 9,32	Ualan.	5 N.	+ 9,93
I. Staten	55. S.	+ 2,90			

Montagna.

STAZIONI	Latitudini	Anomalie	STAZIONI	Latitudini	Anomalie
	°			°	
Morè	33. N.	— 22,08	Ahmadpur	24. N.	— 2,33
Mussoorie	30. N.	— 6,09	Damargidda . . .	18. N.	— 4,43
Dehra	30. N.	— 9,30	Bangalore N. . .	13. N.	— 3,32
Nojli	30. N.	— 4,82	Bangalore S. . .	13. N.	— 3,82
Kaliana	29. 1/2 N.	— 4,09	Mallapatti	9. N.	— 1,65
Pahargarh	25. N.	— 3,54	Punnae	8. N.	— 0,53

Nei valori della seconda tabella è stato tenuto conto dell'attrazione delle masse montagnose circostanti e dell'elevazione continentale. Già il *Clarke,* notando che se le osservazioni indiane non fossero state corrette dall'attrazione delle masse montagnose circostanti sarebbero pressochè da per tutto concordanti coll'ipotesi della terra ellissoidica, aveva concluso che « *there exists some unknown cause, or distribution of matter which counteracts the attraction of the visible mountain masses* » *; ma un semplice sguardo alle due tabelle precedenti mostra inoltre chiaramente che l'accelerazione della gravità è minore della teoretica nelle regioni montagnose e maggiore

* *Vi ha qualche sconosciuta causa o distribuzione di materia che compensa l'attrazione delle masse montagnose visibili.* CLARKE, *Geodesy,* pag. 351.

nelle regioni oceaniche, e quindi che sotto le prime la media densità terrestre è più piccola che non sotto le seconde, come anche il confronto fra le misure astronomiche e geodetiche porta a far supporre. Per spiegare questo fatto sperimentalmente stabilito *Faye* parte da un concetto essenzialmente diverso da quelli di *Airy* e di *Pratt,* notando che, anche sotto la stessa latitudine, alla stessa distanza dal centro terrestre * la temperatura interna della crosta nelle regioni marine deve essere estremamente diversa da quella delle regioni montagnose, e che, per conseguenza, le superficie isoterme dell'interno della terra devono essere ondulate con onde di curvatura molto sentita, come indica schematicamente la fig. 80, giacchè nelle grandi

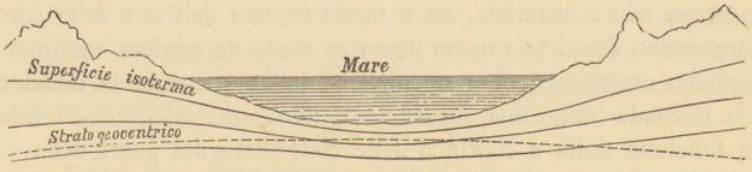

Fig. 80.

profondità oceaniche le temperature osservate tendono a zero, mentre sotto i continenti alla stessa profondità è pressochè certo che la temperatura raggiunge qualche centinaio di gradi. Perciò se la natura fisica della materia è la stessa nelle varie regioni, al disotto dei mari gli strati geocentrici debbono essere molto più densi che non sotto i continenti, e la legge di distribuzione della materia lungo i varii raggi vettori si deve accostare a quella immaginata dal *Pratt.* Inoltre *Faye,* tenendo come certa la perdita secolare del calore terrestre, osserva che, a causa del rinnovamento continuo dell'acqua fredda in contatto col fondo dell'Oceano, il raffreddamento terrestre non può essere equabile nelle diverse regioni, ma deve riuscire molto minore nelle regioni emerse del pianeta e nei mari meno profondi.**

18. I geodeti sono pertanto contrarii ad ammettere le grandi deviazioni fra il geoide e l'ellissoide, ed a qualunque altra conclusione che non discenda direttamente dalle misure astronomico-

---

* FAYE, ammette come cosa indiscutibile la fluidità del nucleo terrestre, ma le sue conclusioni non sono incompatibili col caso del nucleo solido.

