www.e-rara.ch

Physikalische Krystallographie und Einleitung in der krystallographische Kenntniss der wichtigeren Substanzen

Groth, Paul von

Leipzig, 1885

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-119502

II. Abtheilung. Die geometrischen Eigenschaften der Krystalle.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

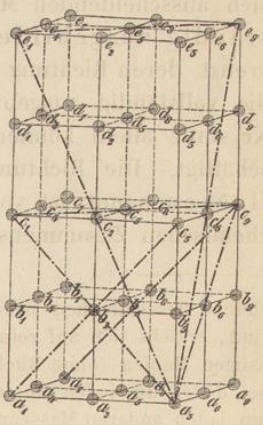
Visual Library

II. ABTHEILUNG.

DIE GEOMETRISCHEN EIGENSCHAFTEN DER KRYSTALLE.

§. 39. **Einleitung.** Die nunmehr als bekannt vorausgesetzten physikalischen Eigenschaften der Krystalle führen uns zu der Vorstellung, dass letztere aus der regelmässigen Aneinanderlagerung kleinster Theile (Krystallmoleküle) der betreffenden, den Krystall bildenden Substanz bestehen, wobei die Lagerung derart ist, dass sie um jedes Theilchen in gleicher Weise stattfindet, d. h. dass in allen parallelen Geraden, sie mögen, durch welche Punkte des Krystalls sie wollen, gehen, die Vertheilung der Massentheilchen die gleiche ist. Es folgt dies unmittelbar aus der Eigenschaft der Krystalle, in allen parallelen Richtungen das gleiche physikalische Verhalten zu zeigen. Eine solche regelmässige Anordnung der Krystallmoleküle ist aber nur dann möglich, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: es müssen nach zahlreichen Richtungen Ebenen durch den Krystall gelegt gedacht werden können, in deren jeder die darin liegenden Massentheilchen in netzförmiger Anordnung vertheilt sind, und in allen einander parallelen Ebenen dieser Art muss diese Vertheilung gleichartig sein. Alsdann können wir uns das ganze Aggregat von Massentheilchen, d. h. den Krystall, nach sehr verschiedenen, aber durch die Lagerung der Theilchen vollkommen bestimmten*) Richtungen in gleichartige ebene Schichten zerlegt denken.

Fig. 113.



*) Davon kann man sich am leichtesten eine Vorstellung verschaffen, wenn man sich die regelmässigste Anordnung solcher Massenpunkte denkt, welche möglich ist, nämlich diejenige, nach welcher dieselben die Eckpunkte von Würfeln bilden, wie z. B. die 8 Punkte $a_1a_2a_4a_5b_1b_2b_4b_5$ Fig. 113. Hier sind alle Schichten gleichartig, welche der Ebene $a_1a_3a_7a_9$ parallel sind, da in diesen sämmtlich die Theilchen quadratisch angeordnet erscheinen, ebenso alle Schichten, welche der Ebene $a_1a_7c_3c_9$ parallel sind, in welcher die Theilchen die Eckpunkte gleichgrosser Rectangeln mit den Seiten 1 (wenn der kleinste Abstand zweier Theilchen gleich 1 ist) und $\sqrt{2}$ darstellen; ferner sind gleichartig alle Schichten parallel der Ebene $a_3c_1c_9$, denn in allen sind die Theilchen Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke, deren Seiten $= \sqrt{2}$; gleichartig sind alle Schichten parallel der Ebene durch $a_3c_2e_1e_5e_9c_6$, denn deren Theilchen bilden die Eckpunkte von Rhomben, deren Gestalt gleich $a_3c_2e_5c_6$ ist, u. s. f.

Das in dieser Figur dargestellte Beispiel einer Molekularanordnung entspricht offenbar einem krystallisirten Medium, welches nach drei aufeinander senkrechten Richtungen

Das Wachsthum eines Krystalls, z. B. wenn sich ein solcher aus einer Auflösung absetzt, geschieht aber in der Weise, dass sich an alle vorhandenen Theilchen, von diesen in bestimmter Richtung angezogen, neue gleichartig anlagern, so dass alle gleichzeitig angelagerten Schichten des Krystalls auch gleiche Lagerung ihrer Theilchen besitzen. Ist aber die Lagerung der Theilchen in solchen Schichten eine gleichartige, so müssen sie ebene sein; hört also zu einer bestimmten Zeit aus irgend einer Ursache (Mangel an weiterer, noch aufgelöster Substanz, Entfernung des Krystalls aus der Auflösung oder dergl.) das Fortwachsen des Krystalls auf, so muss derselbe nach jener Seite hin mit einer ebenen Fläche endigen, deren Richtung in einer bestimmten Abhängigkeit von der Art der Lagerung der Krystallmoleküle steht. Diese letztere ist aber nur die Folge der anziehenden und abstossenden Kräfte, welche zwischen den Theilchen wirken, und in Folge dessen abhängig von der Natur dieser Theilchen. So führt uns das physikalische Verhalten der Krystalle zu einer Vorstellung über die Art ihrer Zusammensetzung aus kleinsten Theilchen, welche uns vollständig darüber Rechenschaft giebt, warum ein Krystall nach dem Aufhören seines Wachsthums von ebenen Flächen begrenzt erscheint, deren Richtung in bestimmtem Zusammenhang mit der Natur seiner Substanz steht.

Die Begrenzung eines Krystalls nach einer oder mehreren Richtungen kann auch durch einen andern festen Körper bedingt sein, bis an dessen Oberfläche sich das Wachsthum des Krystalls fortgesetzt hat. Dann ist seine Begrenzung nach dieser Seite hin selbstverständlich von der Gestalt und zufälligen Lage jenes Körpers abhängig, kann also auch in keinem gesetzmässigen Zusammenhang mit der Natur derjenigen Substanz, welche den Krystall bildet, stehen. Wird dagegen der Krystall während seines Wachsthums von dem umgebenden Medium schwebend erhalten, wie es z. B. bei manchen aus geschmolzenen Gesteinen bei deren allmählicher Erstarrung sich ausscheidenden Mineralien der Fall ist, so erscheint derselbe vollständig ausgebildet, d. h. nach allen Seiten von ebenen Flächen begrenzt, deren Richtung von der inneren Structur des Krystalls abhängt, und die vollständig ausgebildeten oder in vollständiger Ausbildung gedachten Krystalle allein können es sein, mit denen sich die Krystallographie beschäftigt. Die Richtung jener ebenen Flächen, welche man Krystallflächen nennt, ist von der Natur der Moleküle des Krystalls, also von der chemischen Zusammensetzung der Substanz desselben, abhängig; sie muss

---

gleiche Beschaffenheit besitzt. Welche verschiedene Arten von Anordnungen möglich sind, ergiebt sich auf rein mathematischem Wege aus der Annahme, dass die krystallisirten Medien (ohne Rücksicht auf ihre Begrenzung) regelmässige Punktsysteme sind, bei denen um jeden Massenpunkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Massenpunkt — eine Annahme, welche, wie oben auseinandergesetzt, die natürliche Folge des physikalischen Verhaltens der Krystalle ist. Die Herleitung aller möglicher regelmässiger Punktsysteme auf dieser Grundlage findet man in dem Werke: L. Sohnke, Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur, Leipzig 1879.

also im Allgemeinen eine andere sein, wenn die chemische Natur eines Krystalls eine andere ist, d. h. jeder chemischen Verbindung muss eine bestimmte Krystallform zukommen, wobei unter »Krystallform« die Gesammtheit aller der Ebenen zu verstehen ist, welche wir uns durch die kleinsten Theilchen gelegt denken können, so dass jede parallele Ebene, durch ein beliebiges anderes Theilchen gelegt, die übrigen in gleicher Vertheilung enthält. Von dieser »Krystallform« eines Körpers hängen nun aber, wie in diesem Abschnitt eingehend gezeigt werden soll, die physikalischen Eigenschaften seiner Krystalle ab, so dass jene als die wichtigste seiner Eigenschaften erscheint, besonders deshalb, weil es die Krystallform ist, durch welche wir am sichersten zwei einander ähnliche, ihrer chemischen Natur nach jedoch verschiedene Körper von einander unterscheiden können.

Denken wir uns einen Krystall nur aus einer Art von Schichten sich aufbauend, und bleiben wir zunächst bei dem einfachsten in Fig. 113 dargestellten Beispiele der Vertheilung der Moleküle stehen, in welcher sie die Eckpunkte von Würfeln bilden. Hier giebt es offenbar dreierlei Ebenen, in welchen die Punkte quadratisch vertheilt liegen, das sind 1) diejenigen, welche der horizontalen Unter- oder Oberfläche aller jener Würfel parallel sind, 2) die der nach vorn gekehrten verticalen, und 3) die den nach rechts und links gewendeten Seitenflächen parallelen. Diese drei Arten von Ebenen stehen sämmtlich auf einander senkrecht. Findet nun die Anlagerung neuer Theilchen an die zuerst sich ausscheidenden nur in solchen Schichten statt, welche jenen drei Ebenen parallel sind, so muss ein Würfel entstehen, sobald nämlich nach allen sechs Seiten sich solche Schichten anlegen, also ein ringsum ausgebildeter Krystall entstehen kann. Wie viele solcher Schichten sich bilden, d. h. welche Dimensionen der entstehende Krystall erhält, dies hängt offenbar ab von der Quantität der zur Anlagerung disponiblen Materie, von der Zeit, während welcher das Wachsthum stattfand u. s. f., d. h. von äusseren Umständen, welche an und für sich in keiner Beziehung zur chemischen Natur des Stoffes, aus welchem der Krystall sich bildet, stehen.

Dies ist aber nicht nur der Fall mit der Grösse des Krystalls überhaupt, sondern auch mit seiner Ausdehnung nach verschiedenen Richtungen. Damit sich an einen in der Bildung begriffenen würfelförmigen Krystall auf allen sechs Flächen stets in gleicher Zeit gleich dicke Schichten absetzen, dazu würde eine so gleichmässige Zufuhr des Stoffes von allen Seiten nöthig sein, wie sie in Wirklichkeit nicht stattfindet. Es würde daher ein besonderer Zufall sein, wenn ein Krystall jener Gestalt nach allen drei, auf seinen Flächen normal stehenden Richtungen gleich schnell wachsen würde. Der allgemeine Fall ist vielmehr, dass dies mehr oder weniger ungleich stattfindet, so dass an dem fertigen Krystall der Abstand der beiden parallelen Flächen jedes der drei Flächenpaare ein verschiedener ist. Die Gestalt der Flächen ist alsdann nicht die von Quadraten, sondern von Rechtecken, von

denen je zwei an einander stossende verschiedenes Längenverhältniss ihrer Seiten haben. Nichts desto weniger nennen wir in der Krystallographie eine solche Form einen »Würfel«; während dieser in der Stereometrie definirt wird als ein von sechs Quadraten umschlossener Raum, ist ein Würfel in krystallographischem Sinne ein von drei Paaren paralleler Flächen, welche einander unter rechten Winkeln durchschneiden, umschlossener Raum. Wie weit jedes dieser Flächenpaare von einander absteht, d. h. wie breit, lang und hoch der Würfel ist, ob diese Dimensionen nahe gleich oder sehr verschieden sind, ob der Würfel z. B. die Form eines langen, äusserst dünnen rectangulären Stäbchens besitzt, Alles dies ist nur von den äusseren Umständen bei der Bildung des Krystalls abhängig, also für die Betrachtung ganz irrelevant, da es mit der Natur des Krystalls Nichts zu thun hat. Da jede Fläche in diesem Beispiel stets eine Würfelfläche bleibt, welchen Abstand sie auch von ihrer gegenüberliegenden parallelen habe, so folgt aus der bisherigen Betrachtung allgemein, dass *eine Krystallfäche ihren krystallographischen Charakter nicht ändert, wenn wir sie uns parallel sich selbst verschoben denken.*

Aus den physikalischen Eigenschaften und der aus diesen gefolgerten Art der Zusammensetzung der Krystalle aus kleinsten Theilchen (Molekulartheorie) haben wir also geschlossen, dass bei einem Krystall die Flächen im Allgemeinen nicht gleichen Abstand von irgend einem Punkte desselben haben können, dass dagegen dieselben Arten von Flächen stets dieselbe Richtung haben, d. h. *dieselben Winkel* mit einander einschliessen müssen. Dies bestätigt denn die Erfahrung vollkommen; die Krystalle einer Substanz von gleicher Form haben die mannigfaltigsten Dimensionen nach den verschiedenen Richtungen, so dass die gleichartigen Flächen oft die verschiedenste Grösse und Gestalt haben, während Eines immer constant bleibt: dies sind die Winkel, unter welchen die Flächen einander schneiden. Diese letzteren sind es daher auch allein, welche die Krystallform bestimmen, Alles andere ist nur von zufälligen Umständen abhängig, welche bei der Bildung des Krystalls stattfanden. Die Ungleichheit der Dimensionen der Krystalle nach verschiedenen Richtungen hat man fälschlicherweise mit dem Namen *Verzerrung* belegt, ob es gleich der eigentlich normale Fall der Ausbildung eines Krystalls ist, während es als ein besonderer Zufall betrachtet werden muss, wenn einmal ein solcher sich ausbildet, bei welchem alle gleichartigen Flächen *genau* gleich gross sind. Die Verschiedenheit von deren Grösse und Gestalt bedingt im Anfang eine Schwierigkeit beim Studium der Krystallographie, welche durch Uebung im Erkennen möglichst »verzerrter« Krystalle so bald als thunlich überwunden werden muss. Haben wir eine solche Form vor uns, so müssen wir uns deren Flächen sämmtlich parallel sich selbst so weit verschoben denken, bis sie alle gleichweit von einem beliebig gewählten Punkte des Krystalls, welcher dann dessen Mittelpunkt wird, abstehen, und erhalten hierdurch das geometrische Ideal der Form.

Dieses letztere, d. h. die Form mit gleicher Centraldistanz aller gleichartiger Flächen, ist es nun, welche wir bei allen krystallographischen Betrachtungen benutzen wollen, müssen nur dabei fortwährend festhalten, dass krystallographisch an der Form gar Nichts geändert wird, wenn ihre Flächen parallel sich selbst verschoben werden, dass Alles, was für eine Richtung in derselben gilt, auch für jede derselben parallele in gleicher Weise statthat, dass also, wenn von geraden Linien die Rede ist, stets Richtungen gemeint sind, und für eine Ebene von bestimmter Richtung jede ihr parallele substituirt werden kann. Die Form eines Krystalls ist nunmehr zu definiren als der Inbegriff einer Anzahl ebener Flächen, welche einander unter bestimmten Winkeln durchschneiden.

Die Winkel allein sind es, welche von der Natur des den Krystall bildenden Körpers abhängen, nur diese können ihn daher charakterisiren.

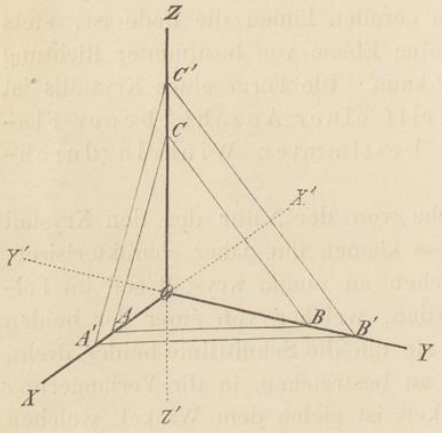
Unter dem »Winkel« zweier Flächen an einem Krystall soll im Folgenden stets derjenige verstanden werden, welcher von einer der beiden Flächen beschrieben wird, wenn man sie um die Schnittlinie beider dreht, bis sie, ohne das Innere des Krystalls zu bestreichen, in die Verlängerung der anderen fällt. Dieser »Flächenwinkel« ist gleich dem Winkel, welchen die Normalen der beiden Flächen mit einander bilden, und wird daher auch der »Normalenwinkel« genannt*).

§. 40. **Das Grundgesetz der Krystallographie.** Seien ABO, ACO und BCO Fig. 114 (s. folg. S.) drei beliebige Flächen eines Krystalls, welche einander in den drei Richtungen OX, OY und OZ schneiden, deren Durchschnittspunkt O wegen der Verschiebbarkeit der Flächen ein beliebiger Punkt des Krystalls ist. Nennen wir die drei Richtungen OX, OY und OZ die drei Axen des Krystalls, die Ebenen OXY, OXZ, OYZ die Axenebenen und die Winkel XOY, XOZ, YOZ die Axenwinkel, so theilen offenbar die drei Axenebenen den ganzen Raum in acht Oktanten, welche im Punkte O zusammenstossen. Zwei durch eine Axenebene getrennte Oktanten sollen anliegende, zwei, welche einander nur in einer Axe berühren, gegenüberliegende, und zwei nur im Punkte O zusammenstossende entgegengesetzte heissen.

*) In vielen krystallographischen Schriften wird als Winkel zweier Flächen (vielfach auch »Kantenwinkel« genannt) der innere, von der Substanz ausgefüllte Winkel, d. h. das Supplement des Normalenwinkels, bezeichnet. Abgesehen davon, dass es der letztere ist, welcher am Goniometer erhalten wird (s. S. 28) und welcher gewöhnlich bei den Berechnungen der Krystalle Verwendung findet, müsste man aus dieser Definition eines Winkels den widersinnigen Schluss ziehen, dass zwei gegenüberliegende parallele Flächen, welche also genau im entgegengesetzten Sinne die Grenze der Substanz des Krystalls gegen seine Umgebung bezeichnen, den Winkel 0° mit einander bilden, während derjenige zwischen den Theilen einer und derselben Fläche 180° beträgt, oder allgemein: dass zwei Flächen, welche eine wenig verschiedene Lage am Krystall besitzen, einen um so grösseren Winkel mit einander bilden!

Irgend eine vierte Fläche des Krystalls schneide nun die drei Axen in den Punkten A, B und C, so mögen OA, OB und OC die Parameter dieser Fläche heissen, deren Durchschnittsfigur mit den Axenebenen das Dreieck ABC ist. Von dieser Fläche liegen, da sie die drei Axenebenen durchschneidet, Theile auch in den benachbarten Oktanten; man sagt nun von einer Fläche, dass sie in demjenigen Oktanten liege, welchen sie in einer geschlossenen Durchschnittsfigur, wie das Dreieck ABC im oberen rechten vorderen Oktanten in Fig. 114 es ist, schneidet. Zur Bestimmung der Lage einer Fläche gehört demnach ausser der Grösse der Parameter auch noch die Angabe desjenigen Oktanten, in welchem sie liegt, da acht Flächen mit gleichen Parametern möglich sind. Um die letztere Angabe zu ermöglichen, nennt man die Strecken OX', OY', OZ' der Axen negativ und versieht die Parameter, welche sich auf jene Strecken beziehen, mit dem —Zeichen.

Fig. 114.



Multiplicirt man die Parameter einer Fläche, z. B. OA, OB, OC, mit einer beliebigen Zahl m, so erhält man die Parameter einer der ersten parallelen Fläche, z. B. OA', OB', OC' Fig. 114, denn

$$\frac{OA'}{OA} = m, \quad \frac{OB'}{OB} = m, \quad \frac{OC'}{OC} = m$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC},$$

folglich ist Dreieck OAB ähnlich Dreieck $OA'B'$, ebenso OAC ähnlich $OA'C'$; demnach

$$A'B' \parallel AB, \qquad A'C' \parallel AC,$$

also sind auch die Ebenen ABC und $A'B'C'$ einander parallel. Da parallele Flächen krystallographisch als identisch zu betrachten sind (wegen der parallelen Verschiebbarkeit einer jeden Fläche), so folgt hieraus, dass die Parameter einer Fläche mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden können, ohne dass dadurch an der Lage der Fläche etwas geändert wird. Da die Zahl m auch -1 sein kann, so folgt weiter, dass zwei entgegengesetzte Flächen mit gleich grossen Parametern parallel sind. Endlich kann man der beliebigen Zahl m auch einen solchen Werth geben, dass einer der drei Parameter gleich 1 wird, woraus ersichtlich ist, dass die Lage einer Krystallfläche in Bezug auf die Axen schon durch zwei von einander unabhängige Grössen bestimmt ist.

Betrachten wir nun noch eine fünfte Fläche desselben Krystalls, deren Parameter OH, OK und OL Fig. 115 sind, so können wir deren Lage

noch auf andere Weise als durch die Länge der Parameter bestimmen indem wir nämlich angeben, der wievielste Theil ihre Parameter sind von den entsprechenden (auf dieselbe Axe bezogenen) der vorher betrachteten Fläche ABC.

Sei z. B. OH der h-te Theil von OA, OK der k-te Theil von OB, OL der l-te von OC, so ist

$$OH = \frac{OA}{h},$$

$$OK = \frac{OB}{k},$$

$$OL = \frac{OC}{l},$$

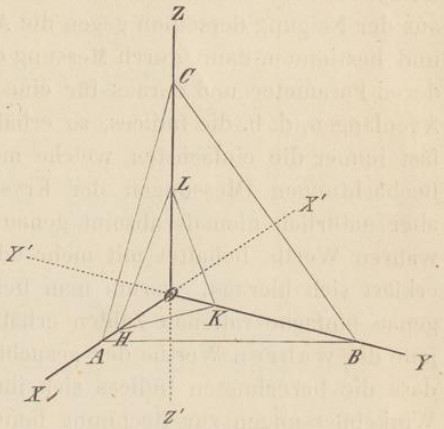
und

$$h = \frac{OA}{OH},$$

$$k = \frac{OB}{OK},$$

$$l = \frac{OC}{OL}.$$

Fig. 115.



Diese drei Grössen h, k, l bestimmen die Fläche vollkommen, wenn die Lage der ersteren Fläche, d. h. die Parameter OA, OB, OC bekannt sind. Multipliciren wir h, k, l mit einer beliebigen Zahl m, so ist dies gleichbedeutend mit einer Multiplication von OA, OB und OC mit m; diese ändert an der Lage der ersteren Fläche Nichts, sondern entspricht nur einer Parallelverschiebung; wir können also auch diese, die letztere Fläche bestimmenden Grössen h, k, l mit irgend einer beliebigen Zahl multipliciren, ohne dadurch an dem Verhältniss beider, d. h. der Richtung derselben, Etwas zu ändern. Man kann daher auch immer eine der drei Zahlen h, k, l gleich 1 oder gleich einer beliebigen Zahl setzen.

In derselben Weise kann nun jede andere Krystallfläche $H'K'L'$ durch die drei Grössen

$$h' = \frac{OA}{OH'}, \quad k' = \frac{OB}{OK'}, \quad l' = \frac{OC}{OL'}$$

bestimmt werden, so dass also alle an einem Krystall auftretenden Ebenen durch die Parameter einer einzigen (beliebig gewählten) Fläche und durch die Verhältnisszahlen ihrer Parameter zu denen jener einzigen Fläche bestimmt werden können.

Die Parameter OA, OB und OC derjenigen Fläche, von welcher man ausgeht, nennt man die Axenlängen des Krystalls und bezeichnet sie mit a, b, c, von welchen Grössen gewöhnlich eine $= 1$ gesetzt wird. Die Verhältnisszahlen h, k, l einer andern Krystallfläche heissen ihre Indices, und

$$(h\,k\,l)$$

ihr Symbol, durch welches nach dem Gesagten ihre Lage vollkommen bestimmt ist, wenn die Axenlängen bekannt sind.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass an einem Krystall nur solche Flächen vorkommen, deren Indices, von welchen Flächen desselben Krystalls als Axenebenen und zur Bestimmung der Axenlängen man auch ausgehe, sich wie rationale Zahlen verhalten. Nehmen wir also irgend drei Flächen eines Krystalls zu Axenebenen, irgend eine vierte zur Grundform, d. h. bestimmen wir durch diese die drei Axenlängen, welche aus der Neigung derselben gegen die Axenebenen berechnet werden können, und bestimmen dann durch Messung der Winkel aller übrigen Flächen auch deren Parameter und daraus für eine jede das Verhältniss derselben zu den Axenlängen, d. h. die Indices, so erhält man nur rationale Zahlen, und zwar fast immer die einfachsten, welche möglich sind. Da diese Zahlen aber aus Beobachtungen (Messungen der Krystallwinkel) hergeleitet werden, diese aber natürlich niemals absolut genau, sondern nur Annäherungen an den wahren Werth, behaftet mit mehr oder weniger grossen Fehlern, sind, so erklärt sich hieraus, warum man bei der Bestimmung der Indices niemals genau einfache rationale Zahlen erhält, sondern nur angenähert. Dass aber jene die wahren Werthe der gesuchten Indices sind, beweist der Umstand, dass die berechneten Indices sich ihnen um so mehr nähern, je genauere Winkelmessungen zur Rechnung benutzt werden konnten.

Da die Indices einer Fläche mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden können, so sind sie immer auf eine Form zu bringen, in welcher sie sämmtlich ganze rationale Zahlen darstellen, daher das soeben erläuterte empirische Grundgesetz der Krystallographie auch das Gesetz der Rationalität der Indices heisst*). Nach der Zurückführung auf ganze Zahlen sind die Indices gewöhnlich nur die allerkleinsten der Zahlenreihe, nämlich

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$

selten höhere. Da, wie schon bemerkt, die Berechnung derselben niemals absolut genau diese einfachen Zahlen liefert, so hat man für den gefundenen Werth immer die nächstliegende einfache rationale Zahl als wahren Werth einzusetzen, aber stets zu bestimmen, welche Differenz der zur Rechnung benutzten Krystallwinkel dem Unterschiede zwischen dem gefundenen und dem angenommenen Werthe entspricht, und zu sehen, ob diese Differenz

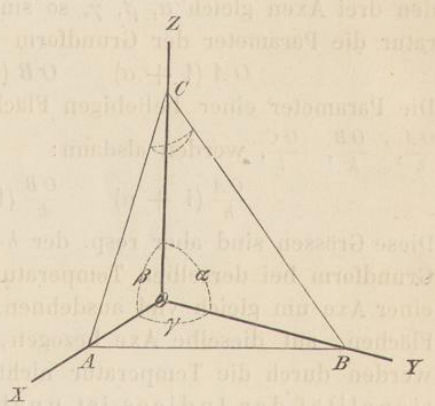
*) Dieses Gesetz folgt auch aus der S. 189 gegebenen Betrachtung, nach welcher die Krystallflächen nichts Anderes sind, als Molekularschichten; denn wenn man z. B. in der Fig. 113 dargestellten Anordnung der Krystallmoleküle die drei aufeinander senkrechten Ebenen, in denen die Theilchen quadratisch angeordnet sind, als Axenebenen, d. h. die Punktreihen $a_1a_2 \ldots$, $a_1a_4 \ldots$, $a_1b_1 \ldots$ als Axen, endlich eine Ebene, in welcher die Theilchen die Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke bilden, als Grundform nimmt, so müssen alle Ebenen, in denen die Punkte anders vertheilt liegen, z. B. die beiden ausserdem in der citirten Fig. eingezeichneten, auf jene Axen bezogen, rationale Indices besitzen. Dass in der That das Gesetz allgemein für jedes als Molekularanordnung von Krystallen mögliche Punktsystem gilt, hat Sohnke (Wiedemann's Annalen d. Physik **16**, 489) bewiesen.

noch als Ungenauigkeit der Messung betrachtet werden kann. Ist letzteres nicht der Fall, so hat man einen dem gefundenen Werthe der Indices näher liegenden, dann natürlich weniger einfachen, welcher jene Bedingung erfüllt, als wahren Werth einzusetzen. Fände man z. B. das Verhältniss zweier Indices $= 1 : 1{,}79$, so kann dies $= 1 : 2$ nur in dem Falle sein, dass die zu Grunde gelegten Messungen wegen unvollkommener Flächenbeschaffenheit der Krystalle höchst ungenau seien; trifft dies nicht zu, so muss der viel weniger einfache Werth $1 : 1{,}75 = 4 : 7$ das wahre Verhältniss der Indices angeben.

Die Axenwinkel α, β, γ Fig. 116 der drei zu Axenebenen beliebig ausgewählten Flächen und das Parameterverhältniss der Grundform, d. h. die Axenlängen $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, von denen eine $= 1$ gesetzt wird, so dass also nur zwei derselben zu bestimmen sind, stellen zusammen fünf von einander unabhängige Grössen dar, welche man die Elemente des Krystalls nennt.

Um diese zu bestimmen, bedarf es fünf von einander unabhängiger Gleichungen, und hierzu dienen die Messungen von fünf Krystallwinkeln, nämlich derjenigen drei, unter welchen die Axenebenen einander schneiden, und der beiden Neigungen der Grundform ABC gegen zwei der Axenebenen, z. B. gegen XOZ und YOZ. Denkt man sich um O als Mittelpunkt eine Kugelfläche gelegt, so schneiden die drei Axenebenen auf dieser ein sphärisches Dreieck ab, welches in Fig. 116 punktirt bezeichnet ist, dessen Winkel gleich denjenigen sind, unter welchen je zwei Axenebenen einander schneiden, und dessen Seiten die Bögen α, β, γ sind. Die drei Winkel dieses sphärischen Dreiecks A, B und C sind durch die Messung gegeben, denn A ist der Winkel zwischen den Axenebenen XOZ und XOY, B derjenige zwischen YOX und YOZ, C derjenige zwischen ZOX und ZOY. Berechnet man aus diesen nach der betreffenden Formel der sphärischen Trigonometrie die drei Seiten, so hat man damit die drei gesuchten Axenwinkel α, β, γ gefunden. Denkt man sich nun weiter um den Punkt C als Centrum eine Kugeloberfläche construirt, so schneiden die Grundform ABC und die beiden Axenebenen XOZ und YOZ aus diesem ein ebenfalls in der Figur punktirt bezeichnetes sphärisches Dreieck aus, dessen drei Winkel bekannt sind; es ist dies 1) der Winkel C der beiden Axenebenen XOZ und YOZ, 2) und 3) die Winkel zwischen diesen beiden und der Ebene ABC; es können also auch hier die drei Kreisbögen, welche die Seiten bilden, berechnet werden. Einer dieser ist gleich dem Winkel OCB; wenn wir diesen kennen, so sind in dem Dreieck OCB alle Winkel bekannt, da $BOC = \alpha$, also auch das Verhältniss $OC : OB = c : b$ bestimmt. Ganz ebenso liefert der Winkel OCA, welcher auch einer Seite des sphärischen Dreiecks gleich ist, die Kenntniss des Dreiecks AOC, da Winkel $AOC = \beta$, und somit des Verhältnisses der beiden Axenlängen $OA : OC = a : c$. Durch diese Rechnung ist also das

Fig. 116.



Verhältniss der drei Axenlängen, und wenn eine derselben = 1 gesetzt wird, diese selbst bestimmt; es sind demnach mit den vorher berechneten Axenwinkeln nunmehr sämmtliche fünf Elemente des Krystalls gefunden.

Durch die fünf Elemente ist die »Krystallform«, d. h. die Gesammtheit aller anderen Flächen, welche an dem Krystall noch auftreten können, gegeben, da nur solche vermöge des Gesetzes der Rationalität der Indices vorkommen, bei denen diese letzteren rationale Zahlen sind. Welche und wie viele von den krystallonomisch möglichen Flächen nun wirklich noch an dem Krystall sich ausgebildet haben, das hängt, wie die Erfahrung gelehrt hat, nicht nur von der Natur des Krystalls, sondern auch von den äusseren Umständen bei seiner Bildung ab.

Bei der Betrachtung der thermischen Verhältnisse der Krystalle haben wir gesehen, dass diese sich im Allgemeinen (mit Ausnahme derjenigen der ersten Klasse) nach verschiedenen Richtungen verschieden ausdehnen, wenn sie erwärmt werden, und dass in Folge dessen die Neigungen der Flächen gegen einander, die Krystallwinkel, sich ändern. Von diesen sind aber die Elemente des Krystalls, die Axenwinkel und Axenlängen, abhängig, also müssen auch diese mit der Temperatur des Krystalls sich ändern. Anders ist es dagegen mit den Indices. Seien die Ausdehnungscoëfficienten parallel den drei Axen gleich α, β, γ, so sind bei einer um 100° höheren Temperatur die Parameter der Grundform

$$OA\,(1+\alpha) \qquad OB\,(1+\beta) \qquad OC\,(1+\gamma).$$

Die Parameter einer beliebigen Fläche $(h\,k\,l)$, bei der Ausgangstemperatur $\frac{OA}{h}$, $\frac{OB}{k}$, $\frac{OC}{l}$, werden alsdann:

$$\frac{OA}{h}(1+\alpha) \qquad \frac{OB}{k}(1+\beta) \qquad \frac{OC}{l}(1+\gamma).$$

Diese Grössen sind aber resp. der h-te, k-te, l-te Theil der Parameter der Grundform bei derselben Temperatur, also bleibt, weil sich gleiche Stücke einer Axe um gleich viel ausdehnen, das Verhältniss der Parameter zweier Flächen, auf dieselbe Axe bezogen, immer das gleiche, d. h. die Indices werden durch die Temperatur nicht geändert*). Das Gesetz der Rationalität der Indices ist unabhängig von der Temperatur des Krystalls.

Wenn die Parameter der Primärform oder Grundform, d. h. der Fläche, auf welche wir alle übrigen beziehen, $= a, b, c$ sind, so sind diejenigen einer Fläche, deren Symbol $(h\,k\,l)$ ist,

$$\frac{a}{h}, \quad \frac{b}{k}, \quad \frac{c}{l},$$

oder, mit dem Product $h\,k\,l$ multiplicirt:

$$k\,l\,a, \quad h\,l\,b, \quad h\,k\,c.$$

In dieser Form stellen nun die Parameter der Fläche $(h\,k\,l)$ ganze rationale Vielfache der primären Parameter oder der Axenlängen dar. Man

*) Die Möglichkeit einer stetigen Aenderung derselben mit der Temperatur würde auch ihrem Charakter als »rationalen« Zahlen widersprechen.

kann also, wenn die Axenlängen, d. h. die Parameter einer Fläche bekannt sind, die Lage aller anderen Flächen auch dadurch bestimmen, dass man angiebt, das wie Vielfache ihre Parameter von denen der ersten Fläche sind; dies geschieht, indem ihr Parameterverhältniss aufgeführt und die Axenlängen mit den betreffenden rationalen Coëfficienten multiplicirt werden. Das Verhältniss dieser rationalen Coëfficienten ist dann natürlich das reciproke der Indices.

Beide entgegengesetzte Formeln zur Bezeichnung einer Fläche, 1) durch ihr Axenverhältniss als Vielfaches des primären, 2) durch die Indices, sind in der Krystallographie eingeführt worden, die erstere von Weiss, die letztere von Miller, und beide werden noch jetzt gebraucht. Die ursprüngliche Weiss'sche Bezeichnungsweise der Flächen durch ihr Parameterverhältniss wird zwar nur noch von wenigen Krystallographen angewendet, um so mehr aber eine auf demselben Princip beruhende abgekürzte Flächenbezeichnung, welche von Naumann vorgeschlagen wurde. Diese Bezeichnungsweise enthält dieselben Coëfficienten der Parameter, wie die Weiss'sche, und hat daher mit dieser den Vortheil über die Miller'sche gemein, dass das Zeichen einer Fläche ohne Schwierigkeit eine Vorstellung über die Lage derselben gewinnen lässt, welche aus den Indices etwas weniger leicht zu erhalten ist. Dagegen hat die sogenannte Miller'sche Bezeichnungsweise (welche zuerst von Whewell vorgeschlagen wurde) den Vortheil, dass die Indices für die bequemsten Rechnungsmethoden unmittelbar verwendet werden können, während die reciproken Coëfficienten der Parameter zu denselben erst umgeändert werden müssen. Die Bezeichnung durch die Indices ist daher in neuerer Zeit immer allgemeiner in Aufnahme gekommen. Was die grössere oder geringere Einfachheit der Zahlen bei der einen und der anderen Bezeichnungsmethode betrifft, so kommt hierin keiner von beiden ein besonderer Vorzug zu, denn in einem Falle sind die Zahlen in dem Miller'schen Zeichen einfacher, als in dem Weiss'schen, in einem andern Falle ist es umgekehrt. Es geht dies deutlich aus den folgenden Beispielen hervor, welche zugleich zeigen sollen, wie die Zeichen der einen Art in diejenigen der anderen umgewandelt werden:

Die Indices der Grundform selbst sind offenbar 1, 1, 1, also deren Zeichen nach Miller $= (1\,1\,1)$; das Weiss'sche Zeichen giebt die Parameter an und lautet daher

$$(a : b : c).$$

Die Fläche, deren Symbol (1 2 3), hat die Parameter

$$\frac{a}{1} : \frac{b}{2} : \frac{c}{3}$$

oder $\quad 6a : 3b : 2c$

oder $\quad 3a : \frac{3}{2}b : c;$

das Weiss'sche Zeichen derselben ist demnach

$$= (3a : \tfrac{3}{2}b : c).$$

Die Fläche (3 4 6) hat die Parameter

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{b}{4}, \quad \frac{c}{6}$$
$$= 24a, \quad 18b, \quad 12c$$
$$= 2a, \quad \tfrac{3}{2}b, \quad c$$

und wird nach Weiss bezeichnet:

$$(2a : \tfrac{3}{2}b : c).$$

Der allgemeine Ausdruck für eine abgeleitete Fläche, welche durch die Indices mit $(h\,k\,l)$ bezeichnet wird, ist nach Weiss

$$(ma : b : nc).$$

Es ist oben unter den Zahlen, welche als Indices am häufigsten vorkommen, auch die Null aufgeführt; wird ein Index $= 0$, so werden z. B. die Parameter der Fläche $(h\,k\,0)$:

$$\frac{a}{h}, \quad \frac{b}{k}, \quad \frac{c}{0} = \infty,$$

ihr Parameterverhältniss wird also

$$ma : b : \infty c.$$

Dies ist demnach das Zeichen einer Fläche, welche der Z-Axe parallel geht, aber die beiden andern Axen in endlichen Abständen durchschneidet. Die Bezeichnungen

$$(h\,0\,k) = a \; : \infty b : nc$$
$$\text{und } (0\,k\,l) = \infty a : mb : nc$$

bedeuten dann Flächen, welche der Y-, resp. X-Axe parallel sind.

Werden zwei Indices der Null gleich, so kann der dritte jeder beliebigen Zahl, also auch der 1 gleichgesetzt werden; eine solche Fläche hat also das Symbol (1 0 0) und die Parameter:

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{b}{0} = \infty, \quad \frac{c}{0} = \infty,$$

also das hierauf begründete Zeichen

$$(a : \infty b : \infty c).$$

Sie ist zwei Axen parallel, somit auch der Axenebene YOZ, in welcher diese liegen, d. h. jenes Zeichen ist dasjenige der Axenebene YOZ selbst. Ebenso sind:

$$(0\,1\,0) = (\infty a : b : \infty c)$$
$$(0\,0\,1) = (\infty a : \infty b : c)$$

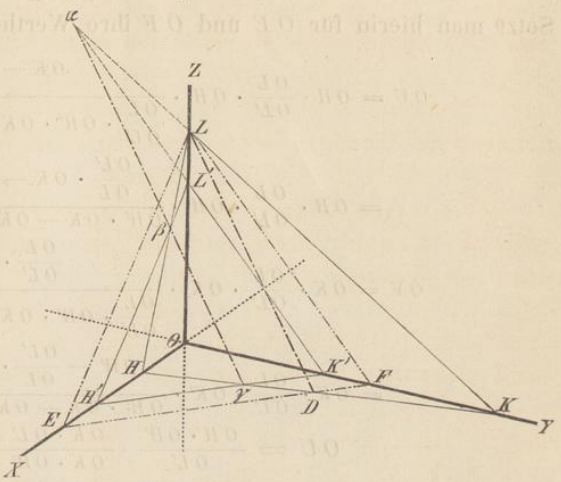
die Zeichen der beiden anderen Axenebenen XOZ und XOY.

§. 41. **Zonenlehre.** *A*) Richtung der Durchschnittslinie zweier Krystallflächen. In Fig. 117 sind zwei Flächen (hkl) und $(h'k'l')$ eingetragen, welche die drei Axen in H, K, L, resp. H', K', L' schneiden und deren Durchschnittsrichtung als Function ihrer Parameter bestimmt werden soll. Die Durchschnitte beider Flächen mit der Axenebene XOY, HK und $H'K'$, müssen sich in einem Punkte γ schneiden, und da dieser beiden Krystallflächen angehört, so muss es ein Punkt der gesuchten Durchschnittsrichtung sein. Ganz ebenso muss β als Schnittpunkt der Geraden HL und $H'L'$, sowie α als solcher der Linien KL und

$K'\,L'$ je einen Punkt derselben Geraden darstellen, welche also bereits durch die Lage zweier solcher Punkte bestimmt ist.

Durch parallele Verschiebung einer oder beider Krystallflächen wird die Richtung der Durchschnittslinie nicht geändert. Verschieben wir $(h'\,k'\,l')$ parallel sich selbst so weit, bis ihr Parameter auf der Z-Axe $= OL$ wird, so ist dies gleichbedeutend mit einer Multiplication aller ihrer Parameter mit $\frac{OL}{OL'}$; dieselben erhalten alsdann die Werthe:

Fig. 117.



$$OE = OH' \frac{OL}{OL'}, \qquad OF = OK' \frac{OL}{OL'}, \qquad OL.$$

Die Richtung der gesuchten Durchschnittslinie ist nunmehr DL; auf dieser ist der Punkt L bekannt, da er im Abstande OL (= einem Parameter der ersten Fläche) auf der Z-Axe liegt.

Um den zweiten Punkt D zu finden, construire man in Fig. 118 (s. folg. S.)

$$D\,U \parallel O\,Y, \quad D\,V \parallel O\,X,$$

so ist die Aufgabe nun diejenige, die Längen OU und OV (die sogen. Coordinaten des Punktes D) durch die Parameter zu bestimmen, da mit deren Kenntniss die Gestalt des Parallelogramms $O\,U\,D\,V$, also auch die Lage des Punktes D gegeben ist.

Es ist Dreieck OKH ähnlich UDH, ebenso OFE ähnlich UDE; daraus folgt

$$OK : UD = OH : UH = OH : (OH - OU)$$
$$OF : UD = OE : UE = OE : (OE - OU)$$

Das erste Verhältniss liefert die Gleichung

$$OK \cdot OH - OU \cdot OK = OH \cdot UD$$

das zweite

$$OF \cdot OE - OU \cdot OF = OE \cdot UD.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leiten sich die beiden Unbekannten OU und UD ab:

$$OU = \frac{OE \cdot OK \cdot OH - OF \cdot OE \cdot OH}{OE \cdot OK - OH \cdot OF}$$

$$UD = \frac{OK \cdot OF \cdot OE - OK \cdot OH \cdot OF}{OE \cdot OK - OH \cdot OF}$$

oder:

$$OU = OH \cdot OE \frac{OK - OF}{OE \cdot OK - OF \cdot OH}$$

$$UD = OV = OK \cdot OF \frac{OE - OH}{OE \cdot OK - OF \cdot OH}$$

Setzt man hierin für OE und OF ihre Werthe ein, so resultirt:

$$OU = OH \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot \frac{OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK'}{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot OH}$$

$$= OH \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot \frac{\frac{OL'}{OL} \cdot OK - OK'}{OH' \cdot OK - OK' \cdot OH}$$

$$OV = OK \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot \frac{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' - OH}{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot OH}$$

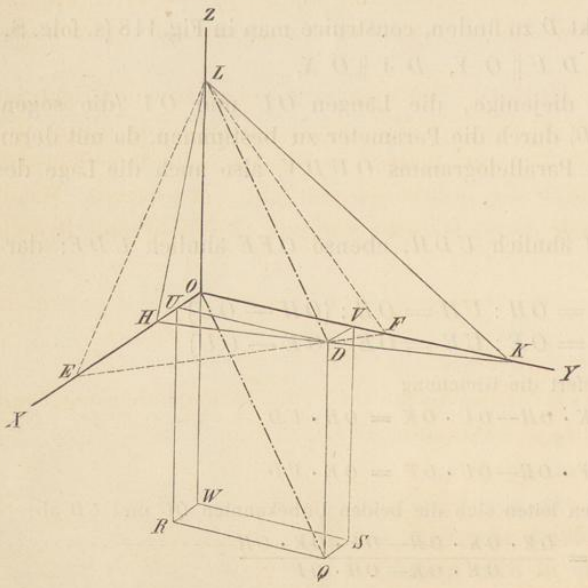
$$= OK \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot \frac{OH' - \frac{OL'}{OL} \cdot OH}{OH' \cdot OK - OK' \cdot OH}$$

$$OU = \frac{OH \cdot OH'}{OL'} \cdot \frac{OK \cdot OL' - OL \cdot OK'}{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}$$

$$OV = \frac{OK \cdot OK'}{OL'} \cdot \frac{OL \cdot OH' - OH \cdot OL'}{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}$$

Hiermit ist die Aufgabe, die Richtung der Durchschnittslinie von (hkl) und $(h'k'l')$ durch deren Parameter zu bestimmen, gelöst, da zwei Punkte derselben, L und D, nunmehr mittelst der Parameter gegeben sind.

Fig. 118.



Um die Ausdrücke für die drei Bestimmungsstücke jener Durchschnittslinie, OU, OV und OL, symmetrisch zu machen, tragen wir in Fig. 118 auf der negativen Seite der Z-Axe die Länge $OW = -OL$ ab und construiren das Parallelepiped $OUDVWRQS$; alsdann ist dessen Diagonale OQ ebenfalls die Richtung des Durchschnittes der beiden Flächen (hkl) und $(h'k'l')$. Multiplicirt man alle Parameter der Fläche (hkl), also OH, OK, OL, mit einer beliebigen Zahl m, so wird dadurch an der Richtung jener Fläche

Nichts geändert, also auch nicht an ihrer Durchschnittsrichtung mit $(h'k'l')$. Setzt man nun für OH, OK und OL die neuen Werthe $m \cdot OH$, $m \cdot OK$ und $m \cdot OL$ in die obigen Formeln für OU, OV und OW ein, so wird daraus $OU' = m \cdot OU$, $OV' = m \cdot OV$, $OW' = m \cdot OW$, d. h. es werden alle Seiten des oben bezeichneten Parallelepipeds mit derselben Zahl multiplicirt, ohne dass dadurch die Richtung ihrer Diagonale, d. i. die Durchschnittsrichtung der beiden Krystallflächen, geändert wird. Diese wird also auch unverändert bleiben, wenn die Ausdrücke für OU, OV und OW mit

$$\frac{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}{OH \cdot OH' \cdot OK \cdot OK' \cdot OL}$$

multiplicirt werden. Führt man dies aus, so findet man die nunmehr ganz symmetrischen Ausdrücke

$$OU = \frac{1}{OL \cdot OK'} - \frac{1}{OK \cdot OL'}$$

$$OV = \frac{1}{OH \cdot OL'} - \frac{1}{OL \cdot OH'}$$

$$OW = \frac{1}{OK \cdot OH'} - \frac{1}{OH \cdot OK'}$$

Durch diese Gleichung ist nun die Durchschnittsrichtung zweier Krystallflächen in der Weise zu bestimmen, dass man sich diese Richtung durch den Axenmittelpunkt gelegt denkt, womit ein Punkt derselben gegeben ist, — während man den zweiten dadurch findet, dass man obige Werthe von OU, OV und OW je nach ihrem Vorzeichen auf die positive oder negative Seite der X-, Y- und Z-Axe aufträgt und damit die drei Seiten des Parallelepipeds erhält, dessen dem Axenmittelpunkt entgegengesetzter Eckpunkt jener zweite Punkt ist, und dessen Diagonale die gesuchte Durchschnittsrichtung darstellt.

Die drei Grössen OU, OV, OW bestimmen die Durchschnittsrichtung zweier Flächen durch deren Parameter; will man sie statt dessen durch die Indices bestimmen, so hat man nur nöthig, in die Formeln derselben die Werthe der Parameter, durch die Indices ausgedrückt, einzusetzen. Wenn die Axenlängen des Krystalls $= a, b, c$, so sind die Parameter der beiden Flächen (hkl) und $(h'k'l')$:

$$OH = \frac{a}{h},\ OK = \frac{b}{k},\ OL = \frac{c}{l}$$

$$OH' = \frac{a}{h'},\ OK' = \frac{b}{k'},\ OL' = \frac{c}{l'}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln für OU, OV, OW (s. oben) ein und bringt jeden Ausdruck auf einen Nenner, so erhält man:

$$OU = \frac{kl' - lk'}{bc} = \frac{u}{bc}$$

$$OV = \frac{lh' - hl'}{ac} = \frac{v}{ac}$$

$$OW = \frac{hk' - kh'}{ab} = \frac{w}{ab},$$

wenn man die Differenzen $kl' - lk'$, $lh' - hl'$, $hk' - kh'$ abgekürzt mit u, v, w bezeichnet. Multiplicirt man diese Grössen mit dem Produkt abc,

wodurch ja die Richtung der Diagonale des Parallelepipeds nicht geändert wird, so verwandeln sie sich in

$$a\,u,\ b\,v,\ c\,w,$$

welche Grössen als Seiten des Parallelepipeds dessen Diagonale, als die Durchschnittsrichtung der Flächen $(h\,k\,l)$ und $(h'\,k'\,l')$, durch die Axenlängen und die Indices derselben bestimmen. Die nur von den Indices abhängigen Grössen u, v, w erhält man mittelst eines sehr leicht dem Gedächtniss einzuprägenden Schemas aus jenen, indem man nämlich die Indices der einen Fläche zweimal und darunter die der andern ebenso oft schreibt und nach Weglassung der ersten und letzten Colonne je zwei Zahlen kreuzweise multiplicirt und die beiden Producte von einander abzieht:

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & k & l & h & k & l \\ & \times & \times & \times & & \\ h' & k' & l' & h' & k' & l' \\ \hline \multicolumn{5}{c}{kl'-lk',\ lh'-hl',\ hk'-kh'} \\ \multicolumn{5}{c}{=u \qquad =v \qquad =w} \end{array}$$

Da die Indices stets ganze rationale Zahlen sind, so müssen auch die Grössen u, v, w solche sein.

B) Durchschnittsrichtung dreier, einer Richtung paralleler Krystallflächen. Die beiden unter *A*) betrachteten Flächen sind ihrer soeben bestimmten Durchschnittsrichtung parallel; dies kann auch eine dritte sein, dann muss sie die beiden ersteren in Geraden (die Durchschnittslinien zweier Krystallflächen nennt man Kanten) schneiden, welche einander und jener ersten Durchschnittsrichtung parallel sind. Die Gesammtheit von Flächen, welche einander in parallelen Kanten durchschneiden, nennt man eine Zone, die Flächen derselben tautozonal. Denkt man sich alle Flächen einer Zone durch einen Punkt gehend, so schneiden sie einander sämmtlich in einer Geraden, in der Richtung, welcher sie parallel sind, der sogenannten Zonenaxe.

Soll eine Fläche R tautozonal mit zwei anderen P und Q sein, so müssen ihre Indices einer bestimmten Bedingung genügen, welche nunmehr aufzusuchen ist. P, Q, R, deren Symbole resp. sind

$$P(e\,f\,g),\ Q(h\,k\,l),\ R(p\,q\,r),$$

werden in einer Zone liegen, wenn die Durchschnittslinie von P und Q parallel derjenigen von Q und R ist, d. h. wenn die Diagonalen der beiden Parallelepipede, welche wir für den ersteren, wie für den zweiten Durchschnitt in derselben Weise construiren, wie unter A) (s. Fig. 118), zusammenfallen, denn jene sind die Durchschnittsrichtungen, die eine von P und Q, die andere von Q und R, und sind deshalb parallel; legen wir sie also durch denselben Punkt, den Axenmittelpunkt, so müssen sie sich decken. Die Diagonalen jener beiden Parallelepipede können aber nur dann in dieselbe Richtung fallen, wenn das Verhältniss der drei Seiten in beiden das gleiche (das eine dem andern ähnlich ist), d. h. wenn die Seiten des ersten

sich nur durch einen constanten Factor von denen des zweiten Parallelepipeds unterscheiden.

Die Durchschnittslinie der Flächen P und Q, kurz mit $[P,Q]$ bezeichnet, ist bestimmt durch das Parallelepiped, dessen Seiten:

$$au = a(fl—gk),\ bv = b\ (gh—el),\ cw = c\,(ek—fh);$$

die Durchschnittsrichtung $[Q,R]$ durch die Parallelepipedseiten:

$$au' = a(kr—lq),\ bv' = b(lp—hr),\ cw' = c\,(hq—kp).$$

Sollen P, Q, R tautozonal sein, so müssen die entsprechenden Seiten jener beiden Parallelepipede sich zu einander verhalten, wie derselbe constante Factor, z. B. C, folglich*)

$$fl—gk = C(kr—lq) \qquad (1)$$
$$gh—el = C\,(lp—hr) \qquad (2)$$
$$ek—fh = C(hq—kp) \qquad (3)$$

Multiplicirt man (1) mit p, (2) mit q, (3) mit r, und addirt alle drei Gleichungen, so wird die ganze rechte Seite der resultirenden Gleichung Null, also ist:

$$p\,(fl—gk) + q\,(gh—el) + r\,(ek—fh) = 0.$$

Bezeichnen wir wieder die obigen Differenzen, welche den auf voriger S. oben gefundenen entsprechen, abgekürzt mit u, v, w, so ist die Bedingung der Tautozonalität der Fläche (pqr) mit den Flächen (hkl) und (efg) gegeben durch die Gleichung:

$$up + vq + wr = 0.$$

Daraus ersieht man, dass die Bedingung, unter welcher drei Flächen in eine Zone fallen, nur abhängt von den Indices dieser Flächen, dagegen von den Axenlängen vollkommen unabhängig ist. Dass diese sich bei den meisten Krystallen mit der Temperatur ändern, kann daher auf die Tautozonalität keinen Einfluss ausüben. Die Indices jedoch, von denen allein jene Bedingung abhängt, behalten für jede Temperatur des Krystalls ihre rationalen Werthe constant bei, also behält auch jene Bedingungsgleichung für alle Temperaturen ihre Gültigkeit. Drei Krystallflächen, welche für irgend eine Temperatur eine Zone bilden, schneiden einander auch bei jeder andern Temperatur in parallelen Kanten. Man nennt dieses, aus demjenigen der Rationalität der Indices folgende Gesetz das Gesetz der Erhaltung der Zonen.

Die Grössen u, v, w, welche offenbar stets rationale Zahlen sind, heissen die Indices der Zone, $[uvw]$ ihr Symbol, welches aus irgend zwei Flächen P und Q, unter einer beliebigen Zahl solcher, welche einander in parallelen Kanten schneiden, berechnet werden kann; jede beliebige andere Fläche (pqr) der Zone $[P, Q]$ (welche man auch mit $[hkl, efg]$ oder mit $[uvw]$ bezeichnen kann) muss in Bezug auf ihre Indices der obigen Bedingungsgleichung genügen.

---

*) In diesen Gleichungen heben sich die Axenlängen a, b, c auf, weil stets eine derselben als Factor beider Seiten der Gleichung erscheint.

Man kann diese Gleichung folglich dazu benutzen, die Richtigkeit der Indices einer Fläche zu prüfen, welche man auf anderem Wege bestimmt hat, und welche in einer Zone liegt*) mit zwei bekannten Flächen. Sind diese z. B. (201) und (314), so ist das Symbol der Zone $[\bar{1}\,\bar{5}\,2]$, d. h. $u = -1$, $v = -5$, $w = +2$, und es gehört die Fläche $(\bar{3}\,1\,1)$ in diese Zone, denn deren Indices, in die obige Gleichung eingesetzt, erfüllen dieselbe.

Das Symbol $[u\,v\,w]$ einer Zone giebt uns die Gesammtheit aller möglicher Flächen derselben, indem wir für q und r nach und nach alle einfachen rationalen Zahlen 0, 1, 2, ... setzen und jedesmal das zugehörige p aus der obigen Bedingungsgleichung berechnen.