** Non facciamo qui parola delle altre conclusioni del FAYE sulle oscillazioni lente del suolo, e sopra altre questioni geologiche, rimandando il lettore alle già citate pubblicazioni.

geodetiche. Le attrazioni locali geodeticamente calcolate non sono, è vero, assolute, sono invece determinate a meno di alcune costanti, ma ciò non toglie che si possa, come se fossero assolute, costruire per parti la superficie del geoide, almeno ove esse sieno in tal numero da permettere, come abbiamo già detto, l'interpolazione senza incertezze: solo restano fino ad un certo punto indeterminate le posizioni delle parti della superficie rispetto all'ellissoide di riferimento considerato. L'interpolazione delle componenti ξ ed η per i punti geoidici non principali si riduce naturalmente al caso della determinazione di curve o di funzioni empiriche corrispondenti ad un dato sistema di valori sperimentali affetti da errore, e non può quindi esser fatta senza arbitrarietà. L'uso di formule analitiche non toglie nè limita che in apparenza tale arbitrarietà, ne è meno incerto dell'uso delle curve interpolatrici descritte a mano libera in modo da rendere continuo il fenomeno osservato (come si conviene in questo caso, la direzione della normale lungo una superficie di livello essendo, come è noto, una funzione finita e continua delle coordinate dei punti della superficie); ed invero l'arbitrarietà entra allora nella scelta della forma interpolatrice, giacchè è chiaro che con un numero finito di termini varie forme interpolatrici a coefficienti empirici devono condurre a valori diversi della quantità interpolata. Di consueto se nel fenomeno che si ha da rappresentare non si prevedono periodi, per forma interpolatrice si sceglie la forma parabolica, ponendo

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \tag{64}$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} z = A_0 + A_1 x + B_1 y + A_2 x^2 + C_2 xy + B_2 y^2 + \\ + A_3 x^3 + D_3 x^2 y + E_3 x y^2 + B_3 y^3 + \dots \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

secondo che esso dipende da una sola o da due variabili (elementi costitutivi di un momento fisico); il caso di un numero maggiore di variabili non si presenta che raramente e non ha che fare colla questione che qui trattiamo. Se poi si sa a priori che il fenomeno è almeno in parte periodico, si ricorre alla nota doppia serie trigonometrica

$$\left.\begin{aligned} z = A_0 + A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen} 2x + A_3 \operatorname{sen} 3x + \dots \\ + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \dots \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

considerando i coefficienti come delle costanti da determinare quando la variabile è una sola, o come delle variabili da rappresentare per

mezzo di serie analoghe alla (66), ma in funzione della seconda variabile se sono due. Nella rappresentazione analitica del geoide teoreticamente parlando sarà da attenersi alla interpolazione parabolica o alla doppia serie trigonometrica secondochè si tratta di interpolare i valori di ξ, di η e di h per campi molto ristretti dell'ellissoide di riferimento, o per campi assai estesi come sono per esempio quelli corrispondenti ad una intera regione geografica.

L'interpolazione grafica presenta qui un grande vantaggio sulla analitica, quantunque, rigorosamente parlando, non sia applicabile senza restrizione; ed invero nella prima, tenendo sott'occhio una carta altimetrica a curve orizzontali della regione da studiare, è molto facile il tener conto approssimativamente delle influenze dei monti e delle vallate, influenze che, come abbiamo mostrato riportando alcuni dei risultati del *Peckmann,* sono tutt'altro che trascurabili. Ma il metodo non è ripetiamo, nè generale, nè rigoroso, giacchè in ultima analisi si vengono a determinare così due superficie

$$\xi = \xi(\varphi, \omega), \quad \eta = \eta(\varphi, \omega),$$

considerandole indipendenti l'una dall'altra, mentre le funzioni ξ ed η teoreticamente sono legate fra loro dalla condizione cui debbono soddisfare le direzioni di un sistema di rette (le verticali) affinchè possano identificarsi colle normali ad un'unica superficie (il geoide). Tuttavia, in pratica, se i punti cui si riferiscono le componenti ξ ed η geodeticamente calcolate sono molto numerosi e prossimi l'uno all'altro, per modo che le interpolazioni possano esser fatte senza incertezza, la condizione suddetta deve rimanere di per sè prossimamente soddisfatta anche senza assoggettare ad essa col calcolo le incognite del problema, e quindi per usare legittimamente la determinazione grafica basta avere dei metodi di controllo, da cui si possa inferire se la densità dei punti geodetici principali è o no sufficiente.

L'interpolazione analitica riesce meno arbitraria, giacchè nello stabilire le formule interpolatrici si possono a priori assoggettare le loro costanti alla condizione sopra indicata; ma nella maggior parte dei casi, oltre alla difficoltà di tener conto delle attrazioni delle accidentalità del terreno, presenta l'altro inconveniente di richiedere calcoli molto lunghi e laboriosi, giacchè per la natura stessa del problema, ossia per le numerose ondulazioni parziali del geoide, è sempre molto grande il numero dei termini da ritenere negli sviluppi (65) e (66), e, anzi, nel caso di regioni piut-

tosto estese, sorpassa senz'altro i limiti compatibili con un calcolo pratico. Ma il caso di regioni molto estese è qui da escludere affatto perocchè non si vede quale sarebbe lo scopo di avere in una unica formula rappresentata una grande porzione di una superficie così irregolare come deve essere quella del geoide, mentre non si toglie generalità allo studio di questo raffigurandolo geometricamente od analiticamente parte a parte per piccole zone.

19. Il metodo più semplice e più naturale per acquistare una chiara idea delle ondulazioni di una porzione del geoide è senza dubbio il metodo per così dire topografico, che consiste nel rappresentare sopra un piano insieme ai meridiani ed ai paralleli ellissoidici anche le curve costituite dai punti geoidici egualmente elevati o depressi rispetto all'ellissoide di riferimento. Conviene in tal caso che la rappresentazione geografica della parte della regione ellissoidica che si vuol considerare sia più simile che è possibile a questa, in modo cioè che le alterazioni degli angoli e delle aree riescano minime, facendo parte alle une come alle altre; ciò posto se accanto all'immagine di ciascun punto geodetico principale si indicano i valori delle relative componenti ξ ed η calcolate geodeticamente, col metodo stesso con cui si tracciano in topografia le cosiddette linee di livello di un piano quotato, ammesso che i punti geodetici principali siano abbastanza densi si potranno tracciare delle curve $\xi = costante$, $\eta = costante$, per modo che nel piano rappresentante si abbia un reticolato di linee appartenenti alle due famiglie ξ ed η, in ciascuna famiglia tanto prossime quanto si vuole.

Ora lungo la sezione formata sul geoide dal piano di un meridiano ellissoidico $\omega = cost$ (sezione che resta rappresentata sulla carta dal meridiano di questa corrispondente a quel dato valore di ω) si ha [formula (28) del § 6]

$$h = h_0 + \int_0^s \xi \, . \, ds_\omega \, . \, sen\, 1'',$$

essendo h_0 l'altitudine ellissoidica del punto del geoide che corrisponde all'origine (arbitraria) dell'arco s_ω di meridiano. Se le curve $\xi = cost$, interpolate graficamente come sopra è detto, sono due a due abbastanza prossime, dalla formula approssimativa

$$\Delta h_n = \frac{\xi_{n+1} + \xi_n}{2} \Delta s_\omega \, . \, sen\, 1'' \qquad (67)$$

si potrà quindi calcolare la differenza di altitudine ellissoidica fra i

due punti geoidici che corrispondono a quelli in cui due successive di tali curve sono intersecate dal meridiano s_ω: per Δs_ω nella (67) si introdurrà il suo valore che si può graficamente misurare sulla carta geografica, o quello che si può dedurre (con calcoli grossolani ed abbreviativi, s'intende) dalle latitudini dei due punti ξ_{n+1}, e ξ_n. In generale l'approssimazione data dalla formula (67) riesce più che sufficiente, giacchè non può trattarsi, come abbiamo già sopra notato, che di avere un'idea grossolana delle ondulazioni del geoide, per la precisa loro determinazione mancando i dati necessarii, a meno che non sia stato fatto (come nei dintorni di Mosca) un numero straordinario di stazioni astronomiche in tutta la zona da studiare, nel qual caso si possono anche interpolare senza incertezza tante curve $\xi = cost.$ quante sono necessarie perchè la legge di variazione lineare della componente ξ, sulla quale poggia la (67), possa supporsi verificata. Ma se una precisione maggiore fosse richiesta nel complesso, o in certi luoghi in cui la funzione ξ dell'arco di meridiano s_ω presentasse delle singolarità, sarebbe da descrivere anzitutto per mezzo dell'interpolazione grafica, e coi noti criterii sulla rappresentazione dei fenomeni osservati qualunque, la curva

$$\xi = \xi(s_\omega)$$

ritenendo ξ come ordinata ed s_ω come ascissa, per poi ottenere o graficamente col planimetro, o per mezzo della solita approssimazione parabolica, la quadratura

$$h - h_1 = \int_{s_1}^{s_1 + \Delta s} \xi \, . \, d s_\omega \, . \, sen\, 1''.$$

In tal guisa si possono avere in una scala conveniente tanti profili meridiani del geoide rispetto all'ellissoide quanti si vogliono; il miglior modo di rappresentarli graficamente si è di immaginare sviluppato ciascun meridiano ellissoidico in una retta, convertito il sistema delle normali ellissoidiche nel sistema delle perpendicolari a questa, e riportate su tali perpendicolari le altitudini ellissoidiche dei punti geoidici corrispondenti, calcolate a meno di una costante ignota. Ma questa costante non essendo la stessa per tutti i meridiani, i profili sopraindicati non bastano a determinare il geoide, giacchè non è determinato un loro comune ellissoide di paragone.