C) Bestimmung einer Fläche durch zwei Zonen. Da eine Ebene durch zwei derselben parallele Gerade gegeben ist, so ist eine Krystallfläche, welche zugleich in zwei Zonen liegt, also sowohl der Zonenaxe der ersten, als derjenigen der zweiten, parallel geht, dadurch vollkommen bestimmt. Sind die Symbole der beiden Zonen

$$[u\,v\,w] \text{ und } [u'\,v'\,w'],$$

so müssen die Indices $p\,q\,r$ der in beiden Zonen liegenden Fläche sowohl in Bezug auf u, v, w, als in Bezug auf u', v', w' jener Bedingungsgleichung genügen, folglich:

$$\begin{aligned} up + vq + wr &= 0 \\ u'p + v'q + w'r &= 0 \end{aligned}$$

Daraus findet man leicht

$$\begin{aligned} p &= r\,\frac{vw' - wv'}{uv' - vu'} \\ q &= r\,\frac{wu' - uw'}{uv' - vu'} \end{aligned}$$

Da man einen von den drei Indices jeder beliebigen Zahl gleich setzen kann, z. B.

$$r = uv' - vu'$$

so folgt:

$$\begin{aligned} p &= vw' - wv' \\ q &= wu' - uw' \\ r &= uv' - vu' \end{aligned}$$

als die drei Indices derjenigen Fläche, welche in den beiden Zonen $[u\,v\,w]$ und $[u'\,v'\,w']$ liegt.**)

Diese drei Werthe folgen nun aus den Indices der beiden Zonen nach

---

*) Die Zugehörigkeit einer Fläche zu einer Zone mit Bestimmtheit zu constatiren, bedarf es des Reflexionsgoniometers, auf welchem die beiden bekannten Flächen justirt (s. S. 28) werden; ist dies geschehen, so steht die Zonenaxe normal zum Kreis, und alsdann sind auch alle übrigen Flächen der Zone justirt.

**) Da u, v, w, u', v', w' rationale Zahlen sind, so müssen offenbar auch $p\,q\,r$ solche sein. Hieraus folgt der Satz: Die Ebene, welche in zwei Zonen eines Krystalls fällt, ist stets eine mögliche Fläche desselben.

genau demselben Schema, wie diese selbst aus den Indices der Flächen, nämlich:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} u & v & & w & & u & v & w \\ & & \times & & \times & & \times & \\ u' & v' & & w' & & u' & v' & w' \\ \hline vw'-wv', & & wu'-uw', & & uv'-vu' & & & \\ =p & & =q & & =r & & & \end{array}$$

Bei der Ableitung der Indices der Zonen, wie bei der Berechnung einer Fläche aus zwei Zonen, in welche sie fällt, sind stets die auf die negative Seite einer Axe bezüglichen Indices mit dem Vorzeichen —, welches alsdann über den Index gesetzt wird, in Rechnung zu bringen. Z. B. sei diejenige Fläche gesucht, welche einerseits in der Zone der beiden Flächen (123) und (113) liegt, andererseits auch mit (011) und (122) parallele Kanten bildet: das Symbol der ersteren Zone ist $[30\bar{1}]$, das der zweiten $[01\bar{1}]$; daraus folgt die gesuchte Fläche (133).

§. 42. **Projection der Krystalle.** Zur Orientirung über die Zonenverhältnisse eines flächenreichen Krystalls dient die projectivische Darstellung der Flächen desselben durch Punkte in einer Ebene. Am besten unter allen hierfür vorgeschlagenen Methoden erfüllt diesen Zweck die stereographische Projection (auch »sphärische Projection« genannt), welche zuerst von Neumann hierzu verwendet und dann besonders durch Miller in die Krystallographie eingeführt wurde.

Dieselbe besteht darin, dass man sich um einen Punkt des Krystalls als Centrum eine Kugelfläche von beliebigem Radius und dann von diesem Mittelpunkte aus Normalen auf alle Krystallflächen construirt denkt, welche man verlängert, bis sie die Kugelfläche treffen; man erhält so für jede Krystallfläche einen Punkt auf der Kugelfläche, welcher die erstere ihrer Richtung nach vollkommen bestimmt. Diesen Punkt nennen wir den Pol der Fläche. Da die Normalen aller Flächen einer Zone in der zur Zonenaxe senkrechten Ebene liegen, eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene aber die Kugelfläche in einem grössten Kreise schneidet, so müssen die Pole aller tautozonalen Flächen auf einem grössten Kreise liegen und die zwischen ihnen liegenden Bögen dieses Kreises gleich den gemessenen Winkeln zwischen den zugehörigen Flächen sein.

Von der Kugeloberfläche mit den darauf befindlichen Flächenpolen haben wir nun durch die Projection ein Bild in der Ebene zu entwerfen. Dies geschieht auf folgende Weise: man wählt zur Projectionsebene eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene, welche senkrecht zur Axe einer besonders wichtigen Zone des Krystalls steht. Der grösste Kreis, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet, und in dem alsdann die Pole aller Flächen jener Zone liegen, wird der Grundkreis genannt. Die eine der beiden durch den Grundkreis getrennten Hälften der Kugel wird so auf dessen Ebene projicirt, dass man sich das Auge in den am weitesten entfernten Punkt der andern Hälfte, welcher von allen Punkten des Grund-

kreises 90° absteht, versetzt denkt. Wenn man also nach der entgegengesetzten Seite von der abzubildenden Hälfte der Kugel, von ihrem Mittelpunkte aus, eine Normale zur Ebene des Grundkreises fällt und den Punkt, in welchem diese die Kugeloberfläche trifft, mit allen Flächenpolen jener Hälfte durch Gerade verbindet, so sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene des Grundkreises die Projectionen der Flächenpole.

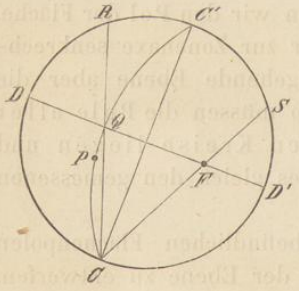
Diese Projection der halben Kugelfläche auf die Ebene des Grundkreises besitzt nun folgende Eigenschaften:*)

Jeder Kreis auf der Kugel erscheint als Kreis oder als Durchmesser des Grundkreises, jeder grösste Kreis auf der Kugel erscheint als Durchmesser oder als Kreisbogen, welcher den Grundkreis in den Enden eines Durchmessers desselben schneidet.

Um auf der Projection innerhalb eines Zonenkreises, d. h. eines Kreisbogens, in welchem die Pole der Flächen einer Zone liegen, diese selbst ihrer Lage nach zu bestimmen, wenn man ihre Winkel kennt, dient folgender für diese Projection gültige Satz: Verbindet man die Pole zweier Flächen einer Zone mit dem Pole des Zonenkreises durch Gerade und verlängert diese rückwärts, so müssen sie auf dem Grundkreise einen Bogen abschneiden, welcher gleich dem Winkel zwischen beiden Flächen ist (der hier gebrauchte Ausdruck »Pol des Zonenkreises« bedeutet: die Projection desjenigen Punktes auf der Kugelfläche, welcher von allen Punkten des Zonenkreises 90° Abstand besitzt, d. h. den Pol einer zu den Flächen der Zone senkrechten Ebene).

Der Pol eines Zonenkreises wird auf die folgende Art durch Construction gefunden: In Fig. 119 ist der Kreis durch C, C', D, D' der Grundkreis, C und P die Pole zweier Krystallflächen; dann ist auch die zu C parallele Gegenfläche zur Zone CP gehörig, und deren Pol ist offenbar C' (CC' Durchmesser); es sind also drei Pole des Zonenkreises, C, P, C', gegeben und der Kreisbogen CPC' kann also auf bekannte Art construirt werden. Der gesuchte Pol dieses Zonenkreises muss auf der Geraden DD' liegen (DD' durch die Mitte und $\perp CC'$), denn diese ist die Projection des auf dem Grundkreise normal stehenden Zonenkreises, der sämmtliche, 90° von C abstehende Punkte enthält. Ferner muss aber jener Pol nicht nur von C, sondern auch von jedem andern Punkte des Zonenkreises CP, z. B. von Q, einen Abstand von 90° haben; dann muss also die Gerade zwischen ihm und C mit der

Fig. 119.



*) Die Beweise für die im Folgenden benutzten Eigenschaften der stereographischen Projection findet man u. a. in dem Werke von A. Brezina, Methodik der Krystallbestimmung, Wien 1864.

von Q nach C, da dieses letztere Pol der Zone DQD' ist, auf dem Grundkreise einen Bogen von 90° abschneiden. Man ziehe folglich CQ bis R, schneide von dem Grundkreis einen Bogen $RS = 90°$ ab und verbinde S mit C, so ist F der gesuchte Pol des Zonenkreises CPC'.

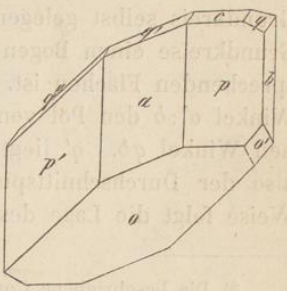
Bei dieser Construction ist noch von einer ferneren Eigenschaft dieser Projection Gebrauch gemacht worden, welche keiner weiteren Erklärung bedarf, der nämlich, dass alle Zonenkreise, welche senkrecht zu der des Grundkreises stehen, deren Pole also in letzteren fallen, als Durchmesser erscheinen. Ausserdem sieht man ebenfalls unmittelbar ein, dass die Pole der einzelnen Flächen der zur Projectionsebene senkrechten Zone direct durch ihre Winkel, d. h. die Winkel ihrer Normalen gegeben sind, da diese letzteren ja in der Ebene des Grundkreises selbst liegen.

Diesen letzteren Umstand benutzt man nun stets bei der Anfertigung einer solchen Projection, indem man zur Projectionsebene eine Ebene wählt, welche normal zu einer der drei Axen des Krystalls steht, so dass die Pole aller, dieser Axe paralleler Flächen in den Grundkreis fallen. Diese Pole werden also gefunden, indem man auf dem Grundkreise direct Bögen abschneidet, welche gleich sind den am Goniometer gemessenen Winkeln der zugehörigen Flächen.

Die stereographische Projection hat endlich noch den Vortheil, dass sie gestattet, die Pole der optischen Axen, der Elasticitätsaxen des Aethers u. s. w. (d. h. die Punkte, in denen diese die Kugelfläche schneiden) einzutragen und somit die Beziehungen dieser Richtungen zur Lage der Krystallflächen mit einem Male zu überblicken.

Als Beispiel möge für die Ausführung einer stereographischen Projection diejenige der Flächen des in Fig. 120 abgebildeten Krystalls dienen, welche zugleich den allgemeinsten unter den vorkommenden Fällen darstellt. Die Figur ist die Vorderansicht eines Krystalls von Kupfervitriol, und es seien zu Axenebenen desselben genommen die Flächen $a = (100)$, $b = (010)$ und $c = (001)$. Zur Projectionsebene werde die zur Z-Axe, also auch zur Zone ab senkrechte Ebene genommen. Sei b in Fig. 121 (s. folg. S.) der Pol von (010), so finden wir denjenigen von a, indem wir einfach von b aus auf dem Grundkreise den gemessenen Winkel ba abtragen. Ebenso finden wir die Pole p und p' durch die Winkel der Flächen p und p' zu a. Damit wären sämmtliche in den Grundkreis fallende Pole, d. h. diejenigen aller in Fig. 120 verticaler Flächen gefunden, und es handelt sich nun um die Aufsuchung des Poles von c (001). Seien A und B die gemessenen Winkel $c : a = (001) : (100)$ und $c : b = (001) : (010)$, so verlängere man in Fig. 121

Fig. 120.



die beiden Durchmesser aa und bb nach vorn resp. nach rechts und trage von der Mitte O des Grundkreises aus auf Oa die Länge

$$OK = \frac{r}{\cos B},$$

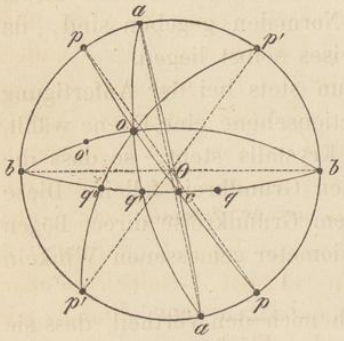
auf Ob die Länge

$$OL = \frac{r}{\cos A}$$

auf, wo r den Radius des Grundkreises bedeutet. Von dem Punkte K aus wird alsdann ein Kreis mit dem Radius

$$Kc = r \cdot \text{tang } B,$$

Fig. 121.



von L aus ein solcher mit dem Radius

$$Lc = r \cdot \text{tang } A$$

construirt. Diese beiden Kreise schneiden einander innerhalb des Grundkreises in dem Punkte c, und dieser stellt den gesuchten Pol der Fläche (001) dar*).

In derselben Weise könnten auch alle übrigen Flächenpole aus den Winkeln der Flächen zu a und b construirt werden, weit einfacher findet man dieselben jedoch unter Benutzung der Zonenverhältnisse:

Die zunächst zu projiçirende Fläche o liegt nämlich in der Zone pc, ihr Pol also auf dem Kreisbogen pcp; um hierselbst seinen Ort zu finden, sucht man zuerst den Pol dieses Zonenkreises nach dem S. 208 angegebenen Verfahren, trägt dann auf dem Grundkreise von p (hinten) aus nach links den gemessenen Winkel po auf und verbindet den Endpunkt dieses Bogens mit dem Pol des Zonenkreises pcp durch eine Gerade. Wo diese den Zonenkreis schneidet, im Punkte o, liegt der Pol der Fläche o, denn die Verbindungslinien der Punkte o und p (von denen diesmal der eine im Grundkreis selbst gelegen ist) mit dem Pol der Zone schneiden auf dem Grundkreise einen Bogen ab, welcher gleich dem Winkel der beiden entsprechenden Flächen ist. Ebenso erhält man aus der Zone bob und dem Winkel $o' : b$ den Pol von o', ferner q aus der Zone bcb und dem gemessenen Winkel qb. q' liegt in den beiden Zonen bc und oa, sein Pol ist also der Durchschnittspunkt der gleichnamigen Zonenkreise; in gleicher Weise folgt die Lage des Poles q'' aus den Zonen bcb und $p'op'$.

*) Die beschriebene Construction ist in Fig. 121, welche überhaupt nur noch die allernöthigsten Hülfslinien enthält, nicht mehr dargestellt, weil sie zu viel Raum beanspruchen würde. In dem gewählten Beispiel sind nämlich die Winkel $c : a = 74^0\ 22'$, $c : b = 85^0\ 38'$, $r = 20$ Millimeter, daher $OK = 74{,}2$, $OL = 262{,}7$ Millimeter. Will man nicht mit so grossen Distanzen construiren, so muss man statt des Poles von c zuerst denjenigen einer Fläche suchen, deren Winkel zu a und b kleiner sind. Die übrige Construction wird dadurch nur in der Reihenfolge der einzelnen Operationen geändert.

Die Bögen zwischen drei beliebigen Flächenpolen, z. B. c, o und q', stellen auf der Kugelfläche, deren Projection die Fig. 121 ist, die Winkel zwischen den betreffenden Flächen dar; coq' ist demnach ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten die gemessenen Winkel co, cq', oq', und dessen Winkel die Neigungen zwischen den Ebenen jener Zonenkreise sind. Da aus je drei Stücken eines sphärischen Dreieckes die übrigen berechnet werden können, so dienen die Formeln der sphärischen Trigonometrie dazu, die noch unbekannten Stücke, seien es Bögen oder Winkel zwischen den Ebenen von Zonenkreisen, zu berechnen. Hierauf beruhen aber alle Probleme der berechnenden Krystallographie, und da eine stereographische Projection alle Zonenverhältnisse des Krystalls mit einem Male zu überblicken gestattet, so wird die Ausführung der Berechnung eines einigermassen flächenreichen Krystalls wesentlich erleichtert, wenn man sich (zunächst approximativ aus freier Hand) eine Projection aller am Krystall beobachteter Flächen und Zonen anfertigt und an der Hand dieser den einfachsten Weg zur Berechnung unbekannter Stücke der vorliegenden sphärischen Dreiecke aufsucht. Diese Methode ist es deshalb auch, welche im Folgenden bei der Anleitung zur Berechnung der Krystalle der einzelnen Abtheilungen befolgt werden wird. Dass man mittelst derselben nicht nur aus bekannten Winkeln der Krystalle andere berechnen kann, sondern auch aus den Winkeln die Parameterverhältnisse der Flächen oder umgekehrt, geht aus den folgenden Betrachtungen hervor:

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie sind bekanntlich so beschaffen, dass man die Zahlenwerthe der Winkel, resp. deren Supplemente mit denen der gegenüberliegenden Seiten vertauschen kann. Hat man z. B., wie oben angegeben, aus den drei gemessenen Winkeln co, cq', oq' die gegenseitige Neigung der zugehörigen Zonenkreise, d. h. die Winkel des sphärischen Dreiecks coq' berechnet, so kann man letztere Werthe auch als Seiten eines sphärischen Dreiecks betrachten, dessen Winkel alsdann die gemessenen Werthe co, cq', oq' resp. deren Supplemente sind. Ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln $180^0—co$, $180^0—cq'$, $180^0—oq'$ erhält man aber, wenn man sich die von den drei Krystallflächen coq' gebildete stumpfe Ecke als Centrum einer Kugelfläche denkt, denn auf letzterer schneiden die drei Ebenen ein sphärisches Dreieck ab, dessen Winkel die angegebenen Werthe besitzen, während dessen Seiten gleich den ebenen Winkeln auf den drei Krystallflächen sind, d. h. der Winkel zwischen den Kanten co und cq' auf der Fläche c u. s. f. Daraus folgt, dass die Winkel der sphärischen Dreiecke auf einer Projection nicht nur die relativen Neigungen der betreffenden Zonenkreise darstellen, sondern noch eine andere Bedeutung haben: sie sind nämlich gleich den ebenen Winkeln auf den entsprechenden Flächen oder den Supplementen derselben. Z. B. ist der Winkel ocq' (Fig. 121) gleich dem Winkel, welchen in der Ebene der Krystallfläche c die beiden Kanten oc und cq' mit einander bilden. Wie aus Fig. 116 S. 197 hervorgeht, sind es aber die ebenen Winkel in den

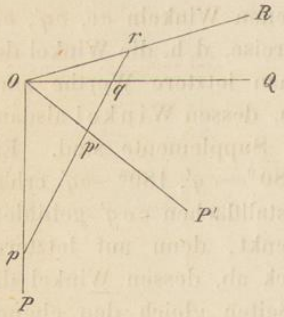
Axenebenen, welche zur Bestimmung der Elemente des Krystalls führen; a. a. O. wurde vorausgesetzt, dass man diejenigen Winkel am Krystall gemessen habe, welche direct die nothwendigen ebenen Winkel abzuleiten gestatten, nämlich die Krystallwinkel: (100):(010), (001):(100), (001):(010) und die Neigung von (111) zu zweien der drei Axenebenen. Ist dies jedoch nicht der Fall (weil die betreffenden Flächen nicht ausgebildet oder zu guten Messungen untauglich sind), so hat man dieselben aus anderen gemessenen Winkeln herzuleiten, und diese müssen dann natürlich in genügender Zahl vorhanden sein, um die Lage der Pole der vier Flächen (100) (010) (001) (111) in der Projection durch Zonen unzweideutig zu bestimmen. Genau umgekehrt verfährt man, wenn man die Winkel einer Krystallfläche gegen andere aus deren bekanntem Parameterverhältniss berechnen will, wie weiterhin an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden soll.

§. 43. **Die Symmetrie der Krystalle.** Wir gelangen nun zu einer Anwendung der Bestimmung der Lage von Krystallflächen durch ihre Indices, welche in theoretischer Beziehung von der höchsten Wichtigkeit ist, für das vorliegende, mehr praktische Zwecke berücksichtigende Werk indess zu weitläufige Herleitungen erfordern würde. Es werden daher von diesem Theile der theoretischen Krystallographie nur die wichtigsten Resultate gegeben werden, welche genügen, sich von dem Gange der mathematischen Untersuchung eine Vorstellung zu verschaffen.*)

Seien OP, OP', OQ und OR Fig. 122 die Durchschnitte von vier tautozonalen Flächen

$$P(hkl),\quad P'(h'k'l'),\quad Q(efg),\quad R(uvw)$$

Fig. 122.



mit einer beliebigen Ebene E (welche keine krystallographisch mögliche Fläche zu sein braucht), und sei pr irgend eine Gerade in dieser Ebene, so ist das Längenverhältniss

$$\frac{qp}{qp'} : \frac{rp}{rp'} = \frac{fl-gk}{fl'-gk'} \cdot \frac{vl'-wk'}{vl-wk}.$$

Dieses Verhältniss nennt man das anharmonische Verhältniss der Ebenen Q und R zu P und P', und es folgt aus der obigen Formel, dass dasselbe stets einen rationalen Werth besitzt und unabhängig ist von der Lage der Ebene E und der Richtung der Geraden pr.

Denkt man sich die beliebige Ebene E senkrecht zu den vier tautozonalen Krystallflächen, so sind die an O liegenden Winkel der Dreiecke Orq, Oqp', $Op'p$ zugleich die Winkel, welche die Krystallflächen einschliessen; für diesen Fall liefert die obige Gleichung zugleich eine Be-

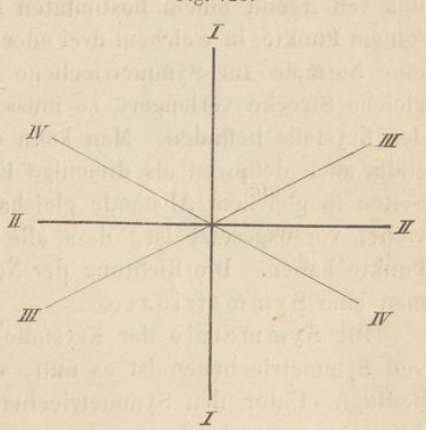
*) Diejenigen, welche die theoretische Krystallographie eingehender studiren und sich daher die Kenntniss der vollständigen Herleitung jener Resultate verschaffen wollen, finden dieselbe in folgenden Werken: V. von Lang, Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1866. Th. Liebisch, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881.

ziehung zwischen den Indices und den Winkeln von vier in einer Zone liegenden Flächen, so dass man aus den Indices aller und den beiden Winkeln zwischen der ersten und zweiten, und zwischen der zweiten und dritten, den Winkel, welchen die vierte mit der dritten bildet, berechnen kann. Man sieht nun leicht ein, dass man zwar drei Flächen, welche sich in einer Geraden schneiden, von beliebigen Winkeln gegen einander und beliebigen, nur den Bedingungen der Tautozonalität genügenden Indices annehmen kann, welche stets eine mögliche Krystallzone darstellen, — dass aber keine weitere Fläche mit beliebigem Winkel gegen die ersten drei möglich, da eine solche im Allgemeinen einen irrationalen Werth jenes anharmonischen Verhältnisses liefern würde. Die ersten drei Flächen bestimmen also die Zone vollständig, da in derselben nur noch solche vorkommen können, welche einen rationalen Werth jenes anharmonischen Verhältnisses liefern.

Indem man für die verschiedenartigsten Complexe von Ebenen prüft, ob sie dieser Bedingung genügen, kann man diejenigen ausfindig machen, welche in Folge des Gesetzes der Rationalität der Indices (von welchem obige Bedingung ja nur eine Consequenz ist) überhaupt krystallonomisch möglich sind, und auf diesem Wege ergiebt sich, dass es nur sechs Klassen von Krystallen geben kann, welche genau mit denjenigen übereinstimmen, welche die Erfahrung kennen gelehrt hat.

Die Unterschiede dieser sechs Klassen beruhen auf einer Eigenschaft der Krystalle, welche am geeignetsten zuerst durch ein Beispiel klar gemacht wird: die theoretische Herleitung aller krystallonomisch möglicher Flächencomplexe lehrt, dass in der Zone zweier auf einander normaler Ebenen *I* und *II* Fig. 123, und einer dritten *III*, welche einen beliebigen Winkel mit jenen einschliesst, stets eine vierte *IV* möglich ist, welche mit *I* und *II* denselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite einschliesst, wie *III*. Dasselbe gilt für jede beliebige Fläche der Zone, welche wir statt *III* nehmen; wenn wir uns also alle in dieser Zone möglichen Flächen einander in der Zonenaxe schneidend denken, muss dieser ganze Flächencomplex sowohl durch die Ebene *I*, als durch *II*, in genau gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt werden. Eine derartige Ebene, wie *I* und *II* es sind, welche den Complex aller möglicher Flächen derart durchschneidet, dass zu jeder Ebene eine zweite vorhanden ist, welche denselben Winkel nach der anderen Seite mit ihr einschliesst, nennt man eine

Fig. 123.



Symmetrieebene dieses Flächencomplexes, und sagt z. B. von den Flächen *III* und *IV* Fig. 123, dass sie zu einander symmetrisch in Bezug auf *I* und *II* liegen. Die Winkel, welche zusammengehörige Flächen mit einander bilden, werden also durch die Symmetrieebenen derselben Zone halbirt.

Eine Krystallform ist aber niemals ein Flächencomplex von nur einer Zone, weil dieser den Raum nicht allseitig umschliesst, sondern ein Complex von Flächen, welche mehreren Zonen angehören. Auch ein solcher kann, wie sich ebenfalls theoretisch beweisen lässt, Symmetrieebenen besitzen. Die Symmetrieebene eines derartigen Flächencomplexes, d. h. eines Krystalles, hat man alsdann in folgender Weise zu definiren: denkt man sich diese Ebene mit allen **möglichen** Flächen des Krystalls durch einen Punkt gelegt, so muss zu jeder Fläche desselben eine zweite vorhanden sein, welche so liegt, dass die Symmetrieebene mit beiden in eine Zone fällt und den Winkel derselben halbirt.*)

Jede Symmetrieebene eines Krystalls muss zugleich eine seiner möglichen Flächen sein, da sie in den Zonen aller Paare zu einander symmetrischer Flächen liegt, von denen ja schon zwei Paare die Rationalität ihrer Indices bedingen würden.

Hat der Complex aller möglicher Flächen eines Krystalls die in obiger Definition gegebene Eigenschaft, so wird er durch die Symmetrieebene in zwei Hälften zerlegt, welche genau gleich und entgegengesetzt sind, von denen die eine das Spiegelbild der anderen darstellt. Dasselbe findet in Bezug auf die Symmetrieebene auch statt, wenn man sich alle Flächen gleich weit von einem Punkte entfernt, und durch diesen die Symmetrieebene gelegt denkt; der Flächencomplex zeigt uns dann das geometrische Ideal einer Krystallform, welches jene Ebene in zwei symmetrische Hälften zerlegt. Denken wir uns von irgend einem bestimmten Punkte, z. B. einer Ecke des Krystalls (einem Punkte, in welchem drei oder mehr Flächen einander durchschneiden) eine Normale zur Symmetrieebene gefällt und jenseits derselben um die gleiche Strecke verlängert, so muss sich daselbst eine genau gleiche Ecke des Krystalls befinden. Man kann daher eine Symmetrieebene eines Krystalls auch definiren als diejenige Ebene, zu der alle Normalen auf beiden Seiten in gleichem Abstande gleichartige Punkte der Form durchschneiden, wobei vorausgesetzt ist, dass alle Flächen gleichen Abstand von einem Punkte haben. Die Richtung der Normalen zu einer Symmetrieebene nennt man eine Symmetrieaxe.

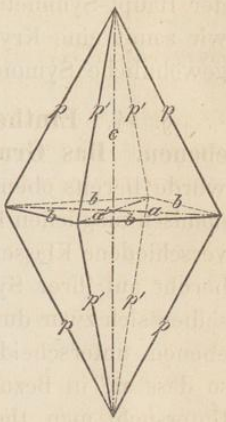
Die Symmetrie der Krystalle, d. h. das Vorhandensein oder Fehlen von Symmetrieebenen ist es nun, welches eine Verschiedenheit derselben bedingt. Unter den Symmetrieebenen selbst sind aber wieder zweierlei Arten zu unterscheiden.

---

*) Ist der Winkel, welchen eine Fläche mit der Symmetrieebene einschliesst, $= 90°$ so folgt aus dieser Definition, dass die zweite Fläche mit der ersten zusammenfällt.

Es giebt nämlich Krystalle, welche symmetrisch sind zu einer oder mehreren Ebenen, denen mehrere Symmetrieaxen parallel gehen, welche man beliebig mit einander vertauschen kann, ohne dadurch an der Krystallform irgend etwas zu ändern. Eine solche Form ist z. B. die in Fig. 124 dargestellte sogen. tetragonale Pyramide, welche von vier Paaren paralleler Flächen gebildet wird, und deren horizontaler Durchschnitt durch die mit b bezeichneten Kanten ein rechtwinkeliger ist, während der verticale durch die Kanten p oder p' die Gestalt eines Rhombus besitzt. Sowohl der bezeichnete horizontale, als jeder der beiden verticalen Durchschnitte durch die Kanten der Form sind Symmetrieebenen derselben, da sich sowohl an den Kanten p und p' die Flächen unter gleichen Winkeln, als auch an den Kanten b unter gleichen, aber von jenen verschiedenen Winkeln schneiden. In der ersten, horizontalen Symmetrieebene liegen die beiden auf einander senkrechten Richtungen a und a', welche die Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten b halbiren (bei gleicher Entfernung aller Flächen von einander sind es die Diagonalen des horizontalen Durchschnitts, welcher alsdann die Gestalt eines Quadrats hat). Diese beiden Richtungen a und a' sind offenbar Symmetrieaxen, denn sie sind die Normalen zu den beiden durch die Kanten p' und p gehenden Symmetrieebenen. Dreht man nun die Krystallform so, dass die verticale Richtung c sich selbst parallel bleibt, aber a in die Richtung kommt, welche vorher a' hatte, und a' in diejenige von a, so bleibt der rechtwinkelige Querschnitt offenbar sich selbst parallel, also sind alle Flächen der Gestalt in der neuen Stellung parallel den Flächen derselben in der vorigen, d. h. die Krystallform ist dieselbe geblieben, während die Richtungen a und a' vertauscht worden sind. Solche Symmetrieaxen, wie a und a', welche beliebig mit einander vertauscht werden können, ohne dass dadurch die Krystallform geändert wird, nennt man gleichwerthige Symmetrieaxen. Das Vorhandensein von Symmetrieebenen, in welchen sich mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen befinden, bedingt einen höheren Grad von Regelmässigkeit der betreffenden Krystallgestalten, daher nennt man solche »Haupt-Symmetrieebenen«, und deren Normalen »Haupt-Symmetrieaxen« oder kurz »Hauptaxen«.

Fig. 124.



Die beiden andern, verticalen Symmetrieebenen der tetragonalen Pyramide Fig. 124 sind keine von dem bezeichneten Charakter. Betrachten wir z. B. diejenige, welche durch die vier mit p bezeichneten Kanten zu legen ist, in welcher sich die Symmetrieaxen a und c befinden. Vertauscht man diese beiden Richtungen in gleicher Weise mit einander, wie vorher a und a', so wird der horizontale Querschnitt der Form in der neuen Stellung

ein Rhombus mit den Diagonalen c und a', folglich sind die Flächen nicht mehr denjenigen in der ersten Stellung parallel; a und c sind keine gleichwerthigen Richtungen. Ebenso wenig gelingt es, weder in der Ebene durch die Kanten p, noch in der ganz gleich beschaffenen durch die Kanten p', irgend zwei gleichwerthige Symmetrieaxen zu finden; die Ebenen ac und $a'c$ sind also Symmetrieebenen schlechthin, welche nicht den Charakter der Haupt-Symmetrieebenen besitzen. In der tetragonalen Pyramide haben wir somit eine Krystallform kennen gelernt, welche eine Haupt- und zwei gewöhnliche Symmetrieebenen besitzt.

§. 44. **Eintheilung der Krystalle nach den Haupt-Symmetrieebenen. Das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie.** Es wurde bereits oben bemerkt, dass die theoretische Herleitung der krystallonomisch möglichen Flächencomplexe das Resultat geliefert hat, dass es sechs verschiedene Klassen von Krystallen geben muss. Der Unterschied derselben beruht auf ihrer Symmetrie, und ergiebt sich hierbei, dass mehrere derselben sich zwar durch die Zahl und Richtung ihrer gewöhnlichen Symmetrieebenen unterscheiden, aber gleich viel Haupt-Symmetrieebenen besitzen, so dass sie in Bezug auf diese zu einer gemeinsamen Abtheilung gehören. Untersucht man theoretisch, welche Haupt-Symmetrieebenen vorkommen können bei allen Arten von krystallonomisch möglichen Flächen, so findet man, dass nur drei Fälle stattfinden können: entweder besitzen die Krystalle keine Haupt-Symmetrieebene, oder eine, oder endlich drei, auf einander senkrechte. Der letzte Fall ist derjenige des höchsten Grades der Symmetrie, welchen ein krystallonomisch möglicher Flächencomplex überhaupt haben kann. Nach den Haupt-Symmetrieebenen zerfallen demnach alle Krystalle in drei Hauptabtheilungen, deren geometrische Eigenschaften sich vollständig aus dem allgemeinen Grundgesetz der Krystallographie herleiten lassen. Diese sind, mit der regelmässigsten beginnend:

I. Die Krystalle besitzen drei auf einander senkrechte Haupt-Symmetrieebenen; in jeder derselben liegen folglich die Normalen zu den beiden anderen, und diese sind die gleichwerthigen Symmetrieaxen in jeder der drei Ebenen. Daraus ergiebt sich, dass die drei Normalen jener Ebenen, d. i. die drei Hauptaxen dieser Krystalle, sämmtlich gleichwerthig sind.

II. Die Krystalle besitzen nur eine Haupt-Symmetrieebene, also nur eine Hauptaxe; ausserdem sind sie jedoch noch nach anderen Ebenen symmetrisch.

III. Es ist keine Haupt-Symmetrieebene vorhanden; unter diesen Krystallen befinden sich sowohl solche, welche überhaupt keine Symmetrieebene haben, als auch solche, welche deren eine oder mehrere besitzen.

Ganz dieselben drei Klassen hat nun auch die Untersuchung der Krystalle in Bezug auf alle an solchen beobachtete Formen gelehrt, und es ist noch niemals eine Krystallform beobachtet worden, welche nicht einer dieser drei Abtheilungen angehört hätte. So bestätigt also die Erfahrung

in der vollkommensten Weise die nur auf dem Naturgesetz der Rationalität der Indices aufgebauten theoretischen Schlüsse.

Eine viel höhere Bedeutung gewinnt aber jene Dreitheilung noch, wenn wir sie vergleichen mit den physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Diese Eintheilung in drei Klassen fällt nämlich vollkommen zusammen mit derjenigen, durch welche wir im I. Abschnitt (vergl. S. 184 f.) die sämmtlichen Krystalle in drei Abtheilungen gebracht haben; die Symmetrie der Krystalle ist es also, von welcher es abhängt, welcher physikalischen Klasse dieselben angehören.

Die gesammte Kenntniss des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und den physikalischen Eigenschaften der Krystalle lässt sich in ein Gesetz zusammenfassen, welches man als das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie bezeichnen kann. Dasselbe lautet:

Jede geometrische Symmetrieebene eines Krystalls ist zugleich Symmetrieebene desselben in physikalischer Beziehung.

Der Ausdruck »Symmetrieebene in physikalischer Beziehung« ist folgendermaassen zu verstehen: Die sämmtlichen physikalischen Eigenschaften des Krystalls (Elasticität, Cohäsion, Lichtgeschwindigkeit, Ausdehnung durch die Wärme u. s. f.) in irgend einer beliebigen Richtung sind genau gleich denen des Krystalls in derjenigen Richtung, welche zur ersten symmetrisch liegt in Bezug auf jene Ebene. Zwei Richtungen liegen aber dann symmetrisch in Bezug auf eine Ebene, wenn letztere den Winkel beider halbirt und senkrecht zu der Ebene dieses Winkels steht.

Besitzt ein Krystall eine Symmetrieebene, so existirt zu jeder Richtung in demselben eine nach der entgegengesetzten Seite jener Ebene geneigte, zu ihr symmetrische, und da die eine Hälfte der Krystalle alsdann der anderen spiegelbildlich gleicht und durch Drehung mit ihr zur Deckung gebracht werden kann, wobei jede Richtung mit der zu ihr symmetrischen zusammenfällt, so sind alle zu einander symmetrischen Richtungen paarweise geometrisch gleichwerthig. Aus dem obigen Gesetze folgt also, dass zwei geometrisch gleichwerthige Richtungen auch physikalisch gleichwerthig sind*).

Das hierdurch erläuterte Gesetz ist, wie bereits angedeutet, der inductiv gefundene Ausdruck der vorhandenen Beobachtungen über den

*) Der umgekehrte Satz, dass zwei physikalisch gleichwerthige Richtungen auch geometrisch gleichwerthig seien, dass also jede Symmetrieebene in physikalischer Beziehung auch eine solche in geometrischer Beziehung sei, gilt nur, wenn man unter »physikalisch gleichwerthigen« Richtungen solche versteht, welche in Bezug auf alle physikalische Eigenschaften gleichwerthig sind, denn die in Bezug auf eine physikalische Eigenschaft gleichwerthigen Richtungen sind nicht immer auch geometrisch gleichwerthig; so sind z. B. in den einaxigen Krystallen alle Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Axe bilden, optisch gleichwerthig, dieselben sind es aber nicht in geometrischer Beziehung, denn sonst müsste der Durchschnitt des Krystalls senkrecht zur Axe ein Kreis sein!

Zusammenhang zwischen der Symmetrie und den physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Das Studium dieses Zusammenhanges wird ein leichteres sein, wenn wir, wie es hier geschieht, dieses Gesetz an die Spitze stellen und von demselben deductiv das Detail jenes Zusammenhanges ableiten. Wir sahen, dass die Krystalle nach ihrer Symmetrie in drei Abtheilungen zerfallen. Die physikalischen Unterschiede dieser ergeben sich unmittelbar aus unserem Gesetz auf folgende Weise:

1) Krystalle mit drei senkrecht zu einander stehenden Haupt-Symmetrieebenen, folglich mit drei gleichwerthigen Hauptaxen. Die Elasticität dieser Krystalle muss in je zwei Richtungen, welche zu einer Symmetrieebene symmetrisch liegen, sowie in allen drei Hauptaxen gleich, kann aber verschieden sein in zwei nicht symmetrisch liegenden Richtungen. Das Gleiche ist mit der Cohäsion der Fall; hat diese in einer Richtung ein Minimum, findet also senkrecht dazu Spaltbarkeit statt, so muss sie genau das gleiche Minimum auch in allen denjenigen Richtungen zeigen, welche in Bezug auf die drei Haupt-Symmetrieebenen symmetrisch zu jener ersten liegen; es kann also ein solcher Krystall niemals nur eine Spaltungsrichtung haben. Ist z. B. eine Hauptaxe ein Minimum der Cohäsion, spaltet der Krystall also nach der dazu normalen Haupt-Symmetrieebene, so müssen auch die beiden anderen Hauptaxen solche Minima sein, es muss auch nach den beiden anderen gleichwerthigen Symmetrieebenen Spaltbarkeit stattfinden. Die optische Elasticitätsfläche muss durch die drei Symmetrieebenen in gleiche und entgegengesetzte Hälften getheilt werden, und diese müssen in allen drei Fällen dieselben sein; ihre drei Axen, die Durchschnitte ihrer Symmetrieebenen, welche mit den krystallographischen zusammenfallen müssen, sind in Folge dessen gleich. Allen diesen Bedingungen kann unter den drei Arten von Elasticitätsflächen, welche wir an den Krystallen kennen lernten, nur eine, die der optisch isotropen Körper, deren Gestalt eine Kugel ist, genügen; die optische Elasticität und folglich die Geschwindigkeit des Lichtes ist also bei diesen Krystallen nach allen Richtungen gleich; dieselben sind einfach brechend. Das Gleiche muss alsdann auch für die Strahlen der Wärme gelten. Wir sahen im I. Abschnitt, dass, wenn in einem homogenen Krystall nach drei auf einander senkrechten Richtungen die Wärmeleitung, die Ausdehnung durch die Wärme, die elektrischen und magnetischen Eigenschaften gleich sind, sie es in allen Richtungen sind. Wegen der krystallographischen Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen ist die Gleichheit jener Eigenschaften in diesen drei Richtungen, folglich auch in allen anderen, nothwendig. Aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie folgt also: die Krystalle mit drei gleichwerthigen Hauptaxen sind diejenigen der 1. Abtheilung in physikalischer Beziehung (die einfach brechenden; vergl. S. 185).

2) Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene, also mit **einer** Hauptaxe: Die Elasticität muss nicht nur gleich sein in zwei

zur Haupt-Symmetrieebene symmetrischen Richtungen (kann aber verschieden sein in verschiedenen, mit der Hauptaxe gleichen Winkel bildenden), sondern muss auch gleich sein in mehreren Richtungen innerhalb der Haupt-Symmetrieebene, nämlich den ihr parallelen gleichwerthigen Symmetrieaxen; wie diese jedoch liegen, hängt von der Lage der sonst noch vorhandenen gewöhnlichen Symmetrieebenen ab. Die Cohäsion kann ein Minimum haben in der Richtung der Hauptaxe; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach der Haupt-Symmetrieebene und nach keiner andern in gleicher Vollkommenheit. Findet aber ein Minimum der Cohäsion in anderer Richtung statt, so erfordert dieses ein gleiches in der zur Haupt-Symmetrieebene — und, da diese Krystalle stets noch andere Symmetrieebenen haben, gleiche in den zu diesen — symmetrisch gelegenen Richtungen. Die optische Elasticitätsfläche muss symmetrisch zur Haupt-Symmetrieebene sein, ihr Durchschnitt mit dieser muss aber die Gestalt eines Kreises haben, da in dieser Ebene mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen existiren, in welchen demnach auch die optische Elasticität gleich sein muss. Dagegen darf die Elasticitätsfläche nach keiner anderen Ebene einen kreisförmigen Durchschnitt zeigen, weil keine weitere Haupt-Symmetrieebene vorhanden ist. Diesen Bedingungen genügt nur die Elasticitätsfläche der einaxigen Krystalle, und nur in dem Falle, dass die optische Axe mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt. Alsdann bildet die Haupt-Symmetrieebene den Kreisschnitt der Fläche und theilt sie auch symmetrisch. Die optische Elasticitätsfläche ist ausserdem noch symmetrisch zu allen Ebenen, welche einander in der Axe schneiden (ihren Hauptschnitten), aber zu keiner anderen Ebene, also können bei den einaxigen Krystallen ausser der Haupt-Symmetrieebene nur noch solche Symmetrieebenen vorkommen, welche der Axe parallel sind. In der That giebt es bei den Krystallen mit einer Hauptaxe nur noch solche, welche normal zur Haupt-Symmetrieebene stehen. Was für die Strahlen des Lichtes gilt, findet auch für diejenigen der Wärme statt. Die Ausdehnung durch erhöhte Temperatur muss gleich sein in allen Richtungen parallel der Haupt-Symmetrieebene und von dieser Ebene aus nach beiden Seiten symmetrisch zu- oder abnehmen, also muss die thermische Axe der Hauptaxe ebenfalls parallel sein. Die magnetischen oder diamagnetischen Eigenschaften müssen ihr Minimum oder ihr Maximum haben in der Richtung der Hauptaxe, und ihr Maximum, resp. Minimum parallel der Haupt-Symmetrieebene. Wir haben also aus dem allgemeinen Gesetz des Zusammenhanges zwischen Krystallform und physikalischen Eigenschaften zu schliessen, dass die Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene die 2. Abtheilung in physikalischer Beziehung (s. S. 185) bilden, und dass ihre physikalische Hauptaxe zusammenfällt mit ihrer krystallographischen.

3) Krystalle ohne Haupt-Symmetrieebene. Wir haben bei den beiden ersten Klassen von Krystallen gesehen, dass einer Haupt-Symmetrieebene stets ein Kreisschnitt der optischen Elasticitätsfläche

entspricht. Es lässt sich dieses aus folgenden Betrachtungen allgemein beweisen: Eine Haupt-Symmetrieebene muss nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie zugleich eine Symmetrieebene der Elasticitätsfläche sein; nehmen wir für diese den allgemeinsten Fall, dass ihre drei Axen, die Durchschnitte ihrer drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen, ungleich sind (das ist der Fall bei der Elasticitätsfläche der zweiaxigen Krystalle), so bildet jede krystallographische Symmetrieebene, weil sie mit einer solchen der Elasticitätsfläche zusammenfällt, mit ihr einen Durchschnitt, dessen Gestalt eine Ellipse ist, deren grosse und kleine Axe sie symmetrisch theilen, weil sie zugleich die Durchschnittsrichtungen mit den beiden anderen Symmetrieebenen der krummen Oberfläche bilden. Aus diesem Grunde fallen sie zusammen mit den beiden Symmetrieaxen, welche in der ersterwähnten krystallographischen Symmetrieebene liegen; ist diese nun eine Haupt-Symmetrieebene, d. h. sind die beiden in ihr liegenden Symmetrieaxen gleichwerthig, so müssen die grosse und kleine Axe jener Curve gleich werden, während sie nach beiden symmetrisch bleiben muss. Dies ist nur möglich, wenn sie in einen Kreis übergeht. Da sich die Ausdehnung durch die Wärme, die Leitung der Wärme u. a. physikalische Eigenschaften in ähnlicher Weise ändern, so ist auch auf diese der analoge Schluss anzuwenden, so dass nur aus dem empirischen Gesetz, welches wir diesen Betrachtungen zu Grunde gelegt haben, folgt: Alle Richtungen eines Krystalls, welche einer Haupt-Symmetrieebene desselben parallel gehen, haben gleiche Lichtgeschwindigkeit für jede einzelne Farbe, gleiche Wärmeleitungsfähigkeit, gleiche Ausdehnung durch die Wärme, gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen und gleichen Para- oder Diamagnetismus.

Die Krystalle ohne Haupt-Symmetrieebene können somit keine Ebene besitzen, in denen für die angeführten physikalischen Eigenschaften Gleichheit nach allen Richtungen existirt. Alsdann müssen dieselben die Klasse der optisch zweiaxigen bilden, denn nur bei diesen fehlt eine solche Ebene. Je nachdem die Krystalle keine, eine oder mehrere gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen, ist die gegenseitige Lage der Elasticitätsaxen für die Schwingungen des Lichtes, der Hauptrichtungen der thermischen Ausdehnung u. s. f. eine verschiedene oder die gleiche. Die mehrfachen, hier vorkommenden, von der Symmetrie der Krystalle abhängigen Verhältnisse werden wir bei der Betrachtung der einzelnen Abtheilungen der optisch zweiaxigen Krystalle kennen lernen.

§. 45. **Die Krystallsysteme.** Die theoretische Herleitung aller krystallonomisch möglichen Flächencomplexe lehrt, dass an denselben zweierlei Symmetrieebenen möglich sind, welche wir als gewöhnliche und als Haupt-Symmetrieebenen unterschieden haben. Die Symmetrie einer Krystallgestalt ist gegeben, wenn wir deren Symmetrieebenen ihrer Lage nach kennen und wissen, welcher Art dieselben sind. Je mehr solcher

vorhanden sind, desto höher ist der Grad der Symmetrie; von zwei Krystallformen, welche gleich viele Symmetrieebenen derselben Art besitzen, welche einander bei beiden unter denselben Winkeln schneiden, sagen wir, dass sie gleichen Grad der Symmetrie besitzen. Die Gesammtheit aller Krystallformen, welche gleichen Grad der Symmetrie besitzen, nennt man ein **Krystallsystem.**

Wie bereits bemerkt, ergiebt sich theoretisch aus dem Gesetze der Rationalität der Indices, dass unter allen krystallonomisch möglichen Flächencomplexen nur sechs Arten von Symmetrie vorkommen; es kann also nur sechs Krystallsysteme geben, und dies ist vollständig bestätigt worden durch die Erfahrung, indem man bis jetzt wohl Krystalle aller jener sechs Arten der Symmetrie, aber noch niemals einen gefunden hat, der nicht einem der sechs Krystallsysteme hinsichtlich seiner Symmetrie angehört hätte. Mehrere Krystallsysteme stimmen mit einander überein in Bezug auf das Vorhandensein oder Fehlen von Haupt-Symmetrieebenen und unterscheiden sich nur durch die gewöhnlichen; diese bilden dann eine näher zusammengehörige Gruppe, und solcher Hauptabtheilungen giebt es, wie wir im vor. § gesehen haben, drei, welche genau den drei physikalischen Abtheilungen der Krystalle entsprechen. Ebenso wenig, wie es zwischen diesen Uebergänge giebt, so giebt es auch keine solchen zwischen den verschiedenen Krystallsystemen, welche einer Hauptabtheilung angehören, wie dies bei der speciellen Betrachtung derselben nachgewiesen werden wird. Folgendes sind nun die sechs Krystallsysteme, geordnet nach dem Grade ihrer Symmetrie:

I. 1) Die Krystalle mit drei zu einander senkrechten Haupt-Symmetrieebenen bilden nur ein einziges Krystallsystem, welches, weil es den höchstmöglichen Grad von Symmetrie darstellt, das reguläre genannt wird, und besitzen ausserdem noch sechs, einander unter 60° durchschneidende Symmetrieebenen.

II. Die Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene zerfallen in zwei Systeme:

2) Das hexagonale, so genannt, weil die Haupt-Symmetrieebene die Formen in hexagonalen Umrissfiguren schneidet, welche entweder gleichwinkelige Sechsecke oder einfach davon abzuleitende Polygone sind. Die hexagonalen Krystalle besitzen ausser der Haupt-Symmetrieebene noch sechs zu jener normale, einander in der Hauptaxe unter Winkeln von 30° durchschneidende Symmetrieebenen.

Das 3. System heisst das tetragonale, weil seine Haupt-Symmetrieschnitte sämmtlich tetragonale, d. h. rechtwinkelige Vierecke oder davon abgeleitete Figuren sind. Die Krystalle desselben haben ausser der Haupt-Symmetrieebene noch vier andere, zu jener normal und einander (in der Hauptaxe) unter Winkeln von 45° schneidend.

III. Die Krystalle ohne Haupt-Symmetrieebene zerfallen in drei Systeme:

4) Das rhombische mit drei auf einander senkrechten Symmetrieebenen; der Name kommt daher, dass die Symmetrieschnitte aller Formen sämmtlich die Gestalt von Rhomben besitzen.

5) Das monosymmetrische*) Krystallsystem, der Inbegriff aller Formen, welche nur eine einzige Symmetrieebene haben.

6) Das asymmetrische*) System, d. h. die Krystalle ohne Symmetrieebene.

Die folgende Tabelle wird am leichtesten eine Uebersicht über die Eintheilung der Krystalle in geometrischer und physikalischer Beziehung geben:

Geometr. Abth.	*Physikal. Abth.*	*Zahl und Art der Symmetrieebenen:*	*Krystallsystem:*
I. Kr. m. 3 Hauptaxen	I. Einfachbrechende Krystalle	3 Hauptsymmetrieebenen unter 90°, 6 Symmetrieebenen unter 60°.	1) Reguläres Syst.
II. Kr. mit 1 Hauptaxe	II. Optisch einaxige Krystalle	1 Hauptsymmetrieebene, 6 Symmetrieebenen unter 30°.	2) Hexagonales Syst.
		1 Hauptsymmetrieebene, 4 Symmetrieebenen unter 45°.	3) Tetragonales Syst.
III. Kr. ohne Hauptaxe	III. Optisch zweiaxige Krystalle	3 Symmetrieebenen unter 90°.	4) Rhombisches Syst.
		1 Symmetrieebene.	5) Monosymm. Syst.
		Keine Symmetrieeb.	6) Asymmetr. Syst.

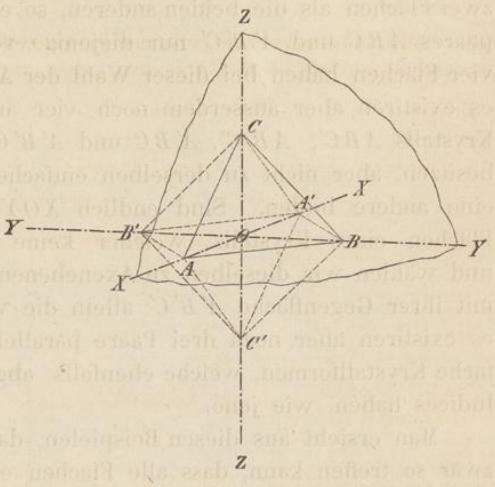
§. 46. **Einfache Krystallformen und Combinationen. Krystallreihe.** Ehe wir zur speciellen Betrachtung der einzelnen, scharf von einander getrennten Klassen der Krystalle übergehen, sind noch einige allgemeine Verhältnisse zu erläutern.

Bei denjenigen Krystallen, welche eine oder mehrere Symmetriebenen haben, erfordert die Existenz einer beliebigen Fläche (mit ihrer parallelen Gegenfläche, welche mit ihr als krystallonomisch ident betrachtet werden kann) diejenige einer oder mehrerer, welche in Bezug auf jene Ebenen symmetrisch zur ersten liegen. Nur durch die Coëxistenz dieser Flächen ist eben die Symmetrie der Krystalle erfüllt. Betrachten wir z. B. einen

*) Die älteren Namen »monoklinisch« und »triklinisch« für das fünfte und sechste System sind nicht, wie die übrigen, auf die Gestalt der Symmetrieschnitte, also auf die Symmetrie, als das eigentliche Wesen des Krystallsystems, gegründet, sondern auf den rein willkürlichen Gebrauch, bei der Berechnung der Formen und Ableitung derselben von einer Grundform, drei Kanten als Krystallaxen zu Grunde zu legen, welche im monosymmetrischen System einen schiefen und zwei rechte Winkel bilden, im asymmetrischen natürlich drei schiefe Winkel bilden müssen.

Krystall mit drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen XOY, XOZ, YOZ Fig. 125, und sei ABC irgend eine Fläche desselben, so erfordert die Symmetrie nach der Ebene XOY die Existenz einer gleich geneigten ABC' auf der anderen Seite jener Symmetriebene; die Symmetrie nach der Ebene XOZ erfordert ebenso zwei weitere Flächen $AB'C$ und $AB'C'$, symmetrisch liegend zu ABC und ABC' in Bezug auf XOZ; endlich erfordert die Symmetrie nach YOZ zu allen vier bisher genannten Flächen vier symmetrisch in Bezug auf die Ebene YOZ liegende Flächen auf der hinteren Seite des Krystalls, nämlich $A'BC$, $A'BC'$, $A'B'C$, $A'B'C'$. Bei dem vorliegenden Grade der Symmetrie sind es also acht Flächen, welche vermöge desselben einander gegenseitig bedingen. Wäre nur eine Symmetrieebene vorhanden, so würde die Existenz irgend einer gegen dieselbe geneigten Krystallfläche nur diejenige einer zweiten, mit derselben Neigung auf der anderen Seite der Symmetrieebene liegenden Fläche erfordern, und weiter keiner. Ist endlich gar keine Symmetrieebene vorhanden, so bedingt keine Fläche ausser ihrer parallelen Gegenfläche die Existenz einer andern, und die gegenseitige Abhängigkeit der Flächen besteht nur noch darin, dass sie sämmtlich dem Gesetz der Rationalität der Indices genügen.

Fig. 125.



Die Gesammtheit aller der Flächen, deren Auftreten vermöge der Symmetrie des Krystalles durch die Existenz irgend einer derselben bedingt wird, nennt man eine einfache Krystallform. So bilden also die acht, aus vier parallelen Paaren bestehenden Flächen ABC u. s. f. Fig. 125 eine einfache Form, weil jede derselben wegen der drei normalen Symmetrieebenen die Existenz aller übriger, aber weiter keiner, erfordert. So bilden ferner in dem Falle, dass nur eine Symmetrieebene vorhanden ist, schon zwei Paare paralleler Flächen mit gleicher Neigung gegen die Symmetrieebene eine einfache Krystallform. Ist endlich keine Symmetrieebene da, so wird die vollständige einfache Form schon gebildet von jeder einzelnen Fläche mit ihrer parallelen Gegenfläche.

Man sieht nun leicht, dass die acht Flächen ABC u. s. f. Fig. 125, wenn man die drei Symmetrieaxen zu Axen im Sinne des §. 40, die drei Symmetrieebenen also zu Axenebenen wählt, sämmtlich gleich grosse Para-

meter besitzen, so dass sie also, wenn sie auf irgend eine andere Fläche als Grundform bezogen werden, sämmtlich gleiche Indices (abgesehen vom Vorzeichen) erhalten. Wenn in Fig. 125 nur die Ebene XOZ eine Symmetrieebene ist, XOY und XOZ dagegen zwei beliebige Krystallflächen, welche einander in der Symmetrieaxe OY (normal zu XOZ) schneiden, und wir wählen wieder die Symmetrieebene als eine Axenebene, die erwähnten zwei Flächen als die beiden anderen, so erfordert die Existenz des Flächenpaares ABC und $A'B'C'$ nur diejenige von $AB'C$ und $A'BC'$, und diese vier Flächen haben bei dieser Wahl der Axen ebenfalls gleiche Indices; es existiren aber ausserdem noch vier andere mögliche Flächen desselben Krystalls ABC', $AB'C'$, $A'BC$ und $A'B'C$, welche die gleichen Indices besitzen, aber nicht zu derselben einfachen Form gehören, sondern für sich eine andere bilden. Sind endlich XOY, XOZ und YOZ drei beliebige Flächen eines Krystalls, welcher keine einzige Symmetrieebene besitzt, und wählen wir dieselben zu Axenebenen, so bildet, wie wir sahen, ABC mit ihrer Gegenfläche $A'B'C'$ allein die vollständige einfache Krystallform; es existiren aber noch drei Paare paralleler Flächen, also drei andere einfache Krystallformen, welche ebenfalls, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben Indices haben, wie jene.

Man ersieht aus diesen Beispielen, dass man die Wahl der Axenebenen zwar so treffen kann, dass alle Flächen einer einfachen Form die gleichen Indices erhalten, dass aber nicht immer die Gesammtheit aller Flächen mit gleichen Indices auch eine einzige einfache Krystallform bildet, sondern dieselben oft mehreren einfachen Formen angehören können. Da nun ausserdem auch noch die Wahl der Axenebenen eine ganz willkürliche ist, so darf man in keinem Falle die »einfache Form« definiren als den Inbegriff aller Flächen mit gleichen Indices, sondern nur als denjenigen aller durch die Symmetrie einander gegenseitig bedingender Flächen. Da man zu Axenebenen jede beliebige drei Flächen eines Krystalls wählen kann, und doch stets rationale Indices für alle übrigen Flächen erhält (Grundgesetz der Krystallographie, §. 40), so sind vielmehr bei beliebiger Wahl der Axenebenen die Indices der verschiedenen Flächen einer einfachen Form im Allgemeinen verschieden, und es bedarf einer ganz bestimmten Wahl der Axenebenen und somit der Axen, um sie gleich zu erhalten. Es ist nun der Einfachheit wegen allgemein üblich, die Axenebenen so auszuwählen, dass die Parameterlängen aller Flächen einer jeden einfachen Form dieselben werden, und wir werden bei der Betrachtung der einzelnen Formen demselben Grundsatze folgen, dürfen aber niemals dabei vergessen, dass diese Wahl ganz willkürlich ist, dass sie nicht aus theoretischen, sondern nur aus praktischen Gründen geschieht, weil dadurch das Verständniss der Formen und deren Berechnung erleichtert und vereinfacht werden.

Nur solche einfache Formen können allein die Umgrenzung eines vollständig ausgebildeten Krystalles bilden, welche für sich überhaupt einen

Raum nach allen Seiten umschliessen können. Alle andern können nur zu mehreren an einem Krystall auftreten. Eine Krystallform, welche aus den Flächen mehrerer einfacher Formen zusammengesetzt ist, nennt man eine Combination, und unterscheidet zwei-, drei- und mehrzählige Combinationen, welche aus zwei, drei oder mehr einfachen Formen bestehen*). Die Durchschnittsrichtungen zweier Flächen, welche zwei verschiedenen einfachen Formen angehören, heissen Combinationskanten.

Aus dem Gesetz der Rationalität der Indices folgt unmittelbar, dass nur solche einfache Formen mit einander combinirt erscheinen können, deren entsprechende Parameter in rationalem Verhältniss zu einander stehen. Bei einem bestimmten Stoffe sind deren unendlich viele theoretisch möglich, von denen indess bei den allermeisten Körpern nur die mit den einfachsten Indices wirklich vorkommen, während bei denjenigen, deren Krystalle viele einfache Formen zu zeigen pflegen, natürlich auch solche mit weniger einfachen Indices sich finden, aber im Durchschnitt um so seltener, je weniger einfach diese Zahlen sind**). Die Gesammtheit aller an einem Körper möglicher, einfacher Formen, also aller, welche mit einander combinirt auftreten können, nennt man die Krystallreihe desselben. An manchen Substanzen bilden sich, selbst wenn sie unter sehr abweichenden äusseren Umständen zur Krystallisation gelangen, stets dieselben einfachen Formen aus, während andere bei geringer Verschiedenheit der Bildungszustände verschiedene Formen zeigen, ein Umstand, der zuweilen die Feststellung der Zugehörigkeit mehrerer Krystallisationen einer Substanz zu einer Krystallreihe, also der Identität der Krystallform, erschwert. Da aber durch die Kenntniss der Elemente eines Krystalls die ganze Krystallreihe bestimmt ist, so muss es als ein Umstand von untergeordneter Wichtigkeit angesehen werden, welche von den möglichen einfachen Formen nun wirklich an den Krystallen des Körpers auftreten. Die Auffindung neuer einfacher Formen an den Krystallen eines Körpers, dessen Krystallform bereits bekannt, ist demnach in rein krystallographischer Beziehung nur insofern von Interesse, als es sich darum

*) Will man an Modellen zweier einfacher, combinationsfähiger Formen sich davon Rechenschaft geben, in welcher Weise die Flächen der einen an der anderen auftreten müssen, so hat man beide so neben einander zu halten, dass die zu Axen gewählten Richtungen, folglich auch alle Symmetrieebenen, bei beiden genau parallel sind, und alsdann die Flächen der ersteren sich parallel verschoben zu denken, bis sie die der andern schneiden. Alsdann fallen die Axen für beide zusammen, und die Combination besteht, wie die einfachen, sie zusammensetzenden Formen, nur aus Flächen, welche dem Gesetze der Rationalität der Indices entsprechen.

**) Selbstverständlich hängt der Zahlenwerth derselben ganz von der Wahl der Grundform ab, und es empfiehlt sich daher aus praktischen Gründen, dieselbe so zu treffen, dass die Indices der beobachteten Formen möglichst einfach werden, ohne dass indess dieser Wahl in rein krystallographischer Hinsicht eine theoretische Wichtigkeit beizulegen ist.

handelt, die Abhängigkeit des Auftretens gewisser Formen von den Umständen bei der Bildung des Krystalls zu erforschen.

§. 47. **Holoëdrie und Hemiëdrie. Hemimorphie.** Es ist soeben erwähnt worden, dass es im Allgemeinen von den äusseren Umständen während der Krystallisation abhängt, welche von den einfachen Formen einer Krystallreihe sich ausbilden. Die verschiedenen einfachen Formen einer und derselben Krystallreihe sind demnach hinsichtlich ihres Auftretens von einander völlig unabhängig. Es giebt nun aber eine Anzahl Substanzen, bei denen diese gegenseitige Unabhängigkeit des Auftretens auch stattfindet zwischen den beiden Hälften einer und derselben einfachen Form, welche hierdurch ganz in das Verhältniss zu einander treten, in welchem zwei verschiedene einfache Formen einer Krystallreihe stehen, welche sich durch Auftreten oder Fehlen*), Vorherrschen oder Unterordnung in den Combinationen, Beschaffenheit der Flächen u. s. f. unterscheiden können. Diese Erscheinung wird nur an solchen Krystallen beobachtet, welche mehrere Symmetrieebenen besitzen, d. h. nur innerhalb der ersten vier Krystallsysteme, und die Hälfte der Flächen einer jeden einfachen Form erscheint dabei stets nach einer bestimmten Regel ausgewählt, welche sich folgendermassen aussprechen lässt:

> Denke man sich die Form durch Symmetrieebenen in eine Anzahl Theile zerlegt, welche sämmtlich vollkommen congruent sind, d. h. von denen jeder mit jedem anderen durch Drehung zur vollständigen Deckung gebracht werden kann — so wird die halbe Anzahl dieser Theile so ausgewählt, dass stets die beiden Theile, welche in Bezug auf eine zur Zerlegung des Ganzen benutzte Symmetrieebene zu einander symmetrisch liegen, verschiedenen Hälften angehören.

Seien alle Flächen der einfachen Form, wie es ihrem geometrischen Ideale entspricht, gleichweit von dem Mittelpunkte, in welchem sich alle Symmetrieaxen der Form schneiden, entfernt gedacht, so bildet die nach der angegebenen Regel ausgewählte Hälfte der Flächen, wenn sie allein vorhanden ist, eine Form, welche so beschaffen ist, dass jede Symmetrieaxe auf beiden Seiten vom Mittelpunkte in gleichen Abständen von gleich vielen Flächen, welche mit einander und mit der Symmetrieaxe beiderseits gleiche Winkel einschliessen, geschnitten wird; sind mehrere gleich-

*) In gewissen Fällen schliessen die beiden Hälften einander sogar aus, wenn nämlich mit dem Auftreten der einen und der andern entgegengesetzte physikalische Eigenschaften des Krystalls gesetzmässig verbunden sind. Ist dieses jedoch nicht der Fall, so ist a priori zu schliessen, dass die beiden Hälftgestalten einer Form mit sehr einfachen Zahlenwerthen der Indices ungleich häufiger an einem Krystall zusammen auftreten werden, als diejenigen einer Form mit complicirten Indices; denn die letzteren sind an sich weit seltener, und somit die Wahrscheinlichkeit, dass beide, in ihrem Auftreten von einander ganz unabhängige, Hälften zusammen vorkommen, noch weit kleiner (das Quadrat der ersteren). In der That wird dieser Schluss durch die Erfahrung bestätigt.

werthige Symmetrieaxen vorhanden, so zeigt die Form das gleiche Verhalten zu jeder derselben; ferner besitzen alle Flächen gleiche Umrissfigur, wie es unter gleichen Bedingungen auch bei der vollständigen Form der Fall ist; endlich: besitzt letztere die Eigenschaft, den Raum vollständig zu umschliessen, so kommt diese Eigenschaft auch der aus der Hälfte der Flächen bestehenden Form zu; lässt die vollständige Form den Raum in einer Richtung offen, so ist das Gleiche auch bei der aus der Hälfte der Flächen nach obigem Gesetz gebildeten Form der Fall u. s. w.

Formen von der halben Flächenzahl aller möglicher, welche diesen Bedingungen genügen, nennt man hemiëdrische. Aus der Regel, nach welcher die Flächen einer solchen Form aus der Gesammtzahl der Flächen der vollständigen Form (welche im Gegensatz dazu holoëdrisch genannt wird) ausgewählt worden, geht hervor, dass die hemiëdrische Form nicht nach denjenigen Ebenen symmetrisch sein kann, nach denen die Zerlegung der holoëdrischen Form in gleiche Theile erfolgt, dass also eine hemiëdrische Form stets einen geringeren Grad von Symmetrie besitzen muss, als die zugehörige holoëdrische.

In den ersten drei Krystallsystemen, in denen mehr als drei Symmetrieebenen vorhanden sind, ist eine Zerlegung der holoëdrischen Formen in congruente Theile durch Symmetrieebenen auf mehrfache Weise möglich, daher in diesen mehrere Arten von Hemiëdrie existiren.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass eine Substanz entweder holoëdrisch krystallisirt und dann nur holoëdrische Formen zeigt, oder dass sie in einer bestimmten Art der Hemiëdrie krystallisirt, in welchem Falle sie niemals andere Formen zeigt, als solche, welche diesem bestimmten Gesetze der Hemiëdrie unterworfen sind. In jedem der ersten vier Krystallsysteme sind daher eine holoëdrische und eine oder mehrere hemiëdrische Abtheilungen zu unterscheiden, und jeder dieser Abtheilungen gehören bestimmte Substanzen an, niemals ein Körper zweien derselben zugleich.

In denjenigen Krystallsystemen, in welchen mehrere Arten von Hemiëdrie möglich sind, können die hemiëdrischen Formen einer Art noch einmal in zwei Hälften zerlegt werden nach dem Gesetz einer anderen Art der Hemiëdrie, und es können hierdurch Formen entstehen, welche nur ein Viertel von der Flächenzahl der holoëdrischen besitzen. Man nennt diese Erscheinung Tetartoëdrie, wenn die so entstehenden je vier viertelflächigen (tetartoëdrischen) Formen von einander unabhängig auftreten, wie die beiden Hälftgestalten in der Hemiëdrie.

Leitet man sämmtliche mögliche Tetartoëdrien der betreffenden Krystallsysteme dadurch her, dass man von den verschiedenen Arten der Hemiëdrie eines Systems immer je zwei mit einander combinirt anwendet, so ergeben sich einige Arten der Tetartoëdrie, bei denen die entstehenden Formen nicht mehr die Eigenschaft besitzen, dass jede Symmetrieaxe derselben auf beiden Seiten von gleich vielen Flächen gleichartig geschnitten wird. Solche Formen müssen daher an den beiden Enden der betreffenden

Symmetrieaxe (es kann dies sowohl für eine einzelne, als auch für mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen gelten) ungleich gestaltet sein.

Krystallformen, welche in Bezug auf eine Symmetrieaxe nach den beiden entgegengesetzten Seiten derselben ungleich beschaffen sind, bezeichnet man allgemein als hemimorphe, die Erscheinung eines solchen, bei einer Substanz gesetzmässig wiederkehrenden Gegensatzes als Hemimorphie. Diese Erscheinung tritt auch unabhängig von der Tetartoëdrie auf, indem holoëdrisch krystallisirende Substanzen nach einer Symmetrieaxe hemimorph ausgebildet erscheinen, d. h. indem ihre Formen nach der zu jener Axe senkrechten Symmetrieebene in zwei Hälften zerfallen, welche von einander ebenso unabhängige Gestalten darstellen, wie die beiden aus derselben holoëdrischen Form entstehenden hemiëdrischen. Dass alsdann die Hemimorphie eine von der Hemiëdrie verschiedene und unabhängige Eigenschaft des betreffenden Körpers ist, geht daraus hervor, dass auch hemiëdrische und selbst tetartoëdrische Substanzen gleichzeitig einer solchen Hemimorphie unterworfen sein können (s. Turmalin, überjodsaures Natrium).

Die Hemimorphie ist zugleich mit einem Gegensatze der beiden Seiten der betreffenden Symmetrieaxe (diese wird auch »Axe der Hemimorphie« genannt) in Bezug auf solche physikalische Eigenschaften verbunden, bei denen überhaupt ein Gegensatz zweier paralleler, aber entgegengesetzter Richtungen möglich ist. Eine solche Eigenschaft ist die Pyroëlektricität, die auf einer durch Temperaturänderung hervorgebrachten Trennung positiver und negativer Elektricität beruht, bei welcher die erstere nach der einen Seite, die zweite nach der andern Seite hin sich auf der Oberfläche des Krystalls anhäufen kann. In der That zeigen, wie bereits S. 181 angegeben, die hemimorphen Krystalle polare Pyroëlektricität, indem ein bestimmter Pol der Axe, nach welcher die Hemimorphie stattfindet, unter denselben Umständen immer eine bestimmte Art der Elektricität annimmt. Auch in Bezug auf die Wärmeleitung ist bei hemimorphen Krystallen eine Einseitigkeit nachgewiesen worden. Nach Thompson und Lodge findet nämlich beim Turmalin die Fortpflanzung der Wärme leichter in der Richtung von dem antilogen nach dem analogen Pol hin statt, als umgekehrt. Führt man den Sénarmont'schen Versuch (s. S. 159) auf einer der Hauptaxe parallelen Fläche eines Turmalinkrystalls aus, so erhält man eine unsymmetrische, nach dem analogen Pol hin von der Zuführungsstelle der Wärme weiter abstehende Curve, welche aus zwei Halbellipsen mit gemeinsamer grosser Axe zusammengesetzt ist, deren kleine Halbaxen sich verhalten wie 1 : 1,3 (s. Zeitschr. f. Kryst. 4, 538).

Die Erscheinungen der Hemiëdrie, der Tetartoëdrie und der Hemimorphie haben das gemeinsam, dass der Grad der Symmetrie derjenigen Krystalle, welche den Gesetzen derselben unterworfen sind, ein geringerer ist, als bei den holoëdrischen Formen. Niemals wird aber durch diese Abnahme der Symmetrie diejenige eines andern Krystallsystems hervorgebracht,

insofern als die physikalischen Eigenschaften hierbei im Allgemeinen die gleichen bleiben. So existirt z. B. je eine Hemiëdrie und eine Tetartoëdrie des hexagonalen Krystallsystems, deren Formen keine Symmetrieebene besitzen; trotzdem gehören aber diese Formen nicht dem asymmetrischen Systeme an, denn die betreffenden Krystalle sind, wie alle hexagonalen, optisch einaxig, besitzen also eine physikalische Hauptaxe, welche den asymmetrischen Krystallen fehlt. Wenn somit auch die S. 222 gegebenen Definitionen der sechs Krystallsysteme in rein geometrischem Sinne streng genommen nur für deren holoëdrische Formen gelten, so können wir doch die Gesammtheit der Formen einer bestimmten Art von Hemiëdrie nicht als ein besonderes Krystallsystem bezeichnen, sondern müssen sie als eine Unterabtheilung desjenigen Systems ansehen, von dessen Formen sich die dahin gehörigen Gestalten ableiten.

Wie S. 190 Anm. angegeben, können aus dem Grundsatze, dass die Anordnung der Krystallmoleküle um jedes derselben herum die gleiche sein müsse, alle möglichen regelmässigen Punktsysteme abgeleitet werden. In dem a. a. O. citirten Werke von Sohnke wird nun gezeigt, dass dieselben Symmetrieverhältnisse, die sich bei den so theoretisch abgeleiteten regelmässigen Punktsystemen finden, auch die einzigen bei Krystallen vorkommenden sind. Man gelangt also auf diesem Wege zu denselben Krystallsystemen, welche aus dem Gesetze der Rationalität der Indices als nothwendig folgen (s. S. 213), und welche die Beobachtung an den Krystallen auch als die einzig vorhandenen kennen lehrt. Bei dieser Herleitung werden von Sohnke, nach dem Vorgange von Bravais, solche Richtungen, um welche man ein regelmässiges Punktsystem um einen gewissen Winkel drehen muss, damit jeder vorher mit einem Theilchen besetzt gewesene Punkt wieder mit einem Theilchen besetzt ist, als »Symmetrieaxe« bezeichnet, und in diesem Sinne (der von dem unsrigen verschieden ist, da derselbe auch Richtungen umfasst, zu denen keine Symmetrieebenen senkrecht stehen) durch ihre »Symmetrieaxen« die Krystallsysteme definirt. Diese Definition hat den theoretischen Vortheil, dass sie auch den hemiëdrischen und tetartoëdrischen Abtheilungen jedes Krystallsystems mit entspricht, und es zeigt sich hierbei, dass die Symmetrieverhältnisse aller bisher beobachteten Hemiëdrien und Tetartoëdrien sich unter den von Sohnke theoretisch gefundenen regelmässigen Punktsystemen wiederfinden. Was die Hemimorphie betrifft, so zeigen zwar gewisse unter den möglichen Punktsystemen Ungleichheit nach zwei entgegengesetzten Seiten derselben Richtung, aber diejenigen Fälle, in denen die Hemimorphie unabhängig von Hemiëdrie und Tetartoëdrie auftritt, sind nicht unter der Gesammtheit aller möglicher Punktsysteme vertreten. Um diese zu erklären, nimmt Sohnke daher an, dass die Hemimorphie in einer Verschiedenheit der Krystallmoleküle selbst nach den beiden entgegengesetzten Richtungen begründet sei, nicht in einer Ungleichheit ihrer Anordnung.

§. 48. **Regelmässige Verwachsungen der Krystalle. Pseudosymmetrie.** Wenn auf einem bereits vorhandenen Krystalle einer Substanz sich Theilchen einer andern absetzen, so kommt es vor, dass die von den oberflächlichen Theilchen des ersten Krystalls aus wirkenden anziehenden und abstossenden Kräfte die Art der Anlagerung der Theilchen der zweiten Substanz beeinflussen, und diese sich in einer bestimmten gesetzmässigen Orientirung auf jenem ablagern. Die zweite Substanz bildet alsdann Krystalle, welche sich in einer bestimmten Stellung zu demjenigen der ersten befinden. Solche Fälle beobachtet man mehrfach unter den Mineralien; z. B. giebt es Krystalle des hexagonalen Eisenoxyds, auf deren Hauptsymmetrieebene tetragonale Krystalle von Rutil so aufgewachsen sind, dass deren Hauptaxe je einer der gleichwerthigen Symmetrieaxen, welche in der Hauptsymmetrieebene des Eisenoxydkrystalls liegen, parallel geht.

Wenn bei einer dimorphen Substanz eine Umwandlung eines Krystalls der einen Modification in solche der andern stattfindet, so ist es sehr häufig, dass die neu entstehenden Krystalle sämmtlich eine parallele und zum ursprünglichen Krystall regelmässig orientirte Stellung annehmen. So lange nur erst ein Theil der Substanz umgewandelt ist, haben wir es also dann mit einer regelmässigen Verwachsung zweier dimorpher Substanzen zu thun.

Von grösserer Verbreitung und Wichtigkeit sind jedoch die regelmässigen Verwachsungen von Krystallen derselben Substanz, welche man Zwillings-, Drillings-... Viellings-Krystalle nennt, je nachdem sie von zwei, drei oder mehr Krystallen gebildet werden.

Wenn beim Wachsthum eines Krystalls seine Theilchen sich nach verschiedenen Richtungen in verschiedenen Abständen an einander lagern, wie es nothwendig der Fall sein muss, wenn dieselben eine regelmässige Lagerung im Raume besitzen sollen (vergl. S. 189), so ist dies nur dadurch möglich, dass die Theilchen nach verschiedenen Richtungen ungleiche anziehende Kräfte auf einander ausüben, dass es gewisse Richtungen in denselben giebt, in denen ihre anziehenden Kräfte wirken, und unter diesen eine oder mehrere Richtungen, in denen diese Kräfte am grössten sind. Die einfachste Gleichgewichtslage wird dann erreicht sein, wenn das entstandene regelmässige Molekularaggregat lediglich aus parallel orientirten Theilchen zusammengesetzt ist. Ausser der parallelen Orientirung sind aber noch andere Gleichgewichtslagen zwischen benachbarten Theilchen möglich: Denken wir uns statt der in Fig. 113 dargestellten regelmässigsten Art der Molekularaggregation den allgemeinsten Fall einer solchen, nämlich die Theilchen nach drei auf einander schiefwinkeligen Reihen geordnet, in deren jeder die Abstände andre sind, und denken wir uns ferner in diesen drei Richtungen die anziehenden Kräfte wirkend, so ist es klar, dass diese Kräfte in den drei Richtungen ungleich grosse sein müssen; dieselben mögen mit $a > b > c$ bezeichnet werden. Alle während des Wachsthums des Krystalls sich anlegenden Theilchen müssen nun, wenn die neu entstehenden Schichten den früheren gleich werden sollen, vor ihrer Fixirung

sich so orientiren, dass ihre Richtungen abc parallel den Richtungen abc der bereits fixirten Theilchen werden. Geht das Wachsthum des Krystalls in einer Lösung vor sich, in welcher natürlich die Theilchen sich in allen möglichen Orientirungen befinden, so hat jedes derselben dazu einen Widerstand zu überwinden, der um so grösser ist, je mehr die zur parallelen Orientirung desselben nöthige Drehung beträgt. Bei denjenigen, deren Orientirung am weitesten von der einfachsten Gleichgewichtslage entfernt ist, wird daher der Fall eintreten können, dass sie in einer andern, weniger einfachen, aber von ihrer zufälligen Orientirung weniger verschiedenen Gleichgewichtslage fixirt werden. Die nächst einfache Gleichgewichtslage ist nun offenbar diejenige, in welcher die beiden Richtungen der grössten Anziehung a und b den entsprechenden Richtungen bereits fixirter und sie anziehender Theilchen parallel werden, die dritte zur Ebene $a\,b$ schiefwinkelige Richtung c aber nicht mit der Richtung c der fixirten Theilchen zusammenfällt. Wir können die Stellung der neu angelagerten Theilchen alsdann so beschreiben, dass wir uns dieselben aus der mit den übrigen parallelen Orientirung um 180^0 gedreht denken um die Normale zu der ihnen gemeinschaftlichen Ebene $a\,b$; der wirkliche Vorgang ist natürlich der umgekehrte: Die Richtungen a und b sind bei der Anlagerung parallel geworden, die Theilchen haben sich aber nicht weit genug gedreht, als dass auch ihre Richtung c mit der entsprechenden der andern Theilchen hätte zusammenfallen können. Ist ein Theilchen nun in einer solchen weniger einfachen Gleichgewichtslage, welche wir als Zwillingsstellung bezeichnen wollen, fixirt, so kann es seinerseits wieder die Anlagerung neuer Theilchen derart beeinflussen, dass deren Orientirung der seinigen parallel wird. Alsdann bildet sich, von diesen Theilchen ausgehend, bei weiterem Wachsthum des Krystalls eine Molekularaggregation, welche sich zu derjenigen des übrigen Krystalls in Zwillingsstellung befindet.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass eine sogenannte Zwillingsbildung erfolgen müsse nach einer Ebene, parallel welcher die Theilchen des Krystalls maximale Anziehung auf einander ausüben. Dies wird aber offenbar besonders der Fall sein bei Spaltungsebenen, deren Normalen Richtungen kleinster Cohäsion sind, und hieraus erklärt sich jedenfalls das häufige Vorkommen von Zwillingsbildung nach Ebenen, welche Spaltungsflächen der Krystalle parallel gehen.

Aus den obigen Darlegungen folgt ferner, dass eine Zwillingsbildung um so leichter entstehen müsse, je grösseren Widerstand die Flüssigkeit, aus welcher die Theilchen des Krystalls sich absetzen, ihrer Drehung entgegensetzt. In der That hat O. Lehmann gefunden, dass gewisse Salze, welche, aus einer wässrigen Lösung krystallisirt, einfache Krystalle bilden, Zwillingsverwachsungen zeigen, sobald man sie aus zähen, z. B. durch Gummi verdickten Lösungen sich abscheiden lässt. Durch diese Beobachtung wird es vollkommen verständlich, warum bei den Mineralien Zwillingsbildungen so häufig sind (bei manchen derselben findet man sogar niemals

einfache Krystalle), denn diese haben sich offenbar in den meisten Fällen aus unreinen Lösungen oder, wie die Mineralien der vulkanischen Gesteine, aus zähem Schmelzfluss ausgeschieden. In einer Lösung (resp. Schmelzfluss), welche der Drehung der Theilchen einen grossen Widerstand entgegensetzt, muss ferner die Gelegenheit zur Zwillingsbildung offenbar am günstigsten sein im Beginne der Bildung eines Krystalls, während die ersten Theilchen noch im Begriffe sind, sich an einander zu lagern, also die orientirende Gesammtwirkung auf die später sich anlagernden Theilchen noch am kleinsten ist. Damit stimmt es vollkommen überein, dass bei der mikroskopischen Beobachtung eines in Zwillingen krystallisirenden Salzes schon jeder kleinste entstehende Krystall, sobald er in die Grenzen mikroskopischer Sichtbarkeit getreten ist, als Zwilling erscheint, dessen beide Krystalle ebenso fortwachsen, wie die beiden Hälften eines und desselben Krystalls, d. h. nur insoweit verschieden, als es der niemals ganz gleichmässigen Zuführung des Materials von verschiedenen Seiten entspricht (vergl. S. 191). Es werden also die einzelnen einander entsprechenden Flächen der beiden regelmässig mit einander verwachsenen Krystalle eines solchen Zwillings niemals genau gleich gross sein können, ebenso wenig, wie die einander entsprechenden Flächen auf beiden Seiten eines einfachen Krystalls, aber stets werden die beiden Krystalle, da ihr Wachsthum unter im Allgemeinen gleichen Umständen stattfindet, die gleiche einfache Form oder Combination zeigen.

In Folge dieser Formengleichheit können wir die geometrische Beschreibung eines solchen Zwillings immer in der Weise darstellen, dass wir von zwei Krystallen von gleicher Form und paralleler Orientirung den einen um die Normale zu einer Fläche um 180° gedreht denken; die in dieser gegenseitigen Stellung, welche deshalb auch »hemitrop« genannt wird, verbundenen Krystalle haben dann offenbar jene Krystallfläche gemeinsam, d. h. dieselbe ist in beiden parallel. Die Richtung, um welche wir uns einen Krystall gedreht zu denken haben, um ihn in die Zwillingsstellung zum zweiten zu bringen, nennt man die Zwillingsaxe, die dazu senkrechte Ebene, welche demnach bei der Drehung sich selbst parallel bleibt, die Zwillingsebene. Würde man als solche eine Symmetrieebene des Krystalls nehmen, also den einen der beiden Krystalle um eine Symmetrieaxe um 180° drehen, so würde derselbe wieder sich selbst congruent, also dem andern parallel werden, wir erhielten also keinen Zwilling, sondern eine Parallelverwachsung. In Folge dessen soll im Folgenden unter »Zwillingsebene« immer eine solche Fläche verstanden werden, welche nicht Symmetrieebene der mit einander verwachsenen Krystalle ist.

a) Bei der in den obigen Betrachtungen als Beispiel zu Grunde gelegten Molekularstructur ist offenbar die Zwillingsebene eine mögliche Krystallfläche*), die Zwillingsaxe die Normale einer solchen.

*) Gewöhnlich sind es die durch die Molekularstructur besonders bevorzugten

Die beiden Krystalle des Zwillings liegen alsdann zu einander symmetrisch in Bezug auf eine Krystallfläche derselben, und dies ist der einfachste und bei weitem häufigste Fall der regelmässigen Verwachsung zweier Krystalle derselben Substanz.

Weit seltner finden sich Zwillinge nach folgenden beiden Gesetzen:

b) Die Zwillingsaxe ist parallel einer möglichen Kante. Alsdann liegen die beiden Krystalle symmetrisch zu einer Ebene, welche zu einer möglichen Kante (oder Zone) senkrecht steht.

c) Die Zwillingsaxe liegt in einer möglichen Krystallfläche normal zu einer möglichen Kante. Alsdann sind die beiden Krystalle zu einander symmetrisch in Bezug auf eine Ebene, welche zu einer möglichen Krystallfläche senkrecht und einer möglichen Kante (Zone) parallel ist.

Die Zahl der Zwillinge nach den letztern beiden Gesetzen erfährt noch dadurch eine erhebliche Einschränkung, dass die Drehung nach einer dieser Regeln in denjenigen Fällen, in denen die Zwillingsebene zu einer Symmetrieebene senkrecht steht, zu dem gleichen Resultat führt, wie die Drehung nach dem ersten Gesetze; in Folge dessen hat man bisher, abgesehen von hemiëdrischen Krystallen, nur im asymmetrischen Systeme einige Fälle von Zwillingsverwachsungen beobachtet, welche nicht durch das erste Gesetz dargestellt werden können.

Die hemiëdrischen, tetartoëdrischen und hemimorphen Krystalle haben, wie im vor. § gezeigt wurde, einen geringeren Grad von Symmetrie, als die holoëdrischen; in Folge dessen können zwei derselben einen Zwilling bilden, indem sie symmetrisch zu einander in Bezug auf eine Ebene verwachsen, welche durch die Hemiëdrie, Tetartoëdrie oder Hemimorphie ihren Charakter als Symmetrieebene der Krystalle verloren hat. Durch die Zwillingsbildung nach einer solchen Fläche wird alsdann gleichsam die Symmetrie des holoëdrischen Krystalls wieder hergestellt, daher man diese Verwachsungen auch »Ergänzungszwillinge« genannt hat. Dieselben können durch Drehung des einen Krystalls nach dem ersten Gesetze (a) dargestellt werden, sobald die Form der Einzelkrystalle noch Symmetrieebenen besitzt. Ist dies nicht der Fall, d. h. zeigt nur der Zwilling Symmetrie, so kann der eine Krystall nicht durch Drehung mit dem andern zur Congruenz gebracht werden (s. die symmetrischen Zwillinge des Quarzes). Umgekehrt finden sich bei gewissen hemiëdrischen und tetartoëdrischen Krystallen, welche keine einzige Symmetrieebene mehr besitzen, auch solche regelmässige Verwachsungen, deren Zwillingsaxe eine mögliche Kante ist, bei denen aber die beiden Krystalle nach keiner Ebene zu einander symmetrisch liegen (ein derartiges Beispiel findet man ebenfalls weiterhin unter Quarz).

Von der Zwillingsebene, die in den meisten Fällen auch Symmetrieebene der Verwachsung ist, muss unterschieden werden die Verwach-

Flächen, welche also bei geeigneter Wahl der Axen besonders einfache Indices erhalten, nach denen die Zwillingsbildung erfolgt.

sungsfläche, d. h. die Fläche, in welcher die beiden Krystalle einander berühren. Diese hängt von dem zufälligen Wachsthum derselben ab und kann also einen ganz unregelmässigen Verlauf nehmen*); zuweilen grenzen die Krystalle auch mit einer ebenen Fläche aneinander, welche senkrecht zur Zwillingsebene steht, nicht selten aber auch mit der Zwillingsebene selbst, und diese letztere Ausbildung ist es, welche man, gleichsam als geometrisches Ideal, in den Modellen der Zwillinge darzustellen pflegt**).

Viele Zwillinge zeigen eine Aehnlichkeit der äusseren Form mit der eines einfachen Krystalls eines andern Systems von höherer Symmetrie, die oft eine so grosse ist, dass nur auf physikalischem Wege, besonders durch die verschiedene optische Orientirung der einzelnen Theile, erkannt werden kann, dass man es nicht mit einem einfachen Krystall, sondern mit einem zusammengesetzten Gebilde zu thun hat. Diese mit dem Namen Pseudosymmetrie***) bezeichnete Aehnlichkeit beruht darauf, dass auch die einfachen, solche Gebilde zusammensetzenden Krystalle eine »Grenzform« zeigen, d. h. Winkel besitzen, welche den charakteristischen Winkeln höher symmetrischer Systeme sehr nahe kommen; diese Annäherung ist nun keine zufällige, sondern die Folge davon, dass die Substanz der Dimorphie unterworfen ist. Die beiden Modificationen einer dimorphen Substanz haben nämlich im Allgemeinen sehr ähnliche Molekularstructur, also Krystallformen mit sehr ähnlichen Winkeln. Diejenige von beiden, welcher der geringere Grad der Symmetrie zukommt, besitzt nun häufig die Eigenschaft, solche regelmässige Verwachsungen zu zeigen, die anscheinend die Symmetrie der andern Modification besitzen. Oft sind dann die Differenzen der beiderlei Gestalten, der Verwachsungen der einen und der einfachen Krystalle der andern Modification, so gering, dass sie kaum oder nicht durch Winkelmessungen nachgewiesen werden können, und, wie oben erwähnt, ihre Unterscheidung nur auf physikalischem Wege möglich ist. Von besonderem physikalischen Interesse ist der Umstand, dass es gelang, manche solcher pseudosymmetrischer Gebilde durch Temperaturerhöhung in diejenige Form der andern Modification, welcher die ihrige so nahe steht, umzuwandeln (s. Boracit, schwefelsaures Kalium).

*) In diesem Falle würde die Berührungsfläche an einer Stelle für beide Theile des Zwillings im Allgemeinen verschiedene krystallographische Orientirung besitzen, die beiderseits angrenzenden Theile also bei Temperaturänderungen, falls es sich nicht um einfachbrechende Krystalle handelt, sich ungleich ausdehnen, was unzweifelhaft zu Spannungen, d. i. zu optischen Anomalien Anlass geben muss, wenn die Krystalle bei einer wesentlich von ihrer jetzigen abweichenden Temperatur entstanden.

**) Da so regelmässig ausgebildete Zwillinge, deren Zwillingsebene zugleich Verwachsungsebene ist, meist nach dieser Fläche besonders ausgedehnt sind, so stellt man sie im Modell so dar, dass man die Krystallform nach der Zwillingsebene halbirt und die eine Hälfte um 180^0 um die Zwillingsaxe dreht. Solchen Modellen stehen manche natürliche Zwillinge, z. B. von Spinell, in ihrer Ausbildung sehr nahe.

***) Tschermak hat dafür den Namen »Mimesie« (Nachahmung) vorgeschlagen und nennt »Pseudosymmetrie« die Erscheinung, dass einfache Krystalle einer Substanz eine Form besitzen, welche der eines andern Systems von höherer Symmetrie sehr nahe steht.

A. Krystalle mit drei Hauptaxen.

Die Krystalle dieser Art besitzen nach §. 45 sämmtlich den gleichen Grad der Symmetrie, bilden also nur ein Krystallsystem. Dieses ist:

I. Das reguläre Krystallsystem.

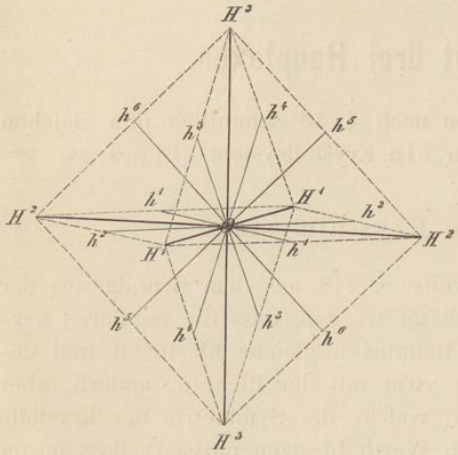
§. 49 **Einleitung.** Es ist bereits S. 218 aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie abgeleitet worden, dass die regulären Krystalle in ihren drei gleichwerthigen Hauptaxen gleiche Elasticität und Cohäsion besitzen, und dass sich diese zwar mit der Richtung ändern, aber stets in allen denjenigen Richtungen, welche der Symmetrie der Krystalle wegen gleichwerthig sind, denselben Werth besitzen müssen; dass ferner jeder reguläre Krystall, so lange er homogen ist, in allen Richtungen gleiche Lichtgeschwindigkeit besitzt, also einfachbrechend ist, dass derselbe nach allen Richtungen gleiches Wärmeleitungsvermögen, gleiche thermische Ausdehnung (daher die Winkel für alle Temperaturen denselben Werth haben), gleiche magnetische oder diamagnetische Eigenschaften u. s. f. besitzen muss; dass folglich die allgemeinen optischen, thermischen und magnetischen Eigenschaften aller regulärer Krystalle dieselben sind, wie bei den isotropen amorphen Körpern. Sie unterscheiden sich von diesen nur dadurch, dass sich ihre Elasticität und Cohäsion mit der Richtung ändert, während sie bei letzteren constant bleibt. Die Aenderung dieser Eigenschaften mit der Richtung in einem regulären Krystall findet aber stets so statt, wie es die geometrische Symmetrie erfordert.

Die holoëdrische Abtheilung des regulären Systems bildet die Gesammtheit aller einfacher Formen, welche drei auf einander senkrechte Haupt-Symmetrieebenen und ausserdem noch sechs gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen. Die Lage dieser neun Symmetrieebenen wird am leichtesten veranschaulicht*) durch die Richtung ihrer Normalen; in Fig. 126 (folg. S.) bedeuten H^1, H^2, H^3 die Normalen zu den

*) Der Anfänger kann sich die Anschauung dieser Verhältnisse wesentlich erleichtern durch ein leicht anzufertigendes Modell, in welchem die einzelnen Symmetrieebenen durch starkes Papier dargestellt sind, welches man am besten kreisförmig ausschneidet und dann in die einzelnen Segmente zerlegt, worauf diese in den richtigen Stellungen an einander gefügt werden.

drei Haupt-Symmetrieebenen, so dass H^1 normal zu derjenigen ist, in welcher H^2 und H^3 liegen, also kurz H^2OH^3, während H^1OH^2 und H^1OH^3 die beiden anderen Haupt-Symmetrieebenen sind. Von den Normalen zu den sechs übrigen Symmetrieebenen, h^1, h^2, h^3, h^4, h^5, h^6, liegen je zwei in einer Haupt-Symmetrieebene und halbiren den rechten Winkel der beiden in derselben liegenden Hauptaxen, bilden also mit einander ebenfalls einen rechten Winkel. Die beiden zu einem solchen Paar von Symmetrieaxen normalen Symmetrieebenen sind also ebenfalls senkrecht zu einander, während zwei solcher, deren Normalen in verschiedenen Haupt-Symmetrieebenen liegen, einander unter einem Winkel von 60° schneiden, wie weiterhin gezeigt werden soll. In jeder Hauptaxe schneiden einander demnach zwei Haupt-Symmetrieebenen und zwei gewöhnliche, jedes Paar unter 90°, eine der ersteren mit einer der letzteren unter 45°.

Fig. 126.



Die drei Hauptaxen sind gleichwerthig, d. h. können beliebig mit einander vertauscht werden, ohne dass sich dadurch die Form ändert. Der einfachste Fall einer Form, welche diese Bedingung erfüllt, ist offenbar derjenige einer Fläche, welche sämmtliche drei Hauptaxen in gleichem Abstande schneidet, nebst den sieben, durch die Symmetrie nach den drei Haupt-Symmetrieebenen erforderlichen*), Flächen, welche mit ihr die ganze einfache Form liefern, wie sie in Fig. 126 durch die punktirten Linien dargestellt ist. Diese Linien bezeichnen die Kanten dieser Form, des Oktaëders, welche sämmtlich gleiche Winkel haben und je zwei Hauptaxen unter 45° durchschneiden.

Jede der acht Flächen des Oktaëders schneidet die drei Hauptaxen in gleichem Abstande, alle müssen daher die gleichen Indices erhalten, wenn wir die Hauptaxen zu Axen, die drei Haupt-Symmetrieebenen also zu Axenebenen wählen. Obgleich wir bekanntlich jede beliebige drei Flächen eines Krystalls zu Axenebenen wählen können und doch für alle anderen rationale Indices erhalten, so wird doch die Betrachtung der Formen wesentlich erleichtert, wenn die Axenebenen so gewählt werden, dass alle Flächen einer jeden einfachen Form die gleichen Indices erhalten. Dies ist aber bei dem Oktaëder und, wie wir sehen werden, auch bei allen anderen

*) Vergl. S. 223 und Fig. 125.

regulären Formen, nur dann der Fall, wenn wir die drei Haupt-Symmetrieebenen zu Axenebenen machen. Für diese Wahl spricht noch ein weiterer sehr wichtiger Umstand, d. i. die weit grössere Einfachheit der Berechnungen, da wir, weil die Axenebenen alsdann normal zu einander stehen, fast immer nur rechtwinkelige sphärische Dreiecke zu berechnen haben. Ebenso beliebig, wie die Wahl der Axen, ist nach §. 40 auch die der Grundform, und es handelt sich auch hier wieder um den rein praktischen Gesichtspunkt grösster Einfachheit der Ableitungen. Fassen wir diesen ins Auge, so ist es klar, dass keine Form geeigneter sein wird, als Grundform zu dienen, als das Oktaëder, dessen Flächen die drei Hauptaxen in gleichen Abständen schneiden. Es sollen demnach im Folgenden alle Formen auf die drei Hauptaxen als Axen*) und auf eine Oktaëderfläche als Grundform bezogen werden. Alsdann sind die Elemente (vergl. S. 197) jedes regulären Krystalls gegeben durch die Grössen:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^0$$
$$a : b : c = 1 : 1 : 1$$

Diese Grössen sind sämmtlich durch die Symmetrie bestimmt und von der Natur des einzelnen Krystalls unabhängig, also bedarf es keiner Messung, um die Elemente eines regulären Krystalls zu bestimmen; dieselben sind durch die Erkennung seines Systems (z. B. auf optischem Wege) bereits gegeben, und werden, da die angegebene Wahl der Axen die ganz allgemein adoptirte ist, niemals besonders angeführt.

Nachdem so die Elemente gegeben sind, können die einzelnen Formen durch ihre Indices bezeichnet werden. Was zunächst das Oktaëder selbst betrifft, so haben seine acht Flächen offenbar folgende Symbole:

$$(111)\ (1\bar{1}1)\ (\bar{1}11)\ (\bar{1}\bar{1}1)$$
$$(11\bar{1})\ (1\bar{1}\bar{1})\ (\bar{1}1\bar{1})\ (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$$

wobei die hintere Hälfte der Axe H^1, die linke von H^2 und die untere von H^3 Fig. 126 als negative genommen worden sind. Der allgemeine Fall einer beliebigen anderen Fläche des regulären Systems ist ausgedrückt durch das Symbol (hkl), d. i. dasjenige einer Fläche, deren Parameter sämmtlich ungleich sind, aber, weil die Grundform gleiche Parameter hat, sich wie rationale Zahlen verhalten. Da die drei Axen beliebig vertauschbar sind, so liegen in dem vorderen Oktanten rechts oben, in welchem alle Parameter positiv sind, folgende Flächen der in Rede stehenden Form:

$$(hkl)\quad (khl)\quad (hlk)\quad (klh)\quad (lhk)\quad (lkh)$$

In dem links oben vorn befindlichen Oktanten liegen die Flächen:

$$(h\bar{k}l)\quad (k\bar{h}l)\quad (h\bar{l}k)\quad (k\bar{l}h)\quad (l\bar{h}k)\quad (l\bar{k}h)$$

u. s. f. in jedem der acht Oktanten sechs Flächen, so dass die vollflächige Form 48 Flächen besitzt. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn h, k, l von

*) Und sollen die Formen stets so gestellt werden, dass eine der drei Axen vertical und eine zweite horizontal auf den Beobachter zuläuft; dann ist die dritte quer gehende natürlich auch horizontal.

einander und von Null verschieden sind. Es giebt sechs verschiedene Specialfälle jenes allgemeinen Falles, in welchen die Flächenzahl eine eingeschränktere ist; wenn zwei der Indices gleich sind, deren Vertauschung also keine neue Fläche liefert, Flächenzahl = 24; hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der dritte Index grösser, 2) kleiner, als die beiden gleichen; 3) wenn einer der Indices = 0, je zwei Flächen, welche sich nur durch das Vorzeichen dieses Index unterscheiden, nur eine darstellen, Flächenzahl = 24; 4) wenn zwei Indices gleich, der dritte = 0, wobei je vier Flächen nur eine darstellen können, Flächenzahl = 12; 5) zwei Indices = 0, der dritte kann dann = 1 gesetzt werden, liefert die drei Axenebenen (001) (100) (010), Flächenzahl = 6; 6) alle Indices gleich, d. i. (111), das von uns zur Grundform gewählte Oktaëder mit der Flächenzahl 8. Inclusive des allgemeinen Falles (*hkl*) resultiren also sieben verschiedene Arten von Flächensymbolen, entsprechend ebenso vielen verschiedenen Arten von einfachen Formen. Da man von der Gestalt dieser Formen am leichtesten aus dem Parameterverhältniss ihrer Flächen eine Vorstellung gewinnt, so sollen dieselben zunächst aus dem Verhältniss ihrer Parameter hergeleitet werden, indem wir letztere als Vielfache der Parameter der Grundform betrachten.

§. 50. **Herleitung und Bezeichnung der regulären Krystallformen.** Da die Parameter der Grundform, des Oktaëders, sämmtlich gleich gross sind, so können wir das Verhältniss derselben setzen

$$= a : a : a.$$

I. Dasjenige einer Fläche, deren Parameter sämmtlich ungleich sind, ist demnach

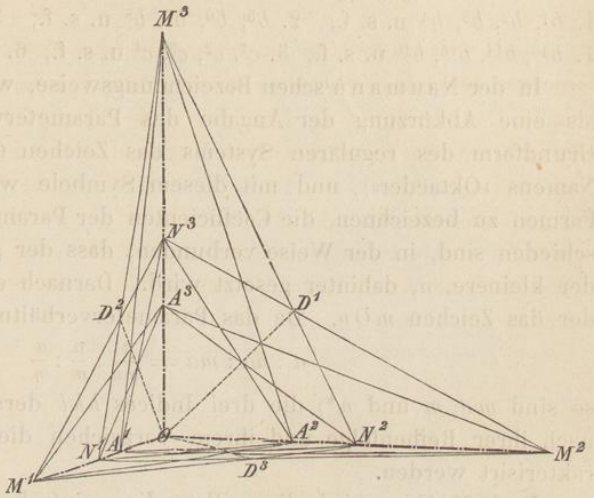
$$a : na : ma,$$

wo nach S. 198 die Coëfficienten n und m (im Allgemeinen einfache) rationale Zahlen sind, welche grösser als 1, da wir stets den kleinsten Parameter gleich der beliebigen Zahl a setzen wollen. Sei in Fig. 127*) $OA^1 = OA^2 = OA^3 = a$, und wählen wir z. B. $n = \frac{3}{2}$, $m = 3$, so ist die Ebene, welche die drei Axen in den Punkten $A^1N^2M^3$, schneidet, kurz: die Ebene $A^1N^2M^3$, eine Krystallfläche mit dem obigen Parameterverhältniss. Nun ist die Ebene, welche, normal zur Haupt-Symmetrieebene A^2OA^3, den Winkel der beiden anderen Axenebenen halbirt (sie ist bestimmt durch die beiden Geraden OA^1 und OD^1), ebenfalls eine Symmetrieebene der regulären Krystalle; die Symmetrie nach dieser fordert also die Existenz einer zweiten Fläche, welche in Bezug auf jene Ebene symmetrisch liegt zu $A^1N^2M^3$, dies ist die Fläche $A^1N^3M^2$, welche mit der vorigen die Punkte

*) Hier ist es für den Anfänger fast nothwendig, sich die Anschauung zu erleichtern durch ein Modell, bestehend in drei, einander rechtwinkelig durchkreuzenden Metallstäben, welche in bestimmten Abständen durchbohrt sind, um diese Punkte mittelst Fäden zu verbinden, wie die Punkte $A^1N^2M^3$ u. s. w. in Fig. 127 durch die feineren Geraden verbunden sind.

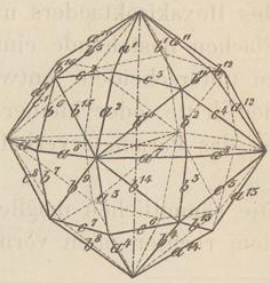
A^1 und D^1, also die Gerade zwischen beiden gemein hat. Ferner ist auch die Ebene A^2OD^2, welche den Winkel zwischen A^1OA^2 und A^3OA^2 halbirt, eine Symmetrieebene, also muss auch in Bezug auf diese eine zu $A^1N^2M^3$ symmetrische Fläche existiren; diese ist $A^3N^2M^1$. Endlich ist auch die den Winkel zwischen A^3OA^1 und A^3OA^2 halbirende Ebene eine Symmetrieebene, so dass durch die Existenz von $A^1N^2M^3$ auch diejenige der symmetrisch liegenden $A^2N^1M^3$ gegeben ist. $A^3N^2M^1$ erfordert ihrerseits wieder das Auftreten einer in Bezug auf die Ebene A^3OD^3 zu ihr symmetrisch liegenden Fläche $A^3N^1M^2$, und $A^2N^1M^3$ das einer Fläche $A^2N^3M^1$, welche in Bezug auf A^2OD^2 zu ihr symmetrisch liegt.

Fig. 127.



Hieraus ersieht man, dass allein in dem rechten oberen Oktanten der Vorderseite durch die Symmetrie sechs verschiedene Flächen erfordert werden, deren Schnittpunkte mit den drei Axen man erhält, wenn man die Längen a, na und ma auf den drei Hauptaxen aufträgt und dann alle möglichen Vertauschungen derselben vornimmt. Das Resultat ist also ganz dasselbe, welches uns im vorigen § die Vertauschung der Indices (hkl) geliefert hat. Wegen der Haupt-Symmetrieebene A^1OA^3 müssen in dem links oben anliegenden Oktanten sechs ganz gleich liegende Flächen vorhanden sein, zu diesen 12 weitere 12, symmetrisch zur horizontalen Haupt-Symmetrieebene gelegene, unten, endlich zu diesen 24 noch ebenso viele in Bezug auf die dritte Haupt-Symmetrieebene symmetrisch liegende auf der abgewandten Seite des Krystalls. Die vollständige einfache Form Fig. 128, deren Parameterverhältniss $a : na : ma$, hat somit 48 Flächen und heisst deshalb Achtundvierzigflächner oder Hexakisoktaëder. Da Fig. 128 diese Form, wie es weiterhin mit allen einfachen Formen geschehen soll, unter gleichem Abstand aller Flächenpaare darstellt, so zeigt dieselbe unmittelbar die Symmetrie nach den neun Symmetrieebenen. Die drei Haupt-Sym-

Fig. 128.



metrieebenen gehen durch folgende Kanten: Die 1. durch a^1, a^2, a^3, a^4 und die entsprechenden der abgewandten Seite, die 2. durch a^5,a^6,a^7,a^8 u. s. f., die 3. durch a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{14}. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen, durch deren jede der Achtundvierzigflächner ebenfalls in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt wird, gehen durch die Kanten 1. b^1, b^2, b^3, b^4 u. s. f., 2. b^5, b^6, b^7, b^8 u. s. f., 3. b^9, b^{10}, b^{11}, b^{12} u. s. f., 4. b^{13}, b^{14}, b^{15}, b^{16} u. s. f., 5. c^1, c^2, c^3, c^4 u. s. f., 6. c^5, c^6, c^7, c^8 u. s. f.

In der Naumann'schen Bezeichnungsweise, welche nichts Anderes ist, als eine Abkürzung der Angabe des Parameterverhältnisses, erhält die Grundform des regulären Systems das Zeichen O (Anfangsbuchstabe des Namens »Oktaëder«), und mit diesem Symbole werden, um die übrigen Formen zu bezeichnen, die Coëfficienten der Parameter, falls sie von 1 verschieden sind, in der Weise verbunden, dass der grössere, m, vor dasselbe, der kleinere, n, dahinter gesetzt wird. Darnach erhält das Hexakisoktaëder das Zeichen mOn. Da das Parameterverhältniss dieser Form

$$a : na : ma = \frac{a}{mn} : \frac{a}{m} : \frac{a}{n}$$

so sind mn, m und n*) die drei Indices hkl derselben, durch welche je nach ihrer Reihenfolge und ihrem Vorzeichen die einzelnen Flächen charakterisirt werden.

Nach Miller wird die vollständige einfache Form bezeichnet durch das Symbol irgend einer der zu ihr gehörigen Flächen, eingeschlossen in gebrochene Klammern**); demnach ist $\{hkl\}$ das Zeichen des Hexakisoktaëders, welches im Folgenden immer so geschrieben werden soll, dass unter h der grösste, unter l der kleinste der drei Zahlenwerthe verstanden wird.

II. Wir sahen, dass sämmtliche Flächen mit dem Parameterverhältniss $a : na : ma$ innerhalb eines Oktanten dadurch erhalten wurden, dass die Grössen a, na, ma auf je einer Axe aufgetragen und dann so oft, als es möglich ist, vertauscht wurden. In dem speciellen Falle nun, dass zwei der Parameter gleich gross sind, kann offenbar ihre Vertauschung mit einander keine neue Fläche mehr liefern, es wird also für je zwei Flächen des Hexakisoktaëders nur eine auftreten, d. h. wir erhalten eine aus 24 Flächen bestehende einfache Krystallform. Hierbei sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden: entweder sind die beiden gleichen Parameter grösser als der dritte, oder kleiner. Behandeln wir zunächst den ersten Fall; in diesem ist das Parameterverhältniss, da $m = n$,

$$= a : ma : ma.$$

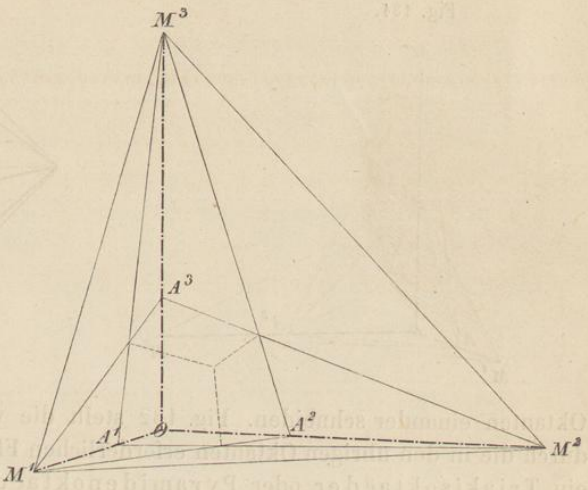
Die sämmtlichen möglichen Flächen dieser Form in einem Oktanten, z. B. dem rechten oben vorn, werden wir wieder am leichtesten mittelst eines

*) Diese Zahlen werden, wenn sie einen gemeinsamen Factor besitzen oder gebrochen sind, natürlich auf den einfachsten Ausdruck dreier ganzer Zahlen gebracht.

**) Vielfach bezeichnet man auch mit hkl, ohne Klammer, die einzelne Fläche und mit (hkl) die vollständige Form.

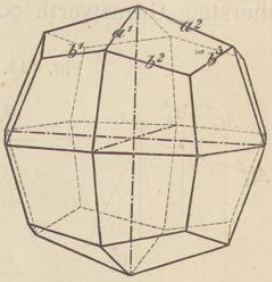
Axenmodelles finden, wie es Fig. 129, ganz entsprechend der Fig. 127, perspectivisch darstellt, in welcher aber nunmehr die Punkte N mit denen M zusammenfallen. In Folge dessen wird die erste Hauptaxe in A^1 nur von einer Fläche geschnitten, welche die beiden anderen Axen im m-fachen (in Fig. 129 ist $m = 3$) Abstand trifft; es ist dies $A^1 M^2 M^3$; durch A^2 geht nur die Fläche $A^2 M^1 M^3$ und durch A^3 nur $A^3 M^1 M^2$. Es können also in diesem Oktanten nur drei Flächen der Form, deren Parameterverhältniss $a : 3a : 3a$ ist, auftreten, deren Durchschnitts-Richtungen durch die punktirten Linien angegeben sind.