Per mettere i profili meridiani in relazione fra loro basta per altro conoscere ancora il profilo corrispondente ad una curva ellissoidica

qualunque, che tagli tutti i meridiani della regione considerata. Per siffatta curva è naturale di scegliere un parallelo, perchè lungo un parallelo la componente η dà senz'altro il rapporto differenziale $\frac{dh}{ds}$.

Ora per mezzo delle curve $\eta = cost$, che abbiamo supposto già interpolate, è possibile di costruire non solo questo nuovo profilo, ma quelli di tutti i paralleli della zona da studiare, intendendo che tali profili sieno costituiti sviluppando anzitutto in un piano (a scala ridotta s'intende) il cono delle normali ellissoidiche di ciascun parallelo, rettificando (come pel caso dei profili meridiani) l'arco di cerchio in cui si è trasformato il parallelo, per modo che le normali suddette vengano a cangiarsi in un sistema di rette parallele, prendendo su queste a partire dal cerchio rettificato le altezze ellissoidiche ridotte, e congiungendo con una curva continua i punti così ottenuti. Le suddette altezze debbono esser calcolate a parte dalla relazione generale

$$h - h_0 = \int_0^s \eta \, . \, ds_\varphi \, . \, sen\, 1''$$

in cui s_φ rappresenta l'arco di parallelo contato a partire da un punto arbitrario cui corrisponda l'altezza h_0 ignota, e che si applica sotto la forma

$$\Delta h_n = \frac{1}{2} \Delta s_\varphi \, (\eta_{n+1} + \eta_n) \, sen\, 1'',$$

prendendo per Δs_φ la porzione dell'arco suddetto compresa fra la n^{ma} e la $(n+1)^{ma}$ delle curve $\eta = cost$ precedentemente interpolate.

Combinando un solo profilo di parallelo coi profili meridiani o un profilo meridiano coi profili dei paralleli si possono tracciare sulla carta rappresentatrice col metodo topografico le curve di eguale altitudine ellissoidica che dànno una chiara idea delle ondulazioni geoidiche. I profili superflui debbono essere usufruiti per controllare i risultati ottenuti, ed abbiamo già sopra indicato la grande importanza di questo controllo, dal quale soltanto si può inferire se i punti geodetici principali sono o no abbastanza densi; se lo sono ciascuna delle vere curve di eguale altitudine verrà sulla carta ad essere successivamente rappresentata da diverse curve molto prossime fra loro, ciascuna delle quali, meno una, corrisponderà ad uno dei profili superflui; se no queste curve correranno così lontane l'una dall'altra che gli scostamenti non potranno essere ascritti all'incertezza dei dati, nè all'influenza di ondulazioni secondarie tra-

scurabili, e converrà fare nuove stazioni astronomiche nei luoghi ove gli scostamenti ne indicano la necessità. Nel primo caso poi si tracceranno le curve definitive facendo una compensazione grafica, giacchè la compensazione rigorosa (che non presenterebbe difficoltà teoretiche e che si farebbe colle note norme con cui si compensano le livellazioni per profili) richiederebbe lunghi calcoli che non sarebbero in armonia colla natura del metodo grafico di ricerca sopra esposto.

20. Invece di interpolare le curve $\xi = cost$, $\eta = cost$ e di costruire i profili meridiani e di parallelo, si possono anche costruire per interpolazione le curve di eguale altitudine cercata, formando senz'altro il piano quotato rispetto all'ellissoide nel modo seguente. Si attribuisca un'altitudine ellissoidica arbitraria ad uno qualunque dei punti geodetici principali; si misurino graficamente sulla carta rappresentatrice gli azimut reciproci estremi della geodetica che congiunge questo punto ad un altro punto principale prossimo, e si calcolino [formule (44)] le attrazioni locali $\theta_{\alpha'}$, $\theta_{\alpha''}$ corrispondenti a tali azimut: se i due punti sono sufficientemente prossimi la loro differenza di altitudine ellissoidica sarà

$$\Delta h = \frac{1}{2} s \, (\theta_{\alpha'} + \theta_{\alpha''}) \, sen \, 1'' \qquad (68)$$