Fig. 129.



Wegen der Symmetrie nach den drei Haupt-Symmetrieebenen muss in allen acht Oktanten das Gleiche stattfinden, und somit eine Form resultiren, welche in Fig. 130 dargestellt ist und ein Ikositetraëder genannt wird. An dem Modell einer solchen Form wird man unschwer die Existenz der neun Symmetrieebenen constatiren können, von denen die Haupt-Symmetrieebenen die mit a bezeichneten Kanten, die anderen Symmetrieebenen die mit b bezeichneten Kanten halbiren.

Fig. 130.



Das Naumann'sche Zeichen der Ikositetraëder ist mOm. Da das Parameterverhältniss

$$a : ma : ma = \frac{a}{m} : \frac{a}{1} : \frac{a}{1}$$

so sind die drei Indices m, 1, 1, welche, auf den Ausdruck dreier einfacher ganzer Zahlen gebracht, für die ganze Form das Miller'sche Zeichen $\{hkk\}$ liefern; in diesem ist $h > k$ und $\frac{h}{k} = m$ des Naumann'schen Symbols.

III. In dem bereits erwähnten Falle, dass zwei Parameter gleich, aber kleiner als der dritte sind, ist deren Verhältniss:

$$a : a : ma.$$

Die Lage der möglichen Flächen einer solchen Krystallform, wenn z. B. $m = 2$ ist, wird in der bisherigen Weise gefunden, wie es Fig. 131 zeigt. Durch den Punkt M^1, dessen Abstand von der Mitte $= 2 \cdot OA^1$ ist, geht

nur eine Fläche, welche die beiden anderen Hauptaxen in gleichen Abständen ($OA^2 = OA^3 = OA^1$) durchschneidet, nämlich $M^1 A^2 A^3$, durch M^2 die Fläche $M^2 A^1 A^3$, endlich durch M^3 die Fläche $M^3 A^1 A^2$. Die punktirten Linien bezeichnen wiederum die Kanten, in denen die drei Flächen des betreffenden

Fig. 131.

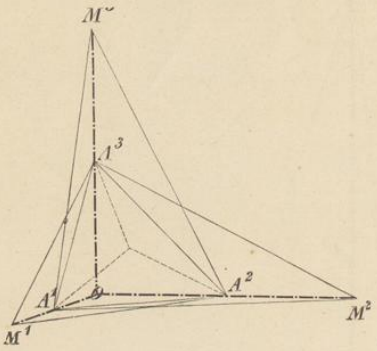
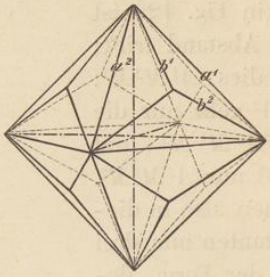


Fig. 132.

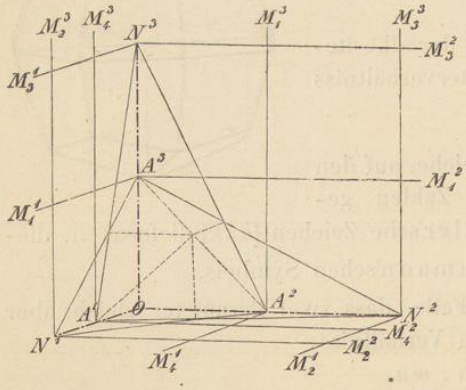


Oktanten einander schneiden. Fig. 132 stellt die vollständige Form, ergänzt durch die in den übrigen Oktanten erforderlichen Flächen, dar. Dieselbe wird ein Triakisoktaëder oder Pyramidenoktaëder genannt. Ihre Kanten a sind diejenigen, durch welche die Haupt-Symmetrieebenen, die Kanten b diejenigen, durch welche die andern Symmetrieebenen gehen. Nach Naumann wird eine solche Form mit mO bezeichnet, während ihr Miller'sches Symbol $= \{hhk\}$, in welchem, wie im vorigen Falle, $h > k$ und $\frac{h}{k} = m$.

IV. Für einen dritten besonderen Fall, wenn nämlich m gleich seinem obersten Grenzwerth ∞ ist, während n einen endlichen Werth hat, das Parameterverhältniss also

$$= a : na : \infty a,$$

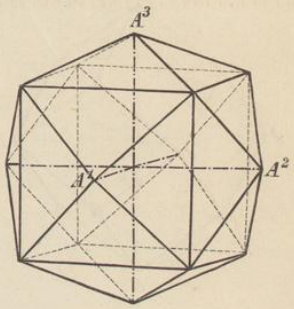
Fig. 133.



entsteht eine vierte besondere Form. Setzen wir z. B. $n = 2$, so ist aus Fig. 133 ersichtlich, dass in einem Oktanten, wie beim Achtundvierzigflächner, sechs Flächen durch die Symmetrie erfordert werden, denn der Hauptaxe OA^1 parallel (sie im Abstand ∞ schneidend) gehen nothwendigerweise zwei Flächen, welche die beiden anderen Hauptaxen, die eine im Verhältniss 1 : 2, die andere in 2 : 1 schneiden; es sind dies die Flächen $A^2 N^3 M^1{}_3 M^1{}_4$ und $A^3 N^2 M^1{}_1 M^1{}_2$; der Hauptaxe OA^2 parallel gehen: $A^1 N^3 M^2{}_3 M^2{}_4$ und $A^3 N^1 M^2{}_1 M^2{}_2$; endlich der Hauptaxe OA^3 parallel: $A^1 N^2 M^3{}_3 M^3{}_4$ und $A^2 N^1 M^3{}_1 M^3{}_2$. Die Durch-

schnittsrichtungen dieser sechs Flächen sind wiederum durch punktirte Gerade angedeutet, von denen natürlich drei den drei Hauptaxen parallel laufen. Gehen wir von diesen sechs Flächen zu den durch die Symmetrie erforderten Flächen der anderen Oktanten über, so liegt auf der Hand, dass je zwei jener sechs mit zwei eines benachbarten Oktanten zusammenfallen müssen, weil sie auf einer Haupt-Symmetrieebene senkrecht stehen, und die Fläche, welche zu einer Symmetrieebene normal ist, in Bezug auf diese nur sich selbst, keiner andern symmetrisch sein kann. Während die so entstehende Form in jedem der acht Oktanten sechs Flächen hat, ist die Gesammtzahl ihrer möglichen Flächen demnach nur 24, wie sie Fig. 134 mit gleicher Ausdehnung zeigt. Diese Form wird ein Tetrakishexaëder oder Pyramidenwürfel genannt. Ihr Naumann'sches Zeichen ist ∞On. Da ihr Parameterverhältniss

Fig. 134.



$$a : na : \infty a = \frac{a}{n} : \frac{a}{1} : \frac{a}{0}$$

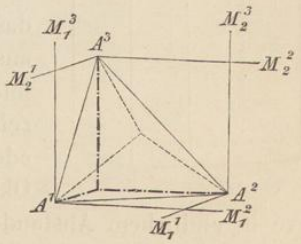
so ist $n =$ dem Verhältniss der beiden ersten Indices $\frac{h}{k}$ und der dritte $= 0$, also das Miller'sche Zeichen $\{hk0\}$.

V. Zu einer weiteren fünften Form führt der Fall, dass in dem Parameterverhältniss zwei derselben gleich, der dritte den Maximalwerth ∞ erreicht. Alsdann ist dieses Verhältniss

$$a : a : \infty a.$$

Während die bisherigen Formen stets Beispiele aus je einer Klasse von Formen waren, deren so viele möglich sind, als rationale Zahlenwerthe für die Coëfficienten m und n denkbar, kann das obige Parameterverhältniss nur einer einzigen Form angehören. Die Flächen derselben schneiden je zwei Axen in gleichem Abstand und sind der dritten parallel, es müssen in einem Oktanten also drei Flächen: $A^1A^2M^3{}_1M^3{}_2$, $A^1A^3M^2{}_1M^2{}_2$ und $A^2A^3M^1{}_1M^1{}_2$ Fig. 135 derselben existiren. Da jede derselben aber einer Hauptaxe parallel, also normal zu einer Haupt-Symmetrieebene ist, so muss ihre symmetrische Gegenfläche im anstossenden Oktanten mit ihr identisch sein; statt $3 \times 8 = 24$ kann die ganze Form Fig. 136 also nur 12 Flächen besitzen und heisst deshalb das Dodekaëder (auch Rhombendodekaëder nach der Gestalt ihrer Flächen). Sein Zeichen nach Naumann ist ∞O, und da das Parameterverhältniss

Fig. 135.

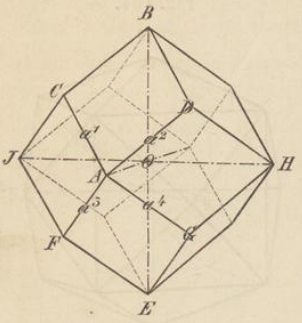


$$a : a : \infty a = \frac{a}{1} : \frac{a}{1} : \frac{a}{0},$$

so ist sein Zeichen nach Miller {110}.

Construiren wir an dem Dodekaëder Fig. 136 ausser den drei Haupt-Symmetrieebenen, welche durch die Hauptaxen unmittelbar gegeben sind, noch die sechs anderen nach der S. 236 gegebenen Definition derselben, so gehen diese durch den Mittelpunkt O und durch folgende Kanten: die 1. durch BD, EG; die 2. durch BC, EF; die 3. durch AC, AG; die 4. durch AD, AF; die 5. durch GH, FJ und die 6. durch DH, CJ. Jeder dieser sechs Symmetrieebenen ist aber ein Flächenpaar des Dodekaëders parallel, weil dieses, wie jene Symmetrieebenen, einer Hauptaxe parallel, die beiden anderen unter 45° schneidet. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen des regulären Systems sind demnach die Flächen des Dodekaëders, und es ist leicht, an Modellen der bisher betrachteten Achtundvierzig- und Vierundzwanzigflächner zu constatiren, dass sie nach allen Dodekaëderflächen symmetrisch sind. Das Dodekaëder ist die erste Form, von der wir die Eigenschaft kennen lernen, dass sie nach ihren eigenen Flächen symmetrisch ist.

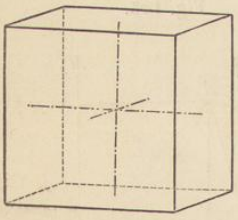
Fig. 136.



VI. Wir hatten gefunden, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind, sobald zwei Parameter gleich und der dritte davon verschieden ist, dass nämlich eine andere Form resultirt, wenn dieser dritte grösser als die beiden anderen, ein anderer, wenn er kleiner ist. Dies muss auch für $m = \infty$ gelten. Das Parameterverhältniss, in welchem zwei Parameter gleich, der dritte $= \infty$, lieferte das Dodekaëder; der entgegengesetzte Fall, dass nämlich zwei Parameter gleich und unendlich gross, der dritte kleiner, also endlich ist, muss daher eine weitere reguläre Krystallform liefern, deren Parameterverhältniss

$$a : \infty a : \infty a.$$

Fig. 137.



Es bedarf keiner Construction, um zu sehen, dass eine Form mit diesem Parameterverhältniss nur aus drei, den drei Haupt-Symmetrieebenen parallelen Flächenpaaren bestehen kann, wie es Fig. 137 zeigt. Die Flächen dieser Form, des Hexaëders oder des Würfels*), liegen so, dass in jeden Oktanten drei fallen, von denen jede eine Hauptaxe in endlichem Abstande von der Mitte schneidet, da sie aber zu zwei Haupt-Symmetrieebenen normal ist, mit ihren symmetrischen Flächen in

*) Nach dem griechischen Namen des Würfels wird das reguläre System auch das tesserale genannt.

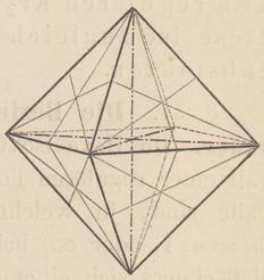
den Nachbar-Oktanten zusammenfällt. Man sieht leicht ein, wenn man durch einen Punkt der verticalen Hauptaxe oberhalb der Mitte eine Ebene legt, welche die beiden horizontalen Hauptaxen in unendlichem Abstand schneidet, diese in allen vier oberen Oktanten die gleiche sein muss, nämlich die parallele Ebene zur horizontalen Haupt-Symmetrieebene. Die vollständige Form kann also statt $3 \times 8 = 24$ nur den vierten Theil, d. i. sechs Flächen haben. Diese schneiden einander, da sie den Haupt-Symmetrieebenen parallel sind, unter rechten Winkeln, und aus demselben Grunde ist auch diese Form nach ihren eigenen Flächen symmetrisch. Ihre Zeichen nach Naumann bez. Miller sind $\infty O \infty$ resp. $\{100\}$.

VII. Der letzte mögliche specielle Fall ist derjenige, dass alle drei Parameter gleich gross sind. Dieser führt uns zu der Grundform zurück, von der wir ausgingen, und zu welcher in jedem Oktanten nur eine Fläche gehören kann, da die Vertauschung der drei gleichen Parameter keine neue Fläche liefert. Die entstehende Form ist das Oktaëder Fig. 138 mit dem Parameterverhältniss

$$a : a : a.$$

und dem Zeichen $O = \{111\}$.

Fig. 138.



Auch diese Form ist symmetrisch nach den sechs Dodekaëderflächen, deren Durchschnitte mit den ihrigen auf Fig. 138 mit schwächeren Linien eingezeichnet sind. Man sieht daraus unmittelbar, dass jede Oktaëderfläche von drei dodekaëdrischen Symmetrieebenen unter rechten Winkeln geschnitten wird, dass also zwei parallele Oktaëderflächen zu sechs Flächen des Dodekaëders normal stehen.

Die sieben Arten von Formen, welche wir aus den möglichen Fällen des Verhältnisses dreier Parameter auf rechtwinkeligen gleichwerthigen Axen hergeleitet haben, unterscheiden sich in solche, deren nur eine einzige möglich ist (das Oktaëder, das Hexaëder und das Dodekaëder), und solche, deren mehrere mit verschiedenen Ableitungscoëfficienten möglich sind (die Hexakisoktaëder, die Tetrakishexaëder, die Triakisoktaëder und die Ikositetraëder). Von jeder der letzteren vier Arten von Formen sind eigentlich unendlich viele krystallonomisch möglich, da es unendlich viele rationale Zahlen als Werthe der Coëfficienten m und n oder der Indices hkl giebt, von diesen ist aber nur eine beschränkte Zahl mit meist sehr einfachen Zahlenwerthen bisher beobachtet worden.

Das Oktaëder ist die einzige Form, welche unter allen regulären Formen (d. h. denjenigen, die symmetrisch sind zu den drei Würfel- und zu den sechs Dodekaëderflächen) drei gleiche Parameter haben kann, wenn wir die Normalen zu den Hexaëderflächen (die Hauptaxen) zu Axen wählen. In Folge dessen ist das Oktaëder zweier verschiedener, regulär krystallisi-

render Körper krystallographisch vollkommen identisch, d. h. seine Flächen schneiden sich bei beiden unter genau denselben Winkeln. Da aber alle anderen regulären Formen sich durch rationale Vervielfältigung oder als rationale Theile der Parameter des Oktaëders von diesem ableiten, so müssen auch alle Formen eines regulär krystallisirenden Stoffes an den Krystallen eines andern identisch, d. h. mit denselben Winkeln, auftreten können. Wie ebenso auch aus der Identität der Elemente aller regulärer Krystalle (s. S. 237) hervorgeht, können die Krystallformen zweier regulär krystallisirender Körper (abgesehen von etwaiger Hemiëdrie) in rein krystallographischer Hinsicht keine anderen Unterschiede zeigen, als sie die verschiedenen Krystalle eines und desselben Körpers ebenfalls aufweisen, d. h. sie können wohl aus verschiedenen Formen bestehen, welche sich aber durch rationale Coëfficienten resp. rationale Indices von einander ableiten lassen, welche also einer Krystallreihe (s. S. 225) angehören. Alle regulären Krystallformen bilden eine Krystallreihe, und diese ist zugleich diejenige aller regulär krystallisirender Substanzen.

§. 51. **Die Beziehungen der regulären Krystallformen zu einander.** Die Hexakisoktaëder stellen, wie bereits bemerkt, den allgemeinen Fall einer regulären Form dar, von welcher die übrigen sechs nur specielle Fälle sind, in welchen die Coëfficienten m und n besondere Werthe ($m = n$, 1, oder ∞) haben. Je mehr die Zahlenwerthe eines Achtundvierzigflächners sich einem dieser speciellen Fälle nähern, desto ähnlicher muss daher die Gestalt desselben derjenigen sein, welche die den speciellen Fall realisirende Krystallform besitzt. Sind z. B. die Zahlenwerthe m und n eines Hexakisoktaëders nur wenig verschieden (etwa 3 und $\frac{5}{2}$, so müssen die Kanten b Fig. 139 sehr stumpfwinkelig sein, und zwar um so mehr, je geringer jener Unterschied ist; die Form ähnelt alsdann immer mehr einem Ikositetraëder, und fällt vollkommen mit einem solchen zusammen, wenn die Flächen 1 und 2 u. s. f. sich in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden, in eine Ebene fallen, d. h. wenn m nicht von n verschieden ist. Das Ikositetraëder mit den Parametern $1 : n : n$ ist alsdann dasjenige Hexakisoktaëder, in welchem m nicht mehr von n verschieden ist, d. h. jedes Ikositetraëder ist das eine Grenzglied einer Reihe von möglichen Achtundvierzigflächnern, der es selbst als specieller Fall angehört. Eine solche, sich immer mehr der Form von $2O2$ nähernde Reihe ist z. B.

$$\ldots, 4O2, 3O2, \tfrac{5}{2}O2, \tfrac{9}{4}O2, 2O2.$$

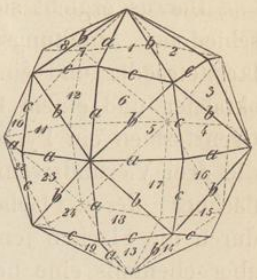
Jede derartige Reihe, innerhalb welcher der Coëfficient n constant bleibt, und nur m variirt, muss nun noch eine Grenze nach der anderen Seite haben, welche einer Form entspricht, der sich die Glieder der Reihe um so mehr nähern, je mehr m von n verschieden ist, d. h. je grösser m wird. Die oberste Grenze, welche der Zahlenwerth dieses Coëfficienten erreichen kann, ist aber $= \infty$, und derjenige Achtundvierzigflächner, dessen $m = \infty$

ist, heisst Tetrakishexaëder. Die vorhin beispielsweise gewählte Reihe, nach der anderen Seite fortgesetzt:

$$\infty O2, \ldots 16O2, 8O2, 4O2 \ldots$$

enthält Hexakisoktaëder, deren Gestalt um so ähnlicher der Grenzform $\infty O2$ ist, je grösser m ist; um so stumpfwinkeliger sind alsdann die Kanten a, Fig. 139. Für $m = \infty$ wird der Winkel derselben $= 0$, d. h. die Flächen 1 und 7, 6 und 12 u. s. w. fallen in eine Ebene. Danach haben wir auch jeden Pyramidenwürfel als einen Achtundvierzigflächner zu betrachten, und zwar als Grenzform einer Reihe von Hexakisoktaëdern, welche sämmtlich denselben Coëfficienten n haben und deren zweite Grenzform dasjenige Ikositetraëder ist, dessen m demselben Zahlenwerth gleich ist. Da in allen Formen einer derartigen Reihe, incl. der beiden Grenzformen, zwei Hauptaxen in dem constanten Verhältniss $1 : n$ geschnitten werden, so sind die Flächen aller Formen jener Reihe parallel Geraden, welche zwei jener Axen in demselben Verhältniss schneiden, d. h. die entsprechenden Flächen aller derselben liegen in einer Zone*). Demnach liegt eine beliebige Fläche irgend eines der Hexakisoktaëder einer bestimmten Reihe stets mit parallelen Kanten zwischen je einer Fläche der beiden Grenzformen derselben Reihe; also ist auch die Lage der Flächen aller einer Reihe angehöriger Achtundvierzigflächner eine zwischen inneliegende zwischen denjenigen des Pyramidenwürfels und des Ikositetraëders, welche die Grenzformen der Reihe bilden.

Fig. 139.



Ist in dem Parameterverhältniss eines Hexakisoktaëders der kleinere Coëfficient n nur wenig von 1 verschieden, z. B. $\frac{4}{3}$, so können sich die Flächen 1 und 6 Fig. 139, ebenso 7 und 12 u. s. f. nur wenig in ihrer Richtung unterscheiden, d. h. die Kanten c müssen sehr stumpfwinkelig sein. Die Form ähnelt alsdann einem Pyramidenoktaëder, und zwar um so mehr, je weniger n grösser als 1 ist. Das Triakisoktaëder mit demselben m endlich ist derjenige Achtundvierzigflächner, dessen $n = 1$ ist. So giebt es denn wieder eine Reihe von möglichen Hexakisoktaëdern, deren m gleich ist, deren n dagegen variirt; die untere Grenzform bildet das Triakisoktaëder $(1 : 1 : m)$, in welchem n seinen kleinsten Werth hat; die obere Grenze der Reihe bildet das Ikositetraëder $(1 : m : m)$, in welchem n, da es der kleinere Coëfficient ist, seinen grösstmöglichen Werth erreicht. Die entsprechenden Flächen einer solchen Reihe bilden ebenfalls eine Zone, zu deren Flächen auch die der beiden Grenzformen, zwischen denen die übrigen liegen, gehören, da sie sämmtlich einer Geraden parallel sind, welche zwei Hauptaxen in dem für diese Reihe constanten Verhältniss $1 : m$ schneidet.

*) Wie auch leicht durch Einsetzen ihrer Indices in die Bedingungsgleichung der Tautozonalität bewiesen werden kann.

Endlich kann auch eine ganze Reihe von möglichen Achtundvierzigflächnern mit parallelen Kanten liegen zwischen den Flächen eines beliebigen Tetrakishexaëders und eines Pyramidenoktaëders; aus den Indices der beiden Grenzformen einer solchen Reihe ergiebt sich in bekannter Weise (s. S. 205) die Bedingungsgleichung, welcher die Indices der Hexakisoktaëder genügen müssen, um mit parallelen Kanten zwischen jenen beiden Grenzformen zu liegen.

Daraus ergiebt sich, dass jedes Hexakisoktaëder ein Glied dreier verschiedener Ableitungsreihen ist, 1) einer solchen, deren Endglieder ein Ikositetraëder und ein Pyramidenwürfel sind; 2) einer von einem Triakisoktaëder und einem Ikositetraëder begrenzten; 3) von einer Reihe, deren Grenzformen ein Pyramidenwürfel und ein Triakisoktaëder sind. So bilden die drei Vierundzwanzigflächner die Grenzformen für alle Achtundvierzigflächner, deren Flächen sämmtlich zwischen den Grenzen liegen, welche durch die Flächen jener bestimmt sind. Dieser drei Grenzformen giebt es aber ebenfalls eine beliebige Zahl möglicher Einzelfälle, welche unter einander selbst wieder eine Ableitungsreihe mit bestimmten Grenzformen bilden.

Betrachten wir zunächst die Ikositetraëder $(1 : m : m)$, welche sich durch den bestimmten Zahlenwerth von m von einander unterscheiden, so ist klar, dass die vierkantige Ecke, in welcher die Kanten a Fig. 140 zusammenstossen, um so stumpfwinkeliger wird, je grösser m ist; mit steigendem Zahlenwerth dieses Coëfficienten nähern sich die vier, eine solche Ecke bildenden, Flächen in ihrer Lage einander immer mehr. Wenn m seinen

Fig. 140.

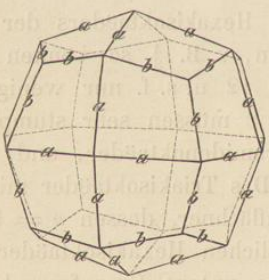
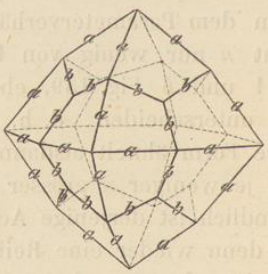


Fig. 141.



höchstmöglichen Werth ∞ erreicht, so fallen jene vier Flächen in eine Ebene, welche der einen Haupt-Symmetrieebene parallel ist, folglich einer Würfelfläche entspricht. Das Hexaëder, d. h. dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = \infty$ ist, bildet somit nach einer Seite hin die Grenzform der sämmtlichen Ikositetraëder. Je kleiner dagegen m ist, desto spitzer erscheinen die vierkantigen Ecken dieser Formen, desto stumpfwinkeliger dagegen die Kanten b Fig. 141 $= \frac{4}{3}O\frac{4}{3}$ $\{433\}$, welche die dreikantigen Ecken bilden. Bei einem bestimmten Werthe von m, wenn dies nämlich $= 1$ ist, wird der Winkel der letzteren Kanten Null, d. h. die drei in einem Oktanten liegenden Flächen dieses Ikositetraëders unterscheiden sich in ihrer Lage nicht

mehr von einander; wir nennen es dann Oktaëder und haben in demselben die andere Grenzform der Reihe aller Ikositetraëder gefunden. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe zwei Hauptaxen in gleichem Abstande schneiden, so müssen die einander entsprechenden Flächen sämmtlich einer Geraden parallel sein, welche zwei Axen in demselben Verhältniss schneidet, sie müssen also sämmtlich einer Zone angehören, welche durch die beiden Endglieder der Reihe, durch die Würfel- und die Oktaëderfläche bestimmt ist. Alle Ikositetraëder liegen mit parallelen Kanten zwischen Hexaëder und Oktaëder.

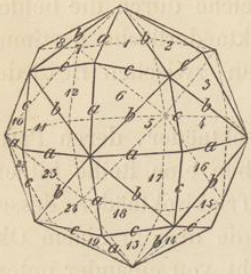
Gehen wir über zu der Betrachtung der Triakisoktaëder, deren Parameterverhältniss $1 : 1 : m$, so ist klar, dass dieselben eine Reihe bilden, deren untere Grenze das Oktaëder ist, d. h. dasjenige Triakisoktaëder, dessen m den kleinstmöglichen Werth 1 hat, weshalb sich die drei in einem Oktanten liegenden Flächen desselben in ihrer Lage nicht von einander unterscheiden. Je grösser der Zahlenwerth von m ist, desto stumpfwinkeliger werden die Kanten, welche denen des Oktaëders parallel laufen, und für $m = \infty$ werden ihre Winkel $= 0$, d. h. die beiden in einer Oktaëderkante zusammenstossenden Flächen fallen in eine Ebene, welche einer Dodekaëderfläche entspricht. Das Oktaëder und das Rhombendodekaëder sind die beiden Grenzformen der Reihe der Pyramidenoktaëder; die Flächen der letzteren liegen sämmtlich mit parallelen Kanten zwischen je einer Oktaëder- und einer Dodekaëderfläche.

Die dritte Klasse von Vierundzwanzigflächnern, die Tetrakishexaëder, mit dem Parameterverhältniss $1 : n : \infty$, bilden ebenfalls eine einzige Ableitungsreihe, deren Anfangsglied das Dodekaëder ist, d. h. derjenige Pyramidenwürfel, dessen $n = 1$, bei welchem sich also je zwei, in einer Hexaëderkante zusammenstossende Flächen in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden. Das Endglied der Reihe ist offenbar der Würfel, derjenige Pyramidenwürfel, dessen $n = \infty$, bei welchem folglich je vier in einer vierkantigen Ecke sich schneidende Flächen in eine Ebene fallen. Je grösser n, desto ähnlicher muss die Form dem Hexaëder werden. Da die Flächen aller Pyramidenwürfel einer Hauptaxe, d. i. einer Würfelkante, parallel sind, so liegen sie stets in der Zone zweier Würfelflächen; in dieselbe fällt auch die Dodekaëderfläche, also liegen die Flächen aller Tetrakishexaëder mit parallelen Kanten zwischen je einer Hexaëder- und einer Dodekaëderfläche.

Das Rhombendodekaëder haben wir soeben betrachten gelernt als dasjenige Triakisoktaëder, dessen $m = \infty$, oder als denjenigen Pyramidenwürfel, dessen $n = 1$ ist. Da diese beiden Vierundzwanzigflächner selbst aber nur Grenzglieder der verschiedenen Reihen von Achtundvierzigflächnern sind, so können wir nunmehr das Rhombendodekaëder bezeichnen als denjenigen speciellen Fall der Hexakisoktaëder, in welchem $m = \infty$ und $n = 1$ ist, und es ist klar, dass es nur einen einzigen Achtundvierzigflächner mit diesem Parameterverhältniss geben kann. Es ist derjenige, bei welchem je 4 Flächen, z. B. 1, 6, 7, 12 Fig. 142, in eine Ebene fallen.

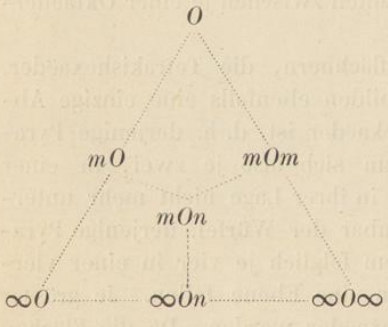
Das Hexaëder ergab sich aus obigen Betrachtungen als dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = \infty$, sowie auch als der Pyramidenwürfel, dessen n denselben Werth hat; wir können es folglich auch auffassen als denjenigen Achtundvierzigflächner, dessen m und n beide den höchstmöglichen Werth ∞ haben, und bei welchem sich je 8 Flächen, z. B. 5, 6, 11, 12, 17, 18, 23, 24 Fig. 142, in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden.

Fig. 142.



Endlich ist das Oktaëder dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = 1$, oder dasjenige Triakisoktaëder, dessen m denselben kleinsten Werth hat, es ist also auch dasjenige Hexakisoktaëder, bei welchem m und $n = 1$, folglich die sechs in einen Oktanten fallenden Flächen sämmtlich einander parallel sind und somit nur eine einzige Fläche bilden.

Den Zusammenhang aller Ableitungsreihen ersieht man am leichtesten durch das folgende Schema, in welchem ausser den Endgliedern nur noch das allgemeine Glied jeder Reihe aufgeführt ist, und alle durch Linien verbundene Zeichen eine Ableitungsreihe bilden:



Wir gelangen somit zu der Vorstellung, dass es im regulären System eigentlich nur eine Art holoëdrischer Formen giebt, welche im Allgemeinen 48 Flächen besitzen, von denen aber bei besonderen Zahlenwerthen der Parametercoëfficienten je 2, 4, 6 oder 8 parallel werden können, und somit Formen mit 24, 12, 8 oder 6 Flächen entstehen. Diese letzteren müssen, da sie ja nur specielle Fälle der Hexakisoktaëder sind, allen denselben krystallographischen Gesetzen unterworfen sein, wie jene. Dieser Umstand ist von besonderer Wichtigkeit für das Gesetz der Hemiëdrie. Es ist bereits in §. 47 bei der allgemeinen Besprechung derselben erwähnt worden, dass erfahrungsgemäss ein Körper, welcher hemiëdrisch krystallisirt, nur eine bestimmte Art der Hemiëdrie zeigt und niemals andere Formen, als hemiëdrische, welche jener Art von Hemiëdrie entsprechen. Nach Obigem muss es genügen, die Art der Hemiëdrie an den Achtundvierzigflächnern eines regulären Krystalls zu bestimmen, um die resultirenden Formen aus den übrigen sechs Gestalten zu kennen. Da diese letzteren nur specielle Fälle der Hexakisoktaëder sind, so muss für sie ganz das Gleiche gelten; sind diese an einem Körper nach einem bestimmten Gesetze hemiëdrisch, so müssen es auch die übrigen Formen, und zwar nach demselben Gesetze, sein.

§. 52. **Beschreibung der regulären Krystallformen und ihrer Combinationen.** Im Folgenden sind nun für sämmtliche holoëdrische reguläre Formen, von den einfachsten ausgehend, ihre näheren geometrischen Eigenschaften und die Art und Weise angegeben, wie sie in Combinationen zusammen auftreten.

1) Das Oktaëder $\{111\} = O$ (Fig. 143), dessen Kanten Winkel von $70^0\ 31',8$ bilden, hat bei gleicher Centraldistanz der Flächen 12 Kanten, von denen je vier in einer Haupt-Symmetrieebene liegen, während je zwei parallele jedesmal einer der sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen parallel gehen. Die sechs Ecken des Oktaëders werden, da in denselben vier gleiche, d. h. gleichwinkelige, Kanten zusammenstossen, als vierkantige bezeichnet.

Fig. 143.

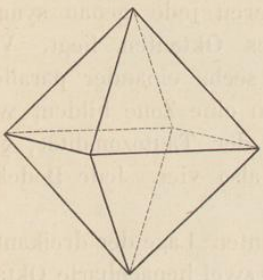
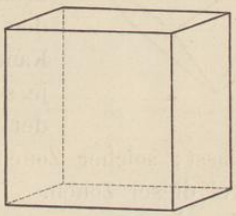


Fig. 144.



2) Das Hexaëder oder der Würfel, $\{100\} = \infty O \infty$, Fig. 144, dessen Flächen den Haupt-Symmetrieebenen parallel sind und daher einander unter 90^0 schneiden, besitzt 12 Kanten, welche zu acht dreikantigen Ecken zusammenstossen. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen halbiren je einen Kantenwinkel.

Bringt man die Symmetrieebenen des Würfels und des Oktaëders zur Deckung, so erscheint, je nach der Centraldistanz der Flächen der einen und der anderen Form, das Oktaëder als gerade Abstumpfung*)

Fig. 145.

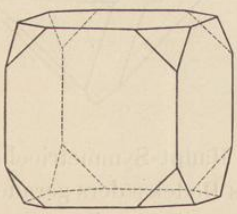
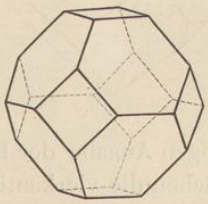


Fig. 146.



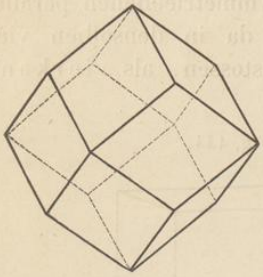
der Ecken des Würfels, Fig. 145, oder das Hexaëder als gerade Abstumpfung der Ecken des Oktaëders, Fig. 146. Wie aus diesen beiden Figuren her-

*) Eine gerade Abstumpfung einer Ecke oder Kante ist: das Auftreten einer Fläche statt derselben, welche mit allen die Ecke oder Kante bildenden Krystallflächen gleiche Winkel einschliesst.

vorgeht, liegt jede Würfelfläche in zwei Zonen, deren jede durch zwei Oktaëderflächen bestimmt ist. Leitet man nach §. 41 die beiden Zonensymbole ab, so ergiebt sich in der That daraus das Symbol der Würfelfläche *).

3) Das Dodekaëder, $\{110\} = \infty O$, Fig. 147, hat die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen zu Flächen. Je zwei benachbarte Flächen desselben bilden 60^0, je zwei an einer vierkantigen Ecke gegenüber liegende bilden 90^0 mit einander. Von den vierkantigen Ecken liegen je vier in einer Haupt-Symmetrieebene, welche die Flächen in der Richtung ihrer grösseren Diagonale durchschneidet. Ausser den sechs vierkantigen Ecken besitzt das Dodekaëder noch acht dreikantige, deren jede genau symmetrisch in der Mitte eines Oktanten liegt. Von den 24 Kanten sind je sechs einander parallel, so dass je sechs Flächen eine Zone bilden, wie sich aus der Bedingung der Tautozonalität, §. 41, leicht beweisen lässt; solcher Zonen existiren also vier. Jede Dodekaëderfläche liegt in zwei dieser Zonen.

Fig. 147.



Das Oktaëder muss wegen der erwähnten Lage der dreikantigen Ecken diese gerade abstumpfen Fig. 148, und da zwei benachbarte Oktaëderflächen mit der zwischenliegenden Dodekaëderfläche parallele Kanten bilden (alle drei schneiden dieselben beiden Hauptaxen in gleichem Abstand), so muss das Dodekaëder die Kanten des Oktaëders gerade abstumpfen, Fig. 149.

Fig. 148.

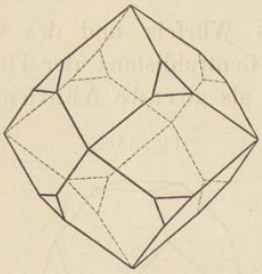
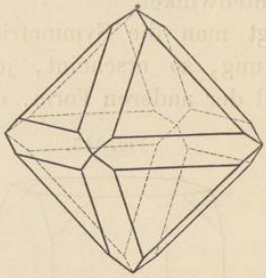


Fig. 149.



Nach der obigen Angabe der Lage der drei Haupt-Symmetrieebenen müssen die Würfelflächen die vierkantigen Ecken des Dodekaëders gerade abstumpfen, Fig. 150, d. h. jede derselben muss in zwei Zonen liegen, welche durch je zwei an einer vierkantigen Ecke gegenüber liegende Dodekaëderflächen gegeben sind, wie sich leicht aus den Indices ergiebt. Da die Combina-

*) Der Anfänger möge zur Uebung diese Ableitung im vorliegenden und in den folgenden Fällen ausführen.

tionskanten zweier Hexaëderflächen mit einer und derselben Dodekaëderebene parallel sind, so stumpft das Dodekaëder die Kanten des Würfels gerade ab, Fig. 151.

Fig. 150.

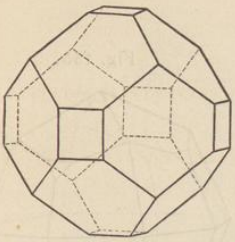
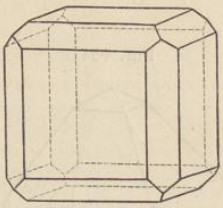


Fig. 151.



4) Die Ikositetraëder, $\{hkk\} = mOm$, besitzen zweierlei Kanten: 1) 24, zu je 4 in sechs vierkantigen Ecken zusammenstossende, sämmtlich in den Haupt-Symmetrieebenen liegend; deren Winkel ist um so stumpfer, je grösser $\frac{h}{k} = m$ ist; er beträgt z. B.

für $\{211\} = 2O2$ (Fig. 152) $= 48^0 11'$
für $\{311\} = 3O3$ (Fig. 153) $= 35^0\ 6'$.

Fig. 152.

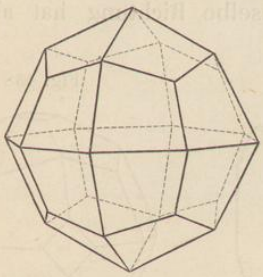
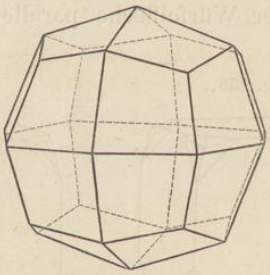


Fig. 153.



2) 24 andere, deren je 3 in einem Oktanten zu einer dreikantigen Ecke zusammenstossen, und deren Winkel um so weniger stumpf ist, je grösser $\frac{h}{k} = m$. Er beträgt z. B.

für $\{211\} = 2O2 = 33^0 33'$
für $\{311\} = 3O3 = 50^0 29'$.

Die Ecken, in denen je zwei Kanten der ersten und zwei der zweiten Art zusammentreffen, nennt man $2 + 2$ kantige (zweiundzweikantige).

Die beiden angeführten Formen $\{211\}$ und $\{311\}$ sind die am häufigsten vorkommenden Ikositetraëder.

In Combination mit dem Oktaëder erscheint ein Ikositetraëder als vierflächige Zuspitzung*) der Ecken desselben, wobei die Zuspitzungs-

*) Eine Zuspitzung ist das Eintreten einer Ecke für eine andere, wobei natürlich die neue Ecke die stumpfere ist, so dass es eigentlich »Zustumpfung« heissen

flächen auf die Flächen des Oktaëders so aufgesetzt sind, dass die Combinationskanten beider mit einer dieselbe Oktaëderfläche begrenzenden Oktaëderkante parallel sind. Fig. 154 stellt die Combination {111} {211} dar. Umgekehrt stumpft das Oktaëder die dreikantigen Ecken jedes Ikositetraëders ab, Fig. 155.

Fig. 154.

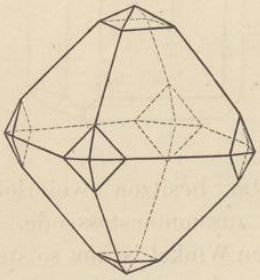
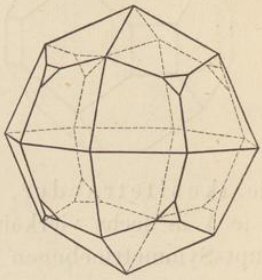


Fig. 155.



An dem Hexaëder tritt ein Ikositetraëder als dreiflächige Zuspitzung der Ecken auf, Fig. 156, wobei die Zuspitzungsflächen auf die Flächen des Würfels aufgesetzt sind, so dass die beiden Würfelkanten (= 2 Axen) in gleichem Abstande geschnitten werden, die Combinationskante also der Diagonale der Würfelfläche parallel läuft. Dieselbe Richtung hat aber auch

Fig. 156.

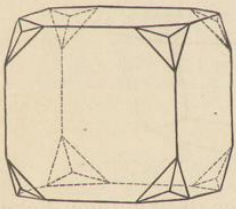


Fig. 157.

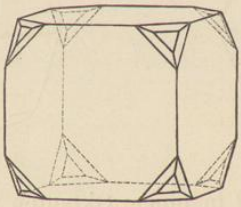
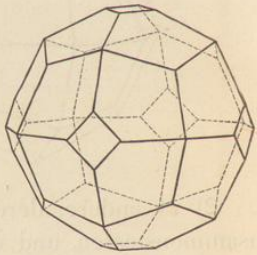


Fig. 158.



die Combinationskante derselben Hexaëderfläche mit der geraden Abstumpfung der gleichen Ecke, d. i. die Kante (100) : (111), folglich liegt die Fläche eines Ikositetraëders stets in einer Zone mit einer Oktaëder- und einer Würfelfläche, sie stumpft die Combinationskante beider ab, s. Fig. 157. Das Hexaëder stumpft die vierkantigen Ecken der Ikositetraëder gerade ab, Fig. 158.

Die Combinationen der verschiedenen Ikositetraëder mit dem Rhombendodekaëder haben ein verschiedenes Ansehen, je nach den Indices der

---

müsste; je nachdem die neue Ecke von 3, 4, ... Flächen gebildet wird, heisst die Zuspitzung drei-, vierflächig u. s. w.

ersteren Form. Die Fig. 159 stellt z. B. das Dodekaëder mit der geraden Abstumpfung aller seiner 24 Kanten dar, d. h. mit einer Form, welche zu der Klasse der Ikositetraëder gehören muss, da jede ihrer Flächen gleiche Neigung gegen zwei Dodekaëderflächen, also auch gegen die beiden Hauptaxen, denen jene parallel laufen, hat, folglich diese beiden in gleichem Abstande schneidet. Es liegt deshalb auch jede solche Abstumpfungsfläche in der Zone einer Hexaëder- und einer Oktaëderfläche, wie aus Fig. 160

Fig. 159.

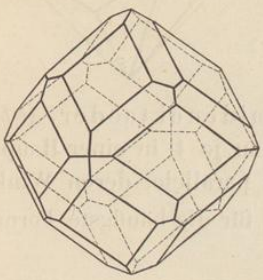
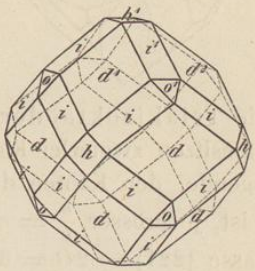
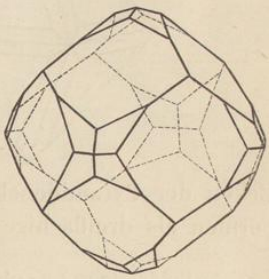


Fig. 160.



hervorgeht, in welcher $d = \{110\}$, $h = \{100\}$, $o = \{111\}$ und i das Ikositetraëder bedeutet. Da die mit i^1 bezeichnete Fläche in zwei Zonen des Krystalls liegt, so sind auch ihre Indices rational, sie selbst krystallonomisch möglich. Die Indices der Flächen d^1 und d^2 sind (101) und (011), das Symbol ihrer Zone somit $[\bar{1}\,\bar{1}\,1]$; die Indices von h^1 und o^1: (001) und (111), das Symbol ihrer Zone folglich $[\bar{1}\,1\,0]$; die in beiden Zonen liegende Fläche hat demnach das Zeichen $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$; dieses bezeichnet aber die Parallelfläche von (112), die selbstverständlich auch in denselben beiden Zonen liegt. Das Ikositetraëder i, welches die Dodekaëderkanten gerade abstumpft, hat demnach das Zeichen $\{211\} = 2O2$; es ist unter allen Ikositetraëdern das häufigste und dasjenige mit dem einfachsten Parameterverhältniss. Ein Ikositetraëder, dessen $\frac{h}{k} = m > 2$, hat, der Fläche i^1 entsprechend, eine solche, deren Neigung gegen die Horizontalebene eine geringere ist, als bei i^1, welche also mit d^1 und d^2 Kanten bildet, die nach unten convergiren. Eine solche Form, z. B. $\{311\} = 3O3$ in Fig. 161, bildet eine vierflächige Zuspitzung der vierkantigen Ecken des Dodekaëders, die Zuspitzungsflächen auf die Dodekaëderkanten aufgesetzt. Ist endlich $\frac{h}{k} = m < 2$, z. B. $\frac{3}{2}$, so bildet dieses Ikositetraëder, $\{322\} = \frac{3}{2}O\frac{3}{2}$, eine dreiflächige Zuspitzung der dreikantigen Ecken des Dodekaëders, die Zuspitzungsflächen auf dessen Kanten aufgesetzt, wie es Fig. 162 zeigt, weil die der Fläche i^1 (in Fig. 160) entsprechende nun-

Fig. 161.



mehr eine steilere Lage hat, als die Kante $d^1 : d^2$, also mit diesen beiden Flächen nach oben convergirende Kanten bilden muss.

Fig. 162.

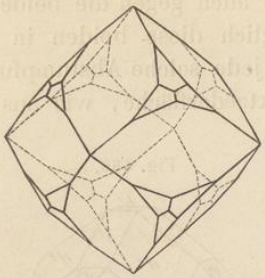
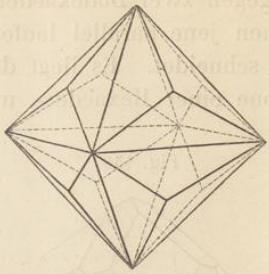


Fig. 163.



5) Die Triakisoktaëder oder Pyramidenoktaëder, $\{hhk\} = mO$, Fig. 163, besitzen zweierlei Kanten: 1) 12 zu je 4 in einer Haupt-Symmeebene liegende, den Kanten des Oktaëders parallele, deren Winkel um so stumpfer ist, je grösser $\frac{h}{k} = m$; er beträgt für die häufigste Form (Fig. 163) dieser Klasse $\{221\} = 2O = 38^{\circ}57'$;

2) 24 andere, von denen je 3 in einem Oktanten zu einer dreikantigen Ecke zusammenstossen, und deren Winkel um so weniger stumpf ist, je grösser $\frac{h}{k} = m$. Er beträgt

für $\{221\} = 2O = 27^{\circ}16'$.

Die Ecken, in denen vier Kanten der ersten mit vier der zweiten Art zusammenstossen, heissen vierundvierkantige.

Da die Triakisoktaëderflächen zu je zwei sich in einer Kante schneiden, welche die Richtung einer Oktaëderkante hat, so müssen sie in Combination mit dem Oktaëder als eine Zuschärfung*) der Kanten desselben erscheinen, Fig. 164, während umgekehrt das Oktaëder die dreikantigen

Fig. 164.

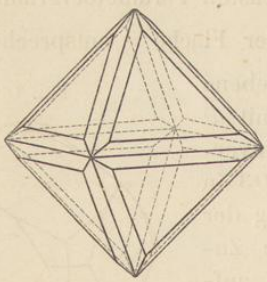
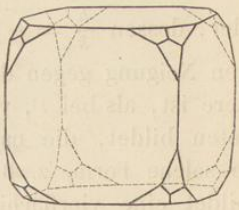


Fig. 165.



Ecken der Pyramidenoktaëder gerade abstumpft. Am Hexaëder treten diese Formen als dreiflächige Zuspitzung der Ecken auf, Fig. 165, wobei die Zu-

*) Unter einer Zuschärfung einer Kante versteht man das Auftreten einer ihr parallelen Kante, welche von zwei, natürlich einander unter stumpferem Winkel schneidenden Kanten gebildet wird, so dass es eigentlich »Zustumpfung« heissen müsste. Auch eine Ecke wird als zugeschärft bezeichnet, wenn statt derselben eine Kante erscheint.

spitzungsflächen auf die Kanten des Würfels aufgesetzt sind. Das Hexaëder stumpft die vierundvierkantigen Ecken der Pyramidenoktaëder gerade ab. An dem Dodekaëder erscheinen diese Formen als dreiflächige Zuspitzungen der dreikantigen Ecken, die Zuspitzungsflächen so auf die Dodekaëderflächen aufgesetzt, dass jede dieser letzteren in der Zone zweier Triakisoktaëderflächen liegt, wie Fig. 166 zeigt. Es ist also das Dodekaëder die gerade Abstumpfung der 12 Kanten erster Art an dem Pyramidenoktaëder.

Fig. 166.

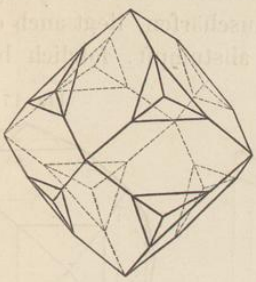
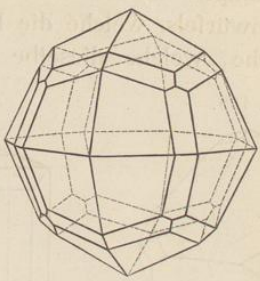


Fig. 167.

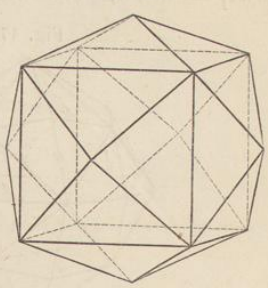


Die Combinationen einer solchen Form mit einem Ikositetraëder haben natürlich ein ganz verschiedenes Aussehen, je nach dem speciellen Werthe der Coëfficienten m. So ist z. B. die gerade Abstumpfung aller 24 Kanten der zweiten Art bei einem Ikositetraëder ein Pyramidenoktaëder, wie aus Fig. 167 zu ersehen ist. Da eine solche Fläche nicht nur in der Zone zweier Ebenen des betreffenden Ikositetraëders, sondern auch in derjenigen einer Oktaëder- und einer Dodekaëderfläche liegt, so ist sie durch die Indices des Ikositetraëders bestimmt und nach bekannter Methode zu berechnen; so findet man z. B., dass die gerade Abstumpfung jener Kanten an dem Ikositetraëder $\{211\} = 2O2$, das Pyramidenoktaëder $\{332\} = \frac{3}{2}O$ ist.

6) Die Tetrakishexaëder oder Pyramidenwürfel, $\{hk0\} = \infty On$, haben ebenfalls zweierlei Kanten: 1) 12 denjenigen des Hexaëders parallele, deren Winkel um so stumpfer ist, je kleiner $\frac{h}{k} = n$, d. h. je weniger es sich von 1 unterscheidet. Derselbe beträgt für die häufigste Form dieser Art (Fig. 168)

$$\{210\} = \infty O2 = 36^0\ 52',2.$$

Fig. 168.



2) 24, zu je 4 in einer vierkantigen Ecke zusammenstossend, gleichsam eine auf jede Würfelfläche aufgesetzte vierseitige Pyramide bildend. Der Winkel dieser ist um so stumpfer, je grösser $\frac{h}{k} = n$ ist, und beträgt

$$\text{für } \{210\} = \infty O2 = 36^0\ 52',2.$$

Für diesen einzigen Pyramidenwürfel sind demnach beide Kantenwinkel gleich gross, so dass je drei Kanten der ersten mit dreien der zweiten Art

in einer sechskantigen Ecke zusammentreffen, während die entsprechenden Ecken bei allen anderen Pyramidenwürfeln dreiunddreikantige sind.

In Combination mit dem Oktaëder müssen die Tetrakishexaëder als vierflächige Zuspitzung der Ecken jenes erscheinen, die Zuspitzungsflächen auf die Oktaëderkanten aufgesetzt, Fig. 169. Umgekehrt stumpft das Oktaëder die dreiunddreikantigen Ecken der Pyramidenwürfel gerade ab. Die letzteren Formen bilden ferner eine Zuschärfung der Kanten des Hexaëders, Fig. 170, während dieses die vierkantigen Ecken der Pyramidenwürfel gerade abstumpft. In der Zone zweier Hexaëderflächen und derjenigen eines Pyramidenwürfels, welche die Kante jener zuschärfen, liegt auch die Dodekaëderfläche, welche dieselbe Würfelkante abstumpft, folglich bildet das

Fig. 169.

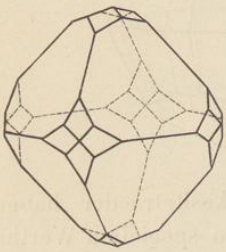


Fig. 170.

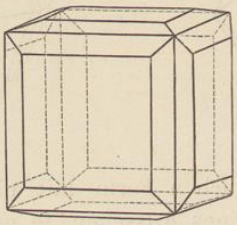
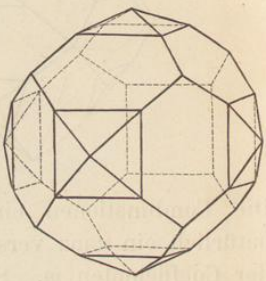


Fig. 171.



Rhombendodekaëder die Abstumpfung aller Kanten erster Art an den Tetrakishexaëdern, und diese spitzen die vierkantigen Ecken des Dodekaëders derart zu, dass die Zuspitzungsflächen auf dessen Flächen gerade aufgesetzt erscheinen, Fig. 171. Was die Combinationen der Pyramidenwürfel mit den Ikositetraëdern und Triakisoktaëdern betrifft, so sind dieselben sehr mannigfaltige, je nach den bestimmten Werthen der Indices der einen und der anderen Form. So ist z. B. leicht einzusehen, dass die gerade Abstumpfung aller in den Haupt-Symmetrieebenen liegender Kanten des Ikositetraëders $\{211\}$ den Pyramidenwürfel $\{210\}$ liefert u. s. f.

7) Die Hexakisoktaëder oder Achtundvierzigflächner, $\{hkl\} = mOn$, von denen in Fig. 172 und 173 die beiden häufigsten,

Fig. 172.

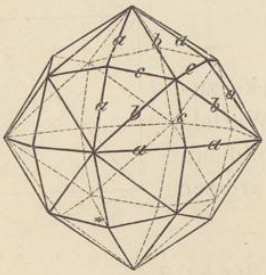
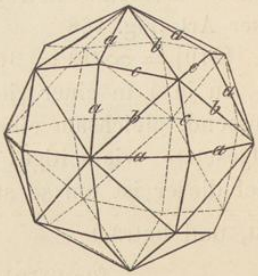


Fig. 173.



$\{321\} = 3O\frac{3}{2}$ und $\{421\} = 4O2$, abgebildet sind, besitzen dreierlei Kanten, deren Winkel im Allgemeinen verschieden sind: 1) 24 mit a bezeichnete,

sämmtlich in den Haupt-Symmetrieebenen gelegen; 2) 24 längere b und 3) 24 kürzere c, in den Dodekaëderebenen liegende Kanten. Diejenigen, welche in Figg. 172 und 173 mit a und b bezeichnet sind, bilden sechs vierundvierkantige Ecken; die Kanten a und c zwölf zweiundzweikantige, endlich b und c acht dreiunddreikantige Ecken. Die Winkel dieser Kanten sind für die beiden angeführten Hexakisoktaëder:

	a	b	c
für $\{321\} = 3O\frac{3}{2}$: =	31° 0′	21°47′	21°47′
für $\{421\} = 4O2$: =	25 13	17 45	35 57.

In Combination mit dem Oktaëder bildet jeder Achtundvierzigflächner eine achtflächige Zuspitzung der Oktaëderecken, Fig. 174, während letztere Form die dreiunddreikantigen Ecken der ersteren gerade abstumpft. An dem Hexaëder treten die Hexakisoktaëder als sechsflächige Zuspitzungen der Ecken auf, Fig. 175, während der erstere die vierundvierkantigen Ecken der letzteren gerade abstumpft. Die Combinationen der Achtundvierzigflächner mit dem Rhombendodekaëder sind verschieden, je nach den

Fig. 174.

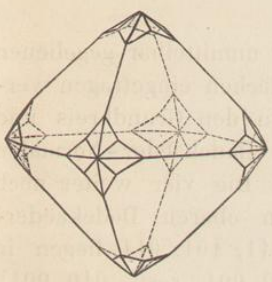


Fig. 175.

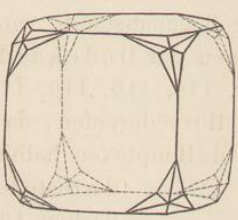
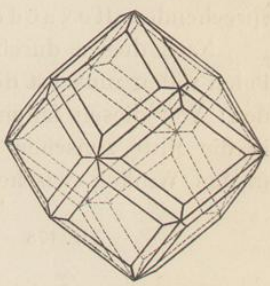


Fig. 176.



Werthen der Indices. Es giebt eine bestimmte Klasse unter denselben, deren Kanten b, Fig. 172, genau den Kanten des Dodekaëders parallel sind; ein solcher erscheint also als Zuschärfung der Dodekaëderkanten, Fig. 176. Das Verhältniss, in welchem hierbei die Indices stehen müssen, ist leicht zu finden: Aus der S. 205 entwickelten Bedingungsgleichung für die Lage einer Fläche in der Zone zweier anderer ergiebt sich für diesen Fall, da das Symbol der Zone zweier Dodekaëderflächen $(101)\ (110) = [\bar{1}11]$ ist,

$$h = k + l$$

als die Bedingung, welcher die drei Indices eines Hexakisoktaëders genügen müssen, damit eine Fläche desselben in die Zone zweier Dodekaëderflächen falle. Setzt man für diese Werthe die auf die Coëfficienten m und n bezogenen (s. S. 240) ein, so wird diese Bedingung:

$$mn = m + n$$

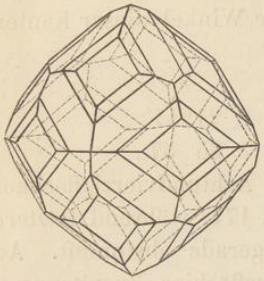
d. i.

$$n = \frac{m}{m-1}.$$

Das in Fig. 176 in Combination mit dem Dodekaëder dargestellte Hexakisoktaëder ist $\{321\} = 3O\frac{3}{2}$, das einfachste, welches dieser Bedingung genügt.

Da die Achtundvierzigflächner dieser Klasse die Kanten des Dodekaëders besitzen, diese aber durch das Ikositetraëder $\{211\} = 202$ abgestumpft werden, so müssen dessen Flächen auch die entsprechenden Kanten eines derartigen Hexakisoktaëders abstumpfen, wie Fig. 177 zeigt, in welcher dieselben Flächen, wie in Fig. 176, und zu diesen noch das Ikositetraëder $\{211\}$ hinzutretend, dargestellt sind.

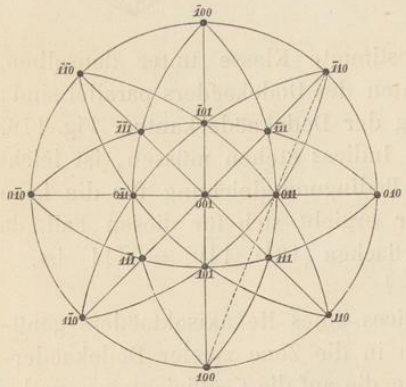
Fig. 177.



§. 53. **Projection und Berechnung der regulären Formen.** Eine Projection der regulären Krystallformen, welche geeignet sein soll, nicht nur einen Ueberblick über die Zonenverhältnisse derselben zu gewähren, sondern auch die Symmetrie der regulären Krystalle zur Anschauung zu bringen, muss zur Projectionsebene eine der Haupt-Symmetrieebenen haben. In Fig. 178 ist daher die den horizontalen Hexaëderflächen parallele Ebene zur Ebene des Grundkreises genommen; alsdann sind offenbar die mit 100, $\bar{1}00$, 010, $0\bar{1}0$, 001 bezeichneten Punkte die Pole der diesen Symbolen entsprechenden Hexaëderflächen.

Nach diesen durch ihre Bogenabstände von 90° unmittelbar gegebenen Polen sollen zunächst diejenigen der Dodekaëderflächen eingetragen werden: Von diesen fallen vier, 110, $1\bar{1}0$, $\bar{1}\bar{1}0$, $\bar{1}10$, in den Grundkreis und in die Mitte zwischen zwei Hexaëderpolen, da die Dodekaëder-Normalen ja den Winkel zwischen zwei Hauptaxen halbiren. Die vier weiter noch darzustellenden oberen Dodekaëderflächen 101, 011, $\bar{1}01$, $0\bar{1}1$ liegen in den Zonen [100, 001] resp. [010, 001], also ihre Pole auf denjenigen beiden grössten Kreisen der Kugel, welche in der Projection als Durchmesser, den Hauptaxen parallel laufend, erscheinen. Um den Abstand eines solchen Poles von 001 zu finden, hat man sich durch einen der beiden Durchmesser eine senkrechte Ebene gelegt zu denken, welche die Kugel ebenfalls in einem grössten Kreise schneidet, auf diesem von dem obersten Punkte, dem Pol der Fläche (001), ab 45° aufzutragen und diesen Pol mit dem untersten Punkte des grössten Kreises durch eine Gerade zu verbinden; wo diese den horizontalen Durchmesser schneidet, liegt die Projection des Poles (vergl. S. 207). Zu dieser Hülfsconstruction kann man aber auch die Fig. 178 benutzen, indem man z. B. die Punkte 100 und $\bar{1}10$ verbindet; wo die Verbindungsgerade den Durchmesser

Fig. 178.



$010 : 0\bar{1}0$ schneidet, muss ein Dodekaëderpol liegen. Nachdem so die in der Zeichnungsebene darzustellenden Dodekaëderpole sämmtlich eingetragen sind, kann man dieselben unter einander durch Zonenkreise, wie $[110, 101, 0\bar{1}1, \bar{1}\bar{1}0]$, verbinden, und es sind alsdann auch die Projectionen derjenigen sphärischen Dreiecke dargestellt, welche zur Berechnung des Winkels zweier benachbarter Dodekaëderflächen erforderlich sind. Suchen wir z. B. den Winkel zwischen den Flächen 101 und 011, so dient dazu das sphärische Dreieck: 001, 011, 101; dieses hat in 001 einen rechten Winkel, und ausserdem sind seine Seiten $001 : 011$ und $001 : 101$ bekannt, nämlich beide gleich 45^0; der gesuchte Winkel der beiden Dodekaëderflächen, d. i. die dem rechten Winkel des Dreiecks gegenüberliegende Seite c, ist demnach gegeben durch die Formel:

$$\cos c = \cos 45^0 \cos 45^0 = \tfrac{1}{2}$$

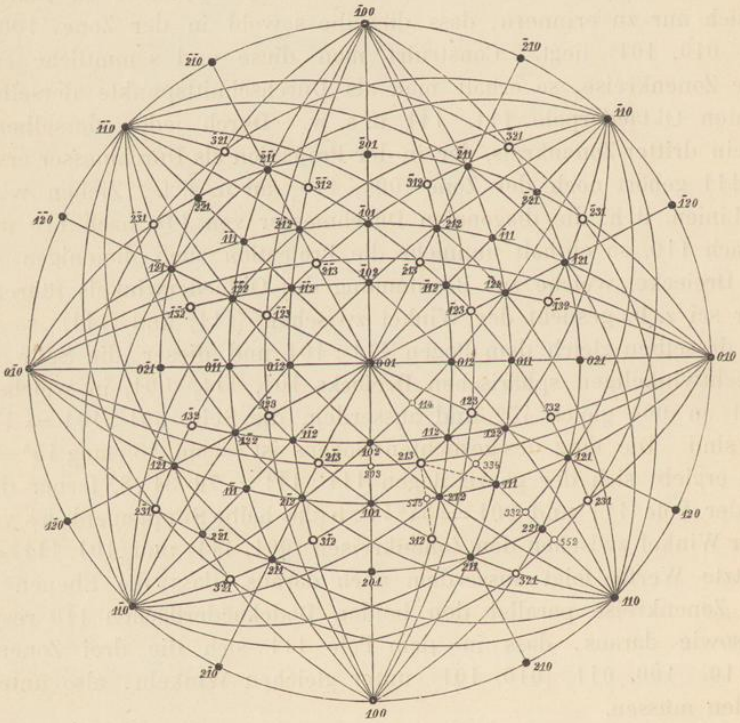
c ist also $= 60^0$, wie bereits früher angegeben wurde.

Um die Lage des Pols 111 einer Oktaëderfläche zu finden, hat man sich nur zu erinnern, dass dieselbe sowohl in der Zone $[100, 011]$, als in $[010, 101]$ liegt. Construirt man diese und sämmtliche entsprechende Zonenkreise, so erhält man als Durchschnittspunkte derselben die gesuchten Oktaëderpole 111, $1\bar{1}1$ u. s. w. Durch jeden derselben geht noch ein dritter Zonenkreis, der in der Projection als Durchmesser erscheint, denn 111 gehört noch der Zone $[001, 110]$ an u. s. f. Ziehen wir auch diese Linien, d. h. die diagonalen Durchmesser von 110 nach $\bar{1}\bar{1}0$ und von $1\bar{1}0$ nach $\bar{1}10$, so enthält nunmehr die Projection auch diejenigen sphärischen Dreiecke, welche zur Bestimmung des Oktaëderwinkels führen. Als solcher sei z. B. gesucht der Winkel zwischen (111) und $(1\bar{1}1)$, so ist die Hälfte desselben gleich dem Bogen $111 : 101$ und dieser die Seite des in 101 rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks 101, 111, 001, in welchem der Winkel an 001 gleich 45^0 und ausserdem die Seite $001 : 101 = 45^0$ bekannt sind. Die tang des gesuchten Bogens ist $= \sin 45^0 \operatorname{tang} 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; daraus ergiebt sich der ganze Bogen $111 : 1\bar{1}1 = 70^0 31',8$, ferner der Abstand der Pole 111 und $001 = 54^0 44',1$ (das halbe Supplement des vorigen) und der Winkel zwischen den Zonenkreisen $[001, 111]$ und $[101, 111] = 60^0$. Der letzte Werth folgt ausserdem auch daraus, dass die Ebenen dieser beiden Zonenkreise parallel den beiden Dodekaëderflächen $1\bar{1}0$ resp. $\bar{1}01$ sind, sowie daraus, dass in dem Pole 111 sich die drei Zonenkreise $[001, 110]$ $[100, 011]$ $[010, 101]$ unter gleichen Winkeln, also unter 60^0, schneiden müssen.

Von den drei einfachsten Formen soll nunmehr zu den Vierundzwanzigflächnern übergegangen und mit den in der Zone der Hauptaxen liegenden Tetrakishexaëdern $(hk0)$ begonnen werden. Da die Normale z. B. zu der Fläche $(k0h)$ in der Ebene (010) liegt, ihr Pol also zwischen 001 und 101 fällt (um so näher an 001, je mehr die Form des Pyramidenwürfels dem Hexaëder ähnelt), so lehrt eine einfache Ueberlegung, dass sein Abstand von 001 dadurch bestimmt ist, dass dessen $\operatorname{tang} = k : h$. So ergiebt sich z. B. $102 : 001 = 26^0 33',9$, woraus für $102 : 101 = 18^0 26,1$

und für $102 : 201 = 36^0 52',2$ (vergl. S. 257) folgt. Trägt man (Fig. 179) mit demselben Abstande von 001 auch den Pol 012 ein, so kann man den Winkel einer Kante zweiter Art am Tetrakishexaëder, nämlich $102 : 012$, unmittelbar aus den beiden gleichen Bögen $102 : 001$ und $012 : 001$ ableiten, da dieselben mit dem gesuchten Bogen ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck bilden. Handelt es sich darum, umgekehrt das Verhältniss $k : h$, also das Zeichen des Tetrakishexaëders, aus einer gemessenen Kante zu berechnen, so leuchtet ein, dass die hexaëdrische Kante, z. B. $h\,0\,k : k\,0\,h$ unmittelbar den Winkel $k0h : 001$ giebt, dessen tang das gesuchte Verhältniss ist. Liegt dagegen die Messung einer Kante der zweiten Art vor, wie eine solche in Fig. 179 durch den

Fig. 179.



Bogen $102 : 012$ repräsentirt ist, so halbirt man den gemessenen Werth und hat dann in demselben die Seite eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks, in welchem ausserdem noch der gegenüberliegende Winkel $= 45^0$ bekannt ist (ein solches Dreieck ist das in der Figur von 001, 012, 114 gebildete); man berechnet in demselben die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, d. h. den Abstand des Poles einer Tetrakishexaëderfläche von 001, dessen tang nach Obigem das gesuchte Verhältniss $k : h$ ist.

Als Beispiel der Berechnung eines Ikositetraëders mag diejenige der durch die Zonen [101, 011] und [001, 111] gegebenen Form {211} dienen. Sei von derselben der Winkel einer Kante 1. Art (s. S. 253), z. B. 112 : $1\bar{1}2$, zu berechnen, so ist dieser das Doppelte des Bogens 112 : 102, welcher sich leicht aus dem rechtwinkelig sphärischen Dreiecke 112, 102, 001 ergiebt, dessen Winkel an 001 = 45° und dessen Seite 001 : 102 bekannt ist (s. oben unter Tetrakishexaëder). Diese Methode ist aber auch für jedes andere Ikositetraëder gültig, da alle Pole *kkh* zwischen 001 und 111 liegen und mit *k*0*h*, d. h. einer Fläche des Pyramidenwürfels, welcher dieselben Werthe *h* und *k* besitzt, je ein ähnliches sphärisches Dreieck bilden, dessen Seite *k*0*h* : 001 unmittelbar durch das Verhältniss *k* : *h* gegeben ist. Sie kann also auch umgekehrt dazu dienen, um aus dem gemessenen Winkel der Ikositetraëderkante, resp. aus der Hälfte derselben, d. i. dem Bogen *kkh* : *k*0*h*, den Abstand des letzteren Pols von 001 und daraus die Indices zu berechnen. Um eine Kante der 2. Art, z. B. 211 : 121, aus dem gegebenen Zeichen der Form herzuleiten, hat man in demselben Dreieck den Abstand des Poles 112 (allgemein *kkh*) von 001 zu berechnen und diesen von dem Bogen 001 : 111 = 54°44′,1 (s. S. 261) abzuziehen; der so erhaltene Bogen 112 : 111 (*kkh* : 111) ist gleich 211 : 111 (*hkk* : 111) = 121 : 111 (*khk* : 111), der gesuchte Winkelabstand 211 : 121 (allgemein *hkk* : *khk*) ist also die dritte Seite in dem gleichschenkeligen Dreieck 211, 121, 111, in welchem die beiden gleichen Seiten und der zwischenliegende Winkel = 120° (da in 111 sich die Zonenkreise unter 60° schneiden) bekannt sind. Dieses Dreieck wird aber von dem Zonenkreise [111, 110] symmetrisch halbirt, daher von demselben in zwei rechtwinkelige sphärische Dreiecke getheilt, deren rechter Winkel im vorliegenden Falle an dem Pol 332 liegt, dessen Indices aber auch in jedem andern Falle durch die beiden daselbst sich kreuzenden Zonen gegeben sind; in einem solchen rechtwinkeligen Dreiecke, z. B. 211, 111, 332, sind nunmehr die Seite 211 : 111 und der Winkel an 111 (= 60°) bekannt, daher am einfachsten aus diesem der Bogen 211 : 332, d. i. die Hälfte des Winkels einer Kante 2. Art am Ikositetraëder, berechnet werden kann. Soll umgekehrt aus dem Winkel einer solchen Kante das Zeichen der Form hergeleitet werden, so benutzt man das gleiche rechtwinkelige Dreieck, in welchem aber diesmal die dem Winkel von 60° gegenüberliegende Seite (= dem halben gemessenen Winkel) bekannt, und die anliegende, d. i. die Neigung der Ikositetraëder- zur Oktaëderfläche zu berechnen ist; aus letzterer ergiebt sich dann direct diejenige zur Würfelfläche 001 und aus dieser der Winkel der Kante 1. Art, sowie die Neigung des zugehörigen Tetrakishexaëders zu 001, welche letztere unmittelbar das Verhältniss der Indices liefert.

Die Flächen der Triakisoktaëder {*hhk*} liegen zwischen denen des Oktaëders und des Dodekaëders, also ihre Pole auf den Zonenkreisen [111, 101] u. s. w., je nach dem Verhältniss ihrer Indices *h* : *k* näher dem einen oder dem andern Pole. In Fig. 179 sind ausser dem, einem Pyrami-

denoktaëder angehörigen, bereits benutzten Pole 332 diejenigen des häufigsten Triakisoktaëders {221} vollständig eingetragen. Will man den Winkel der oktaëdrischen Kanten einer solchen Form berechnen, z. B. 212 : $2\bar{1}2$, so ist hierzu nur erforderlich die Berechnung von 212 : 101, da dieses die Hälfte jenes ist; dieser letztere Bogen ist aber eine Seite des rechtwinkeligen Dreiecks 001, 101, 212, in welchem ausser der Seite 001 : 101 = 45° auch der Winkel an 001 gegeben ist: die Verlängerung des Zonenkreises 001 : 212 (allgemein: 001 : hkh) trifft nämlich den Grundkreis in einem Pol, dessen Symbol = 210 (allgemein: $hk0$, worin das Verhältniss $h : k$ gleich dem des Pyramidenoktaëders); der Winkel 100 : 210, dessen tang = $k : h$, ist nun aber offenbar gleich dem Winkel zwischen den Zonenkreisen [001 : 210] und [001 : 100]. Soll umgekehrt das Zeichen $\{hhk\}$ aus der Messung des Winkels einer oktaëdrischen Kante berechnet werden, so benutzt man dasselbe Dreieck, wie vorher, indem man aus der Seite 101 : hkh (der Hälfte des gemessenen Winkels) den gegenüberliegenden Winkel sucht, der gleich dem Bogen 100 : $hk0$ auf dem Grundkreis ist und daher durch seine tang das gesuchte Verhältniss $k : h$ giebt. Zur Berechnung des Winkels einer Kante zweiter Art am Pyramidenoktaëder, z. B. 212 : 122, hat man zunächst nach Obigem den halben Winkel der oktaëdrischen Kante zu berechnen, aus dem sich unmittelbar der Winkel zum Oktaëder, z. B. 212 : 111 ergiebt; dieser ist gleich 122 : 111, also ist der gesuchte Bogen 212 : 122 die dritte Seite in dem gleichschenkeligen Dreieck 212, 122, 111, in welchem der an 111 anliegende Winkel = 120°. Da der Zonenkreis [001 : 110] dieses Dreieck in zwei rechtwinkelige theilt, so ist es einfacher, die Hälfte des gesuchten Bogens aus einem Dreieck der letzteren Art, z. B. 212, 334, 111, in welchem natürlich der Winkel an 111 nun = 60° ist, herzuleiten. Ein ebensolches Dreieck benutzt man auch bei der Berechnung des Zeichens eines Triakisoktaëders aus der Messung einer Kante zweiter Art, indem man nunmehr umgekehrt aus dem Bogen, welcher dem Winkel von 60° gegenüberliegt, d. i. aus der Hälfte des gemessenen Winkels, denjenigen der Triakisoktaëderfläche zu 111 bestimmt, daraus durch Subtraction den derselben Fläche zu 101, d. h. den halben Winkel der oktaëdrischen Kante und aus dieser die Indices wie oben berechnet.

In Fig. 179 sind nun endlich noch sämmtliche Pole der 24 oberen Flächen des häufigsten Hexakisoktaëders {321} eingetragen, und soll an diesem Beispiel zunächst gezeigt werden, wie man bei der Berechnung der Winkel eines Achtundvierzigflächners zu verfahren hat. Die gerade Abstumpfung der dreierlei Kanten einer jeden derartigen Form wird von den Flächen je eines Vierundzwanzigflächners gebildet; es werden nämlich die mittleren Kanten abgestumpft durch ein Tetrakishexaëder, die längsten von einem Ikositetraëder und die kürzesten von einem Triakisoktaëder, deren Zeichen durch dasjenige des Achtundvierzigflächners in bekannter Weise bestimmt sind. So liegt z. B. zwischen den Flächen 213 und $2\bar{1}3$ als Abstumpfung einer mittleren Kante die Fläche 203, deren Polabstand von 001

durch ihre Indices gegeben ist; dieser Abstand bildet aber eine Seite in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck 001, 203, 213, in welchem ausserdem der spitze Winkel an 001 bekannt ist; derselbe ist nämlich gleich dem Abstand zwischen 100 und demjenigen im Grundkreis gelegenen Pole, dessen Indices der Zone [001, 213] genügen, d. i. 210, also ist seine tang $= \frac{1}{2}$. Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite des angeführten Dreiecks ist aber die Hälfte des gesuchten Winkels der mittleren Kanten am Achtundvierzigflächner. Es ist leicht einzusehen, dass dieselbe Rechnungsmethode für jedes Hexakisoktaëder gilt, nur führen die beiden benutzten Zonen für eine andere Form auf ein anderes Tetrakishexaëder als Abstumpfung oder auf einen andern Pol im Grundkreis oder sie ergeben beides verschieden. Ganz analog ist die Berechnung der längsten Kante, welche durch ein Ikositetraëder abgestumpft wird. In dem in Fig. 179 gewählten speciellen Falle ist dieses {211}, und man erhält die Hälfte des gesuchten Winkels, z. B. den Bogen 213 : 112, aus dem rechtwinkeligen Dreieck, in welchem die Seite 001 : 112 und der spitze Winkel an 001 durch die Zugehörigkeit von 213 zur Zone [001, 210] bestimmt ist. Ebenso einfach ist auch die Herleitung des Winkels der kürzesten Kante, z. B. derjenigen zwischen (321) und (231), mittelst der abstumpfenden Fläche (552), denn die Hälfte des gesuchten Winkels, d. i. der Bogen 321 : 552, bildet die Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks 321, 552, 110, in welchem der Bogen 552 : 110 leicht aus den Indices der ersteren Fläche zu berechnen ist, und der spitze Winkel an 110 gleich dem Bogen 001 : $1\bar{1}2$, allgemein: gleich der Neigung desjenigen Ikositetraëders zum Hexaëder, welches in den Zonen $[hkl, 110]$ und $[001, 1\bar{1}0]$ liegt und offenbar durch das Zeichen des Achtundvierzigflächners vollkommen bestimmt ist.

Handelt es sich jedoch darum, das Zeichen eines Hexakisoktaëders aus seinen Winkeln zu berechnen, so leuchtet ein, dass hierzu die Messungen zweier verschiedener Kanten vorliegen müssen, andererseits aber auch genügen, da das Verhältniss der drei Indices $h : k : l$ nur zwei Unbekannte enthält. Seien z. B. die Winkel der mittleren und der längsten Kanten gemessen worden, so sind damit an der in Fig. 179 projicirten Form die Bögen 213 : 203 und 213 : 112, als die Hälften jener Winkel, bestimmt. Jeder dieser beiden Bögen bildet mit 001 ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck, und diese Dreiecke haben die Seite 001 : 213 gemeinsam; werde die letztere mit c, der im ersten Dreieck dem Bogen 213 : 203 $= a$ gegenüberliegende Winkel mit A, der im zweiten Dreieck dem Bogen 213 : 112 $= a'$ gegenüberliegende Winkel mit A' bezeichnet, so ist

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin A'},$$

daraus folgt:

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}$$

und da $A' = 45^0 - A$, so ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \text{cotang}\ A - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

somit

$$\text{cotang}\ A = \frac{\sin a'}{\sin 45^0 \sin a} + 1.$$

Nachdem in dieser Weise A aus den bekannten Grössen a und a' berechnet ist, ergiebt sich unmittelbar der Bogen 001 : 203, d. h. allgemein dasjenige Tetrakishexaëder, welches die mittleren Kanten des Achtundvierzigflächners abstumpft, wodurch zwei Indices des letzteren gegeben sind; der dritte folgt alsdann aus dem Winkel A, denn dieser bestimmt einen Pol auf dem Grundkreis, dessen Verbindungslinie mit 001 den Pol 213 (allgemein klh) enthält. Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn eine mittlere und eine kürzeste Kante gemessen wurde: die Hälfte der ersteren ist die Seite a eines rechtwinkeligen Dreiecks, welches bei dem in Fig. 179 gewählten Beispiele die Eckpunkte 203, 213, 101 hat; der die kürzeste Kante repräsentirende Bogen 213 : 312 wird von dem Zonenkreise [101, 111], weil dieser einer Dodekaëderfläche parallel ist, symmetrisch halbirt, daher der punktirt angedeutete Bogen 213 : 525 die Seite a' eines ebenfalls rechtwinkeligen Dreiecks 525, 213, 101 ist, welches mit dem ersten die jedesmal dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite 101:213 $= c$ gemeinsam hat. Wie im vorigen Falle, gilt also für die beiden an 101 anliegenden Winkel die Gleichung

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}.$$

Da hier aber $A + A' = 90^0$, so ist

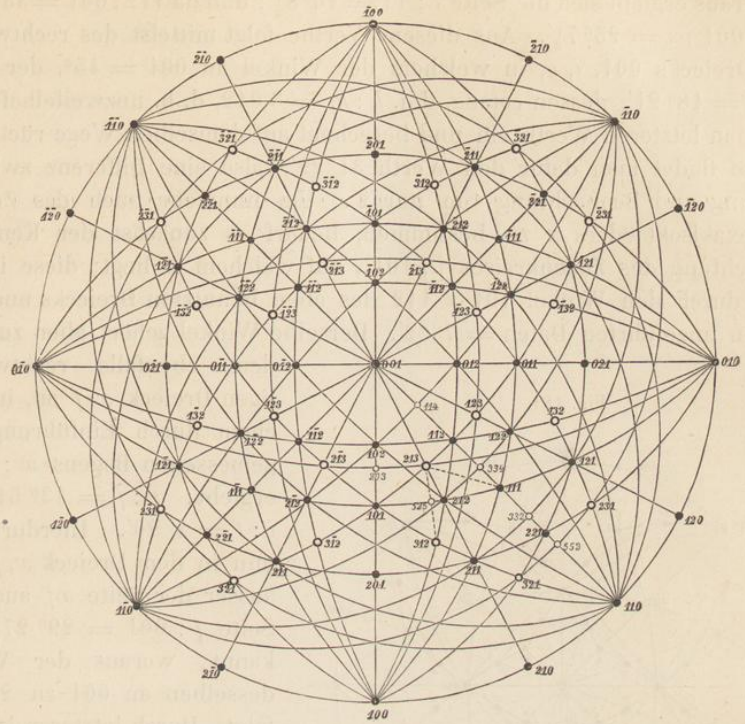
$$\text{cotang}\ A = \frac{\sin a'}{\sin a}.$$

Hiermit sind nun die beiden sphärischen Dreiecke vollständig bestimmt, also auch die beiden Bögen 101 : 203 und 101 : 525, d. h. allgemein die Zeichen der beiden die gemessenen Kanten abstumpfenden Vierundzwanzigflächner, aus denen sich das Zeichen des Hexakisoktaëders in leicht ersichtlicher Weise ergiebt. In ganz ähnlicher Art verfährt man endlich, wenn eine längste und eine kürzeste Kante gemessen wurde, deren Hälften wieder mit a und a' bezeichnet werden mögen: alsdann ist (s. Fig. 179) 213 : 112 $= a$, 213 : 525 $= a'$, und auch diese Bögen bilden, diesmal mit 111, zwei rechtwinkelige Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite 213 : 111 (in der Figur punktirt), ihre Sinus verhalten sich also wiederum ebenso, wie die Sinus des einem jeden gegenüberliegenden Winkels A und A', deren Summe in diesem Falle 60^0 beträgt, folglich ist

$$\text{cotang}\ A = \frac{\sin a'}{\sin 60^0 \sin a} + \tfrac{1}{2}.$$

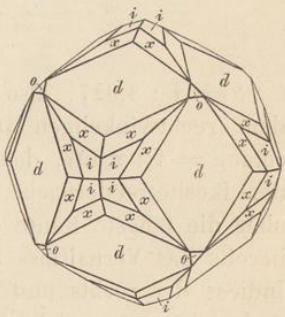
Durch die Berechnung von A und A' sind wieder die beiden sphärischen Dreiecke und damit die Symbole der beiden die gemessenen Kanten abstumpfenden Vierundzwanzigflächner bekannt, welche in allen Fällen das Zeichen des Hexakisoktaëders bestimmen.

Fig. 179.



Zum Schluss möge noch als specielles Beispiel der Entwickelung einer flächenreichen regulären Combination die Berechnung der in Fig. 180 dargestellten Form folgen, wie sie die Krystalle des Magneteisens zuweilen zeigen. An derselben sind die Formen $d = \{110\}\ \infty O$ und $o = \{111\}\ O$ ohne Berechnung zu constatiren. Zur Bestimmung der übrigen Formen genügt die Messung einer einzigen Zone $d\,x\,i$; diese, nach Maassgabe der Flächenbeschaffenheit auf $\pm 5'$ genau, habe ergeben:

Fig. 180.

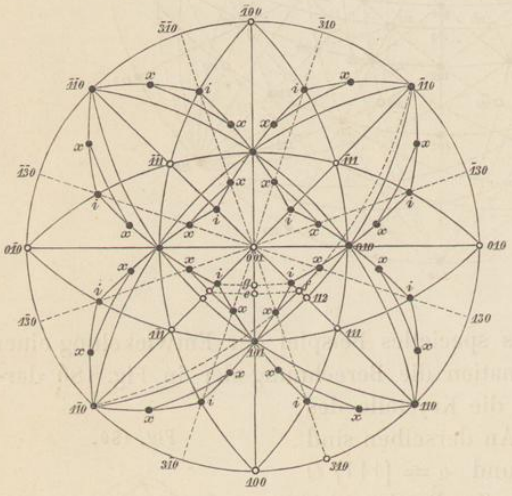


$$dx = 16^0\,58' \qquad x : i = 14^0\,33'$$
$$\text{folglich: } d : i = 31^0\,31'.$$

Die Form i ist offenbar ein Ikositetraëder, dessen $h : k > 2$, und dessen Zeichen zunächst berechnet werden soll. In Fig. 181 (s. folg. S.), in welcher alle Flächen der Combination und sämmtliche durch Kanten an derselben repräsentirte Zonen eingetragen und von den nur zur Hülfe benutzten Zonen und Flächenpolen unterschieden sind, ist der Bogen $101 : i$, gleich dem gemessenen Winkel $31^0\,31'$, eine Seite des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks $101, 112, i$,

in welchem ausserdem die Seite $101 : 112 = \frac{1}{2}(101 : 011) = 30^0$ bekannt ist. Hieraus ergiebt sich die Seite $i : 112 = 10^0 8\frac{1}{2}'$, und da $112 : 001 = 35^0 16'$*), so ist $001 : i = 25^0 7\frac{1}{2}'$. Aus diesem Werthe folgt mittelst des rechtwinkeligen Dreiecks 001, i, g, in welchem der Winkel an $001 = 45^0$, der Bogen $001 : g = 18^0 21'$, dessen cotang, d. i. $h : k$, $= 3{,}012$, d. h. unzweifelhaft $= 3$. Setzt man letzteren Werth ein und berechnet auf demselben Wege rückwärts $i : d$, so findet man dafür den Werth $31^0 29'$, also eine Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung von nur $2'$. Um nunmehr auch das Zeichen des Hexakisoktaëders x zu bestimmen, bedarf es zunächst der Kenntniss der Richtung des Zonenkreises $[i, 101]$, auf welchem x liegt; diese ist gegeben durch den Winkel $101 \cdot i \cdot 112$ des oben benutzten Dreiecks und folgt aus den angeführten Daten $= 73^0 2'$. Derselbe Winkel gehört aber zugleich dem ebenfalls rechtwinkeligen Dreieck xif an, in welchem durch Einführung des gemessenen Bogens $x : i$ sich ergiebt: $x : f = 13^0 54'$ und $i : f = 4^0 20'$. Hierdurch ist nun in dem Dreieck x, f, 001 ausser der Seite xf auch die Seite $f : 001 = 29^0 27\frac{1}{2}'$ bekannt, woraus der Winkel desselben an 001 zu $26^0 43'$ folgt. Durch letzteren ist aber der Pol des Grundkreises bestimmt, welcher in der Zone $[001, x]$ liegt; aus seinem Abstande von 100, welcher $45^0 - 26^0 43' = 18^0 17'$ beträgt, ergeben sich nämlich die Indices desselben $k : h = 1 : 3{,}027$, also ist dieser Pol derjenige der Fläche (310). Aus dem rechtwinkeligen Dreieck 001, e, f folgt $001 : e = 21^0 46'$, dessen cotang $= 1 : 2{,}504$, daher die Indices des Poles $e = 205$ und das Symbol der Ikositetraëderfläche, deren Pol der Punkt f, $= (225)$. Diese stumpft aber die längste Kante des Achtundvierzigflächners x ab, von dessen Indices bereits das Verhältniss zweier $(= 1 : 3)$ bekannt ist; setzen wir daher die Indices der rechts und links von f liegenden Flächen desselben $= (31x)$ und $(13x)$, so ergiebt sich als Symbol ihrer Zone $[\bar{x}, \bar{x}, 4]$, und da in dieser Zone die Fläche (225) liegt, so muss $4x = 20$ sein, d. h. $x = 5$. Das

Fig. 181.



*) Weil $\overline{111} : 112 = 90^0$ (da nach S. 245 zu einer Oktaëderfläche sechs Dodekaëderflächen, also auch die Abstumpfungen ihrer Kanten senkrecht stehen) und $\overline{111} : 001 = 54^0 44'$.

gesuchte Symbol des Hexakisoktaëders ist {531}. Die Rückberechnung desselben liefert für den Winkel $x : i$ den Werth $14^0 27\frac{1}{2}'$.

§. 54. **Zwillinge des regulären Systems.** Wenden wir die allgemeinen Auseinandersetzungen des §. 48 auf den speciellen Fall der holoëdrisch regulären Krystalle an, so ergiebt sich, dass als Zwillingsebene einer regelmässigen Verwachsung zweier Krystalle dieses Systems eine Fläche jeder regulären Form fungiren kann, ausgenommen die des Hexaëders und des Dodekaëders, weil diese Symmetrieebenen sind und die beiden Krystalle alsdann eine parallele Stellung erhalten, also krystallographisch identisch sein würden. Solche Parallelverwachsungen entstehen oft bei schnellem Wachsthum der Krystalle, indem an den Ecken und Kanten besonders viel Substanz angelagert, und dadurch eine Aneinanderreihung zahlreicher kleiner paralleler Krystalle nach krystallographisch bestimmten Richtungen gebildet wird, welche man als »Wachsthumsformen« zu bezeichnen pflegt.

Die einfachste von denjenigen Formen des regulären Systems, welche nicht Symmetrieebenen sind und nach denen deshalb Zwillingsbildung, d. h. regelmässige Verwachsung nicht paralleler Krystalle, stattfinden kann, ist das Oktaëder. Aus den Elasticitäts- und Cohäsionsverhältnissen der regulären Krystalle folgt, dass zweifellos die drei Hauptaxen die Richtungen gleicher, sei es maximaler, sei es minimaler Anziehung darstellen, und hiernach leuchtet es ein, dass die beständigste Gleichgewichtslage zwischen zwei Theilchen ausser der parallelen diejenige sein wird, in welcher die Theilchen in Bezug auf eine Ebene zu einander symmetrisch liegen, gegen welche die drei Hauptaxen gleich geneigt sind; dies ist aber die Oktaëderfläche. Nach den Eingangs des §. 48 angestellten Betrachtungen ist daher zu erwarten, dass am leichtesten eine symmetrische Verwachsung nach dem Oktaëder entsteht, und in der That sind bisher fast noch nie andere Zwillinge holoëdrisch regulärer Krystalle beobachtet worden, als solche, in denen die beiden verbundenen Krystalle umgekehrt in Bezug auf die Fläche des Oktaëders liegen. Alsdann ist ihre Zwillingsaxe eine sogenannte »trigonale Axe«, nämlich die Normale zu der betreffenden Oktaëderfläche, d. i. die Axe der Zone, welche aus denjenigen sechs Flächen des Dodekaëders besteht, welche zu jener normal sind; in dieselbe Zone fallen auch sechs Flächen von {211}, welche die Kanten jener sechs Dodekaëderflächen abstumpfen und je zwölf Flächen derjenigen Hexakisoktaëder, welche sie zuschärfen (s. S. 259). Da alle diese Flächen auf der Zwillingsebene senkrecht stehen, so fallen dieselben, wenn wir einen Krystall aus der mit dem zweiten parallelen Stellung heraus um die Zwillingsaxe um 180° drehen, wodurch er in die Zwillingsstellung gelangt, mit den ihnen gegenüberliegenden in eine Ebene, die Flächen der Zone der Zwillingsaxe sind also für beide Krystalle identisch. Da in diesem Falle die Zwillingsaxe parallel einer möglichen Kante des Krystalls, nämlich der Dodekaëderkante, und in einer möglichen Krystallfläche (der Dodekaëderfläche) normal zu einer mög-

lichen Kante (Combinationskante von {110} und {111}) liegt, so fallen hier die drei Arten von Zwillingsgesetzen, welche S. 232 und 233 aufgeführt wurden, in eines zusammen.

Lediglich von theoretischem Interesse ist der Satz, welcher für die symmetrischen Verwachsungen des regulären Systems, nach welcher Fläche sie auch verzwilligt seien, gilt: Jede mögliche Fläche des einen Krystalls ist zugleich eine solche des andern, d. h.: bezieht man eine Fläche des einen Krystalls auf die Axen des andern, so erhält sie rationale Indices. Ueber den Beweis dieses Satzes siehe z. B. Naumann, Elemente der theoret. Krystallographie, Leipzig 1856, S. 62.

Da, wie bemerkt, andere Zwillingsverwachsungen, als solche nach {111}, nur sehr selten vorkommen, so sollen im Folgenden nur diese des gewöhnlichen Gesetzes näher beschrieben werden:

Zwillingsebene eine Oktaëderfläche: Sind die beiden Krystalle selbst als Oktaëder ausgebildet, ungefähr gleich gross und mit der Zwillingsebene selbst verwachsen, so haben sie, da sie gewöhnlich nach der Zwillingsaxe verkürzt erscheinen, das Ansehen der Fig. 182*); die Zwillingskanten bilden ein regelmässiges Sechseck und sind abwechselnd ein- und ausspringend, und da einspringende Winkel an einem einfachen Krystall nicht auf-

Fig. 182.

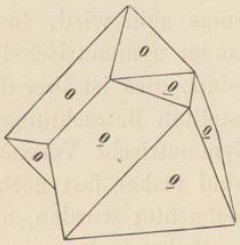
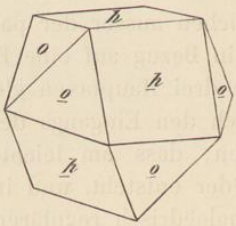


Fig. 183.



treten können, so ist das dargestellte Gebilde leicht als Zwilling zu erkennen (Beipiele: Spinell, Magneteisenerz). Wenn dagegen die Einzelkrystalle nicht einfache Oktaëder, sondern z. B. Combinationen mit dem Würfel sind, so können sie wie Fig. 183 erscheinen, d. h. ohne einspringende Winkel, einer hexagonalen Combination zweier trigonaler Pyramiden mit der Basis (d. i. die Zwillingsebene) gleichend (Beispiel: Bleiglanz). Sind bei einer solchen Verwachsung die beiden Krystalle ungleich gross, so können sie in der mannigfaltigsten Weise, der eine über den andern, übergreifen; s. eine Anzahl solcher Formen in den Abbildungen zu der Arbeit von Sadebeck, »über die Krystallisation des Bleiglanzes, Zeitschr. d. d. geolog.

*) Hier, wie in den folgenden Figuren, hat ein Krystall die übliche Stellung, die ihm als einfachem zukommt; die Flächenzeichen des anderen sind unterstrichen, z. B. o.

Gesellsch. 1874, 617«, von denen in Fig. 184 eine copirt ist. Sind die nach dem Oktaëder verwachsenen Krystalle als Hexaëder ausgebildet, so erscheinen sie gewöhnlich ganz durch einander gewachsen, wie es Fig. 185 darstellt; hier sind beide Hexaëder gleich gross und genau concentrisch,

Fig. 184.

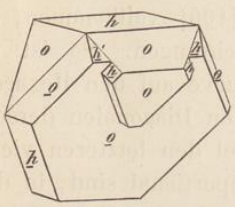
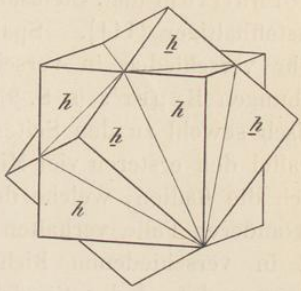


Fig. 185.



während dies an natürlichen Krystallen selbstverständlich nicht der Fall ist; ist das eine Hexaëder z. B. beträchtlich kleiner, so ragen nur einige Ecken desselben um ein Weniges über die Flächen des anderen hervor u. s. w. (Beispiel: Flussspath).

§. 55. Beispiele holoëdrisch regulär krystallisirender Substanzen.

Phosphor = *P*. Krystallisirt aus Chlorschwefel u. a. Lösungsmitteln in Dodekaëdern, bei der Sublimation im Vacuum oder in sauerstofffreien Gasen in Combinationen von {110} {111} {100} {311} {421}.

Silicium = *Si*. Schwarze, metallglänzende Oktaëder, meist Zwillinge = Fig. 182, aber parallel einer Kante $o : \underline{o}$ zu Stäben mit rinnenförmig einspringenden Winkeln verlängert.

Eisen = *Fe*. Kleine oktaëdrische, nach den Hauptaxen an einander gereihte Krystalle in porös erstarrtem Roheisen: hexaëdrische Spaltbarkeit sehr deutlich in manchen Meteoreisen.

Kupfer = *Cu*. In Schlacken abgeschiedenes und galvanisch gefälltes zeigt meist {111}, die natürlichen Krystalle {100} {111} {110} {301} (Fig. 170) u. s. f. — Zwillinge nach {111} Fig. 183.

Blei = *Pb* erstarrt aus dem geschmolzenen Zustand in Oktaëdern oder Combinationen von {111} und {100}.

Quecksilber = *Hg* erstarrt in Oktaëdern.

Silber = *Ag*. Galvanisch abgeschiedene und natürliche Krystalle: {100} {111} {110} {311} u. s. f. — Zwillinge nach {111}.

Gold = *Au* zeigt dieselben Formen und Zwillinge.

Platin = *Pt*. Natürlich {100}.

Bleisulfid (nat. Bleiglanz) = *Pb S*. Künstliche {100}, natürliche Krystalle: {100} {111} {110} {221} {211} u. a. (s. Figg. 145, 146, 157, 164). Zwillinge nach {111}, Figg. 183, 184. Spaltbar {100} vollkommen.

Silbersulfid (nat. Silberglanz) = Ag^2S. Natürliche Krystalle {100} {111} {110} {211} (Figg. 146, 147).

Arsenige Säure = As^2O^3. Aus Lösungen und sublimirt {111}.

Antimonoxyd (nat. Senarmontit) = Sb^2O^3. Dito. Anomal doppeltbrechend.

Chlornatrium (nat. Steinsalz) = $NaCl$. Aus wässeriger Lösung {100}, aus harnstoffhaltiger {111}. Spaltbar nach {100} vollkommen, daher die Härte sehr verschieden in verschiedenen Richtungen. So ist nach den Untersuchungen Exner's (s. S. 9) die Härtecurve auf den Hexaëderflächen symmetrisch sowohl zu den Seiten, als zu den Diagonalen derselben und zeigt parallel den ersteren vier Minima, parallel den letzteren vier Maxima, wobei sich die Radien, welche der Härte proportional sind, in dem einen und dem anderen Falle verhalten wie 1 : 1,3. Directe Messungen der Zugfestigkeit in verschiedenen Richtungen stellte Sohnke (Poggend. Ann. 137, 177) an und fand das Gewicht, welches nöthig ist, um ein Steinsalzprisma von 1 Quadratmillim. Querschnitt zu zerreissen, = 35 Loth, wenn die Längsaxe des Prismas senkrecht zum Hexaëder, über 105 Loth, wenn dieselbe senkrecht zu einer Oktaëderfläche ist. Mit dieser grossen Differenz der Cohäsion in verschiedenen Richtungen dürfte es wohl zusammenhängen, dass auch der Elasticitätscoëfficient sich mit der Richtung erheblich ändert; nach den Messungen Voigt's (»Untersuchung über die Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes, Dissertat. Leipzig 1874) ist der Elasticitätscoëfficient

parallel den drei Hauptaxen	= 4170	Kilogr.
normal zu {110}	= 3400	„
normal zu {111}	= 3180	„

und ist in allen krystallographisch gleichwerthigen Richtungen gleich gross. Die Gleitflächen des Steinsalzes sind die sechs Dodekaëderflächen; stumpft man zwei gegenüberliegende Kanten eines Würfels durch Schleifen ab und presst das Stück senkrecht zu diesen Flächen zusammen, so entsteht eine bleibende Verdichtung in der Richtung der Diagonale und daher ein das Licht doppeltbrechender Streifen; durch stärkeren Druck kann man eine glänzende Bruchfläche nach der diagonalen Dodekaëderebene erhalten. Ein von den sechs Würfelflächen begrenztes Prisma von den Endflächen her, also in der Richtung einer Hauptaxe, zusammengepresst, wird kürzer und dicker durch Gleiten der Theilchen nach den Dodekaëderflächen, und lassen sich so bedeutende Deformationen hervorbringen, ohne dass das Stück zerbricht. Hierbei, sowie beim Zerschlagen, Schleifen u. s. w. entstehen aber immer lokale Verdichtungen im Steinsalz, welche sich durch Doppelbrechung (Aufhellung zwischen gekreuzten Nicols) zu erkennen geben. Man findet sogar selten ganz homogene und von doppeltbrechenden Stellen freie Steinsalzstücke. Die Gleitflächen erhält man auch durch die Körnerprobe, indem die Schlagfigur auf den Würfelflächen ein rechtwinkeliges Kreuz darstellt,

dessen Radien den Diagonalen parallel laufen (Reusch, Poggend. Ann. 132, 441).

Brechungsexponent des Steinsalzes

$n = 1{,}54418$ für Natriumlicht (Linie D)

s. Stefan, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 63, II, 241).

Chlorsilber = $AgCl$. Aus ammoniakalischer Lösung {111}; natürliche Krystalle: {100} {111} {110}.

Fluorcalcium (nat. Flussspath) = CaF^2. An natürlichen Krystallen sehr viele Formen bekannt; am häufigsten: {100} {111} {110} {310} {311} {421} (s. Figg. 170, 175). Zwillinge nach {111}, Fig. 185. Spaltbar nach {111}.

Kaliumplatinchlorid = K^2PtCl^6. Oktaëder. Dieselbe Form hat das analoge Ammoniumsalz, auch wenn der Wasserstoff des NH^4 durch organische Radicale ersetzt ist.

Spinell (nat.) = $MgAl^2O^4$: {111} oder Comb. {111} {311}, Fig. 154. Zwillinge nach {111}, Fig. 182.

Eisenoxydoxydul (nat. Magneteisenerz) = $FeFe^2O^4$. {111} oder {110} {111}, selten die Combination {110} {311} {531} {111} Fig. 180. Häufig Zwillinge gleich denen des Spinell.

Granat (nat.) = $\ddot{R}^3\dddot{R}^2Si^3O^{12}$, worin $\ddot{R} = Ca, Mg, Fe$ oder Mn, $\dddot{R} = Al, Fe$ oder Cr. Häufigste Formen: {110} Fig. 147, {110} {211} Fig. 159, {110} {211} {321} Figg. 176, 177. Brechungsexp. $n = 1{,}77$ (roth) bei rothen Granaten. Oft anomal doppelbrechend (s. C. Klein, Zeitschr. f. Kryst. 9, 96.)

§. 56. **Die tetraëdrische Hemiëdrie.** Nach S. 226 erhalten wir die hemiëdrischen Formen, indem wir die holoëdrischen durch Symmetrieebenen in eine Anzahl congruenter Theile zerlegen und die Hälfte der letzteren so auswählen, dass immer zwei in Bezug auf die theilenden Ebenen symmetrische Flächen entgegengesetzten Hälftformen angehören. Die nächstliegende Art der Theilung durch Symmetrieebenen im regulären System wird nun offenbar diejenige sein, bei welcher hierzu die drei Haupt-Symmetrieebenen, als die wichtigsten Symmetrieebenen der Krystalle, benutzt werden, und wir haben die Theilung durch dieselben zuerst anzuwenden bei dem Hexakisoktaëder, weil dieses nach §. 51 den allgemeinen Repräsentanten aller übrigen Formen darstellt, in welchem die letzteren als specielle Fälle gleichsam mit enthalten sind, so dass deren hemiëdrische Formen sich als besondere Fälle der aus dem Achtundvierzigflächner resultirenden hemiëdrischen Gestalt von selbst ergeben.

1) Denken wir uns daher ein Hexakisoktaëder (Fig. 186) durch die drei Haupt-Symmetrieebenen in acht Theile zerlegt, welche den acht Oktanten des Raumes entsprechen, und bezeichnen wir den Theil im vorderen oberen rechten Oktanten als positiv, so müssen nach obiger Definition der linke obere und der rechte untere der Vorderseite, da sie in Bezug auf (010) und (001) zu jenem symmetrisch liegen, der entgegengesetzten (negativen) Hälftform angehören und sind deshalb in der Figur durch Schraf-

firung unterschieden. Es kann also von der Vorderseite nur noch der linke untere Oktant zur positiven Hälfte gehören. Auf der Rückseite muss der rechte obere Oktant negativ sein, und ebenso der linke untere, weil diese symmetrisch zu den beiden positiven der Vorderseite in Bezug auf (100) sind, dagegen positiv der linke obere und der rechte untere. Wenn man an einem Modell des Achtundvierzigflächners die in dieser Weise ausgewählten, d. i. die vier alternirenden Oktanten von den übrigen unterscheidet, etwa durch Colorirung, so kann man sich leicht überzeugen, dass jede der beiden Hälften so beschaffen ist, wie es nach S. 226 erforderlich, d. h. beide Seiten einer jeden der drei gleichwerthigen Hauptaxen werden in gleichem Abstande von gleich vielen Flächen unter gleichen Winkeln geschnitten. Der vorliegende Achtundvierzigflächner besitzt die Parameter $1 : \frac{3}{2} : 3$; im Abstand 1 wird jede Hauptaxe beiderseits durch 4 Flächen geschnitten, welche eine $2 + 2$kantige Ecke bilden, in allen sechs Fällen mit denselben Winkeln; im Abstand $\frac{3}{2}$ sind es wiederum vier Flächen, welche verlängert einander schneiden würden, und die entstehenden $2 + 2$kantigen Ecken wären ebenfalls sämmtlich congruent; endlich ist das Gleiche der Fall für die $2 + 2$kantigen Ecken, welche entständen, wenn man die im Abstand 3 jede Seite einer Hauptaxe schneidenden Flächen bis dahin verlängern würde. Denken wir uns nur eine von diesen beiden Hälften der Flächen vorhanden, so bildet dieselbe eine Form, welche ebenso, wie die holoëdrische, den Raum allseitig umschliesst und die drei Hauptaxen oben und unten, rechts und links, vorn und hinten gleichartig schneidet; dasselbe gilt für die andere Hälfte. Das Hexakisoktaëder zerfällt also nach diesem Gesetze in zwei hemiëdrische Formen, und diese verhalten sich nun, wie zwei von einander ganz unabhängige Gestalten derselben Krystallreihe. Da zu jeder Fläche die parallele dem entgegengesetzten Hemiëder angehört, so sind die hierdurch entstehenden Formen nicht parallelflächig, sondern geneigtflächig, weshalb man auch oft diese Hemiëdrie die geneigtflächige nennt. Die in Fig. 186 weiss gelassenen Flächen bilden die Form Fig. 187 *a*, die schwarzen Fig. 187 *b*.

Fig. 186.

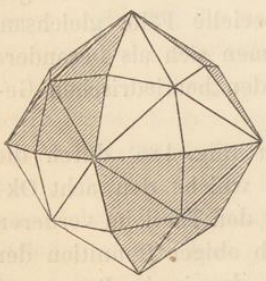


Fig. 187 *a*.

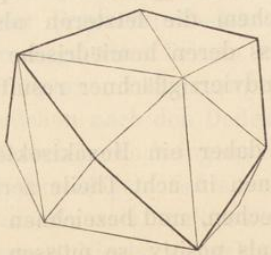
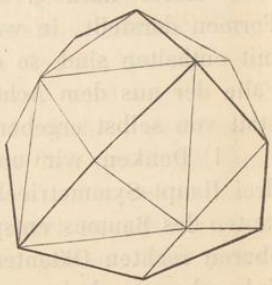


Fig. 187 *b*.



Jede derselben besteht aus vier Gruppen von je sechs Flächen, welche ebenso auch dem holoëdrischen Körper angehören, sich also auch in den-

selben Kanten schneiden; diese letzteren sind in den Figuren etwas schwächer gezeichnet, als die den Hemiëdern eigenthümlichen schärferen, welche dadurch entstehen, dass die Flächen verschiedener Oktanten, zwischen denen solche ausgefallen sind, zum Durchschnitt gelangen. Dadurch tritt das tetraëderähnliche Aussehen mehr hervor, welchem diese Formen ihren Namen »Hexakistetraëder« verdanken. Man bezeichnet dieselben mit

$$\varkappa\{hkl\}^*) = + \frac{mOn}{2} \text{ und } \varkappa\{h\bar{k}l\} = - \frac{mOn}{2}.$$

Denkt man sich die erste dieser beiden Formen um eine Hauptaxe um 90° gedreht, so gelangt sie mit der zweiten zur Congruenz, die beiden Hexakistetraëder eines und desselben Achtundvierzigflächners sind also nicht durch ihre Gestalt, sondern nur durch ihre Stellung verschieden. Da die Fläche, welche zu einer beliebigen Fläche des einen Hexakistetraëders symmetrisch ist in Bezug auf die Würfelfläche, dem entgegengesetzten Hexakistetraëder angehört, so sind diese Formen nicht symmetrisch nach den Hexaëderflächen; sie sind es jedoch in Bezug auf die Flächen des Dodekaëders, da diese jeden Oktanten symmetrisch halbiren, und vier der letzteren vollzählig vorhanden sind.

2) Wenden wir nun dasselbe Gesetz der Hemiëdrie auf die Ikositetraëder an (Fig. 188), so bilden die weiss gelassenen Flächen die hemiëdrische Form Fig. 189 *a*, die schwarzen Fig. 189 *b*, welche Triakistetraëder

Fig. 188.

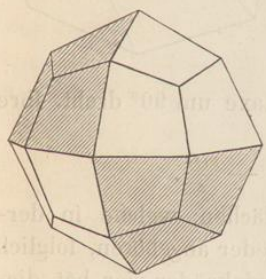


Fig. 189 *a*.

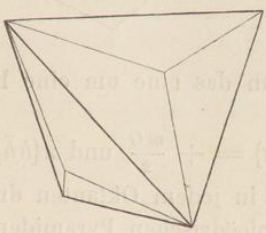
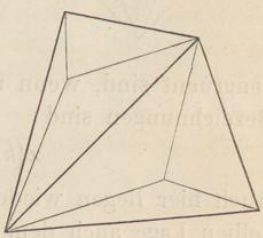


Fig. 189 *b*.



oder Pyramidentetraëder (auch »Trigondodekaëder«) genannt werden. Ihre Bezeichnung ist

$$\varkappa\{hkk\} = + \frac{mOm}{2} \text{ und } \varkappa\{h\bar{k}k\} = - \frac{mOm}{2}.$$

Je drei benachbarte Flächen eines solchen sind identisch in ihrer Lage mit je drei des zugehörigen Ikositetraëders, bilden also dieselben dreikantigen Ecken, deren Kanten in beiden Figuren schwächer gezeichnet sind. Ebenso, wie in der holoëdrischen Form, sind diese Kanten um so stumpfwinkeliger, je weniger das Verhältniss $h : k = m$ von 1 verschieden ist. Derartige Gruppen von je drei Flächen hat jedes Pyramidentetraëder vier, also 12 Kanten, welche denselben Winkel haben, wie die betreffenden Ikositetraëderkanten.