e si potrà calcolare quindi l'altitudine relativa del secondo dei punti considerati. Così passando da un punto all'altro si avranno le altitudini di tutti i punti a meno di una costante, e quindi tutti i dati necessarii per formare il piano quotato suddetto. In questo nuovo modo di procedere sarà dalla concordanza o dalla discordanza fra le quote per uno stesso punto calcolate da varie provenienze che si giudicherà se i punti geodetici principali sono o no abbastanza densi, ed ove lo siano la quota definitiva del punto sarà la media dei diversi valori ottenuti, giacchè come abbiamo già notato non è qui il caso di fare una compensazione altimetrica rigorosa che condurrebbe a lunghi calcoli senza dare una precisione di risultati effettivamente maggiore. Si deve notare per altro che questo secondo metodo poggia sull'ipotesi che in tutti i punti geodetici principali siano state determinate le due componenti ξ ed η necessarie per calcolare l'attrazione locale in un azimut dato, ossia che sieno state osservate astronomicamente la latitudine e la longitudine, o la latitudine e l'azimut. Però finora le determinazioni di latitudine sono molto più numerose delle determinazioni di longitudine e di azimut, permodochè è il metodo dei profili che conviene adottare.

21. La rappresentazione analitica delle ondulazioni del geoide si fonda sulla ricerca sperimentale delle espressioni generali per serie delle componenti ξ ed η considerate come due funzioni della latitudine e della longitudine: ma abbiamo già indicato come tali funzioni, teoreticamente parlando, non possano essere determinate indipendentemente l'una dall'altra, poichè sono legate dalle condizioni cui devono soddisfare le direzioni di un sistema di rette per essere normali ad una superficie. Se il campo che si considera è limitato, per modo che dentro di esso l'altitudine ellissoidica possa essere rappresentata analiticamente collo sviluppo parabolico rispetto alle due variabili φ ed ω (latitudine e longitudine), le relazioni fra le due funzioni suddette si traggono facilmente come segue.

Poniamo in generale

$$\left.\begin{aligned} h-h_0 = {} & (A_1\Delta\varphi + B_1\Delta\omega)\,sen\,1'' + \\ & + (A_2\Delta\varphi^2 + C_2\Delta\varphi.\Delta\omega + B_2\Delta\omega^2)\,sen^2 1'' + \\ & + (A_3\Delta\varphi^3 + D_3\Delta\varphi^2.\Delta\omega + E_3\Delta\varphi.\Delta\omega^2 + B_3\Delta\omega^3)\,sen^3 1'' + \\ & + (A_4\Delta\varphi^4 + D_4\Delta\varphi^3.\Delta\omega + C_4\Delta\varphi^2.\Delta\omega^2 + E_4\Delta\varphi.\Delta\omega^3 + B_4\Delta\omega^4)\,sen^4 1'' + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

indicando con $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ rispettivamente le differenze fra la latitudine e la longitudine del punto geoidico qualunque φ, ω e la latitudine e la longitudine di un punto φ_0, ω_0 scelto arbitrariamente, e con h_0 l'altitudine ellissoidica di questo punto; le lettere A_1, A_2, A_3,... B_1, B_2, B_3,... C_2, C_4,... D_4,... rappresentano delle costanti da determinare sperimentalmente per mezzo dei valori osservati delle componenti ξ ed η, le quali sono legate all'altitudine h dalla relazione generale (vedi § 6)

$$\frac{\partial h}{\partial s_\alpha} = \theta_\alpha;$$

ora da questa si ottengono le altre

$$\frac{\partial h}{\partial s_0} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial \varphi} = \xi, \qquad \frac{\partial h}{\partial s_{90^\circ}} = \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \omega} = \eta, \quad (70)$$

o piuttosto, dentro la solita approssimazione,

$$a.\xi = \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad a.\cos\varphi.\eta = \frac{\partial h}{\partial \omega}, \quad (71)$$

e, sostituendo per $\frac{\partial h}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial h}{\partial \omega}$ i valori che si traggono dalla (69) dif-

ferenziandola parzialmente rispetto a φ e ad ω, si trova:

$$\left.\begin{aligned}
a.\xi.sen\,1'' &= A_1 + (2A_2\Delta\varphi + C_2\Delta\omega)\,sen\,1'' + \\
&+ (3A_3\Delta\varphi^2 + 2D_3\Delta\varphi.\Delta\omega + E_3\Delta\omega^2)\,sen^2 1'' + \\
&+ (4A_4\Delta\varphi^3 + 3D_4\Delta\varphi^2.\Delta\omega + 2C_4\Delta\varphi.\Delta\omega^2 + E_4\Delta\omega^3)\,sen^3 1'' + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a.\cos\varphi.\eta.sen\,1'' &= B_1 + (2B_2\Delta\omega + C_2\Delta\varphi)\,sen\,1'' + \\
&+ (3B_3\Delta\omega^2 + 2E_3\Delta\varphi.\Delta\omega + D_3\Delta\varphi^2)\,sen^2 1'' + \\
&+ (4B_4\Delta\omega^3 + 3E_4\Delta\varphi.\Delta\omega^2 + 2C_4\Delta\varphi^2.\Delta\omega + D_4\Delta\varphi^3)\,sen^3 1'' + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Se nella (69) si vogliono tenere le potenze di $\Delta\varphi$ e $\Delta\omega$ fino all'n^{mo} grado, le costanti incognite A, B, C,... sono $\frac{n(n+3)}{2}$, e se sono dati più di $\frac{n(n+3)}{2}$ valori di ξ o di η le forme generatrici (72) possono servire a determinarle col metodo dei minimi quadrati; soltanto è da notare che per tale ricerca non bastano nè le sole componenti ξ, nè le sole η, ma abbisognano almeno n valori di ciascuna di queste due classi di quantità, nel qual caso limite o i coefficienti B o gli A restano appena determinati, ma rimane indeterminata la loro precisione; la miglior circostanza del calcolo è quando le due classi di dati sono egualmente rappresentate.

Dall'errore medio corrispondente ai residui delle equazioni generate dalle forme (72) si giudicherà poi se il grado tenuto nello sviluppo (69) è sufficientemente elevato, o se i punti geodetici principali sono abbastanza spessi per una conveniente determinazione delle onde geoidiche; se tale errore medio è notevolmente maggiore di quello che compete alle singole determinazioni di $a.\xi.sen\,1''$ o di $a.\cos\varphi.\eta.sen\,1''$ è infatti da inferire o che la forma parabolica (69) dentro l'approssimazione tenuta non rappresenta la funzione h, o che le osservazioni fatte non bastano a determinare questa funzione. A priori nulla si può dire in generale sul numero dei termini da tenere nella (69), se non che per la natura della quistione esso deve essere in ogni caso molto rilevante anche per regioni assai ristrette, giacchè rilevante è certo il numero delle inflessioni e dei massimi e minimi delle linee meridiane e dei paralleli (linee di eguale latitudine astronomica) del Geoide; quindi il calcolo sopra indicato non può

riuscire che molto laborioso e per regioni estese diviene senz'altro impraticabile, ed è necessario semplificarlo a scapito del rigore matematico, tornando al metodo dei profili applicato sotto forma analitica.

In tal caso conviene considerare delle linee meridiane lungo le quali sieno prossimamente allineati in numero considerevole dei punti geodetici principali, e così prossimamente che riesca possibile calcolare per parti proporzionali dal valore della componente ξ di ciascuno di essi quello della ξ di un punto prossimo della linea meridiana vicina. Ottenuto in tal guisa un certo numero di valori di ξ corrispondenti a varii punti di una linea meridiana, il problema è ridotto o a dedurre col motodo dei minimi quadrati i coefficienti $A_1, A_2, A_3 \ldots$ della formula parabolica

$$a \,.\, \xi \,.\, sen\,1'' = A_1 + 2\,A_2 \Delta\varphi + 3\,A_3 \Delta\varphi^2 + \ldots \qquad (73)$$

cui si riduce la prima delle (72) nel caso di $\Delta\omega = 0$, o a interpolare i valore di ξ per un certo numero di punti intermedii equidistanti colla formula d'interpolazione di Lagrange o con altre equivalenti, dopo di che o si risale all'espressione generale di h per la linea meridiana considerata, applicando la prima delle relazioni (71), dalla quale, tenendo conto della (73), si trae

$$h - h_0 = A_1 \Delta\varphi + A_2 \Delta\varphi^2 + A_3 \Delta\varphi^3 + \ldots,$$

o si calcolano i valori di h per ciascuno dei punti equidistanti suddetti, col metodo già esposto più sopra nel caso dell'interpolazione grafica (§ 19). In modo analogo si opera per i profili dei paralleli, dei quali uno solo è necessario per mettere in relazione i profili dei meridiani, e gli altri servono, come abbiamo già indicato, ad inferire se i punti geodetici principali sono abbastanza densi, e, se non lo sono, a circoscrivere le località in cui la loro densità è insufficiente.