*) $\varkappa$ als Abkürzung von $\varkappa\lambda\tilde{\iota}\nu o\varsigma$, geneigt.

Je zwei Flächen verschiedener Oktanten schneiden einander in Kanten, welche um so schärfer sind, je kleiner $\frac{h}{k} = m$ ist, und die je einer Diagonale einer Würfelfläche parallel laufen. Je drei solcher Kanten, deren im Ganzen sechs vorhanden sind, bilden mit drei der ersteren Art vier 3+3-kantige Ecken.

Wie das Ikositetraëder denjenigen speciellen Fall des Achtundvierzigflächners darstellt, in welchem wegen der Gleichheit zweier Indices die längsten Kanten den Winkel Null annehmen, so kann man auch die Pyramidentetraëder betrachten als diejenigen Hexakistetraëder, in welchen die an denselben (jetzt den kürzesten) Kanten zusammentreffenden Flächen paarweise in eine Ebene fallen.

3) Die Pyramidenoktaëder, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 190, liefern zwei sogenannte Deltoiddodekaëder Fig. 191 *a* und *b*, welche, wie die beiden Pyramidentetraëder, einander vollkommen

Fig. 190.

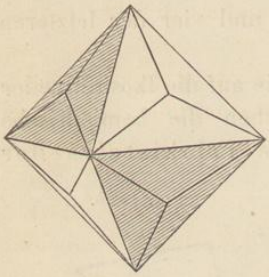


Fig. 191 *a*.

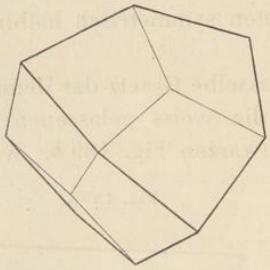
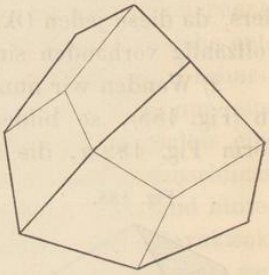


Fig. 191 *b*.



congruent sind, wenn man das eine um eine Hauptaxe um 90° dreht. Ihre Bezeichnungen sind:

$$\varkappa\{hhk\} = + \frac{mO}{2} \text{ und } \varkappa\{h\bar{h}k\} = - \frac{mO}{2}.$$

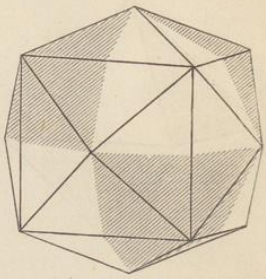
Auch hier liegen wieder in jedem Oktanten drei Flächen, welche in derselben Lage auch dem holoëdrischen Pyramidenoktaëder angehören, folglich haben die dreikantigen Ecken, deren jedes Deltoiddodekaëder vier hat, dieselben Kantenwinkel, wie die dreikantigen Ecken des Triakisoktaëders. Bei gleicher Ausdehnung der Flächen dieser Hemiëder haben die ersteren die Gestalt von »Deltoiden«, d. h. Vierecken mit dreierlei Winkeln, indem nur zwei gegenüberliegende gleich sind. Die (in den Figg. 191 stärker gezeichneten) 12 Kanten, welche dadurch entstehen, dass Flächen verschiedener Oktanten zum Durchschnitt gelangen, bilden vier dreikantige Ecken und mit denen der ersten Art sechs 2+2kantige.

Die Deltoiddodekaëder bilden denjenigen speciellen Fall der Hexakistetraëder, in welchen deren längste Kanten verschwinden, wegen der Gleichheit der beiden grösseren Indices.

4) Gehen wir nun zur Anwendung derselben Hemiëdrie auf diejenigen Achtundvierzigflächner über, deren je zwei in benachbarten Oktanten ge-

legene Flächen in eine Ebene fallen, d. h. die Pyramidenwürfel, so muss aus diesem Grunde die eine hemiëdrische Form derselben vollkommen mit der anderen zusammenfallen. Aus Fig. 192 ist ersichtlich, dass in der That die 24 Flächen des Tetrakishexaëders sowohl der positiven als der negativen Hälfte angehören; durch die tetraëdrische Hemiëdrie werden also die Pyramidenwürfel scheinbar nicht verändert. Trotzdem müssen wir den Pyramidenwürfel einer tetraëdrisch-hemiëdrisch krystallisirenden Substanz als eine hemiëdrische, nur scheinbar holoëdrische Form betrachten, denn es fehlt ihm die charakteristische Eigenschaft des holoëdrischen Tetrakishexaëders, aus acht gleichwerthigen Oktanten zu bestehen; dass vielmehr an demselben zwei benachbarte Oktanten ungleichwerthig sind, tritt in den Combinationen mit anderen Gestalten dieser Hemiëdrie hervor. Der hemiëdrische Pyramidenwürfel ist derjenige specielle Fall des Hexakistetraëders, in welchem dessen Flächen den Hauptaxen parallel sind, nur dass alsdann die positive und die negative Hälfte des Achtundvierzigflächners dieselbe Gestalt annehmen; diese ist die gemeinsame Grenzform, welcher sich die beiderlei Hexakistetraëder nähern, wenn zwei Indices sehr gross im Verhältniss zum dritten werden.

Fig. 192.



5) Dasselbe findet statt bei dem Dodekaëder, Fig. 193, da seine Flächen ebenfalls zwei benachbarten Oktanten angehören, und deshalb die beiden hemiëdrischen Formen zusammenfallen. Man kann das Rhombendodekaëder betrachten als dasjenige Deltoiddodekaëder, in welchem die Flächen den Hauptaxen parallel werden und daher die 2+2kantigen Ecken sich in vierkantige verwandeln, und offenbar liefern die beiden Deltoiddodekaëder 191 *a* und *b* in diesem Falle eine gemeinsame Grenzform.

Fig. 193.

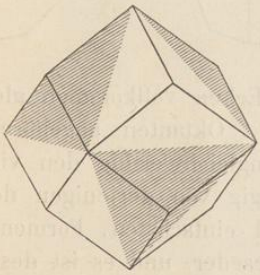
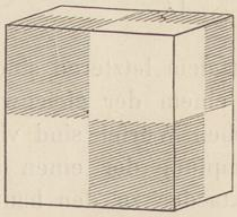


Fig. 194.



6) Dasjenige Hexakistetraëder, dessen m und $n = \infty$ sind, hat sechs den drei Haupt-Symmetrieebenen parallele Flächen, unterscheidet sich also nicht vom holoëdrischen Würfel, noch von der entgegengesetzten Hälftgestalt: Fig. 194.

7) Das Oktaëder Fig. 195, derselben Hemiëdrie unterworfen, liefert die beiden Tetraëder, Fig. 196*a* den weissen Flächen, Fig. 196*b* den schwarzen Flächen der vorigen Figur entsprechend. Die beiden entgegen-

Fig. 195.

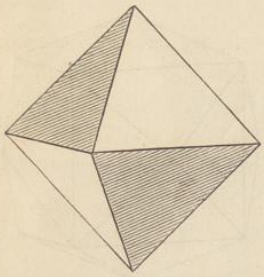


Fig. 196*a*.

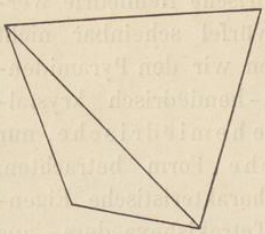
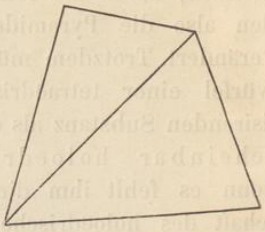


Fig. 196*b*.



gesetzten Formen $\varkappa\{111\} = +\frac{O}{2}$ und $\varkappa\{1\bar{1}1\} = -\frac{O}{2}$ sind vollkommen congruent, da sie, wie alle Formen dieser (nach ihnen genannten) Hemiëdrie, durch eine Drehung von 90° um eine Hauptaxe zur Deckung gebracht werden können. Jedes der beiden Tetraëder besteht nur aus vier Flächen, welche einander in sechs, den Diagonalen der Hexaëderflächen parallelen Kanten schneiden, deren Winkel gleich dem Supplement des Oktaëderwinkels, d. i. 109°28′ beträgt. Die gerade Abstumpfung dieser sechs Kanten liefert demnach den Würfel, Fig. 197. Die Combination beider Formen mit vorherrschendem Hexaëder stellt Fig. 198 dar, aus welcher zugleich der krystallographische Unterschied des hemiëdrischen Würfels vom holoëdrischen

Fig. 197.

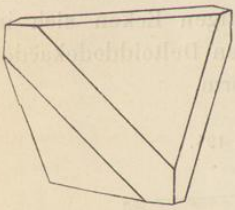


Fig. 198.

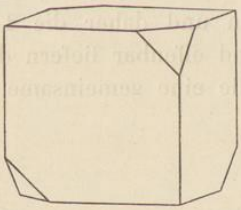
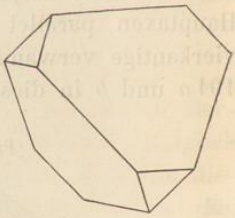


Fig. 199.

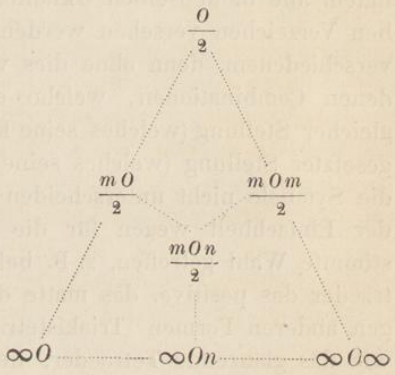


erhellt: an dem letzteren sind die acht Ecken vollkommen gleichwerthig, da sie je einem der gleichwerthigen acht Oktanten angehören, an dem hemiëdrischen Würfel sind vier Ecken ungleichwerthig den vier anderen, die Abstumpfung der einen ist unabhängig von derjenigen der anderen. Da das Oktaëder zu den häufigsten, weil einfachsten, Formen gehört, so gilt das Gleiche auch für die beiden Tetraëder, und es ist deshalb natürlich, dass nicht selten auch beide an demselben Krystall zusammen auftreten, wobei sie sich aber durch ihre Grössenausdehnung, ihre Oberflächenbeschaffenheit u. dergl. unterscheiden. Die Combination $\varkappa\{111\}$, $\varkappa\{1\bar{1}1\}$, das eine die Ecken des anderen abstumpfend, s. Fig. 199. Weitere Combinationen folgen bei den Beispielen.

Aus der Anschauung, dass alle Formen des regulären Systems specielle Fälle der Hexakisoktaëder sind, ergiebt sich also, dass die hemiëdrischen Gestalten einiger derselben nicht von den holoëdrischen verschieden sein können; nämlich die Pyramidenwürfel, das Dodekaëder und das Hexaëder. Wo solche Formen auftreten, kann demnach die Hemiëdrie erst durch die Combination mit anderen erkannt werden.

Diese scheinbar holoëdrischen Formen ergeben sich nun aber als wirkliche hemiëdrische Formen auch noch dadurch, dass sie die Grenzgestalten hemiëdrischer Ableitungsreihen bilden. Diese Reihen können genau in gleicher Weise durch ein Schema graphisch veranschaulicht werden, wie dies S. 250 mit den holoëdrischen Reihen geschehen ist.

Das Hexakistetraëder, als allgemeinste Form, geht durch Grösserwerden von $m\ (= h : k)$ bis ∞ über in einen Pyramidenwürfel als Grenzform, durch Kleinerwerden von n in ein Deltoiddodekaëder, d. h. dasjenige Hexakistetraëder, dessen n (d. i. $k : l$) $= 1$, endlich durch Gleichwerden von m und n $(k = l)$ in ein Pyramidentetraëder; jede dieser drei Arten von Grenzformen der Hexakistetraëder bildet wieder eine Ableitungsreihe, deren letzte Grenzglieder das Tetraëder, das Dodekaëder und der Würfel sind. So gestaltet sich hier das Schema folgendermaassen, wie nebenstehend.



Alles, was bei Besprechung des Ableitungsschemas für die holoëdrischen Gestalten in Bezug auf Zonenverhältnisse gesagt wurde, gilt natürlich auch hier.

Durch die tetraëdrische Hemiëdrie geht die Symmetrie nach den Hexaëderebenen verloren, und die Formen sind nur noch nach den Dodekaëderflächen symmetrisch. Dieser geringere Grad der Symmetrie gilt auch für die scheinbar holoëdrischen Gestalten; z. B. ist der tetraëdrisch hemiëdrische Würfel, obgleich geometrisch dem holoëdrischen gleich, nicht symmetrisch zu seinen eigenen Flächen, denn alsdann müssten zwei benachbarte Ecken desselben gleichwerthig sein; dies sind sie aber nicht, wie die Unabhängigkeit des Auftretens der Abstumpfung an der einen und der anderen (positives und negatives Tetraëder) beweist. So treten also, wie es früher als allgemeines Gesetz der Combinationslehre angeführt wurde, in jeder dieser Reihen nur Formen mit gleichem Grade der Symmetrie mit einander in Combination.

Vermöge der geringeren Symmetrie der tetraëdrischen Krystalle gegenüber den holoëdrischen tritt zu den Formen, nach denen in dieser Abtheilung eine Zwillingsbildung stattfinden kann, noch das Hexaëder hinzu,

dessen Ebenen nun nicht mehr Symmetrieebenen darstellen, daher zwei tetraëdrische Krystalle, nach einer Hexaëderfläche zu einander symmetrisch, nicht parallel sind, sondern sich in derjenigen relativen Stellung befinden, wie die beiden entgegengesetzten Hälften einer holoëdrischen Form. Die Stellung solcher »Ergänzungszwillinge« (vergl. S. 233), wie deren mehrere bei den Beispielen im nächstfolgenden §. angeführt werden sollen, erhält man, wenn man, vom Parallelismus beider Krystalle ausgehend, den einen um 90^0 um eine Hauptaxe oder um 180^0 um eine Dodekaëdernormale dreht.

§. 57. **Beispiele tetraëdrisch-hemiëdrischer Substanzen.** Da die beiden entgegengesetzten Formen, die von einer holoëdrischen sich ableiten, genau dieselbe Gestalt besitzen, so hängt es von der ihnen gegebenen Stellung ab, welche man als positive und welche als negative bezeichnet. Eine Bedeutung gewinnt diese Unterscheidung erst dadurch, dass sie uns die Möglichkeit gewährt, eine Combination unzweideutig zu bezeichnen, indem alle in denselben Oktanten erscheinenden Hälftflächner mit demselben Vorzeichen versehen werden, die der entgegengesetzten Oktanten mit verschiedenem, denn ohne dies würde man z. B. die beiden ganz verschiedenen Combinationen, welche ein Tetraëder mit einem Triakistetraëder gleicher Stellung (welches seine Kanten zuschärft) und mit einem entgegengesetzter Stellung (welches seine Ecken dreiflächig zuspitzt) bildet, durch die Symbole nicht unterscheiden können. In den folgenden Beispielen ist der Einfachheit wegen für die Vorzeichen der Formen immer eine bestimmte Wahl getroffen, z. B. bei der Zinkblende stets das glänzende Tetraëder das positive, das matte das negative genannt, und alsdann diejenigen anderen Formen (Triakistetraëder etc.), welche in denselben Oktanten, wie das glänzende Tetraëder, liegen, als positive, die in denselben mit dem matten Tetraëder liegenden als negative bezeichnet. Es ist aber wohl zu beachten, dass durch Nichts bewiesen ist, dass dasjenige Tetraëder, welches an einem Krystall glänzend auftritt, dasselbe ist, welches an einem anderen Krystall als das glänzendere erscheint, denn die beiden von einander unabhängigen Gestalten $\varkappa\{111\}$ und $\varkappa\{1\bar{1}1\}$ verhalten sich zu einander, wie zwei verschiedene Formen, — und wir finden z. B. an demselben Fundort Flussspathkrystalle, an denen alle Oktaëderflächen matt, alle Hexaëderflächen glänzend sind, neben solchen, an denen genau das Entgegengesetzte stattfindet. Unter Annahme jener, oben als nicht bewiesen bezeichneten Hypothese hat man gefunden, dass die eine abgeleitete Form nur als positive, die andere nur als negative Hälfte vorkommt, und hat die in Rede stehende Hypothese dadurch gestützt geglaubt, dass zwar die beiden Tetraëder zuweilen zusammen auftreten, von den selteneren hemiëdrischen Formen aber fast nie die beiden entgegengesetzten Hälften beobachtet wurden. Das letztere erscheint aber ganz natürlich, nach der S. 226 gemachten Anmerkung, nach welcher die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens derselben an einem Krystall ausserordentlich klein ist. Eine wirklich sichere Unterscheidung positiver und negativer Formen kann also die

Art des Auftretens derselben, ihre Oberflächenbeschaffenheit und dergl. niemals liefern, sondern nur physikalische Eigenschaften, welche unabhängig sind von den zufälligen Umständen bei der Bildung der Krystalle. Eine solche Eigenschaft ist z. B. die Fähigkeit der Krystalle, eine verschiedene Löslichkeit nach verschiedenen Richtungen zu besitzen, wie sie sich in den regelmässigen Aetzfiguren documentirt. Aetzt man z. B. eine Dodekaëderfläche, so ist für die entstehenden Aetzfiguren eine Symmetrie nach der längeren Diagonale des Rhombus nicht erforderlich, weil der Krystall als hemiëdrischer eine solche Symmetrie nicht besitzt. In der That hat Becke gezeigt, dass die dodekaëdrischen Spaltungsflächen der Zinkblende solche nach rechts und links verschieden gestalteten Aetzfiguren liefern und man hierdurch die beiden angrenzenden Oktanten stets unzweifelhaft unterscheiden kann, während die in denselben auftretenden Flächen und deren Ausbildung keinen sicheren Anhalt für die Unterscheidung liefern. Ein weiteres Mittel für dieselbe können die elektrischen Eigenschaften darbieten. Die Normale zur Oktaëderfläche, nach der S. 229 angeführten Definition eine Symmetrieaxe, verbindet ungleichwerthige Oktanten miteinander, und dieser Gegensatz ihrer beiden Pole prägt sich z. B. bei der Zinkblende nach Friedel und Curie dadurch aus, dass ihre entgegengesetzten Enden beim Erwärmen polar elektrisch werden. Bei Leitern des galvanischen Stroms ist wahrscheinlich ein Unterschied in dem Widerstand des Krystalls vorhanden, je nachdem der Strom vom positiven zum negativen Tetraëder oder umgekehrt den Krystall durchläuft.

Diamant = C. Einfache tetraëdrische Krystalle $\varkappa\{111\}$ oder $\varkappa\{321\}$ selten. Die meisten Krystalle scheinen Ergänzungszwillinge zu sein nach dem in Fig. 200 dargestellten Gesetze, d. h. zwei Tetraëder in gekreuzter Stellung, symmetrisch zu einander in Bezug auf die Hexaëderflächen und

Fig. 200.

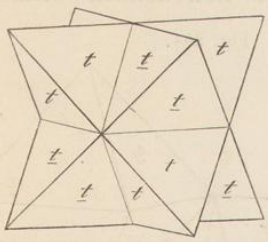
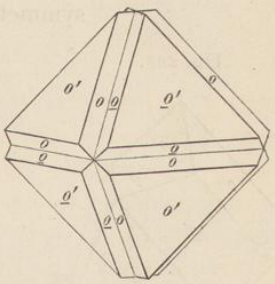


Fig. 201.



durch einander gewachsen. Während die genau der Figur entsprechende Ausbildung des Gesetzes bei dem weiterhin angeführten Fahlerz vorkommt, tritt bei dem Diamanten zu dem Tetraëder o stets noch das Gegentetraëder $o' = \varkappa\{1\bar{1}1\}$ in nahezu gleicher Grösse der Flächen, so dass die Form der Fig. 201 entsteht, gleichsam ein Oktaëder, dessen Kanten durch Rinnen

ersetzt sind, und dessen acht Flächen gleiche Oberflächenbeschaffenheit zeigen müssen, da sie sämmtlich dem gleichen Tetraëder $\varkappa\{1\bar{1}1\}$, aber zweier Krystalle, angehören. Da die Einkerbungen der Kanten oft nahezu oder auch vollständig verschwinden (durch grössere Ausdehnung der nach aussen gekehrten Tetraëderflächen), so resultiren schliesslich Oktaëder von vollkommen holoëdrischer Ausbildung. Wahrscheinlich sind auch die übrigen holoëdrisch erscheinenden Krystallformen des Diamanten, z. B. das besonders häufig in Combination (s. Fig. 174) mit dem Oktaëder auftretende $\{321\}$, als derartige Durchkreuzungszwillinge zu deuten. Ausser diesem Gesetz kommt bei oktaëdrischen Diamantkrystallen auch oft das gewöhnliche Verwachsungsgesetz (Fig. 182) vor. Weniger häufige Formen des Diamanten sind $\{100\}$, $\{110\}$. — Spaltbar vollkommen nach $\{111\}$. Brechungsexponent $n = 2{,}413$ roth, $2{,}419$ gelb, $2{,}428$ grün (Des Cloizeaux). Sehr häufig zeigen die Krystalle unregelmässige Doppelbrechung, jedenfalls in Folge innerer Spannungen, da dieselbe z. B. regelmässig in der Nähe von Einschlüssen auftritt. Ausdehnung durch die Wärme sehr gering: 0,00000354 (kubisch).

Zinkblende $= ZnS$. Fig. 202 stellt die folgende Combination gewisser natürlicher Krystalle dar: $d = \{110\}$, $t = \varkappa\{111\}$ glänzend, $-t = \varkappa\{1\bar{1}1\}$ meist matter, $y = \varkappa\{311\}$, $-i = \varkappa\{2\bar{1}1\}$, $h = \{100\}$. Sehr häufig Zwillinge, meist von ähnlicher Ausbildung, wie die holoëdrischen (Fig. 203), aber dadurch verschieden, dass an der Zwillingsgrenze positive (o') und negative (o) Tetraëderflächen einander gegenüberliegen; in Folge dessen erhält man zwar die Stellung des einen Krystalls, indem man ihn aus der mit dem zweiten parallelen Orientirung um die Normale zur Oktaëderfläche um 180^0 dreht, aber die beiden Krystalle sind nicht symmetrisch zu der betreffenden Oktaëderfläche.

Fig. 202.

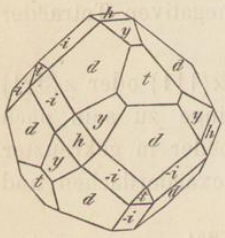


Fig. 203.

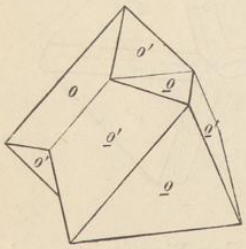
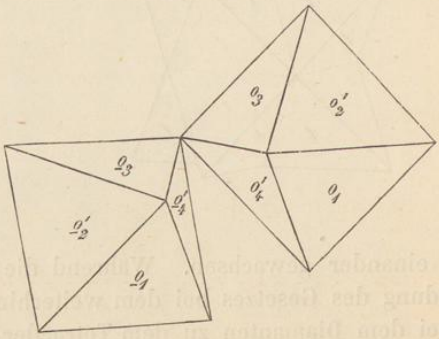


Fig. 204.



Will man unter »Zwillingsebene« nur eine solche Fläche der Krystalle verstehen, nach welcher dieselben zu einander symmetrisch sind auch

unter Berücksichtigung ihrer Oberflächenbeschaffenheit, so muss man die Verwachsung als eine solche nach {211} bezeichnen, denn nach einer Fläche dieses Ikositetraëders, welche der Zone der Zwillingsaxe angehört, sind die beiden Krystalle vollständig symmetrisch, wie man leicht aus Fig. 204 ersieht, in welcher beide Krystalle genau die gleiche Orientirung besitzen, wie in Fig. 203, und in welcher die Flächen des positiven Tetraëders durch Accente an *o* unterschieden sind. — Spaltbar vollkommen nach {110}. Diatherman. Polar pyroëlektrisch nach den trigonalen Axen (s. S. 281), nach denen die tetraëdrischen Formen hemimorph sind. Brechungsexponenten:

$$n = 2{,}341 \text{ roth},$$
$$2{,}369 \text{ gelb}.$$

Fahlerz $= 4(Cu^2, Fe, Zn)\,S + (As, Sb)^2\,S^3$. Die häufigsten Combinationen sind: Fig. 205: $\varkappa\{111\}$, $\{110\}$; Fig. 206: $\varkappa\{111\}$, $\varkappa\{211\}$; nicht sel-

Fig. 205.

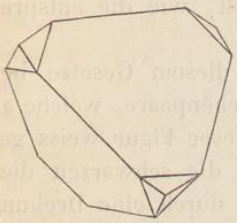


Fig. 206.

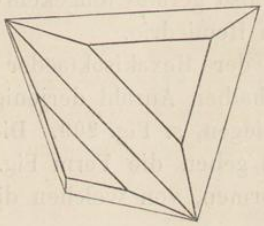
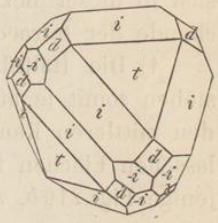


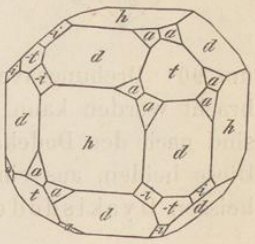
Fig. 207.



ten auch die in Fig. 207 dargestellte complicirtere Combination: $t = \varkappa\{111\}$, $i = \varkappa\{211\}$, $d = \{110\}$, — $i = \varkappa\{2\bar{1}1\}$.

Boracit $= Mg^7 Cl^2 B^{16} O^{30}$. Gewöhnliche Formen: $h = \{100\}$, $d = \{110\}$, $t = \varkappa\{111\}$ glänzend, — $t = \varkappa\{1\bar{1}1\}$ klein und matt, — $i = \varkappa\{2\bar{1}1\}$ als sehr schmale Abstumpfung. Fig. 208 zeigt alle diese Formen und ausserdem das nicht häufige Hexakistetraëder $\varkappa\{531\}$.

Fig. 208.



Die natürlichen Boracitkrystalle, obgleich in ihren Formen vollkommen regulär und lange als ausgezeichnetes Beispiel für die tetraëdrische Hemiëdrie betrachtet, sind nur pseudoregulär und in Wirklichkeit sehr complicirte Verwachsungen rhombischer Krystalle. Bei 265° C. verlieren dieselben jedoch plötzlich ihre Doppelbrechung und wandeln sich in einfach brechende Krystalle um, so dass von da ab bis zum Schmelzpunkt äussere Form und optisches Verhalten übereinstimmen. Hiernach ist die Boracitsubstanz dimorph, und ihre rhombische Form besitzt Dimensionen, welche es gestatten, dass die Krystalle in ihren regelmässigen Verwachsungen pseudoreguläre Gestalten hervorbringen, welche durch

Messung nicht von regulären zu unterscheiden sind; Mallard, s. Zeitschr. f. Kryst. 9, 398. Ueber die Aetzfiguren des Boracit siehe Baumhauer, ebenda 3, 337; über die polare Pyroëlektricität Mack, ebenda 8, 503.

§. 58. **Die pentagonale Hemiëdrie.** Zerlegt man die holoëdrischen Formen des regulären Systems statt durch die Haupt-Symmetrieebenen, wie es bei der Herleitung der tetraëdrischen Hemiëdrie geschah, durch die sechs Dodekaëderflächen, so erhält man 24 Theile, welche an dem Hexakisoktaëder Fig. 209 abwechselnd weiss gelassen und schraffirt sind. Diese Unterscheidung entspricht zugleich den beiden Hälften, welche so ausgewählt sind, dass jedesmal zwei in Bezug auf eine Dodekaëderfläche zu einander symmetrische Theile entgegengesetzten Hälften angehören. Betrachten wir nun eine der beiden Hälften für sich, so ist leicht zu ersehen, dass jede Seite der drei Hauptaxen von gleich vielen Flächen unter demselben Winkel in gleichem Abstande geschnitten wird, wie es bei der tetraëdrischen Hemiëdrie der Fall war, dass aber die aus der einen Hälfte der Flächen bestehende Form hier keine Symmetrie nach {110} zeigen kann, sich in dieser Beziehung also gerade umgekehrt verhält, wie die entsprechende der tetraëdrischen Hemiëdrie.

1) Die Hälftflächner der Hexakisoktaëder nach diesem Gesetze bestehen somit je aus der halben Anzahl derjenigen Flächenpaare, welche an den mittleren Kanten b liegen, s. Fig. 209. Die in dieser Figur weiss gelassenen Flächen für sich geben die Form Fig. 210 a, die schwarzen diejenige Fig. 210 b, zwei Formen, von welchen die eine durch eine Drehung

Fig. 209.

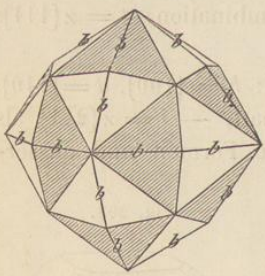


Fig. 210 a.

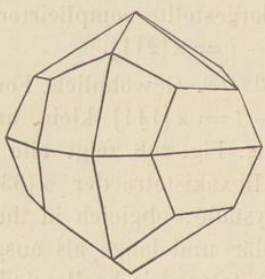
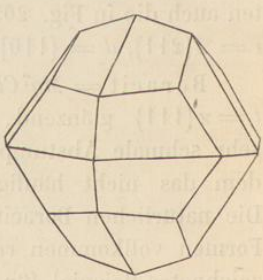


Fig. 210 b.



um 90° (Drehungsaxe eine Hauptaxe) mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann und welche, wie ersichtlich, nicht mehr symmetrisch sind nach den Dodekaëderflächen, wohl aber noch nach den Würfelflächen. Diese beiden, aus einem Achtundvierzigflächner entstehenden Hälftgestalten heissen Dyakisdodekaëder (auch Diploëder) und werden bezeichnet:

$$\pi\{hlk\} = +\left[\frac{mOn}{2}\right] \text{ und } \pi\{hkl\} = -\left[\frac{mOn}{2}\right],$$

um anzudeuten, dass dieselben aus parallelen*) Flächenpaaren bestehen,

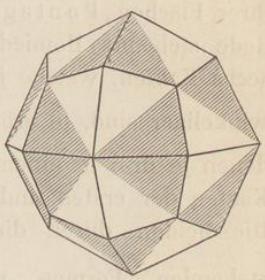
*) π als Abkürzung von παράλληλος.

weshalb die in Rede stehende Hemiëdrie zum Unterschied von der vorhergehenden (der geneigtflächigen) auch die parallelflächige genannt wird. Welches von den beiden Dyakisdodekaëdern man als positives, welches als negatives bezeichnet, ist der freien Wahl überlassen; ist dieselbe aber für einen Krystall einmal getroffen, so ist damit das Vorzeichen aller übriger hemiëdrischer Formen desselben bestimmt.

Die Dyakisdodekaëder besitzen je 12 Kanten, welche mit den Kanten b des ursprünglichen Achtundvierzigflächners identisch sind, 12 schärfere, welche ebenfalls in den drei Haupt-Symmetrieebenen liegen, endlich 24, in welchen sich je zwei Flächen eines Oktanten schneiden. Die Ecken sind daher $2+2$kantige, $2+1+1$kantige und dreikantige. Was die Combinationen verschiedener Dyakisdodekaëder mit einander betrifft, so sind diese sehr mannigfaltig je nach dem Parameterverhältniss und der Gleichheit oder Verschiedenheit ihres Vorzeichens. S. u. Beisp.

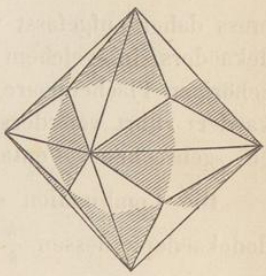
2) Bei den Ikositetraëdern fallen je zwei Flächen in eine Ebene (Fig. 211), von denen die eine dem $+$, die andere dem $-$ Diploëder angehört; die beiden letzteren unterscheiden sich also weder von einander, noch von der holoëdrischen Form. Wenn demnach an einem hierher gehörigen Krystall die Flächen eines Ikositetraëders vorkommen, so tritt diese Form anscheinend holoëdrisch auf. Die Grenzform der Dyakisdodekaëder, welcher sich dieselben nähern, wenn die Zahlen k und l (m und n) nur wenig verschieden sind, ist ein Ikositetraëder, welches sich geometrisch nicht unterscheiden lässt von dem holoëdrischen. Dieses ist jedoch aufzufassen als derjenige Achtundvierzigflächner, dessen $k = l$ ($m = n$) ist; das der hemiëdrischen Krystallreihe angehörige Ikositetraëder als dasjenige Dyakisdodekaëder, dessen $k = l$ ($m = n$) ist, in Folge dessen alle in den Haupt-Symmetrieebenen liegenden Kanten gleiche Winkel haben.

Fig. 211.



3) Bei den Pyramidenoktaëdern findet genau das Gleiche statt, sie müssen mit allen Flächen an einem hierher gehörigen hemiëdrischen Krystall auftreten, weil dasjenige positive Dyakisdodekaëder, dessen $h = k$ ($n = 1$), vollkommen zusammenfällt mit dem zugehörigen negativen (s. Fig. 212), die gemeinschaftliche Grenzform beider das scheinbar holoëdrische Triakisoktaëder ist.

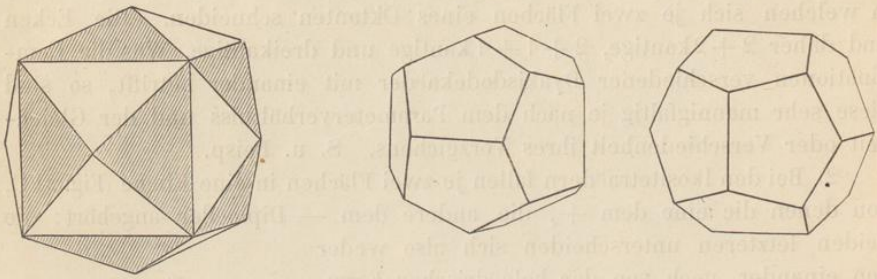
Fig. 212.



4) Betrachten wir dagegen die Tetrakishexaëder, d. h. diejenigen Achtundvierzigflächner, deren $l = 0$ ($m = \infty$), so finden wir, dass hier durch die Hemiëdrie eine Gestalt entsteht, welche nur die halbe Flächenzahl besitzt. Denn der

Pyramidenwürfel ist ein Hexakisoktaëder, bei welchem je zwei, an einer in der Haupt-Symmetrieebene liegenden Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen, da sie derselben Hauptaxe parallel laufen. Von solchen Flächenpaaren ist in dieser Hemiëdrie nur die Hälfte vorhanden, also auch nur die Hälfte der Flächen des Pyramidenwürfels, Fig. 213. Die weiss gelassenen Flächen für sich liefern die in Fig. 214 *a*, die schwarzen die in Fig. 214 *b* dargestellte Form, welche nach der Gestalt

Fig. 213. Fig. 214 *a*. Fig. 214 *b*.



ihrer Flächen Pentagondodekaëder heissen, und nach denen die in Rede stehende Hemiëdrie benannt ist. Die Pentagondodekaëder besitzen sechs Kanten, welche je einer Hauptaxe parallel gehen und um so stumpfwinkeliger sind, je grösser das Verhältniss $\frac{h}{k} = n$ ist, und 24 Kanten, von denen je drei in einem Oktanten eine dreikantige Ecke bilden; die von Kanten der ersten und zweiten Art gebildeten Ecken sind $2+1$kantige. Die beiden durch diese Hemiëdrie aus einem Tetrakishexaëder entstehenden Formen werden bezeichnet $\pi\{kh0\} = +\left[\frac{\infty On}{2}\right]$ und $\pi\{hk0\} = -\left[\frac{\infty On}{2}\right]$. Ebenso, wie ein Pyramidenwürfel das Grenzglied einer Reihe von Achtundvierzigflächnern bildet, so ist jedes Pentagondodekaëder die Grenzform derjenigen Ableitungsreihe von Dyakisdodekaëdern, deren $\frac{h}{k} = n$ gleich demjenigen des Pentagondodekaëders ist. Dasselbe muss daher aufgefasst werden als derjenige specielle Fall eines Dyakisdodekaëders, in welchem $l = 0$ $(m = \infty)$ und deshalb jedes der zusammengehörigen Flächenpaare nur eine Ebene darstellt. Der Name »Dyakisdodekaëder« rührt von derselben Auffassung her, da man sich diese Form als ein »gebrochenes Pentagondodekaëder« vorstellen kann.

Die Combination eines Dyakisdodekaëders mit demjenigen Pentagondodekaëder, dessen $\frac{h}{k} = n$ denselben Werth 2 hat, ist in Fig. 215 dargestellt; das letztere muss, wenn beide gleiche Vorzeichen haben, die Kanten zwischen den zusammengehörigen Flächen gerade abstumpfen. In der Combination mehrerer Pentagondodekaëder gleichen Vorzeichens schärft

dasjenige mit grösserem $\frac{h}{k} = n$ die hexaëdrischen, d. s. die den Hauptaxen parallelen Kanten des anderen zu. Die bei den Krystallen dieser Hemiëdrie sehr häufigen Combinationen der Pentagondodekaëder mit den einfachsten Formen des Systems sollen bei den Beispielen angeführt werden.

Fig. 215.

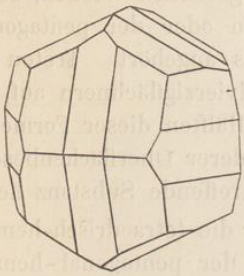
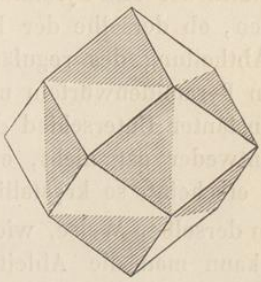


Fig. 216.



5) Das Rhombendodekaëder ist derjenige Achtundvierzigflächner, bei welchem je vier Flächen in eine Ebene fallen, von denen zwei, s. Fig. 216, dem positiven, die anderen beiden dem negativen Dyakisdodekaëder angehören; in diesem Falle können sich also die beiden Hälftformen weder von einander, noch von dem holoëdrischen Dodekaëder unterscheiden.

6) Das Hexaëder, als dasjenige Hexakisoktaëder, dessen $k = l = 0$ $(m = n = \infty)$, hat acht in eine Ebene fallende Flächen, deren vier dem einen, vier dem anderen Dyakisdodekaëder angehören, Fig. 217. Die Grenzgestalt beider für jenen speciellen Werth der Indices ist also identisch der Würfel, welcher somit scheinbar holoëdrisch auftreten muss.

Fig. 217.

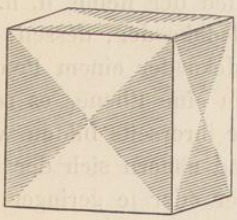
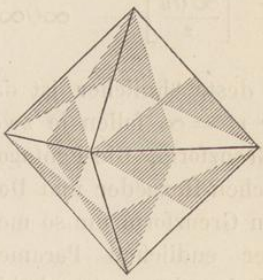


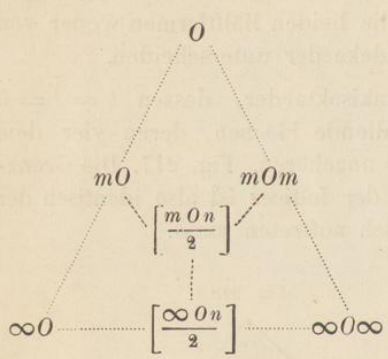
Fig. 218.



7) Das Gleiche ist beim Oktaëder der Fall, denn dieses repräsentirt in jeder Fläche die Lage von sechs Hexakisoktaëderflächen für den Fall, dass $h = k = l$ $(m = n = 1)$; von diesen sechs gehören drei der einen, drei der anderen hemiëdrischen Form an, Fig. 218; diese beiden fallen also vollkommen zusammen und gleichen geometrisch dem holoëdrischen Oktaëder.

Das Gesetz der pentagonalen Hemiëdrie bringt somit nur bei den Achtundvierzigflächnern und den Pyramidenwürfeln geometrisch abweichende Gestalten hervor, die Dyakisdodekaëder und die Pentagondodekaëder, welche nur nach den Hexaëder-, nicht nach den Dodekaëderflächen symmetrisch sind; die übrigen Formen bleiben unverändert. Wenn demnach an einem regulär krystallisirenden Körper nur der Würfel, das Oktaëder, Dodekaëder, ferner Ikositetraëder und Pyramidenoktaëder gefunden werden, so bleibt es unentschieden, ob derselbe der holoëdrischen oder der pentagonal-hemiëdrischen Abtheilung des regulären Systems angehört. Treten aber die Flächen von Pyramidenwürfeln und Achtundvierzigflächnern auf, und zeigt sich ein constanter Unterschied der beiden Hälften dieser Formen, so dass die eine entweder gar nicht, oder mit anderer Oberflächenbeschaffenheit oder dergl. erscheint, so krystallisirt die betreffende Substanz hemiëdrisch.

Ganz in derselben Weise, wie S. 279 für die tetraëdrisch-hemiëdrischen Gestalten, kann man die Ableitungsreihen der pentagonal-hemiëdrischen Formen durch ein Schema übersichtlich darstellen. Die Dyakisdodekaëder $\left[\frac{m\,O\,n}{2}\right]$ bilden den allgemeinsten Fall; jedes derselben liegt in drei verschiedenen Ableitungsreihen, deren Endglieder die Ikositetraëder, die Pyramidenoktaëder und die Pentagondodekaëder sind; denn ein Dyakisdodekaëder nähert sich in seiner Gestalt um so mehr einem Ikositetraëder, je weniger n und m verschieden, für $n = m$ fällt es damit zusammen; es gleicht dagegen immer mehr einem Pyramidenoktaëder, je weniger n von 1 verschieden ist, das Pyramidenoktaëder mit dem gleichen m ist das Grenzglied der Reihe, d. h. dasjenige Dyakisdodekaëder, dessen $n = 1$; je grösser m, desto ähnlicher ist das Dyakisdodekaëder einem Pentagondodekaëder, für $m = \infty$ fallen je zwei Flächen in eine Ebene, es resultirt die erwähnte Grenzform. Die Pentagondodekaëder ihrerseits bilden wieder eine Reihe zwischen Hexaëder und Dodekaëder und nähern sich der einen oder der anderen Grenzform um so mehr, je grösser oder je geringer der Unterschied ihrer endlichen Parameter ist. Die Reihen der Ikositetraëder und Triakisoktaëder unterscheiden sich selbstverständlich nicht von den holoëdrischen.



Da die pentagonal-hemiëdrischen Formen der Symmetrie nach den Dodekaëderflächen entbehren, so kann eine solche Fläche Zwillingsebene sein, und es resultirt in diesem Falle ein sogenannter »Ergänzungszwilling«, in welchem gleichsam die holoëdrische Symmetrie wieder hergestellt wird (s. im folg. §. unter »Eisenkies«).

§. 59. Beispiele pentagonal-hemiëdrischer Substanzen:

Zinnjodid = SnJ^4. Aus Schwefelkohlenstoff in grossen Krystallen zu erhalten: {111}, π {210}, {100}, {211}.

Eisenkies (Pyrit) = FeS^2. Es finden sich sehr mannigfaltige Formen und Combinationen, von denen die häufigsten: {100} — {100}, π {210} Fig. 219 — {100}, {111} — π {210} — {111}, π {210} Fig. 220 — {100}, π {321} Fig. 221 — π {210}, {111}, π {321} Fig. 222, eine Combination,

Fig. 219.

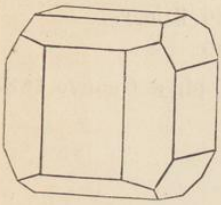


Fig. 220.

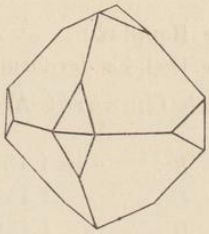


Fig. 221.

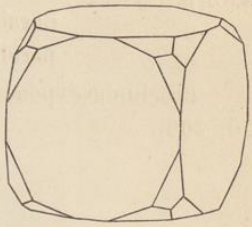


Fig. 222.

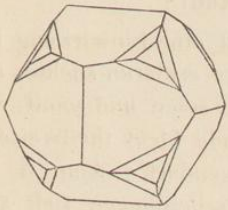
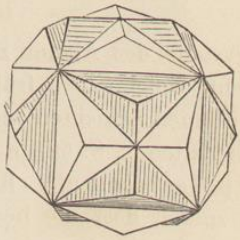


Fig. 223.



in welcher die letzte Form die Combinationskanten der beiden ersteren abstumpft. Nicht selten ist auch die in Fig. 215 abgebildete Combination π {412}, π {201}. Zwillinge nach {110}, bestehend aus zwei in gekreuzter Stellung durch einander gewachsenen Pentagondodekaëdern, Fig. 223.

Speiskobalt = $CoAs^2$. Gewöhnliche Combination: {100}, {111}, weniger häufig mit {110} und {211}; äusserst selten sind π {310}, π {510} u. a.

Glanzkobalt = $(Co, Fe)AsS$. Combinationen gewöhnlich: {111}, π {210}, {100}.

Die drei letztgenannten Mineralien, von denen namentlich das erste, der Eisenkies, ausserordentlich häufig krystallisirt vorkommt, haben den Umstand gemeinsam, dass an einem Krystall sich stets nur die hemiëdrischen Formen eines Vorzeichens finden, also niemals oder doch fast niemals positive Pentagondodekaëder mit negativen, oder mit negativen Dyakisdodekaëdern. Zugleich haben dieselben drei Körper eine physikalische Eigenschaft gemein: während nämlich ein Theil der Krystalle jedes dieser Mineralien thermoëlektrisch sich gegen Kupfer positiv verhält, sind die

übrigen negativ gegen dieses Metall (vergl. S. 182). G. Rose hat (Ber. d. Berl. Akad. 1870) die Vermuthung aufgestellt, dass die positiven Krystalle die hemiëdrischen Formen der einen Stellung, die elektrisch negativen die entgegengesetzten zeigen, und hat auch mehrfache krystallographische Unterschiede zwischen beiden Klassen gefunden, welche für jene Hypothese sprechen.

Kalialaun $= KAl[SO^4]^2 + 12H^2O$. Aus wässeriger Lösung {111}, untergeordnet {110}, {100}; aus alkalischer Lösung {100}; aus salzsaurer Lösung dieselben Formen mit $\pi\{210\}$. Elasticitätscoëfficienten nach Beckenkamp:

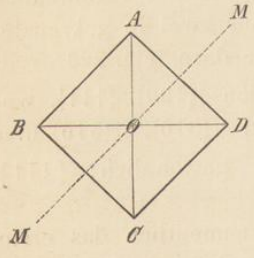
parallel einer Hauptaxe . . . 1886 Kilogr.
parallel einer Dodekaëdernormalen 2009 -

Brechungsexponenten, nach Ch. Soret (Arch. d. sc. phys. Genève 1883. 10, 300).

Linie	B:	$n = 1{,}45284$
-	C:	- 1,45383
-	D:	- 1,45634
-	E:	- 1,45919
-	F:	- 1,46167
-	G:	- 1,46615

Die Krystalle des Alauns zeigen sehr oft eine Einwirkung auf das polarisirte Licht, welche man früher dadurch zu erklären suchte, dass sie aus getrennten dünnen Schichten zusammengesetzt seien und somit, wie ein Satz dünner Glasplatten (s. S. 68), das durchgehende Licht theilweise polarisiren (Lamellarpolarisation). Reusch (Poggendorff's Ann. d. Phys. 132, 618) zeigte zuerst, dass die beobachteten Erscheinungen sich so nicht erklären lassen, da dieselben u. A. gerade um so besser auftreten, je klarer die Krystalle im Innern sind. Schleift man aus einem solchen oktaëdrischen Krystall eine Platte parallel einer Würfelfläche, $ABCD$ Fig. 224, wo AC, BD und die Normale zur Platte die Richtungen der drei Hauptaxen sind, und bringt diese im parallelen Licht zwischen gekreuzte Nicols, so dass AC der Schwingungsebene des einen, BD derjenigen des andern parallel ist, so erscheinen nur zwei Streifen, $\parallel AC$ und BD, ein durch die Mitte gehendes Kreuz bildend, dunkel, und bleiben es auch bei der Drehung des Präparates, während die vier dreieckigen Felder AOB, AOD, BOC COD aufgehellt erscheinen und meist das Hellblau der Interferenzfarben erster Ordnung zeigen. Presst man den Krystall $\parallel MM$, nachdem man $\parallel AD$ und BC Dodekaëderflächen angeschliffen hat, so hellen sich die Felder AOD und BOC noch mehr auf, während AOB und COD sich verdunkeln und bei einer bestimmten Pressung völlig einfachbrechend erscheinen.

Fig. 224.



Dies erklärt Reusch dadurch, dass die Schichten des Krystalls in den vier Sectoren parallel deren Hypotenuse eine Spannung besitzen, welche veranlasst, dass in den Feldern AOD und BOC die optische Elasticität in der Richtung AD und BC kleiner ist, als senkrecht dazu; in den Sectoren AOB und COD in den Richtungen AB und CD kleiner, als in der normalen. Eine Pressung parallel MM muss alsdann die optische Elasticität in dieser Richtung vergrössern, also in den Feldern AOD und BOC die Differenz derselben vergrössern, daher die Aufhellung, in den Feldern AOB und COD dieselbe indess verringern, daher die Verdunkelung. Wie die Entstehung einer solchen Spannung zu denken ist, wurde bereits S. 138 auseinandergesetzt; bei den Alaunkrystallen müsste demnach zuerst ein Krystallgerippe, drei einander durchschneidende dünne Schichten parallel den drei Haupt-Symmetrieebenen und begrenzt von den Oktaëderkanten, in nahezu ungestörter Lagerung der Theilchen sich gebildet haben; die hohlen Oktaëderflächen wären dann durch allmählichen Absatz von Schichten, parallel den Oktaëderflächen, ausgefüllt worden, wobei diese Schichten durch eine beim Festwerden vor sich gehende Contraction eine Spannung parallel ihrer Flächenausdehnung erfuhren (s. übrigens auch S. 141).

Isomorph mit dem gewöhnlichen Alaun sind u. a. noch folgende analog zusammengesetzte Verbindungen:

Kaliumeisenalaun: $KFe[SO^4]^2 + 12H^2O$. Beobachtete Formen: {111}, {100}.

Chromalaun: $KCr[SO^4]^2 + 12H^2O$. Leicht in sehr grossen Oktaëdern zu erhalten.

Cäsiumalaun: $CsAl[SO^4]^2 + 12H^2O$. Combination: {111}, {100}, π {210}.

Thalliumalaun: $TlAl[SO^4]^2 + 12H^2O$. Oktaëder. Brechungsexponent für *Na*-Gelb: $n = 1{,}4888$ Fock (Zeitschr. f. Kryst. 4, 594; s. auch Soret, a. a. O.).

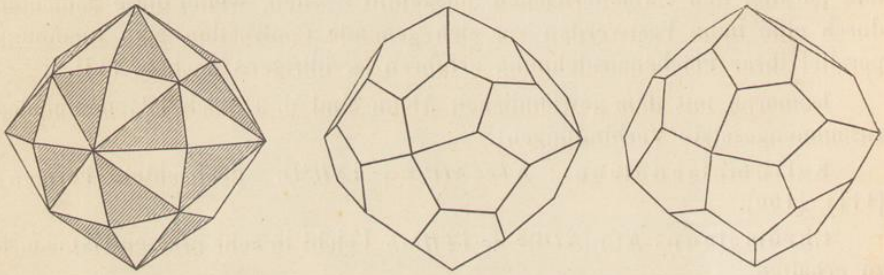
Ammoniumalaun $= H^4N.Al[SO^4]^2 + 12H^2O$. Damit isomorph auch die substituirten Alaune, d. h. solche, in denen der Wasserstoff des Ammoniums durch organische Radicale ersetzt ist. Ueber die Erscheinungen der anomalen Doppelbrechung des Ammoniumalauns s. Klocke, Jahrb. f. Min. 1880 u. 81. (Zeitschr. f. Kryst. 5, 523 u. 6, 415).

§. 60. **Die plagiëdrische Hemiëdrie.** Ausser den beiden Arten der Zerlegung der holoëdrischen Formen, welche zu der tetraëdrischen und der pentagonalen Hemiëdrie führen, ist offenbar nur noch eine einzige möglich, nämlich die Zerlegung durch sämmtliche neun Symmetrieebenen des regulären Systems zugleich. Theilen wir durch die sechs Dodekaëderflächen und durch die drei Haupt-Symmetrieebenen ein Hexakisoktaëder in congruente Theile, so resultiren deren 48, welche in Fig. 225 abwechselnd weiss gelassen und schraffirt sind. Betrachtet man die eine der beiden Hälften für sich, z. B. die der weissgelassenen Flächen, so entspricht diese

vollständig dem Gesetze der Hemiëdrie, denn, wie man ohne Weiteres sieht, werden die Hauptaxen an allen sechs Seiten im Abstande 1 geschnitten durch je eine vierkantige Ecke mit gleichen Winkeln, in den Abständen $\frac{3}{2}$ (das Hexakisoktaëder hat die Parameter $1 : \frac{3}{2} : 3$) in spitzeren vierkantigen Ecken, welche nicht minder unter einander gleiche Winkel besitzen, endlich im Abstande 3 ebenfalls in sechs gleichen vierkantigen Ecken, welche noch spitzer sind. Die aus der Hälfte der Flächen bestehende Form ist also nach oben und unten, rechts und links, vorn und hinten gleich beschaffen.

1) Die plagiëdrisch-hemiëdrischen Formen des Hexakisoktaëders entstehen sonach durch Auswahl aller abwechselnden einzelnen Flächen, Fig. 225. Die weiss gelassenen Flächen für sich liefern die in Fig. 226 *a*, die schwarzen die in Fig. 226 *b* dargestellte Form, deren Flächen bei gleicher

Fig. 225. Fig. 226 *a*. Fig. 226 *b*.

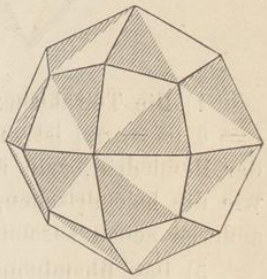


Ausdehnung die Gestalt ungleichseitiger Fünfecke haben. Keine Kante eines solchen Vierundzwanzigflächners, welcher Pentagon-Ikositetraëder genannt wird, geht einer Symmetrieebene parallel, und da zu jeder Fläche des Achtundvierzigflächners die, sei es nach einer Würfel-, sei es nach einer Dodekaëderebene, symmetrisch gelegene Fläche dem entgegengesetzten Hemiëder angehört, so ist ein solches Pentagon-Ikositetraëder eine geometrische Form, welche keine einzige Symmetrieebene besitzt. Alle hemiëdrische Formen, welche sich von solchen holoëdrischen ableiten, die Symmetrieebenen haben, selbst aber keine solchen besitzen, zeigen eine gemeinsame geometrische Eigenschaft: die beiden Hälftgestalten können durch keine Aenderung der Stellung des einen zur Congruenz gebracht werden, sie verhalten sich zu einander, wie ein rechter zu einem linken Handschuh. Man nennt solche entgegengesetzte hemiëdrische Formen enantiomorph und eine Hemiëdrie, welche dergleichen liefert, ebenfalls eine enantiomorphe. Da die Flächen des einen Pentagon-Ikositetraëders die symmetrisch zugehörigen zu allen Flächen des anderen sind, so sind die beiden Formen zu einander natürlich symmetrisch, sowohl in Bezug auf die Ebenen des Hexaëders, als auch in Bezug auf die des Dodekaëders, d. h. das eine ist das Spiegelbild des andern, möge als Spiegelebene eine Würfel- oder eine Dodekaëderfläche dienen.

Stellt man irgend eine der drei Hauptaxen des Hexakisoktaëders vertical aufrecht und betrachtet die sechs, einem Oktanten angehörigen Flächen, so gehört jedesmal von den beiden obersten Flächen die rechts gelegene dem einen Pentagon-Ikositetraëder, die links gelegene dem entgegengesetzten an; man nennt daher das erstere das rechte Fig. 226 $a = \gamma\{h\,l\,k\} = \frac{mOn}{2} r$, das letztere das linke Fig. 226 $b = \gamma\{h\,k\,l\} = \frac{mOn}{2} l$*), und gebraucht diese Bezeichnung überhaupt nur für enantiomorphe Gestalten.