22. Teoreticamente parlando la forma analitica interpolatrice più adatta per rappresentare la funzione h è senza dubbio la doppia serie trigonometrica a due argomenti [vedi § 18 formula (66)], che si può scrivere simbolicamente come segue

$$\left.\begin{aligned} h = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{n,0}\, sen\, nx + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{n,0}\, sen\, ny + \sum_{m=1}^{m=\infty} B_{m,0}\, cos\, mx + \sum_{m=1}^{m=\infty} B'_{m,0}\, cos\, my + \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} A_{n,m}\, sen\, ny \,.\, sen\, mx + \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} A'_{n,m}\, sen\, nx \,.\, cos\, my + \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} B_{n,m}\, sen\, my \,.\, cos\, nx + \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} B'_{n,m}\, cos\, ny \,.\, cos\, mx, \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

indicando con n ed m dei numeri intieri e con x ed y delle quantità proporzionali alla longitudine ed alla latitudine del punto cui si riferisce l'altitudine h, o, meglio, proporzionali alle differenze fra queste coordinate e quelle di un punto scelto arbitrariamente, al quale si attribuisce un'altitudine arbitraria h_0. I varii coefficienti A e B, fatta eccezione per A_0, rappresentano le costanti ignote da determinare coi minimi quadrati per mezzo dei valori calcolati per le componenti ξ ed η dei punti geodetici principali, e con un metodo analogo a quello esposto nel paragrafo precedente pel caso dell'interpolazione parabolica; A_0 è invece da considerare come una funzione lineare di x e di y ponendo

$$A_0 = Mx + Ny + C,$$

giacchè se si supponesse costante, nel derivare la (74) rispetto ad x ed y per ottenere le espressioni analitiche delle componenti ξ ed η (vedi sopra, pag. 396) queste verrebbero a mancare del termine costante.

Sul numero dei termini da ritenere nella (74) si può dire soltanto che deve essere molto grande. Ciò rende questa forma analitica inapplicabile, od applicabile tutt'al più semplificata col sistema dei profili già precedentemente indicato (pag. 398), non crediamo quindi dovere entrare in maggiori particolarità sopra un sistema di calcolo che non uscirà probabilmente dal campo delle astrazioni.

23. Abbiamo visto come l'attrazione locale spesso varii con grande rapidità, quantunque sempre per legge continua; perciò nei lavori fin qui eseguiti, eccezione fatta per alcuni studii parziali, come sono quello sopra discusso dei dintorni di Mosca e quelli nella regione dell'*Harz* e del *Thuringerwald**, i punti geodetici principali sono per lo più troppo distanti rispetto all'ampiezza probabile delle onde geoidiche parziali per dare con qualche precisione l'andamento dell'attrazione locale dentro i limiti di ciacun'onda, e le interpolazioni grafiche od analitiche delle componenti ξ ed η e la determinazione delle altitudini ellissoidiche h fatta coi metodi esposti nei paragrafi precedenti non possono che riuscire assai difettose e forse anche illusorie. In molti luoghi non basterebbe neppure che ciascun vertice trigonometrico di primo ordine fosse un punto geodetico principale; è quindi molto lontano il tempo in cui nelle re-

* Vedi *Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1879-1880* e *Astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen in Harz im Jahre 1881* nelle pubblicazioni dell'Istituto geodetico prussiano.

gioni triangolate sparirà il difetto di stazioni astronomiche, mentre, scientificamente parlando, ogni giorni più cresce l'importanza di conoscere almeno l'entità delle onde geoidiche, ossia le distanze relative fra il geoide e l'ellissoide di riferimento per qualche punto principale. Ora queste distanze possono essere determinate (quantunque con precisione assai scarsa) anche indipendentemente da qualsiasi interpolazione se i punti geodetici principali che si vogliono considerare sono collegati due a due tra loro per mezzo della doppia livellazione trigonometrica e di precisione. Infatti colla livellazione geometrica o di precisione si ottengono (come è noto) le altitudini assolute dei punti al disopra di una superficie di livello equipotenziale al geoide, giacchè dentro i limiti di altezza delle montagne terrestri si può fare astrazione dal non parallelismo delle superficie di livello equipotenziali: basta pertanto che si possano calcolare per mezzo dei dati astronomico-geodetici sperimentali anche le altitudini ellissoidiche degli stessi punti perchè resti in pari tempo per ciascuno di questi determinata a meno di una costante la distanza corrispondente fra l'ellissoide e il geoide.