2) Diejenigen Achtundvierzigflächner, deren k und l gleich gross sind ($m = n$), die Ikositetraëder, müssen an den Krystallen, an denen die übrigen Hexakisoktaëder als Pentagon-Ikositetraëder erscheinen, derselben Hemiëdrie unterliegen. Die beiden Flächen, von denen die eine dem rechten, die andere dem linken Hemiëder angehört, fallen hierbei, wie Fig. 227 zeigt, in eine Ebene, die beiden Hälftgestalten unterscheiden sich daher weder von einander, noch von der holoëdrischen Gestalt. Dieselben sind nunmehr aufzufassen als diejenigen Pentagon-Ikositetraëder, deren $k = l$ ($m = n$), daher die in den vierkantigen Ecken zusammenstossenden Kanten in die Haupt-Symmetrieebenen fallen. Dieser Gestalt nähert sich die eines Pentagon-Ikositetraëders um so mehr, je weniger sich k von l unterscheidet. Das Ikositetraëder ist die Grenzform der Reihe der ersteren und sonach jetzt ebenfalls als eine hemiëdrische Form zu betrachten. Dass sie in der That, trotz ihrer geometrischen Uebereinstimmung mit dem holoëdrischen Ikositetraëder, nur scheinbar holoëdrisch ist, geht daraus hervor, dass sie in Combinationen keine Gleichwerthigkeit entsprechender Theile rechts und links von einer Hexaëder- oder Dodekaëderfläche zeigt. Eine schiefe Abstumpfung, z. B. der an den dreikantigen Ecken zusammenstossenden Kanten eines wirklich holoëdrischen Ikositetraëders, würde eine gleiche, aber entgegengesetzt geneigte Fläche, d. h. eine Zuschärfung der Kante erfordern. Dies ist, wie aus der weiterhin beschriebenen Form des Salmiak (Fig. 233) hervorgeht, nicht der Fall mit dem in Rede stehenden hemiëdrischen Ikositetraëder, s. Fig. 227, in welcher die Ungleichwerthigkeit der rechten und linken Seite der Kanten durch die Schraffirung angedeutet ist.

Fig. 227.



3) Diejenigen Hexakisoktaëder, deren $h = k$ ($n = 1$) ist, die Pyramidenoktaëder, entstehen dadurch, dass stets zwei an den kürzesten Kanten des Achtundvierzigflächners benachbarte Flächen in eine Ebene fallen; von

*) Diese Hemiëdrie wird auch die gyroëdrische genannt, daher zu ihrer Unterscheidung von den beiden andern dem Symbol der Hexakisoktaëder ein γ vorgesetzt ist.

diesen gehört aber, Fig. 228, die eine jedesmal der einen Hälftform, die andere der zweiten an; die Pyramidenoktaëder, dieser Hemiëdrie unterworfen, liefern demnach ebenfalls zwei Formen, welche geometrisch mit einander und mit den holoëdrischen ganz identisch sind.

Fig. 228.

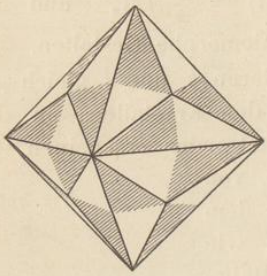
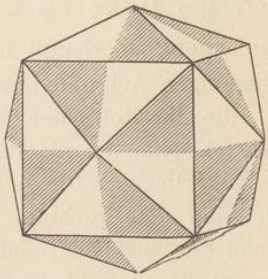


Fig. 229.



4) Die Tetrakishexaëder, als diejenigen Achtundvierzigflächner, deren $l = 0$ $(m = \infty)$ ist, müssen als hemiëdrische Formen nach diesem Gesetz der Hemiëdrie, wie aus Fig. 229 ersichtlich, ebenfalls mit allen Flächen, wie die holoëdrischen, erscheinen, da die eine Hälfte der Flächen mit der anderen genau zusammenfällt.

5) Das Rhombendodekaëder ist derjenige Achtundvierzigflächner, von welchem je vier Flächen in eine Ebene fallen; von diesem gehören nun zwei dem einen, die beiden anderen dem zweiten Hemiëder an; diese beiden Formen müssen daher gänzlich zusammenfallen und sich nicht von dem holoëdrischen Dodekaëder unterscheiden (s. Fig. 230).

Fig. 230.

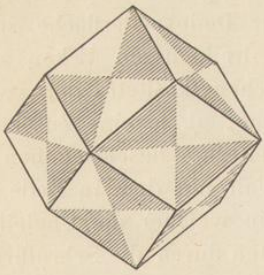
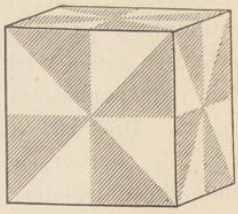


Fig. 231.

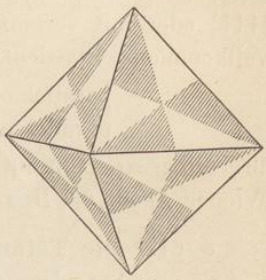


6) Das Hexaëder ist derjenige Achtundvierzigflächner, bei welchem je acht, eine $4+4$kantige Ecke bildende Flächen dieselbe Lage haben; davon gehören vier dem einen, vier dem anderen Pentagon-Ikositetraëder an; diese beiden haben in diesem speciellen Falle zur Grenzform das Hexaëder (s. Fig. 231).

7) Dasjenige Pentagon-Ikositetraëder endlich, dessen $h = k = l$ $(m = n = 1)$, hat in jedem Oktanten drei Flächen, welche in eine Ebene

fallen, und diese ist die Oktaëderfläche; das entgegengesetzte hat ebenfalls drei Flächen in jedem Oktanten, die in die gleiche Ebene zusammenfallen. Das Oktaëder, vollkommen dem holoëdrischen gleichend, ist die Grenzgestalt, sowohl der rechten, als der linken Pentagon-Ikositetraëder, wenn deren Indices gleich gross werden.

Fig. 232.



In dieser Hemiëdrie gleichen somit alle Formen den holoëdrischen, mit einziger Ausnahme der Achtundvierzigflächner, welche nur mit der halben Flächenzahl auftreten. So lange also an einer Substanz noch kein Hexakisoktaëder beobachtet worden ist, kann es zweifelhaft sein, ob dieselbe der holoëdrischen oder der plagiëdrisch-hemiëdrischen Abtheilung des regulären Systems angehört. Daher ist es gekommen, dass der hierher gehörige Salmiak bis zur Entdeckung der Pentagon-Ikositetraëder an demselben durch Tschermak für holoëdrisch gehalten wurde, ebenso der Cuprit, an welchem diese Hemiëdrie erst ganz neuerdings von Miers beobachtet worden ist.

Kupferoxydul (Cuprit) = Cu^2O. Die natürlichen Krystalle zeigen {111}, {100}, {110}, {211}, selten $\gamma\{896\}$.

Chlorammonium (Salmiak) = H^4NCl. Die häufig beobachteten Formen sind: {211}, {110}, {100}, {111}, von denen namentlich die erste oft in auffallender Verzerrung ausgebildet erscheint. Aus Lösung erhaltene grosse Krystalle, welche Tschermak untersuchte (s. Zeitschr. f. Kryst. 7, 599), zeigten {211} mit schmalen Abstumpfungen der Kanten (Fig. 233);

Fig. 233.

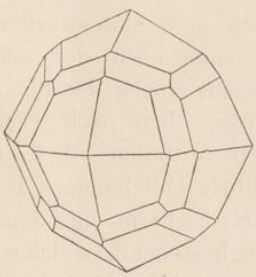
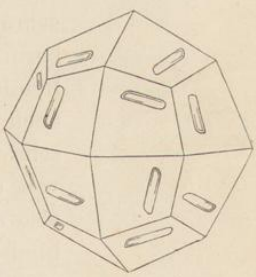


Fig. 234.



diese erwiesen sich als schief und entsprachen ungefähr einem Pentagon-Ikositetraëder $\gamma\{875\}$. Ausserdem zeigten die Flächen des Ikositetraëders Aetzfiguren (in Fig. 234 vergrössert dargestellt), deren Gestalt auch ohne das Auftreten der vorerwähnten Form beweisen würde, dass die Flächen nicht symmetrisch sein, also einem hemiëdrischen Ikositetraëder angehören müssen. Da ausnahmslos die Kaliumsalze den analog zusammengesetzten Ammoniumsalzen isomorph sind, und isomorphe Körper in Bezug auf das

Vorhandensein einer Hemiëdrie übereinzustimmen pflegen, so gehört höchst wahrscheinlich hierher:

Chlorkalium (Sylvin) = KCl. Aus wässeriger Lösung {100}, aus roher Potaschelösung {111}; natürliche Krystalle Combinationen von {100} mit {111} oder mit vereinzelten Flächen von Hexakisoktaëdern. Spaltbar {100} vollkommen. Elasticitätscoëfficienten nach Koch:

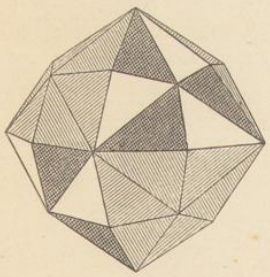
parallel einer Hauptaxe	4009 Kilogr.
parallel einer Dodekaëdernormalen	2088 „

Brechungsexponent für Na-Licht $n = 1{,}49031$ (s. Stefan, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 63, II, 241).

§. 61. **Die Tetartoëdrie des regulären Systems.** Es wurde bereits S. 227 erwähnt, dass durch Anwendung zweier verschiedener Hemiëdrien bei einer Form, welche der Hemiëdrie nach mehreren Gesetzen fähig ist, tetartoëdrische Formen entstehen können, welche ebenso wie die hemiëdrischen die Bedingung erfüllen, dass jede Seite einer Symmetrieaxe, sowie die mehrerer gleichwerthiger, von gleich vielen Flächen in gleichem Abstande geschnitten werden. Die Zahl dieser Flächen ist aber natürlich nur ein Viertel von derjenigen, welche beim holoëdrischen Körper dieselbe Axe in demselben Abstande schneidet. Um die möglichen Arten der Tetartoëdrie im regulären System kennen zu lernen, haben wir dieselben nur an dem allgemeinen Repräsentanten aller Formen, dem Hexakisoktaëder, festzustellen, da sie alsdann für die übrigen Formen sich von selbst ergeben.

Denken wir uns z. B. einen Achtundvierzigflächner hemiëdrisch werdend nach dem zuletzt betrachteten, dem Gesetz der plagiëdrischen Hemiëdrie, so fallen die in Fig. 235 (genau entsprechend der Fig. 225) von links unten nach rechts oben schraffirten Flächen aus; unterwerfen wir die Form gleichzeitig auch noch der pentagonalen Hemiëdrie, so müssen, analog der Fig. 209, auch noch die von links oben nach rechts unten schraffirten Flächen fortfallen, d. h. die Hälfte von den vorher übriggebliebenen. Es resultirt also eine tetartoëdrische Form, aus den 12 weissbleibenden Flächen bestehend, welche der allgemeinen Bedingung der Hemiëdrie genügt; denn jede der sechs gleichwerthigen Hälften der Hauptaxen wird von zwei Flächen im Abstand 1, von zwei im Abstand n und von ebenso viel in m geschnitten, und ein jedes dieser Flächenpaare schliesst in allen sechs Fällen denselben Winkel ein. Wenn wir dagegen auf den der trapezoëdrischen Hemiëdrie, wie vorher, unterworfenen Achtundvierzigflächner, Fig. 236, statt der pentagonalen, noch die tetraëdrische Hemiëdrie anwenden, bei welcher die Flächen in den abwechselnden Oktanten, von links oben nach rechts

Fig. 235.



unten schraffirt, ausfallen, wie in Fig. 186, so bleiben wiederum nur 12 Flächen übrig. Endlich ist nur noch ein Fall übrig, die gleichzeitige Anwendung der pentagonalen und der tetraëdrischen Hemiëdrie; in Fig. 237

Fig. 236.

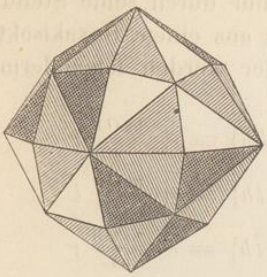
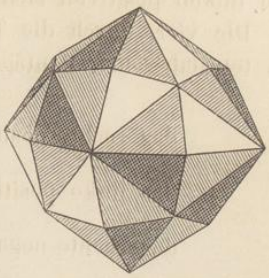


Fig. 237.



sind die durch die erstere fortfallenden Flächen von links unten nach rechts oben, die durch die zweite verschwindenden von rechts unten nach links oben schraffirt. Vergleicht man diese drei Figuren mit einander, so sieht man, dass die 12 übrig bleibenden Flächen in allen drei Fällen dieselben sind; die Form, welche aus einem Hexakisoktaëder durch zweimalige Hemiëdrie entsteht, ist also dieselbe, welche Arten von Hemiëdrie man auch zu ihrer Herleitung anwende. Es giebt somit im regulären Systeme nur eine Art von Tetartoëdrie.

Ein Tetartoëder eines Achtundvierzigflächners erhalten wir nach Obigem z. B., wenn wir von einem Hexakistetraëder, welches von jenem abgeleitet ist, die abwechselnden Flächen ausfallend und die übrigen allein vorhanden denken, Fig. 238. Die weiss gelassenen Flächen dieser Figur für sich liefern uns das sogenannte tetraëdrische Pentagondodekaëder, Fig. 239*a*, die schraffirten Flächen für sich das entgegengesetzte Fig. 239*b*. Diese beiden Formen können durch keine Drehung zur Deckung

Fig. 238.

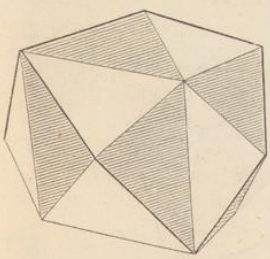


Fig. 239*a*.

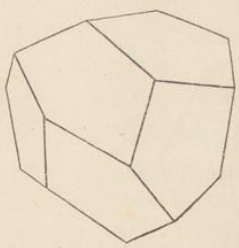
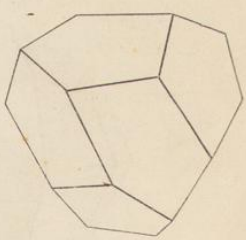


Fig. 239*b*.



gebracht werden, sie sind enantiomorph. Wir bezeichnen das erstere als das »rechte«, das zweite als das »linke« tetraëdrische Pentagondodekaëder. Ihre Combination würde das Hexakistetraëder liefern, welches selbst aber wieder nur die Hälfte der Flächen des Achtundvierzigflächners darstellt; die andere Hälfte, das entgegengesetzte (negative) Hexakistetraëder,

hat genau dieselbe Gestalt, liefert also durch abermalige Hemiëdrie ebenfalls ein rechtes und ein linkes, enantiomorphes, tetraëdrisches Pentagondodekaëder, deren ersteres mit dem obigen rechten durch Drehung von 90° um eine Hauptaxe zur Congruenz gebracht werden kann, während das linke vom linken positiven sich ebenfalls nur durch seine Stellung unterscheidet. Die vier, durch die Tetartoëdrie aus einem Hexakisoktaëder abgeleiteten tetraëdrischen Pentagondodekaëder werden folgendermassen bezeichnet:

$$\text{das rechte positive: } \varkappa\pi\{lkh\} = +\frac{mOn}{4}r$$

$$\text{das linke positive: } \varkappa\pi\{klh\} = +\frac{mOn}{4}l$$

$$\text{das rechte negative: } \varkappa\pi\{k\bar{l}h\} = -\frac{mOn}{4}r$$

$$\text{das linke negative: } \varkappa\pi\{l\bar{k}h\} = -\frac{mOn}{4}l.$$

Die Flächen dieser Formen sind bei gleicher Centraldistanz unsymmetrische Fünfecke; je drei in einen Oktanten gehörige bilden eine dreikantige Ecke, welche identisch ist mit derjenigen der Dyakisdodekaëder, und zwar die eines rechten Tetartoëders mit der dreikantigen Ecke des positiven Dyakisdodekaëders Fig. 210 *a*, die jedes linken mit der entsprechenden des negativen Fig. 210 *b*. Solcher dreikantiger Ecken hat jedes tetraëdrische Pentagondodekaëder vier, alle übrigen Ecken sind 1 + 1 + 1kantige. Im Ganzen haben diese Gestalten 30 Kanten von viererlei Art. Es ist selbstverständlich, dass dieselben, wie alle enantiomorphen Formen, keine Symmetrieebenen besitzen.

2) Dieselbe Tetartoëdrie, auf diejenigen Hexakisoktaëder (Fig. 240) angewandt, deren $k = l$ $(m = n)$ ist, d. h. auf die Ikositetraëder, liefert von jedem der beiden Pyramidentetraëder (Fig. 241), welche durch einmalige Hemiëdrie entstehen, eine rechte und eine linke Hälftgestalt, welche sich

Fig. 240.

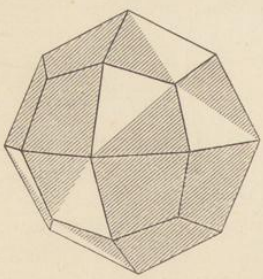
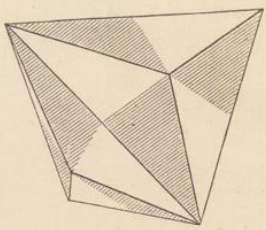


Fig. 241.



nicht von einander unterscheiden. Je näher die Zahlenwerthe von k und l einander sind, desto ähnlicher erscheinen die beiden entgegengesetzten tetraëdrischen Pentagondodekaëder einander und dem Pyramidentetraëder; für den speciellen Fall $k = l$ fallen sie zusammen, und es resultirt als

gemeinschaftliche Grenzform beider das Triakistetraëder, welches sich nicht von dem hemiëdrischen unterscheidet.

3) Ganz analog liefert diese Tetartoëdrie bei den Triakisoktaëdern, Fig. 242, Formen, welche geometrisch identisch sind mit den hemiëdrischen Deltoiddodekaëdern, Fig. 243, welche aber aufzufassen sind als die gemeinschaftlichen Grenzformen je eines rechten und linken tetraëdrischen Pentagondodekaëders, für den Fall $h = k$ $(n = 1)$, da in diesem jene beiden Formen vollkommen in eine, nämlich das Deltoiddodekaëder, zusammenfallen.

Fig. 242.

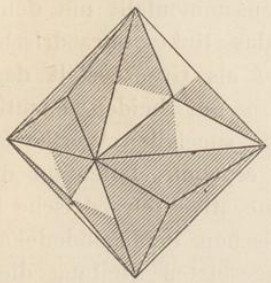
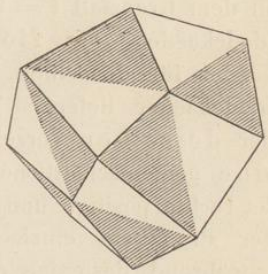


Fig. 243.



4) Wenden wir das Gesetz der Tetartoëdrie auf die Tetrakishexaëder an, wie es in Fig. 244 geschehen ist, so resultiren 12 Flächen, welche eine Gestalt bilden, die sich geometrisch nicht von dem Pentagondodekaëder der Hemiëdrie unterscheidet. In der That liefert, wie aus Fig. 245 ersichtlich, die tetraëdrische Hemiëdrie keine neue Form aus dem Pentagondodekaëder, da dessen Flächen ja in zwei benachbarten Oktanten liegen. In

Fig. 244.

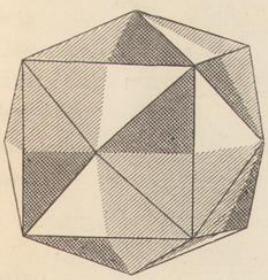


Fig. 245.

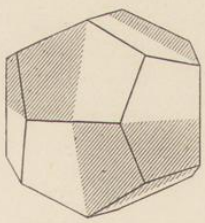


Fig. 246.

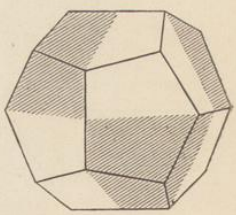


Fig. 244 stellen die weissen Flächen das rechte positive tetraëdrische Pentagondodekaëder für den Grenzfall $l = 0$ $(m = \infty)$ dar; dieselben liefern für sich das Pentagondodekaëder Fig. 245, welches wir in der Hemiëdrie als positives bezeichnet haben und jetzt das »rechte« nennen wollen. Die in Fig. 244 doppelt schraffirten 12 Flächen bilden das linke positive tetraëdrische Pentagondodekaëder für denselben Grenzfall; diese Flächen für sich allein umschliessen das in Fig. 246 dargestellte Pentagondodekaëder,

welches zusammenfällt mit dem in der Hemiëdrie das »negative« genannten, in der Tetartoëdrie als »linkes« zu bezeichnenden. Unterscheiden wir die beiden enantiomorphen Tetartoëder der negativen vier Oktanten ebenso, indem wir dasjenige das »rechte« nennen, zu dem die oben rechts an der verticalen Hauptaxe gelegene Fläche gehört, wenn man auf den Oktanten hin sieht, und welches congruent ist mit dem rechten positiven, und indem wir das andere das »linke« nennen, so ist leicht einzusehen, dass das erstere in dem Grenzfall $l = 0$ $(m = \infty)$ zusammenfällt mit dem »linken« Pentagondodekaëder, Fig. 246, dagegen das linke tetraëdrische Pentagondodekaëder für denselben Werth von l als Grenzgestalt das »rechte« Pentagondodekaëder liefert. Während also die beiden enantiomorphen Tetartoëder desselben Vorzeichens für die speciellen Werthe $k = l$ und $h = k$ eine gemeinschaftliche Grenzform ergeben, fallen für den Werth $l = 0$ das rechte positive und das linke negative tetraëdrische Pentagondodekaëder zu einem einzigen symmetrischen Pentagondodekaëder zusammen, während dasjenige der entgegengesetzten Stellung die gemeinschaftliche Grenzform des linken positiven und des rechten negativen tetraëdrischen Pentagondodekaëders ist.

5) Die Tetartoëdrie, angewendet auf das Rhombendodekaëder, kann eine davon verschiedene Form nicht liefern, da dies bei keiner der drei Hemiëdrien stattfindet, also auch durch das Zusammenwirken zweier nicht möglich ist. So ist aus Fig. 247 ersichtlich, dass für den speciellen Fall $h = k$ und $l = 0$ das rechte positive Tetartoëder (weiss gelassen) mit dem linken positiven, dem rechten negativen und dem linken negativen, welche alle drei, aber in verschiedener Richtung, schraffirt sind, zusammenfällt, so dass das scheinbar holoëdrische Dodekaëder die gemeinschaftliche Grenzform für alle vier Tetartoëder bildet.

Fig. 247.

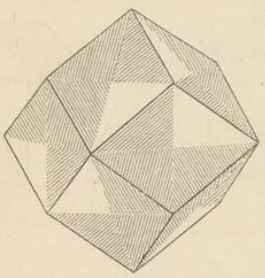
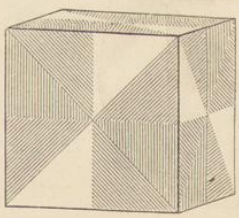


Fig. 248.



6) Ebenso bildet das Hexaëder die gemeinschaftliche Grenzform aller vier tetraëdrischen Pentagondodekaëder für den speciellen Fall $k = l = 0$, wie aus Fig. 248 hervorgeht, in welcher das rechte positive weiss gelassen, die drei anderen verschieden schraffirt sind.

7) Für den Fall des Oktaëders, $h = k = l$, endlich werden je drei einem Oktanten angehörige Flächen der tetraëdrischen Pentagondodekaëder parallel; die resultirende Grenzform hat statt 12 nur vier Flächen und

fällt mit dem Tetraëder zusammen, wie Fig. 249 beweist. Wie aus derselben, sowie aus Fig. 250 ersichtlich, geben für jenen Fall das rechte positive (die weissen Flächen) und das linke positive (die schraffirten Flächen)

Fig. 249.

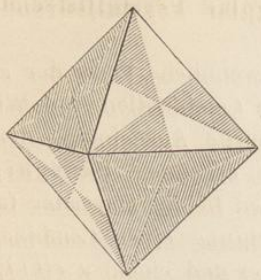
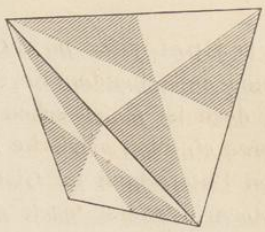


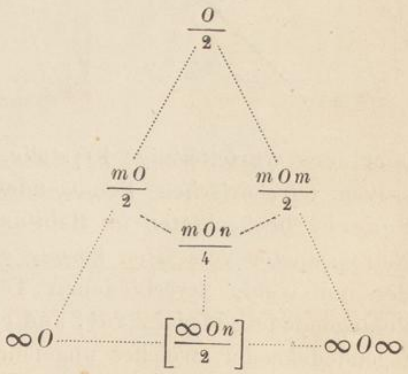
Fig. 250.



ein und dasselbe Tetraëder, während das entgegengesetzte Tetraëder die gemeinschaftliche Grenzform der beiden enantiomorphen negativen Tetartoëder ist.

Treten also die Flächen des Oktaëders mit denen eines Pyramidenwürfels in einer Combination zusammen, so erscheint ersteres als Tetraëder, letzteres als Pentagondodekaëder, und das Zusammentreten dieser beiden anscheinend hemiëdrischen Formen verschiedener Art ist es, welches für die bisher nachgewiesenen Beispiele dieser Tetartoëdrie besonders charakteristisch ist. Die tetartoëdrische Natur des Tetraëders, wie des Pentagondodekaëders, tritt dadurch hervor, dass die Combination eines Tetraëders mit dem Pentagondodekaëder der einen Stellung (Fig. 245) und diejenige desselben Tetraëders mit dem entgegengesetzten Pentagondodekaëder (Fig. 246) enantiomorph sind; bringt man die beiden Pentagondodekaëder dieser Combinationen in parallele Stellung, so werden die Tetraëder entgegengesetzt, und umgekehrt. Dies gilt natürlich auch dann noch, wenn in einer Combination beide Tetraëder vorhanden sind, sobald dieselben nur durch ihre Ausbildung oder durch die sie begleitenden Formen deutlich unterschieden sind.

Das Schema der Ableitungsreihen erhält in dieser Abtheilung des regulären Systems die nebenstehende Gestalt. Das tetraëdrische Pentagondodekaëder stellt den allgemeinsten Fall dar und nähert sich in seiner Form mehr einem Deltoiddodekaëder oder Pyramidentetraëder oder endlich einem Pentagondodekaëder, je nach den Werthen der Indices.



Da die tetartoëdrischen Gestalten nach keiner Ebene symmetrisch sind, so kann in dieser Abtheilung jede Krystallfläche, also auch eine Hexaëder- oder Dodekaëderfläche, als Zwillingsebene einer regelmässigen Verwachsung fungiren.

§. 62. **Beispiele tetartoëdrisch regulär krystallisirender Substanzen.**

Barytsalpeter $= Ba[NO^3]^2$. Die gewöhnliche Form der aus wässriger Lösung entstehenden Krystalle ist eine Combination von Würfel und Oktaëder, doch ist meist schon durch ungleiche Ausdehnung der Flächen des letzteren eine tetraëdrische Ausbildung zu erkennen. Scacchi, welcher auch einen Unterschied im Glanz der Flächen beider Tetraëder fand, wies die Tetartoëdrie zuerst nach durch Beobachtung einer Combination derselben Formen mit einem Pentagondodekaëder und einem $\varkappa\pi\{hkl\}$. Baumhauer beobachtete auf den Hexaëderflächen von Krystallen, welche beide Tetraëder mit einem Pentagondodekaëder combinirt zeigten, unsymmetrische Streifen und Aetzfiguren, welche den Würfel als einen tetartoëdrischen charakterisiren und einem linken positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëder entsprechen. Ausführliche Untersuchungen über die Krystallisation dieses Salzes stellte Wulff an (Zeitschr. f. Kryst. 4, 133 f.). Derselbe erhielt aus reiner wässriger Lösung die in Fig. 251 dargestellte Combination: $h = \{100\}$, $o_{,} = \varkappa\pi\{1\bar{1}1\}$, $o = \varkappa\pi\{111\}$, $p = \varkappa\pi\{201\}$, in welcher die Stellung des herrschenden Tetraëders zum Pentagondodekaëder die gleiche ist, wie sie Scacchi und Baumhauer fanden. In derselben Lösung bildeten sich

Fig. 251.

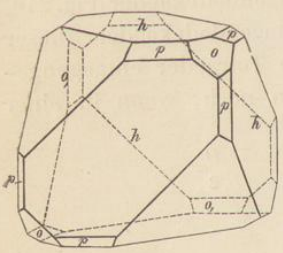


Fig. 252.

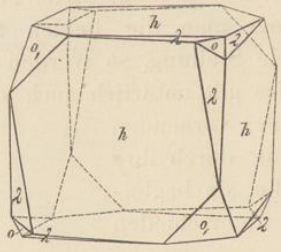
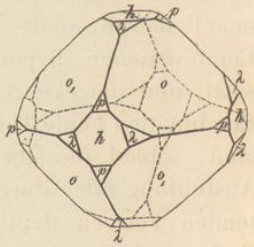


Fig. 253.



aber auch würfelförmige Krystalle, Fig. 252, mit Flächen eines linken positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëders. Gestalten, welche den von Scacchi beobachteten im Habitus ähnlich waren, wurden aus einer mit Natronsalpeter versetzten Lösung erhalten, nämlich Combinationen (Fig. 253) der nur wenig verschiedenen Tetraëder mit untergeordnetem Hexaëder, Pentagondodekaëder $\varkappa\pi\{201\}$ und einem linken positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëder, welches ungefähr die Lage von $\varkappa\pi\{421\}$ hatte. Die complicirtesten Formen lieferten Lösungen, welche gleichzeitig mit Kalisalpeter, Natronsalpeter und Zucker versetzt waren; dieselben zeigten vorherrschend $i = \varkappa\pi\{211\}$, das Tetartoëder λ und das Pentagondodekaëder $p = \varkappa\pi\{210\}$,

ein Krystall auch das negative Deltoiddodekaëder $\delta = \varkappa\pi\{221\}$, s. Fig. 254. In allen diesen Fällen sind die beobachteten Tetartoëder der Achtundvierzigflächner solche, dass sie im Grenzfall des Parallelismus mit einer Hauptaxe (d. h. wenn ein Index = 0 wird) in dasjenige Pentagondodekaëder übergehen, welches dem gleichzeitig beobachteten entgegengesetzt ist. Eine

Fig. 254.

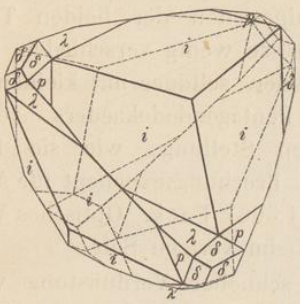
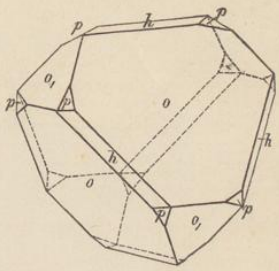


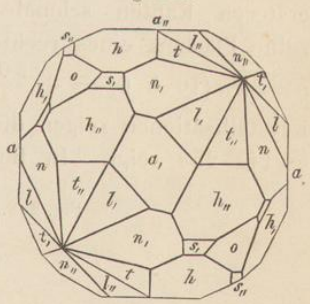
Fig. 255.



der Lösungen lieferte Krystalle von abweichender Form, insofern das herrschende Tetraëder gegen das Pentagondodekaëder die umgekehrte Stellung hatte, Fig. 255. Die flächenreichste bisher beobachtete Combination des salpetersauren Baryum fand Lewis (Zeitschr. f. Kryst. 2, 64) an einem zufällig gebildeten Krystalle. Derselbe ist in Fig. 256 in senkrechter Projection auf die vordere Hexaëderfläche (100) dargestellt und zeigt folgende Formen:

$$a = \{100\} = \infty O \infty$$
$$o = \varkappa\pi\{1\bar{1}1\} = -\frac{O}{2}$$
$$l = \varkappa\pi\{311\} = +\frac{3O3}{2}$$
$$s = \varkappa\pi\{2\bar{1}1\} = -\frac{2O2}{2}$$
$$t = \varkappa\pi\{214\} = +\frac{4O2}{4}\,l$$
$$n = \varkappa\pi\{351\} = +\frac{5O\frac{5}{3}}{4}\,r$$
$$h = \varkappa\pi\{2\bar{1}4\} = -\frac{4O2}{4}\,r.$$

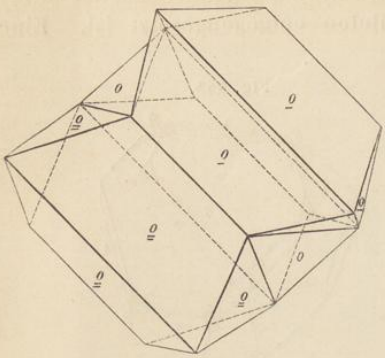
Fig. 256.



Es erscheinen also in den positiven Oktanten ein rechtes und ein linkes Tetartoëder, aber von verschiedenem Zeichen, und in den negativen eines, h, welches einem der beiden positiven, t, enantiomorph ist und mit ihm zusammen ein Dyakisdodekaëder bildet. — Häufig Zwillinge vom Habitus derjenigen des Spinell (Fig. 182), zuweilen mit Wiederholung der Zwillingsbildung zu Drillingen, Fig. 257, wobei die Krystalle nach denjenigen Oktaëderkanten verlängert sind, welche der Zwillingsebene parallel gehen. — Ueber die Aetzfiguren s. Wulff a. a. O. — Brechungsexponent für

Na-Licht: $n = 1{,}5711$ Topsøe und Christiansen, 1,5716 Fock. Die Krystalle zeigen eine schwache anomale Doppelbrechung, indem sie, durch zwei gegenüberliegende Oktaëderflächen gesehen, zwischen gekreuzten Nicols in keiner Stellung vollständig dunkel erscheinen.

Fig 257.



Strontiumsalpeter $= Sr[NO^3]^2$. Combinationen der beiden Tetraëder, an Grösse wenig verschieden, mit dem Hexaëder, seltener mit kleinen Flächen des Pentagondodekaëders von derjenigen Stellung, wie sie Fig. 255 zeigt. Brechungsexponent für *Na*-Licht: $n = 1{,}5667$ Fock. Optisches Verhalten wie beim vorigen Salz.

Bleisalpeter $= Pb[NO^3]^2$. Bei schneller Verdunstung wässriger Lösungen entstehen trübe milchweisse Oktaëder, bei ziemlich langsamer Verdunstung dagegen durchsichtige Krystalle der Combination Fig. 255 (s. vor. S.): $o = \varkappa\pi\{111\}$, $o_, = \varkappa\pi\{1\bar{1}1\}$, $h = \{100\}$, $p = \varkappa\pi\{201\}$, an denen gewöhnlich die Flächen $o_,$ = kleiner sind als o und ausserdem sich dadurch von letzteren unterscheiden, dass sie matter sind und eine Trübung von ihnen ausgehend sich in das Innere des Krystalls erstreckt. Durch oberflächliches Lösen runden sich die Combinationskanten des Hexaëders mit dem positiven Tetraëder stärker ab, als diejenigen mit dem negativen, und lässt man alsdann die Krystalle wieder wachsen, so bilden sich an ersteren Kanten schmale Flächen eines Pyramidentetraëders und einzelne Flächen eines rechten positiven tetraëdrischen Pentagondodekaëders $\varrho = \varkappa\pi\{10.5.6\} = +\frac{2O\frac{5}{3}}{4} r$, Fig. 258. Bei niedriger Temperatur erhaltene Krystallisationen zeigen die letztere Form auch vollständig entwickelt, wie es Fig. 259 zeigt. In Bezug auf die relative Entwickelung der beiden

Fig. 258.

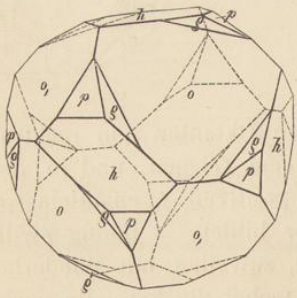
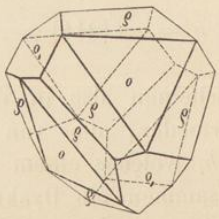


Fig. 259.



Tetraëder verhalten sich also alle diese Combinationen umgekehrt, wie die gewöhnlichen Formen des Barytsalpeters. Doch bilden sich auch zuweilen

bei gewöhnlicher Temperatur Krystalle, welche den letzteren entsprechen, wie der Umstand beweist, dass an solchen beim Weiterwachsen, nachdem die Kanten durch Auflösen abgerundet waren, die Ausbildung der Pyramidentetraëder am kleinen Tetraëder erfolgte; Formen einer derartigen Krystallisation sind in Fig. 260 und 261 dargestellt. Beide Ausbildungs-

Fig. 260.

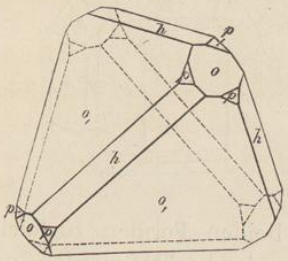
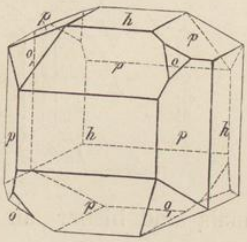


Fig. 261.



arten des Salzes zeigen also das gleiche Pentagondodekaëder, nämlich dasjenige, welches wir S 299 als rechtes bezeichnet haben. Die beiden Tetraëder unterscheiden sich auch durch ihre Aetzfiguren, welche einem Tetartoëder entsprechen und auf dem positiven Tetraëder gegen die symmetrische Lage zu den Kanten nach links, auf dem negativen Tetraëder nach rechts gedreht erscheinen (Wulff, Zeitschr. f. Kryst, 4, 126). Brechungsexponenten nach Topsøe und Christiansen:

Linie	C:	$n =$	1,7730
-	D:	-	1,7820
-	F:	-	1,8065

Anomale Doppelbrechung meist sehr deutlich; eine oktaëdrische Platte zerfällt in sechs Sectoren, deren Schwingungsrichtungen parallel und senkrecht zu den Seiten und deren Doppelbrechung von der Mitte nach dem Rande hin zunimmt; im convergenten Lichte zeigt die Mitte ein einaxiges Interferenzbild, welches nach dem Rande zu in ein zweiaxiges mit zunehmendem Axenwinkel übergeht (Klocke s. unter Ammoniumalaun S. 291).

Chlorsaures Natrium $= NaClO^3$. Aus wässrigen Lösungen bei gewöhnlicher Temperatur grosse Krystalle, Combinationen des Hexaëders mit dem Rhombendodekaëder, einem Pentagondodekaëder $\varkappa\pi\{201\}$ und einem Tetraëder. Die Krystalle zeigen stets Circularpolarisation, und zwar bilden sich aus derselben Lösung neben einander rechtsdrehende und linksdrehende*), welche sich stets durch die gegenseitige Stellung des Pentagondodekaëders zum Tetraëder unterscheiden: betrachtet man das letztere als negatives, so erscheint an den rechtsdrehenden Krystallen das früher

*) Die Auflösung der Krystalle einer Art, welche die Polarisationsebene des Lichtes nicht dreht, liefert bei der Krystallisation wieder beiderlei Krystalle.

als »rechtes« bezeichnete Pentagondodekaëder, dessen hexaëdrische Kante vorn horizontal verläuft, an den linksdrehenden jedoch das entgegengesetzte, mit vertikaler vorderer Kante. Fig. 262*a* stellt somit die Form eines rechtsdrehenden, Fig. 262*b* die eines linksdrehenden Krystalls dar.

Fig. 262*a*.

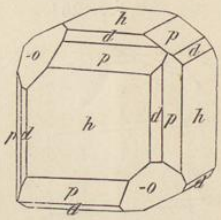
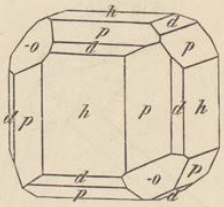


Fig. 262*b*.



Noch niemals sind bisher an einer der beiden Formen zugleich Flächen des entgegengesetzten Pentagondodekaëders beobachtet worden, und da das Auftreten des einen regelmässig mit Rechtsdrehung, das des andern mit Linksdrehung verbunden ist, Krystalle ohne Circularpolarisation aber nicht beobachtet werden, so ist hieraus zu schliessen, dass die beiden Formen einander in Bezug auf ihr Vorkommen an demselben Krystall ausschliessen. Da das rechte Pentagondodekaëder die gemeinsame Grenzform des rechten positiven und des linken negativen tetraëdrischen Pentagondodekaëders, $\varkappa\pi\{hlk\}$ und $\varkappa\pi\{h\bar{l}k\}$, darstellt, so ist anzunehmen, dass auch nur diese beiden Formen an rechtsdrehenden Krystallen auftreten können, dagegen linke positive und rechte negative, deren gemeinsame Grenzform für $l = 0$ das linke Pentagondodekaëder, nur an linksdrehenden. Obgleich diese Annahme, da noch keine Tetartoëder am chlorsauren Natrium beobachtet wurden, noch nicht bewiesen ist, gewinnt dieselbe doch an Wahrscheinlichkeit, wenn die daraus zu ziehenden Folgerungen berücksichtigt werden. Jedes der beiden Tetraëder ist die gemeinschaftliche Grenzform der rechten und der linken tetraëdrischen Pentagondodekaëder desselben Oktanten (s. Fig. 250), welche entgegengesetzten Drehungen entsprechen, also kann jedes der beiden Tetraëder an Krystallen beider Arten auftreten. In der That beobachtet man zuweilen, wenn auch selten, Combinationen beider Tetraëder sowohl an rechts- wie an linksdrehenden Krystallen. Genau der gleiche Schluss gilt auch, wie aus Fig. 241 und 243 ersichtlich, für die Pyramidentetraëder und die Deltoiddodekaëder. Damit übereinstimmend sind Krystalle, welche sich bei sehr niedriger Temperatur bilden und das Deltoiddodekaëder $\varkappa\pi\{322\}$ allein oder mit $\varkappa\pi\{111\}$ zeigen, theils rechts- theils linksdrehend. Dasselbe gilt für die Combinationen des Hexaëders mit dem Deltoiddodekaëder, welche sich aus ziemlich stark abgekühlter Lösung absetzen. — Die unter 0° erhaltenen Krystalle des chlorsauren Natrium, Deltoiddodekaëder oder Combinationen mit dem Tetraëder derselben Stellung oder reine Tetraëder, bilden Zwillinge nach dem Hexaëder, genau von der Form der Fig. 200, und zwar sind die beiden Kry-

stalle nicht nur geometrisch, sondern auch in physikalischer Beziehung symmetrisch zu einander in Bezug auf die Zwillingsebene, d. h. entgegengesetzt; es ist nämlich stets ein rechtsdrehender Krystall mit einem linksdrehenden verwachsen. — Die Aetzfiguren auf {100} gehören Pentagondodekaëdern an und haben daher bei rechts- und linksdrehenden Krystallen entgegengesetzte Lage; noch schärfer sind diejenigen auf $z\pi\{1\bar{1}1\}$, welche von den drei angrenzenden Flächen des Pentagondodekaëders gebildet werden und deren Orientirung gegen die Kanten rechtsdrehende Krystalle von linksdrehenden zu unterscheiden gestattet, auch wenn das Pentagondodekaëder in der Combination fehlt. — Elasticitätscoëfficienten nach Koch:

parallel einer Hauptaxe . . . 4047 Kilogr.
parallel einer Dodekaëdernormale 3190 -

Cohäsion nach verschiedenen Richtungen so wenig verschieden, dass keine Spaltbarkeit zu beobachten ist und die Härtecurve auf allen Flächen als ein Kreis erscheint. — Die Drehung der Polarisationsebene durch eine 1 mm dicke Platte beträgt bei 21° C. für die Fraunhofer'schen Linien:

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
2°,38	2°,52	3°,16	3°,96	4°,61	5°,89	6°,86

und nimmt mit steigender Temperatur zu (Sohnke, Wiedemann's Annalen 3,516).

Bromsaures Natrium = $NaBrO^3$. Beobachtete Formen: $z\pi\{111\}$, $z\pi\{1\bar{1}1\}$, {100}, {110}. Drehung für 1 m = $6\frac{1}{3}$° Gelb.

Essigsaures Uranylnatrium = $NaUO^2[C^2H^3O^2]^3$. Combination eines Tetraëders mit dem Dodekaëder (Fig. 205). Drehung für 1 mm und gelbes Licht 4° (auch hier dreht die Auflösung nicht).

Literatur für die drei zuletzt beschriebenen Salze: Marbach, Poggend. Ann. d. Phys. 91, 482, 94, 412. Baumhauer, Jahrb. f. Min. 1876, 606. Groth, Poggend. Ann. 158, 216.

§. 63. **Die physikalischen Eigenschaften der regulären Krystalle.** Fassen wir die physikalischen Eigenschaften der regulären Krystalle in einen Gesammtüberblick zusammen und vergleichen sie mit den geometrischen, so zeigt sich die vollkommenste Abhängigkeit jener von der Symmetrie der geometrischen Formen. Diese sind symmetrisch: 1) nach den drei Würfelflächen — und deren Normalen, die drei Hauptaxen, sind einander vollkommen gleichwerthig; 2) nach den sechs Dodekaëderflächen — und deren sechs Normalen, welche wir Nebenaxen nennen wollen, sind ebenfalls sämmtlich unter einander gleichwerthig; sie halbiren die rechten Winkel, welche je zwei Hauptaxen mit einander bilden.

Dieselbe Symmetrie zeigen nun die regulären Krystalle nach allen ihren physikalischen Eigenschaften. Der Elasticitätscoëfficient zeigt Maxima oder Minima von gleicher Grösse parallel den drei Hauptaxen, er ist ferner gleich gross in allen sechs Nebenaxen, ebenso gleich gross in je zwei Richtungen,

welche symmetrisch zu einer geometrischen Symmetrieebene liegen. Dies haben namentlich die Untersuchungen Voigt's am Steinsalz bewiesen.

Die Cohäsion ist ebenfalls im Minimum oder Maximum von genau gleicher Grösse parallel den drei Hauptaxen. Ist das erstere der Fall, so sind die Krystalle hexaëdrisch*) spaltbar (wie Steinsalz, Bleiglanz u. a.), und zwar um so vollkommener, je schneller die Grösse der Cohäsion wächst, wenn die Richtung, von einer Hauptaxe ausgehend, sich ändert. Sind aber die Hauptaxen die Richtungen der Maximalwerthe der Cohäsion, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Geht man von der Hauptaxe aus und betrachtet Richtungen, welche immer grössere Winkel mit jener einschliessen, aber sämmtlich in einer Haupt-Symmetrieebene liegen, so nimmt die Cohäsion fortwährend ab bis zu der Richtung, welche 45° mit der Hauptaxe bildet, von da ab ebenso wieder zu, bis sie in der zweiten Hauptaxe, nach einer Drehung von 90°, ihren Maximalwerth wieder erreicht. Die Richtung des bei 45° stattfindenden Minimum ist aber die Normale zur Dodekaëderfläche; wir wollen dieses daher das »Dodekaëderminimum« nennen. Aendern wir jedoch, von einer Hauptaxe ausgehend, die Richtung innerhalb einer Dodekaëderfläche, so muss mit steigendem Drehungswinkel ebenfalls die Cohäsion abnehmen, aber nach einem anderen Gesetz, als vorher; nach einer Drehung von 54° 44′ erreichen wir eine Richtung, in welcher sich drei Dodekaëderflächen schneiden, und gehen wir von dieser Richtung aus innerhalb dieser drei Symmetrieebenen, so nimmt in allen dreien die Cohäsion in derselben Weise zu, und wir gelangen auf jedem der drei Wege nach einer Drehung von 54° 44′ in die Direction einer Hauptaxe, in welcher das Maximum der Cohäsion vorhanden ist. Jene Richtung, welche mit den drei Hauptaxen gleiche Winkel einschliesst, ist die sogenannte trigonale Axe, die Normale zur Oktaëderfläche; wir wollen daher den Werth der Cohäsion in dieser Richtung das »Oktaëderminimum« nennen. Nun können zwei Fälle eintreten: entweder ist das Oktaëderminimum kleiner als das Dodekaëderminimum, oder umgekehrt. Im ersteren Falle ist in der Normalen zur Oktaëderfläche die Cohäsion am kleinsten von allen Richtungen im Krystall; derselbe ist spaltbar nach dem Oktaëder, und zwar um so vollkommener, je kleiner das Oktaëderminimum ist und je näher das Dodekaëderminimum dem Maximum liegt (z. B. Flussspath). Im zweiten Falle hat die Normale zur Dodekaëderfläche von allen Richtungen die geringste Cohäsion, der Krystall ist dodekaëdrisch spaltbar (Zinkblende).

Diesen Betrachtungen zufolge, welche gestützt sind auf die Bestimmungen der Härte, die ja ein Maass der Cohäsion ist in verschiedenen Richtungen (s. S. 9), können demnach keine anderen Spaltungsflächen an regulären Krystallen existiren, als diejenigen von {100}, {111} oder {110}, und in der That sind andere noch niemals beobachtet worden.

*) Wegen der absoluten physikalischen Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen kann also niemals ein Hexaëderflächenpaar mehr oder weniger vollkommen spaltbar sein, als die beiden anderen.

Bestimmt man die Härte in verschiedenen Richtungen auf einer Krystallfläche und trägt deren Grössenwerth auf diesen Richtungen auf, so erhält man eine Härtecurve, von welcher die Untersuchungen Exner's (s. §. 3) gezeigt haben, dass sie stets symmetrisch ist, entsprechend der Lage der Symmetrieebenen des Krystalls. Auf den Hexaëderflächen z. B. hat die Härtecurve vier Minima und vier Maxima, die einen in der Richtung zweier Hauptaxen, die anderen parallel den Diagonalen der Flächen, d. h. zwei Symmetrieaxen (Normalen zu Dodekaëderflächen). Die Minima, ebenso wie die Maxima, sind unter einander gleich, und die Curve ist symmetrisch zu den beiden Haupt-Symmetrieebenen und zu den beiden Dodekaëderflächen, welche normal zu der untersuchten Hexaëderfläche stehen.

Die Symmetrie der Aetzfiguren hängt ab von der Symmetrie der Flächen, auf denen sie erhalten werden. Sie sind deshalb bei holoëdrischen Krystallen auf den Hexaëderflächen symmetrisch nach den Seiten und den Diagonalen (Haupt- und Nebenaxen); auf den Oktaëderflächen nach drei, einander unter 60° schneidenden Geraden (entsprechend den drei zu {111} senkrechten Dodekaëderebenen); auf den Dodekaëderflächen nach den beiden Diagonalen des Rhombus; auf einem Ikositetraëder nach der symmetrischen Diagonale der Flächen u. s. f. Bei den tetraëdrisch-hemiëdrischen Krystallen müssen die Aetzfiguren auf den Hexaëderflächen symmetrisch sein nach deren Diagonalen (in Bezug auf die Seiten, d. i. die Hauptaxen, können dieselben unsymmetrisch sein, wenn sie nämlich von Hexakistetraëdern, Pyramidentetraëdern und Deltoiddodekaëdern gebildet werden; symmetrisch würden sie nur dann sein, wenn sie von Pyramidenwürfeln oder Dodekaëder hervorgebracht wären); auf dem Oktaëder müssen sie dieselbe Symmetrie zeigen, wie bei den holoëdrischen Krystallen, aber sie können verschiedene Gestalt besitzen auf den beiderlei Tetraëderflächen und dadurch deren Unterscheidung ermöglichen; auf {101} müssen die Aetzfiguren nach oben und unten (nach den kürzeren Diagonalen) symmetrisch sein, können aber unsymmetrisch sein nach rechts und links, wie es z. B. bei der Zinkblende der Fall ist. Auf den Würfelflächen pentagonal-hemiëdrischer Krystalle ist Symmetrie erforderlich nach den Seiten, möglich, aber nicht nothwendig, nach den Diagonalen (sie ist z. B. vorhanden, wenn die Aetzfiguren von Ikositetraëderflächen, dagegen nicht, wenn sie von Dyakisdodekaëderflächen gebildet werden); auf den Oktaëderflächen können die Figuren unsymmetrisch sein, müssen aber gleiche Gestalt haben auf allen Oktaëderflächen; auf den Dodekaëderflächen ist Symmetrie erforderlich nach den langen Diagonalen, möglich, aber nicht nothwendig nach den kurzen, u. s. f. Bei den plagiëdrisch-hemiëdrischen und tetartoëdrischen Krystallen ist symmetrische Orientirung der Aetzfiguren gegen die Umrisse der Flächen auf keiner derselben nothwendig, kann aber natürlich eintreten, sobald die Figuren von gewissen Grenzformen hervorgebracht werden. Da jedoch die Aetzfiguren meist von den weniger einfachen Formen des Systems gebildet werden, so treten da, wo unsymmetrische Orientirungen möglich sind, die-

selben häufiger ein, als symmetrische, und hieraus ist ersichtlich, dass die Aetzfiguren in vielen Fällen ein werthvolles Hülfsmittel zur Erkennung der Hemiëdrie und Unterscheidung der entgegengesetzten hemiëdrischen Formen darbieten.

Da der Schall eine Wellenbewegung der Theilchen ist, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei derselben Substanz nur von deren Elasticitätscoëfficient abhängt, so muss, da letzterer nach verschiedenen Richtungen in einem regulären Krystall differirt, auch der Schall sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen (s. S. 16), aber mit gleicher in den drei Hauptaxen u. s. f.

Was die optischen Eigenschaften betrifft, so muss, der Symmetrie der regulären Krystalle entsprechend, die optische Elasticität in den Richtungen der drei Hauptaxen genau gleich sein. Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in drei auf einander senkrechten Richtungen bedingt aber als Elasticitätsfläche eine Kugel, die regulären Krystalle sind einfach brechend, optisch isotrop, sie haben nach allen Richtungen dieselbe Lichtgeschwindigkeit, dieselbe Absorption u. s. f. Die regulären Krystalle verhalten sich somit in optischer Beziehung, wie amorphe Körper, d. h. sie bleiben zwischen gekreuzten Nicols in jeder Stellung dunkel, eine Eigenschaft, durch welche am einfachsten die Zugehörigkeit eines Krystalls zum regulären System erkannt werden kann*).

---

*) Von dieser Eigenschaft bilden eine Ausnahme die sogenannten anomal doppeltbrechenden Krystalle, d. h. diejenigen, welche bei unzweifelhaft regulärer Krystallform Erscheinungen der Doppelbrechung zeigen, welche wahrscheinlich auf Störungen ihrer Structur, verursacht durch innere Spannungen, zurückzuführen sind. Wie bereits S. 141 angeführt, hat Mallard für diese Erscheinung eine andere Erklärung gegeben. Nach ihm handelt es sich hier um Körper, deren Krystallform einem anderen, weniger symmetrischen Systeme angehört, deren Axenlängen aber innerhalb der Fehlergrenzen der Messung genau gleich denen regulärer Formen sind (»Grenzformen«), so dass sie, zu regelmässigen Verwachsungen verbunden, pseudoreguläre Aussenformen liefern, welche durch Messung von regulären einfachen Krystallen nicht unterschieden werden können. Da zwei in Zwillingsstellung befindliche Partikel fast gleiche Molekularanordnung besitzen, indem zwei Richtungen mit einander vertauscht wurden, welche durch nahe gleiche Dimensionen charakterisirt sind, so wird angenommen, dass diese verschiedenen Orientirungen sich auch mit einander mischen können, wie die Moleküle isomorpher Körper, deren Krystallform und Molekularstructur meist auch nur eine ähnliche, keine ganz genau gleiche ist. Eine Mischung doppeltbrechender Theilchen von verschiedener Orientirung kann aber unter Umständen einfache Lichtbrechung erzeugen, ebenso wie die Uebereinanderlagerung zweiaxiger Partien Einaxigkeit. Dass nun in der That gewisse, früher als »anomal« betrachtete Substanzen nicht regulär sind, sondern aus Verwachsungen von Krystallen eines anderen Systems bestehen, hat Mallard am Boracit gezeigt, der aus rhombischen Krystallen in Zwillingsstellung zusammengesetzt ist, der also so, wie er uns in der Natur vorliegt, streng genommen hätte aus dem regulären System verwiesen und in das rhombische gestellt werden müssen. Der Nachweis dieses Verhaltens wurde bei dem genannten Minerale geliefert durch Umwandlung in eine zweite, wirklich reguläre Form, und da dimorphe Körper meist einander sehr nahe stehende, wenn auch verschiedenen Systemen angehörige

Die thermischen Verhältnisse der regulären Krystalle stellen in jeder Beziehung das vollständigste Analogon der optischen dar; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen, die Leitung der Wärme, die Ausdehnung durch Annahme einer höheren Temperatur sind nach allen Richtungen dieselben.