Ciò posto sulla cosiddetta sfera celeste, rappresentata in proiezione nella fig. 81, sia in generale Z lo zenit vero, Z' lo zenit ellissoidico di un punto terrestre M, P il suo polo elevato, B il punto che individua la direzione rispetto ad M di un oggetto terrestre N, e poniamo, nelle consuete notazioni geodetiche:

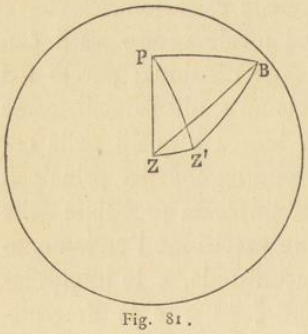

Fig. 81.

$$BZ = Z,\ PZ = 90° - l,\ ZZ' = \theta,$$
$$PZB = A,\ BZ' = \zeta;$$

nel triangolo sferico BPZ, rappresentando con δ la distanza polare di B e con Ψ l'angolo in P, si ha

$$\cos Z = \cos\delta \,.\, sen\, l + sen\,\delta \,.\, \cos l \,.\, \cos\Psi \qquad (75)$$

Se il punto Z si cambia in Z' tutti gli elementi del triangolo suddetto cambiano meno la distanza polare δ; la variazione che subisce l non è altro che $+\xi$, e quella dell'angolo BPZ è l'attrazione locale in longitudine $\eta \,.\, sec\, l$, ma con segno cambiato*; indicando

* Il cambiamento del segno dipende dal modo con cui abbiamo contato le attrazioni locali in latitudine, longitudine ed azimut, scegliendo il segno positivo nel passare dal geoide all'ellissoide.

con $\Delta\zeta$ l'attrazione locale in distanza zenitale, ossia la differenza fra ζ e Z, avremo pertanto

$$\cos(Z+\Delta\zeta) = \cos\delta \,.\, \mathrm{sen}(l+\xi) + \mathrm{sen}\,\delta \,.\, \cos(l+\xi) \,.\, \cos(\Psi - \eta_{,} \,.\, \sec l),$$

d'onde si deduce sviluppando, e ritenendo al solito la sola approssimazione del primo ordine rispetto a ξ ed η,

$$\Delta\zeta \,.\, \mathrm{sen}\, Z = \xi(\mathrm{sen}\,\delta \,.\, \mathrm{sen}\, l \,.\, \cos\Psi - \cos l \,.\, \cos\delta) - \eta \,.\, \mathrm{sen}\,\delta \,.\, \mathrm{sen}\,\Psi,$$

ossia

$$\Delta\zeta = -\xi \,.\, \cos A - \eta \,.\, \mathrm{sen}\, A = -\theta_\alpha \qquad (76)$$

essendo θ_α la componente dell'attrazione locale nell'azimut A. Sottraendo quindi questa quantità dalla distanza zenitale astronomica Z si ottiene la distanza zenitale ellissoidica ζ per mezzo della quale può esser calcolata la differenza di altezza ellissoidica fra il punto di osservazione M e il punto osservato N applicando le formule della livellazione trigonometrica (Capitolo VI, §§ 3 e 4).

Questo metodo di calcolare le altitudini ellissoidiche relative dei punti del geoide, proposto da *Villarceau,** non è ancora stato sperimentato e da molti è considerato come diffettoso perchè la precisione della livellazione trigonometrica non è paragonabile a quella della livellazione geometrica e per punti due a due molto distanti come sono di solito i punti geodetici principali riesce molto scarsa a causa dell'incertezza del cosiddetto coefficiente di refrazione (Capitolo VI, § 6). Tuttavia facendo uso di distanze zenitali reciproche e contemporanee misurate reiteratamente in ore adatte e in diverse circostanze di tempo il dubbio nei risultati altimetrici anche per punti distanti parecchie centinaia di chilometri dall'origine delle altezze (in questo caso in ciascuna regione da studiare l'origine deve essere evidentemente una sola) si riduce a qualche metro ossia ad una frazione relativamente piccola delle massime altezze ellislissoidiche che si possono verificare in un'onda geoidica continentale. Crediamo quindi sia da deplorare che nessun lavoro sia fin qui stato fatto nel senso indicato da Villarceau, per le regioni già geodeticamente studiate.

---

* Vedi *Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par* I. Liouville. Anno 1873.

FINE DELL'OPERA.

ETH Zürich
Bibliothek

Abt.	T	Nummer	U	Band	Teil	Aufl.	E	S
1		11203		2	2*			

BUCHKARTE
Bitte nicht herausnehmen!
12/72
34256