So zeigen uns die Krystalle des ersten Systems sowohl in geometrischer, als in physikalischer Beziehung den höchsten Grad von Regelmässigkeit, den krystallisirte Körper überhaupt besitzen können, und sind dadurch, dass ihre drei Hauptaxen in jeder Beziehung absolut gleichwerthig sind, von den Krystallen aller übriger Systeme unterschieden.

Krystallformen besitzen, so ist hiermit zugleich die Erklärung der »Grenzform« gegeben. Wir haben es in diesem Falle also nicht eigentlich mit einer anomalen Doppelbrechung zu thun. Bei solchen Substanzen jedoch, bei denen wirklich einfachbrechende Krystalle und solche mit allen möglichen Uebergängen von einfacher Brechung bis zu starker Doppelbrechung vorkommen, wie Diamant, Steinsalz, Alaun, Granat u. a., scheint die in §. 30 erläuterte Erklärung durch innere Spannungen der Substanz einfacher, als die Mallard'sche Mischungstheorie. Dass solche Spannungen bei der Krystallisation eintreten können, namentlich durch Einflüsse, welche auf die Krystallbildung hindernd einwirken, ist von O. Lehmann durch zahlreiche Versuche bewiesen worden. Die Versuche am Steinsalz (s. S. 272) haben nun gezeigt, dass schon geringe mechanische Kräfte dauernde Doppelbrechung der Substanz hervorbringen. Nach Braun's Beobachtungen sind bei den Alaunen und den tetartoëdrischen Nitraten (S. 304, 305) nur diejenigen Krystalle normal einfachbrechend, welche vollkommen chemisch rein sind, während die geringsten isomorphen Beimischungen sofort Störungen der normalen Structur, d. h. Doppelbrechung, hervorbringen. Bei dem in Ikositetraëdern krystallisirenden Analcim verschwindet nach Klein die Doppelbrechung beim Erwärmen allmählich, also verhält sich derselbe in dieser Beziehung ganz verschieden vom Boracit. Hiernach scheint es nicht möglich, die bei letzterem Mineral als richtig erkannte Erklärung seines Verhaltens auf die anomalen Krystalle auszudehnen.

B. Krystalle mit einer Hauptaxe.

(Optisch einaxige Krystalle.)

§. 64. **Einleitung.** Die Gesammtheit aller Krystalle, welche nur eine Haupt-Symmetrieebene, also nur eine Hauptaxe, besitzen, zerfällt nach §. 45 in zwei Krystallsysteme, das hexagonale und das tetragonale. Die dem ersteren angehörigen Krystalle haben ausser der Haupt-Symmetrieebene noch sechs, die des tetragonalen noch vier gewöhnliche Symmetrieebenen, welche einander sämmtlich in der Hauptaxe durchschneiden.

Nach dem Grundgesetz der Krystallphysik und den in §. 44 daraus gezogenen Folgerungen giebt es in den Krystallen mit einer Hauptaxe nur eine Ebene, in welcher alle Richtungen optisch gleichwerthig sind, welche demnach einen Kreisschnitt der Elasticitätsfläche liefert; dies ist die Haupt-Symmetrieebene. Die sechs übrigen Symmetrieebenen des hexagonalen Systems, ebenso die vier entsprechenden des tetragonalen, müssen sämmtlich die Elasticitätsfläche in symmetrische Hälften zerlegen. Dieser Bedingung genügen von den Elasticitätsflächen der doppeltbrechenden Krystalle nur diejenigen der optisch einaxigen, welche die Form eines Rotationsellipsoids haben, und nur für den Fall, dass dessen Rotationsaxe genau zusammenfällt mit der Hauptaxe der Krystalle. Da das, was für die optischen Eigenschaften gilt, auch statt hat für die thermischen u. s. w., so sind folglich die Krystalle mit einer Hauptaxe optisch, thermisch u. s. w. einaxig, und ihre physikalische Hauptaxe fällt mit ihrer geometrischen zusammen.

Die tetragonalen, ebenso wie die hexagonalen Krystalle haben also folgende allgemeine Eigenschaften: in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe die grösste oder kleinste optische Elasticität, senkrecht dazu, nach allen Richtungen gleich, die kleinste oder grösste, so dass die Richtung jener Hauptaxe zugleich die der optischen Axe ist; ganz gleiches Verhalten in Bezug auf Strahlung und Leitung der Wärme; in der Hauptaxe das Maximum oder das Minimum der thermischen Ausdehnung, senkrecht dazu nach allen Seiten gleiche, kleinste oder grösste lineare Ausdehnung durch die Wärme, so dass eine Kugel, aus einem solchen Krystall geschliffen, sich durch Temperaturänderung verwandelt in ein Rotationsellipsoid, welches in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe entweder verlängert oder verkürzt ist.

Die vollkommene Uebereinstimmung des allgemeinen physikalischen Charakters zwischen den Krystallen des hexagonalen und des tetragonalen Systems bedingt nun auch eine solche in ihren geometrischen Eigenschaften. Die Analogie beider Systeme in Bezug auf die Beschaffenheit der möglichen Formen, der Art der Combinationen, der verschiedenen Hemiëdrien u. s. w. ist eine so vollkommene, dass die Darstellung des hexagonalen Systems fast wörtlich auch für das tetragonale gilt, wenn nur die Namen geändert und für die Zahl 6 stets die Zahl 4 eingesetzt wird.

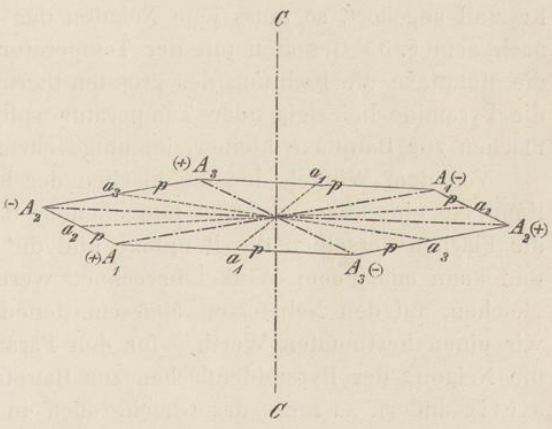
Die folgende Darstellung der beiden in Rede stehenden Systeme wird dies bis ins Einzelne zeigen.

II. Das hexagonale Krystallsystem.

§. 65. **Grundform, Ableitung und Bezeichnung der hexagonalen Formen durch ihre Indices.** Das hexagonale Krystallsystem umfasst alle Formen, welche ausser einer Haupt-Symmetrieebene noch sechs andere, senkrecht dazu und einander unter 30° durchschneidend, besitzen.

Für die krystallographische Betrachtung werden die Formen stets so gestellt, dass die Haupt-Symmetrieebene horizontal, die Hauptaxe folglich vertical steht. Die hexagonalen Krystallgestalten sind derart beschaffen, dass sie nach einer Drehung von 60° um die Hauptaxe sich selbst wieder genau congruent sind. Seien in Fig. 263 die Geraden A_1, a_1, A_2, a_2, A_3, a_3 die Durchschnitte der sechs Symmetrieebenen mit der Haupt-Symmetrieebene, so heisst jener Satz: die Richtungen A_1, A_2, A_3 können beliebig mit einander vertauscht werden, ebenso a_1, a_2, a_3, ohne die Formen zu ändern. Es sind demnach A_1, A_2, A_3 gleichwerthige Richtungen, ebenso a_1, a_2, a_3.

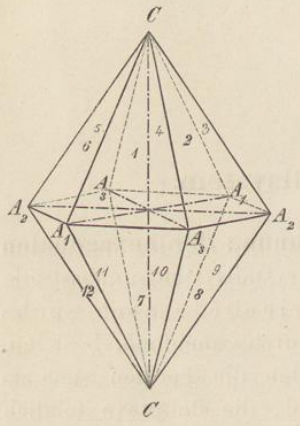
Fig. 263.



Es wird daher eine Form zu den krystallonomisch möglichen gehören, deren Flächen je zwei der gleichwerthigen Richtungen in gleichem Abstande vom Mittelpunkt durchschneiden, deren Durchschnitte mit der Haupt-Symmetrieebene also die Geraden p Fig. 263 sind. Es wird sich der Einfachheit wegen empfehlen, eine solche Form zur Grundform, und zu

Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei einander unter 60° schneidende Symmetrieebenen, also zu Axen die Hauptaxe C und zwei der Linien A oder a zu wählen. Nehmen wir zu diesem Zwecke A_1, A_3*) und die Hauptaxe, und nennen wir die ersteren die beiden Nebenaxen, so durchschneidet die Fläche 1 Fig. 264 der Grundform, welche in dem Zwölftel (Dodekanten) des Raumes zwischen A_1 und A_3 vorn oben liegt, die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, die Hauptaxe in einer vorläufig noch unbekannten Entfernung. Da die Ebene, welche die Haupt-Symmetrieebene in A_1, A_1 vertical schneidet (kurz: die Ebene A_1), eine Symmetrieebene ist, so muss jene Grundform ausser dieser ersten Fläche noch eine zweite, 6, besitzen, welche zu jener in Bezug auf A_1 symmetrisch liegt; da auch A_3 Symmetrieebene, muss eine zugehörige Fläche 2, zu 1 symmetrisch in Bezug auf A_3, existiren; da ferner A_2 eine Symmetrieebene der vollständigen Form ist, so müssen zu derselben noch drei Flächen 3, 4, 5, in Bezug auf A_2 symmetrisch zu 2, 1, 6, und endlich, symmetrisch in Bezug auf die Haupt-Symmetrieebene zu allen sechs Flächen, noch sechs untere gehören. Die vollständige einfache Krystallform besitzt also 12 Flächen, es ist eine hexagonale Pyramide Fig. 264, deren sämmtliche Flächen gleiche Neigung gegen die Hauptaxe besitzen. Da aber diese Form einem einaxigen Krystall angehört, so muss jene Neigung der Flächen gegen die Hauptaxe nach dem §. 33 Gesagten mit der Temperatur veränderlich sein; im Falle die Hauptaxe die Richtung der grössten thermischen Ausdehnung ist, muss die Pyramide bei steigender Temperatur spitzer werden, der Winkel der Flächen zur Hauptaxe kleiner, im umgekehrten Falle grösser.

Fig. 264.



Von dem Winkel, den die Flächen der hexagonalen Pyramide mit der Hauptaxe einschliessen, hängt nun offenbar das Verhältniss ab, in welchem die Flächen derselben die Hauptaxe und die beiden Nebenaxen schneiden, und kann aus jenem Winkel berechnet werden. Setzen wir die beiden gleichen, auf den Nebenaxen abgeschnittenen Parameter = 1, so erhalten wir einen bestimmten Werth c für den Parameter der Hauptaxe. Da aber die Neigung der Pyramidenflächen zur Hauptaxe sich mit der Temperatur stetig ändert, so muss das Gleiche auch in Bezug auf c stattfinden; der Werth von c für eine bestimmte Temperatur muss vollkommen stetig in einen anderen, welcher einer anderen Temperatur entspricht, übergehen,

*) Wobei die Aufstellung der Formen stets so geschehen soll, dass A_2 horizontal quer läuft, A_1 und A_3 demnach schräg nach vorn, aber ebenfalls horizontal, die Hauptaxe, wie bereits erwähnt, vertical. Die Wahl der positiven Seiten der drei Nebenaxen ist hier so getroffen, dass dieselben gleiche Winkel (120°) mit einander bilden (s. Fig. 263).

wenn der Krystall die letztere annimmt. Dies ist nur möglich, wenn c bei einer bestimmten Temperatur im Allgemeinen eine irrationale Zahl ist, da der Uebergang einer rationalen Zahl in eine ebensolche zweite nur sprungweise geschehen kann. Es giebt also wohl gewisse Temperaturen, bei denen c genau einer rationalen Zahl gleich ist, bei allen dazwischen liegenden indess durchläuft c alle irrationalen Zahlen, welche zwischen jenen liegen. Ist c für eine bestimmte Temperatur*) durch die Messung des Winkels der Pyramidenflächen zur Hauptaxe bestimmt, so sind uns alle Formen, welche an dem Krystall überhaupt möglich sind, gegeben, denn es sind nunmehr sämmtliche Elemente (Axenwinkel: $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 60^0$; Parameter der Grundform: $1 : 1 : c$) bekannt, und demnach nur noch solche Formen an den Krystallen derselben Substanz krystallonomisch möglich, deren Indices rationale Zahlen sind.

Gehen wir jetzt über zur Bezeichnung der hexagonalen Formen, für welche wir nach dem Vorhergehenden zu Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei gleichwerthige Symmetrieebenen und zur Grundform die hexagonale Pyramide wählen, so würde eine Fläche derselben, z. B. 1 Fig. 264, mit Berücksichtigung der Vorzeichen der Parameter, wie sie in Fig. 263 angegeben und im Folgenden stets beibehalten werden sollen, das Symbol $(1\bar{1}1)$ erhalten müssen. Bezeichnen wir jetzt die nächstfolgende Fläche 2 in gleicher Weise, auf dieselben Axen bezogen, so erhalten wir, da sie parallel der Axe A_1 ist, das Symbol $(0\bar{1}1)$. Während also im regulären System, bei drei zu einander rechtwinkeligen Axen, alle Flächen einer einfachen Form gleiche Indices haben (und, wie wir später sehen werden, ist dasselbe im tetragonalen System der Fall), würden hier die verschiedenen Flächen derselben Form verschiedene Indices erhalten. Die Fläche 2 Fig. 264 hat aber das gleiche Symbol $(1\bar{1}1)$, wie 1, wenn wir sie beziehen auf die Axen A_2 (welche ja mit A_1 vollkommen gleichwerthig ist), A_3 und C. Auf diese letzteren Axen bezogen, hat 1 das Symbol $(0\bar{1}1)$. Wir werden daher für beide Flächen 1 und 2 Symbole, welche aus denselben Zahlen bestehen, erhalten, wenn wir in dieselben ausser der Hauptaxe die drei, auf die Nebenaxen bezüglichen Indices einführen, uns also vierzähliger Symbole bedienen**). Dasjenige der Fläche 1 würde alsdann $= (10\bar{1}1)$ sein, wenn sich der erste Index auf A_1, der zweite auf A_2, der dritte auf A_3 und der vierte auf C bezieht; dasjenige von $2 = (01\bar{1}1)$. Schreiben wir stets die Indices in dieser Reihenfolge, so sind überhaupt nur folgende Flächen, welche zwei benachbarte Nebenaxen in gleichen Abständen durchschneiden, möglich, deren Indices durch alle möglichen

*) Die Winkeländerungen, welche die Krystalle zwischen den Grenzen der gewöhnlich bei Messungen vorkommenden Temperaturen (15°—25° C.) erleiden, sind so gering, dass fast immer eine genauere Temperaturangabe überflüssig ist.

**) Diese Symbole in der hier benutzten Form wurden für das hexagonale Krystallsystem zuerst von Bravais vorgeschlagen.

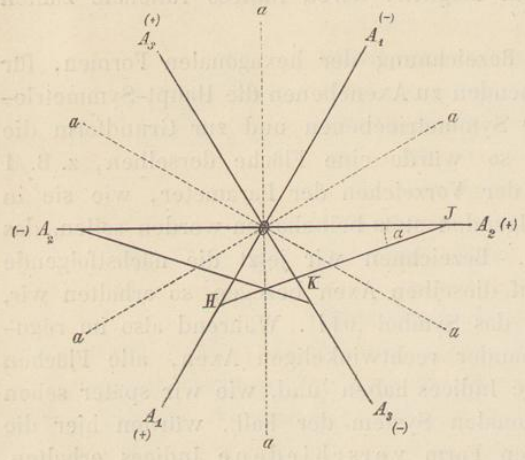
Vertauschungen der gleichwerthigen Parameter der Nebenaxen erhalten werden:

$$(10\bar{1}1)\ (01\bar{1}1)\ (\bar{1}101)\ (\bar{1}011)\ (0\bar{1}11)\ (1\bar{1}01)$$
$$(10\bar{1}\bar{1})\ (01\bar{1}\bar{1})\ (\bar{1}10\bar{1})\ (\bar{1}01\bar{1})\ (0\bar{1}1\bar{1})\ (1\bar{1}0\bar{1})$$

Diese zwölf Flächen sind nun gerade diejenigen der vollständigen hexagonalen Pyramide; bei Anwendung derartiger vierzähliger Symbole stellt also im hexagonalen System (ebenso wie im regulären und tetragonalen mit dreizähligen) die Gesammtheit aller möglicher Flächen mit gleichen Indices eine einfache Krystallform von hexagonaler Symmetrie dar.

Es ist klar, dass jede Krystallfläche schon durch drei Indices, zwei auf je eine Nebenaxe, der dritte auf die Hauptaxe bezüglich, vollkommen bestimmt ist, der vierte, auf die dritte Nebenaxe sich beziehende, also durch die beiden anderen mit gegeben ist. Dieser, demnach an und für sich überflüssige und nur aus dem soeben entwickelten Grunde eingeführte Index steht nun zu jenen in einem sehr einfachen Verhältniss.

Fig. 265.



Um diese Beziehung ganz allgemein zu bestimmen, sei in Fig. 265 HKJ der Durchschnitt einer beliebigen Krystallfläche mit der Haupt-Symmetrieebene, deren auf die drei Nebenaxen bezüglichen Indices h, $-k$, i seien, folglich $\frac{1}{h} = OH$, $\frac{1}{-k} = -OK$, $\frac{1}{i} = OJ$ ihre entsprechenden Parameter; alsdann ist, wenn der Winkel OJH mit α bezeichnet wird

$$\frac{OJ}{OH} = \frac{h}{i} = \frac{\sin(60^0 - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \operatorname{cotg}\alpha - \frac{1}{2}$$

$$\frac{OJ}{-OK} = \frac{-k}{i} = \frac{\sin(60^0 + \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \operatorname{cotg}\alpha + \frac{1}{2}$$

folglich

$$\frac{h+k}{i} = -1$$

$$h + k + i = 0.$$

Es ist demnach stets die Summe der auf die drei Nebenaxen bezüglichen Indices gleich Null. Sind also zwei dieser Zahlen gegeben, so ist die dritte diejenige Zahl, welche mit den beiden ersten die Summe 0 giebt. Es muss sonach von den drei Indices hik mindestens einer negativ sein.

Ist l der auf die Hauptaxe bezügliche Index, so ist der allgemeinste Ausdruck für eine beliebige Krystallfläche $(hikl)$; wir haben bereits einen

speciellen und einfacheren Fall betrachtet, den nämlich, dass $h = -k = 1$, den Fall der zur Grundform gewählten hexagonalen Pyramide. Es ist jetzt zu untersuchen, welche Flächen noch zu der in Fig. 265 angegebenen Fläche $(hi\bar{k}l)$ gehören und mit ihr zusammen die vollständige einfache Form, welche wir dann mit $\{hikl\}$ zu bezeichnen haben, bilden. Da die hexagonalen Formen nicht nur nach den drei durch die Nebenaxen A_1, A_2, A_3 und die Hauptaxe gehenden Ebenen symmetrisch sind, sondern auch nach denjenigen, welche bestimmt sind durch die drei punktirten Geraden a, welche Zwischenaxen genannt werden, so erfordert die Symmetrie nach der zu A_2 senkrechten Ebene, dass ausser der durch HKJ (Fig. 265) gehenden Fläche noch eine zweite, gegen jene Ebene umgekehrt liegende, in demselben Dodekanten vorhanden ist. Die Symmetrie nach den Ebenen durch A_1, A_2, A_3 erfordert ein gleiches Flächenpaar in jedem Dodekanten, und so resultiren die 24 Flächen der in Fig. 266 dargestellten dihexagonalen Pyramide, welche als allgemeinster Fall die flächenreichste aller einfachen hexagonalen Formen darstellt. Ganz ebenso, wie im regulären Krystallsystem aus dem Achtundvierzigflächner, werden wir auch aus dem allgemeinen Repräsentanten aller hexagonalen Formen, der dihexagonalen Pyramide, alle

Fig. 266.

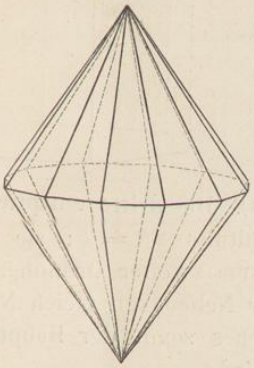
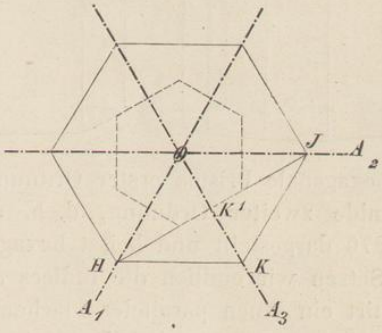


Fig. 267.



übrigen ableiten. Wir erhalten dieselben, indem wir h, k und l (i ist abhängig von h und k, also nach deren Bestimmung nicht mehr beliebig) alle möglichen speciellen Werthe beilegen. Wenn wir $h = -k$ setzen, so erhalten wir, wie wir oben sahen, eine hexagonale Pyramide, deren Flächen zwei benachbarte Abschnitte der Nebenaxen in gleichem Abstande vom Mittelpunkte durchschneiden. Setzen wir aber $2h = -k$, so hat der Durchschnitt einer Fläche zwischen A_1 und A_3 (Fig. 267) mit der Haupt-Symmetrieebene (parallel derselben die Zeichnungsebene) eine Richtung HK', welche normal zur Axe A_3 ist (als Höhenlinie des gleichseitigen Dreiecks OKH); die im Dodekanten A_3, A_2 liegende Fläche, für welche $OJ = 2OK'$ ist, hat dieselbe Richtung, fällt also mit ihr zusammen. Es entsteht demnach in diesem Falle keine dihexagonale, sondern nur eine hexagonale Pyramide,

deren Querschnitt sechs Seiten (in der Figur punktirt bezeichnet) besitzt, welche mit den Nebenaxen Winkel von 90^0 bilden, während der Querschnitt der zuerst betrachteten hexagonalen Pyramide (in Fig. 267 mit dünnem Strich ausgezogen) die Nebenaxen unter 60^0 durchschneidet. Beide Arten von hexagonalen Pyramiden werden als solche erster und zweiter Ordnung unterschieden. So haben wir also bereits drei verschiedene Fälle, wobei l noch einen beliebigen Werth hat. Setzen wir nun in jedem derselben noch $l = 0$, so erhalten wir dreierlei Formen, welche die Hauptaxe nicht schneiden, also ihr parallel sind.

Die erste derselben (Fig. 268) entspricht der dihexagonalen Pyramide und hat das Symbol $\{hik0\}$; sie heisst dihexagonales Prisma. Die zweite stellt den speciellen Fall dar, in welchem $h = -k$, daher die beiden zwischen zwei benachbarten Nebenaxen liegenden Flächen in eine zusammenfallen; es ist

Fig. 268.

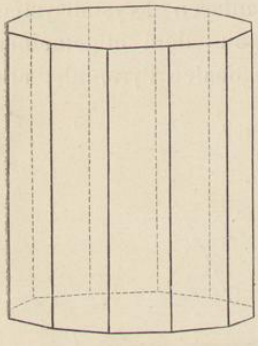


Fig. 269.

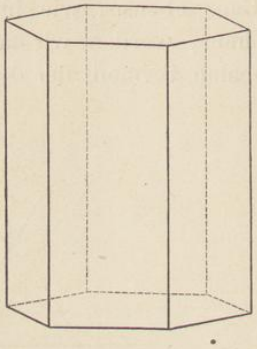
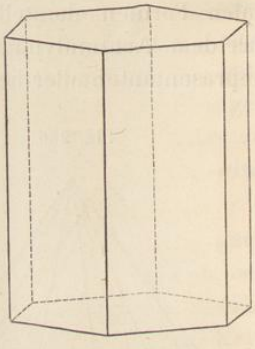


Fig. 270.



das hexagonale Prisma erster Ordnung (Fig. 269). Die dritte entspricht der Pyramide zweiter Ordnung, d. h. dem Verhältniss $2h = k$; sie ist in Fig. 270 dargestellt und heisst hexagonales Prisma zweiter Ordnung.

Setzen wir endlich die Indices aller dreier Nebenaxen gleich Null, so resultirt ein ihnen paralleles Flächenpaar, welches somit der Haupt-Symmetrieebene entpricht und die Basis genannt wird.

So giebt uns die Herleitung der möglichen Arten von Formen mit hexagonaler Symmetrie sieben mögliche Fälle, von welchem die drei letzten denjenigen Flächen entsprechen, nach denen sämmtliche Formen symmetrisch sind, denn die drei Flächenpaare des hexagonalen Prisma 1. Ordnung sind parallel den drei senkrechten Symmetrieebenen, welche durch die Nebenaxen gehen, diejenigen des Prisma 2. Ordnung den durch die Zwischenaxen gehenden. Alle holoëdrischen hexagonalen Formen sind also symmetrisch nach der Basis und nach den Flächen der beiden hexagonalen Prismen.

Da die drei gleichwerthigen Nebenaxen sich zu einander ganz ebenso verhalten, wie die drei Zwischenaxen, wir also S. 314 ebenso gut die Richtungen a_1 und a_3 (statt A_1 und A_3) hätten zu Nebenaxen nehmen können, so folgt, dass man die beiden Klassen von hexagonalen Pyramiden, die

erste und zweite Ordnung, beliebig mit einander vertauschen, also auch eine Pyramide zweiter Ordnung zur Grundform wählen kann; alsdann werden selbstverständlich alle Pyramiden, sowie das Prisma derselben Ordnung zu solchen erster, die bisherigen Pyramiden und das Prisma erster Ordnung nunmehr zweiter.

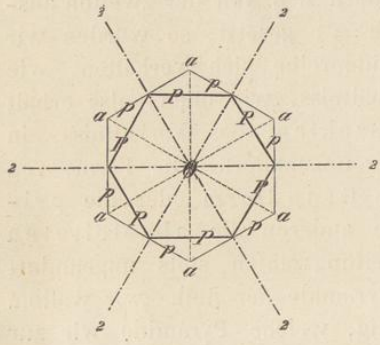
§. 66. **Auswahl der Grundform und Unterscheidung der Krystallreihen.** Bei der bisherigen Ableitung der hexagonalen Formen haben wir zur Grundform eine solche gewählt, deren Flächen die benachbarten Hälften zweier Nebenaxen in gleichem Abstande durchschneiden, also das Parameterverhältniss $1 : 1 : c$ haben, und sie hexagonale Pyramide erster Ordnung genannt. Solcher hexagonaler Pyramiden erster Ordnung müssen aber offenbar an demselben Krystall noch andere, wenn nicht auftreten, so doch möglich sein, da alle Flächen mit dem Parameterverhältniss $1 : 1 : mc$ krystallonomisch möglich sind, sobald m einen rationalen Werth, z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3 u. s. f., besitzt, d. h. die Indices der Flächen rationale Zahlen darstellen. Ein und derselbe Krystall, oder verschiedene Krystalle einer und derselben Substanz, können also verschiedene hexagonale Pyramiden erster Ordnung zeigen; wenn wir deren Flächen parallel sich selbst uns so weit verschoben denken, bis alle einen gleich grossen Hauptquerschnitt, also genau gleich lange Nebenaxen besitzen, so sind die Hauptaxen dieser sämmtlichen Pyramiden verschieden, aber deren Länge steht in rationalem, meist sehr einfachem Verhältniss. Nennen wir die Länge der Hauptaxe irgend einer mittleren Pyramide dieser Reihe c und bestimmen wir den Zahlenwerth derselben ($a = 1$ gesetzt) aus der Neigung ihrer Flächen zur Hauptaxe, berechnen wir ebenso das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen aus den Kantenwinkeln auch bei den anderen Pyramiden jener Reihe, so finden wir dieses Verhältniss beispielsweise bei den flacheren Formen genau gleich der Hälfte, dem Drittel u. s. f. von dem Zahlenwerth c, bei den spitzeren Pyramiden dagegen gleich dem doppelten, dreifachen c u. s. f. (und zwar um so genauer, je genauer die Kantenwinkel der Pyramiden bestimmt waren). Bei gleichen Nebenaxen verhalten sich also die Hauptaxen dieser Pyramiden, wie $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 3$ u. s. f. Wären wir bei der Ableitung des Verhältnisses, in welchem diese Formen zu einander stehen, nicht von der dritten, sondern z. B. von der zweiten ausgegangen, hätten demnach deren Hauptaxe $= c$ gesetzt, so würden wir finden, dass die Hauptaxen obiger Pyramidenreihe sich verhalten, wie $\frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 6$; dies ist aber dasselbe Verhältniss, wie oben; also erhält man hierdurch zwar andere Ableitungszahlen, das Verhältniss, in welchem sie zu einander stehen, bleibt aber ungeändert. Die Form, von der wir hierbei ausgehen, nennen wir die Grundform oder die primäre Pyramide erster Ordnung, die anderen die abgeleiteten Pyramiden. Da das Verhältniss der Ableitungszahlen stets ungeändert bleibt, wir mögen ausgehen, von welcher Pyramide der Reihe wir wollen, so ist es theoretisch vollkommen gleichgültig, welche Pyramide wir zur

primären wählen, sobald an den Krystallen der betreffenden Substanz überhaupt mehrere Pyramiden beobachtet wurden. Findet sich an denselben gewöhnlich nur eine, andere nur selten und mit kleinen Flächen ausgebildet, so wird es nicht zweifelhaft sein, dass es geeignet ist, jene zur Grundform zu wählen. Zeigt die Substanz in ihren Krystallen eine Spaltbarkeit nach einer hexagonalen Pyramide, so wird die Wahl dieser zur primären angezeigt sein, da ihre Lage alsdann stets leicht erkannt werden kann und sie durch die Cohäsionsverhältnisse gleichsam vor den übrigen ausgezeichnet ist. Wo keiner dieser Anhaltspunkte für die Auswahl der Grundform vorliegt, wird es sich empfehlen, dieselbe so zu treffen, dass die Ableitungszahlen der übrigen Pyramiden möglichst klein werden. Es wird also z. B. nicht günstig sein, in der oben als Beispiel aufgeführten Reihe die flachste der Pyramiden die primäre zu nennen, da dann die letzte, spitzeste, die grosse Ableitungszahl 12 erhält.

Darnach ist also die Wahl der Grundform in jedem einzelnen Falle, d. h. bei der Bestimmung der Formen einer einzelnen krystallisirten Substanz, lediglich conventionell, folglich auch oft für denselben Körper bei verschiedenen Autoren verschieden. In diesem Falle ist also der (irrationale) Zahlenwerth c, welcher ja die Substanz charakterisirt, da mit ihm alle möglichen Krystallformen derselben gegeben sind (vergl. S. 315), und welcher das Axenverhältniss der Substanz genannt wird, bei dem einen Autor ein anderer, als bei dem anderen, aber beide Zahlenwerthe müssen in einfachem rationalen*) Verhältniss stehen, z. B. der eine genau das Doppelte des anderen sein. Es ist demnach leicht, die Angaben eines Beobachters auf die des zweiten zu reduciren, es sind im gegebenen Beispiel nur alle Ableitungszahlen des ersten halb so gross zu setzen.

Haben wir uns einmal für eine bestimmte Wahl der Grundform entschieden und deren Axenverhältniss bestimmt, so sind nunmehr durch die Kantenwinkel aller übriger hexagonaler Pyramiden desselben Körpers deren Parameterverhältniss, also auch ihre Indices gegeben. Dasselbe ist alsdann

Fig. 271.



*) Eine Ausnahme davon bildet natürlich der Fall, dass Einer der Autoren diejenigen Pyramiden erster Ordnung nennt, welche der Andere zu solchen zweiter Ordnung gewählt hat. Habe nach dem Ersteren die Pyramide, deren Hauptquerschnitt P Fig. 271 darstellt, das Axenverhältniss $1 : 1 : c$, also p das Verhältniss: $1 : 2 : c$; nehme nun der Zweite die Zwischenaxe Jenes zu Nebenaxen, setze also die Länge $Oa = 1$, so verhalten sich die Einheiten beider Autoren, wie leicht einzusehen, wie $1 : \sqrt{\frac{4}{3}}$, also das c des Einen zum c des Anderen, wie $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$, oder, bei der Wahl einer anderen Pyramide zur primären, wie ein rationaler Theil oder ein rationales Vielfaches dieser Zahl.

auch der Fall mit den Indices aller übriger Formen, z. B. der dihexagonalen Pyramiden, deren ja auch an den Krystallen desselben Körpers verschiedene mit anderen Zahlenwerthen von h und k vorkommen können. Da es aber hier der Bestimmung der Zahlen h, k und l, also zweier von einander unabhängiger Grössen, bedarf, so genügt auch nicht mehr die Messung eines Kantenwinkels, wie bei den hexagonalen Pyramiden, sondern es müssen deren zwei bestimmt worden sein.

In §. 68 wird gezeigt werden, auf welche Weise man aus zwei gemessenen Winkeln einer dihexagonalen Pyramide das Verhältniss berechnen kann, in welchem eine Fläche derselben die Haupt- und zwei benachbarte Nebenaxen durchschneidet. Gesetzt den Fall, an den Krystallen der untersuchten Substanz würden keine hexagonalen Pyramiden beobachtet, sondern nur dihexagonale, so müssten wir eine solche zur Bestimmung der Grundform, also des Axenverhältnisses der Substanz, benutzen. Wir würden dann diejenige (nicht vorhandene, aber krystallonomisch mögliche) hexagonale Pyramide die primäre nennen, deren Flächen die Haupt- und beide Nebenaxen in demselben Verhältniss schneiden, wie dasjenige der Haupt- und einer der Nebenaxen an jener dihexagonalen Pyramide ist. Finden wir durch Rechnung aus zweien ihrer Kantenwinkel deren Parameterverhältniss (die kleinste Nebenaxe $= 1$ gesetzt) $= 1 : n : c$, wo n natürlich eine rationale*), c eine irrationale Zahl ist, so nennen wir die Pyramide, welche das Parameterverhältniss $1 : 1 : c$ haben würde, die Grundform, und $1 : c$ das Axenverhältniss der Substanz.

Dies letztere lässt sich ebenso, wie aus den Pyramiden erster Ordnung, auch aus denen zweiter Ordnung berechnen, nur dass alsdann die Nebenaxen und Zwischenaxen ihre Rollen vertauscht haben.

Was endlich die übrigen Formen, die dreierlei Prismen und die Basis, betrifft, so kann man aus keiner derselben das Axenverhältniss einer Substanz berechnen, da ihre Flächen die Haupt- und Nebenaxen nicht in einem endlichen Verhältniss durchschneiden. Dieselben sind für alle hexagonal krystallisirenden Körper identisch in ihren Winkeln.

Nach dem Gesetz der Rationalität der Indices (oder der Ableitungszahlen der Parameter) sind somit sämmtliche an einem Krystall, oder an verschiedenen von einer und derselben (chemisch vollkommen identischen) Substanz gebildeten Krystallen, mögliche Formen gegeben, sobald mittelst irgend einer hexagonalen oder dihexagonalen Pyramide das Axenverhältniss $1 : c$ bestimmt worden, wobei nur noch daran erinnert werden muss, dass dasselbe, wenn auch nur sehr wenig, mit der Temperatur sich ändert, und

*) n ist $= \frac{h}{k}$, wenn wir mit h den grösseren, mit k den kleineren der auf die Seiten der Nebenaxen, zwischen denen die Fläche liegt, bezüglichen Indices bezeichnen. Dies soll im Folgenden stets geschehen, so dass also n immer einen Werth > 1 bedeutet.

dass es durch eine andere Zahl, jedoch durch einen rationalen Theil oder ein rationales Vielfaches, dargestellt wird, wenn eine andere der vorhandenen Formen zur primären gewählt wird. Alle an den Krystallen desselben Körpers vorkommenden Formen müssen Parameterverhältnisse besitzen, welche sich aus dem Verhältniss $1 : c$ nur durch rationale (meist sehr einfache) Zahlen ableiten lassen. Die Gesammtheit aller dieser möglicher Formen (an und für sich unendlich viele, von denen jedoch nur die mit den einfachsten Ableitungszahlen gewöhnlich vorkommen) nennen wir die Krystallreihe des betreffenden Körpers und sagen demnach von einer Form, dass sie in die Krystallreihe eines Stoffes gehöre, wenn ihr Axenverhältniss sich von demjenigen irgend einer beobachteten Krystallform desselben (also dann auch von allen übrigen) durch Rationalzahlen ableiten lässt.

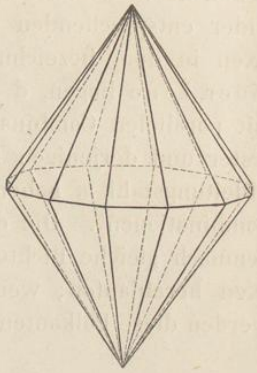
Bestimmen wir nunmehr von einer anderen, von der vorigen chemisch verschiedenen Substanz die relativen Dimensionen der (selbstverständlich ebenfalls willkürlich ausgewählten) Grundform, und finden deren Axenverhältniss $= 1 : c'$, so ergiebt uns ganz allgemein die Vergleichung der Zahlen c und c' für zwei chemisch verschiedene Körper, dass dieselben in keiner Beziehung zu einander, keinenfalls in rationalem Verhältniss zu einander stehen. Allerdings kann der Zufall und eine geeignete Wahl der Grundform es herbeiführen, dass c und c' ausserordentlich nahe ein einfaches rationales Verhältniss haben, dass dies aber nicht absolut der Fall ist, lehrt eine einfache Betrachtung: die Zahl c ist wegen der Einaxigkeit des ersten Körpers mit der Temperatur stetig variabel, die Zahl c' des zweiten Körpers ebenfalls, aber in ganz anderem Verhältnisse, da seine thermische Ausdehnung natürlich eine andere ist, folglich ändert sich das Verhältniss $c : c'$ mit der Temperatur stetig, es kann also keine einfache rationale Zahl sein. Hieraus ersieht man, dass die beiden Krystallreihen zweier verschiedener Substanzen völlig getrennt sind, wenn auch zufällig eine Form der einen in ihren Winkeln grosse Aehnlichkeit mit einer der anderen Reihe aufweisen sollte.

Es giebt also ebenso viele, scharf von einander durch Irrationalität ihres Axenverhältnisses getrennte, Krystallreihen im hexagonalen Systeme, als es hexagonal krystallisirende Substanzen giebt, während die regulären Formen sämmtlich nur eine Krystallreihe bildeten, weil sie alle rational von einander ableitbar sind, also auch alle an jedem regulär krystallisirenden Stoffe auftreten können.

Im Folgenden werden nun die Formen einer beliebigen hexagonal-holoëdrischen Krystallreihe und die Art ihrer Combinationen beschrieben, und alles hier Gesagte gilt natürlich für jede andere Krystallreihe desselben Systems, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Winkel der pyramidalen Gestalten andere, das Axenverhältniss der Grundform ein anderes ist.

§. 67. **Beschreibung der holoëdrischen hexagonalen Formen und ihrer Combinationen.** 1) Die dihexagonalen Pyramiden Fig. 272 $\{hikl\}$ durchschneiden die beiden benachbarten Seiten zweier Nebenaxen in dem Verhältniss $h : k$, wofür im vorigen §. (s. auch Anmerk.) abgekürzt n gesetzt wurde, eine rationale Zahl, welche zwischen den Grenzen 1 und 2 liegen muss, da für $h = 2k$ $(n = 2)$ eine hexagonale Pyramide zweiter Ordnung resultirt (s. S. 317). Naumann bezeichnete nun die primäre Pyramide einer Krystallreihe mit P und die abgeleiteten Formen dadurch, dass vor dieselbe die rationale Zahl m gesetzt wird, welche angiebt, wie viel mal so gross die Hauptaxe ist, als diejenige der Grundform, hinter dieselbe jene Zahl n, das Verhältniss der Nebenaxen (falls dasselbe von 1 verschieden ist); folglich wird das Zeichen der dihexagonalen Pyramiden: mPn, worin $n = \frac{h}{k}$, $m = \frac{h}{l}$.

Fig. 272.

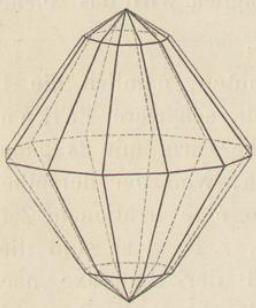


Die dihexagonale Pyramide besitzt dreierlei Kanten, nämlich die 12 Basiskanten*), je 12 stumpfere und ebenso viele schärfere Polkanten, welche mit einander abwechseln. Eine solche Form mit 24 genau gleichen Polkanten ist krystallonomisch unmöglich, weil bei derselben die Ableitungszahl $n = \sqrt{2} \cdot \sin 75^0 = 1{,}366\ldots$, also eine irrationale Zahl sein würde. Ist die Zahl n kleiner, als $1{,}366\ldots$, z. B. $\frac{5}{4}$, so sind diejenigen Polkanten die stumpferen, welche vom Pol der Hauptaxe nach denen der Zwischenaxen herablaufen; in diesem Falle ähnelt die Pyramide um so mehr einer hexagonalen Pyramide erster Ordnung, je weniger n von 1 verschieden ist; in dem Grenzfall, dass n seinen kleinsten Werth 1 annimmt, ist der Winkel der bezeichneten Polkanten $= 0^0$, d. h. je zwei in einer solchen Polkante an einander stossende Flächen, also die Flächen eines Dodekanten, fallen in eine Ebene, es resultirt eine hexagonale Pyramide erster Ordnung als untere Grenzgestalt jener Reihe von dihexagonalen. Ist dagegen n grösser, als $1{,}366\ldots$, z. B. $\frac{3}{2}$, so sind die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen, und zwar um so stumpfer, je mehr n sich der 2 nähert. Sobald $n = 2$ wird, bilden die Basiskanten der Pyramide mit den Nebenaxen rechte Winkel (vergl. S. 317), also werden die zuletzt bezeichneten Polkantenwinkel Null, d. h. zwei an solchen zusammenstossende, benachbarten Dodekanten angehörige Flächen fallen in eine Ebene, es entsteht eine hexagonale Pyramide zweiter Ordnung als zweite Grenzgestalt derselben Reihe von dihexagonalen Pyramiden. Die sämmtlichen möglichen dihexagonalen Pyramiden, welche gleiche Ableitungszahl m, aber verschiedene n besitzen, bilden also eine Reihe, deren End-

*) So genannt, weil sie sämmtlich parallel der Basis, d. h. horizontal, laufen.

glieder einerseits die hexagonale Pyramide erster Ordnung, andererseits diejenige zweiter Ordnung mit demselben m, sind. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe, ebenso wie die Grenzformen, die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss, $mc : 1$, schneiden, so müssen die einander entsprechenden sämmtlich derselben Geraden, welche jene beiden Axen in dem bezeichneten Verhältniss schneidet, parallel sein, also in einer Zone liegen, d. h. die Flächen der dihexagonalen Pyramiden liegen, mit parallelen Combinationskanten, zwischen denen derjenigen Pyramide erster und derjenigen zweiter Ordnung, mit welchen beiden sie gleiche Ableitungszahl m haben (s. u. bei Pyramiden zweiter Ordnung und deren Combinationen). Die dihexagonalen Pyramiden einer solchen Reihe haben demnach gleiche Richtung derjenigen Polkanten, welche nach den Nebenaxen herablaufen; wenn also zwei derselben in Combination treten, so werden diese Polkanten der einen durch die Flächen der anderen zugeschärft.

Fig. 273.



Mehrere dihexagonale Pyramiden mit gleichem n, aber verschiedenem m, haben genau gleiche Hauptquerschnittsfigur; die eine erscheint also mit der anderen combinirt, indem sie deren $6+6$kantige Polecke je mit 12 Flächen derart zuspitzt, dass die entstehenden Combinationskanten horizontal laufen, Fig. 273.

Die dihexagonale Pyramide stellt, ebenso wie im regulären Systeme das Hexakisoktaëder, den allgemeinsten Fall einer hexagonalen Krystallgestalt dar, ist also der allgemeine Repräsentant aller anderen, welche gleichsam nur specielle Fälle desselben bilden.

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung $\{h0\bar{h}l\}$ ist derjenige specielle Fall der dihexagonalen, in welchem n den Werth 1 hat. Hieraus ergiebt sich unmittelbar das Naumann'sche Zeichen (da die Ableitungszahl 1 weggelassen wird) als mP, in welchem m dieselbe Bedeutung hat, wie oben.

Unter den verschiedenen Pyramiden einer Krystallreihe wird nach den S. 320 besprochenen Grundsätzen eine zur primären gewählt; diese erhält, da ihre Ableitungszahl m nunmehr auch $= 1$ ist, das Zeichen $P = \{10\bar{1}1\}$. Bei den stumpferen abgeleiteten Pyramiden erster Ordnung ist alsdann m ein echter Bruch, sie besitzen also die Zeichen $\frac{2}{3}P = \{20\bar{2}3\}$, $\frac{1}{2}P = \{10\bar{1}2\}$, $\frac{1}{4}P = \{10\bar{1}4\}$ u. dergl., während die spitzeren eine grössere Ableitungszahl der Hauptaxe, als die Einheit, besitzen, also beispielsweise mit $\frac{3}{2}P = \{30\bar{3}2\}$, $2P = \{20\bar{2}1\}$, $3P = \{30\bar{3}1\}$ u. s. f. bezeichnet werden. Fig. 274 a, b und c stellen drei Pyramiden einer Reihe dar, deren Hauptaxen (bei gleich grossen Nebenaxen) sich wie $1 : 2 : 4$ verhalten, also $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{20\bar{2}1\}$, oder wenn die erste resp. die letzte zur primären gewählt wird, $\{10\bar{1}1\}$, $\{20\bar{2}1\}$, $\{40\bar{4}1\}$, resp. $\{10\bar{1}4\}$, $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}1\}$ zu bezeichnen sind.

Jede hexagonale Pyramide besitzt 12 (6 obere und 6 untere) gleiche Polkanten, sowie sechs davon verschiedene Basiskanten mit unter einander gleichen Winkeln.

Fig. 274 *a*.

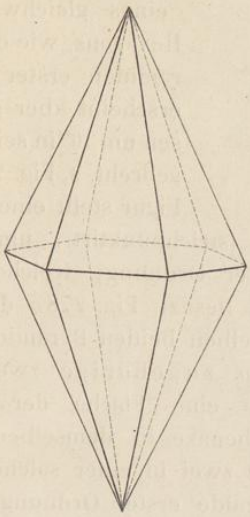


Fig. 274 *b*.

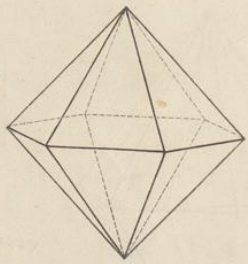
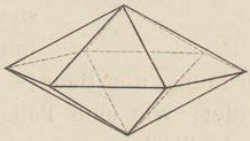


Fig. 274 *c*.



Da der Hauptquerschnitt aller Pyramiden erster Ordnung dasselbe Hexagon mit Winkeln von 120° ist, so erscheinen je zwei derselben combinirt so, dass die stumpfere die Polecken der spitzeren sechsflächig mit horizontalen Combinationskanten zuspitzt, oder diese die Basiskanten jener zuschärft, s. Fig. 275.

Fig. 275.

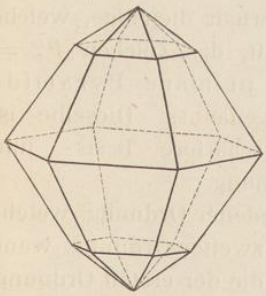


Fig. 276.

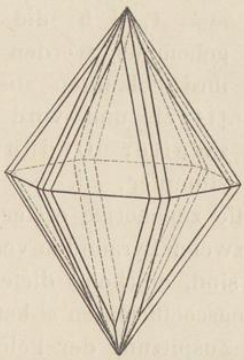
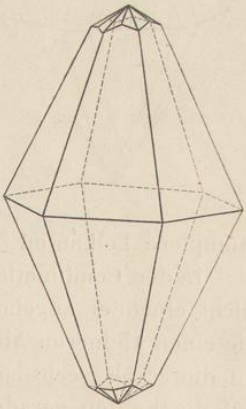


Fig. 277.



Eine dihexagonale Pyramide, mit einer hexagonalen combinirt, erscheint als Zuschärfung von deren Polkanten, Fig. 276, wenn beide gleiche Ableitungszahl *m* haben, als zwölfflächige Zuspitzung der Polecken, Fig. 277, wenn erstere ein kleineres *m* besitzt.

3) Die hexagonale Pyramide zweiter Ordnung $\{kk\bar{h}l\}$, worin $2k = h$, ist derjenige specielle Fall der dihexagonalen, in welchem $n = 2$ ist. Ihr horizontaler Querschnitt hat dieselbe Form eines gleichwinkeligen Hexagons, wie der der Pyramiden erster Ordnung, erscheint aber gegen diesen um 30° in seiner Ebene gedreht, s. Fig. 278. Diese Figur stellt eine Pyramide erster Ordnung (strichpunktirt), umhüllt von derjenigen zweiter Ordnung, welche dieselbe Ableitungszahl m besitzt, Fig. 278*a* den Hauptquerschnitt derselben beiden Pyramiden (p erster Ordnung, p' zugehörige zweiter Ordnung) dar. Da eine Fläche der Pyramide zweiter Ordnung die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss schneidet, wie eine Polkante, also wie zwei in einer solchen zusammenstossende Flächen der zugehörigen Pyramide erster Ordnung, so liegt sie mit zwei solchen Flächen in einer Zone, d. h. sie stumpft die Polkante der Pyramide erster Ordnung gerade ab. Es stellt demnach Fig. 279 die Combination einer Pyramide erster Ordnung mit der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar. Dieselben sind zu bezeichnen mit $mP = \{h0\bar{h}l\}$ und $mP2 = \{kk\bar{h}l\}$ (das allgemeine Zeichen der Pyramiden zweiter Ordnung); wenn $m = 1$, d. h. die erstere zur primären $\{10\bar{1}1\}$ genommen worden ist, erhält diejenige, welche ihre Polkanten abstumpft, das Zeichen $P2 = \{11\bar{2}2\}$ und wird die primäre Pyramide zweiter Ordnung genannt. Dieselbe ist stumpfer, d. h. hat schärfere Basis- und stumpfere Polkanten, als die zugehörige erster Ordnung.

Fig. 278.

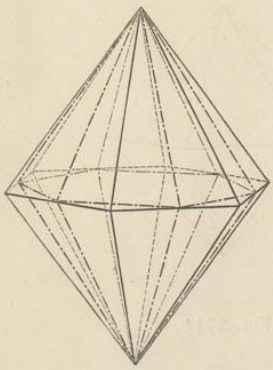


Fig. 278*a*.

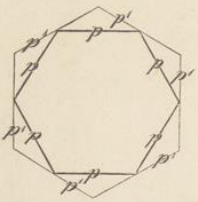
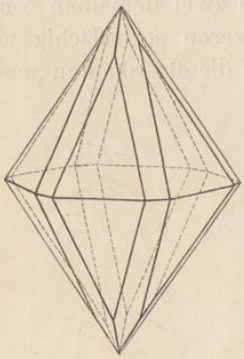


Fig. 279.



In den Combinationen zweier Pyramiden verschiedener Ordnung, welche nicht einander zugehörige sind, erscheint diejenige zweiter Ordnung, wenn sie einen kleineren Ableitungscoëfficienten m hat, als die der ersten Ordnung, an dieser als sechsflächige Zuspitzung der Polecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gerade aufgesetzt, Fig. 280. Ist dagegen m grösser, als das der Pyramide erster Ordnung, so erscheint jene als Zuschärfung der Basisecken von dieser, die Zuschärfungsflächen auf die Polkanten aufgesetzt. In dem in Fig. 281 dargestellten speciellen Falle, dass die Combinationskanten einer Fläche der Pyramide zweiter Ordnung mit einer der Pyramide erster

Ordnung der nächsten Polkante der letzteren parallel sind, ist das m der Pyramide zweiter Ordnung doppelt so gross, als das der ersten, also ihre

Fig. 280.

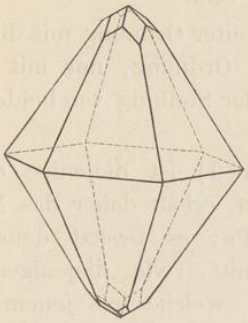
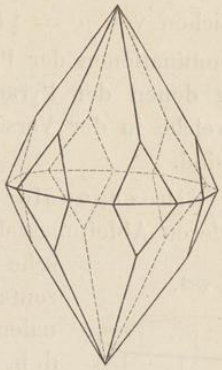
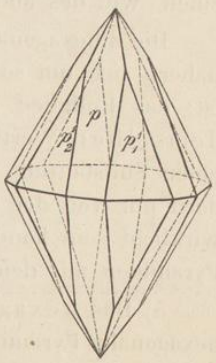


Fig. 281.



Zeichen z. B. P, $2P2 = \{10\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$. Dass dem so ist, ersieht man sofort, wenn man die Indices einer solchen Fläche aus den beiden Polkantenzonen, denen sie angehört, berechnet. Hierbei muss man aber natürlich die Indices aller benutzten Flächen auf dieselben drei Axen beziehen. Betrachtet man z. B. der Einfachheit wegen die beiden nach vorn gehenden Nebenaxen als die positiven Seiten der X- und Y-Axe, die Hauptaxe als Z-Axe, so kann man das gewöhnliche Rechnungsverfahren (S. 206) anwenden. Auf diese Axen bezogen, ist das Symbol der mittleren vorderen Fläche der vorherrschenden Pyramide $P = (111)$, das ihrer links anliegenden Fläche $(10\bar{1})$, woraus das Symbol einer Polkantenzone folgt; aus den Zeichen der beiden auf die mittlere nach rechts folgenden Flächen $(01\bar{1})$ und $(\bar{1}01)$ ergiebt sich das Symbol der zweiten Polkantenzone, und aus beiden dasjenige der beiden Zonen angehörigen mittleren Fläche der Pyramide 2. Ordnung zu $(12\bar{1})$, welches dem Bravais'schen Zeichen $(11\bar{2}1)$ entspricht.

Fig. 282.



Einen weiteren speciellen Fall stellt Fig. 282 dar, in welchem die Combinationskanten der Pyramide zweiter Ordnung p^1 mit derjenigen erster Ordnung p den Höhenlinien der Dreiecksflächen der letzteren parallel sind, so dass p die Polkanten der Pyramide zweiter Ordnung gerade abstumpft. Dadurch ist deren Zeichen $mP2$ bestimmt, und auf folgende Art der Zahlenwerth von m zu finden: Das Parameterverhältniss der mit $p^1{}_1$ bezeichneten Fläche, bezogen auf die bei der vorigen Berechnung benutzten Axen, ist $2 : 1 : mc$, die Fläche $p^1{}_2 = 1 : 2 : mc$, daraus folgen deren Indices zu $(m.2m.2)$ und $(2m.m.2)$ und das Symbol der Zone beider

$= [2m.\ 2m.\ -3m^2] = [2.2.-3m]$; der Tautozonalitätsgleichung mit diesen Werthen müssen nun die Indices der primären Pyramide $p = (111)$ genügen, also muss

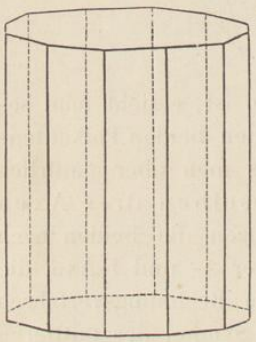
$$4 = 3m,\ m = \tfrac{4}{3}$$

und das Zeichen von $p^1 = \frac{4}{3}P2 = \{22\bar{4}3\}$ sein.

Die Combinationen der Pyramiden zweiter Ordnung mit dihexagonalen sind analog denen der Pyramiden erster Ordnung, nur mit den Unterschieden, welche in der Verschiedenheit der Stellung von beiderlei Formen begründet sind.

4) Das dihexagonale Prisma $\{hik0\}$ ist diejenige dihexagonale Pyramide, deren Ableitungszahl $m = \infty$ ist, erhält daher das Naumann'sche Zeichen ∞Pn; es besitzt denselben horizontalen Querschnitt, wie diejenigen dihexagonalen Pyramiden, welche mit jenem gleiches n, d. h. gleiche Indices der Nebenaxen haben; seine Flächen sind aber sämmtlich der Hauptaxe parallel, also vermag diese Form für sich allein den Raum nicht abzuschliessen. Fig. 283 stellt dieselbe in Combination mit der Basis dar. Das dihexagonale Prisma hat 12 Kanten, deren sechs stumpfer, die sechs alternirenden schärfer sind. Ein dihexagonales Prisma mit 12 gleichen Kanten ist aus demselben Grunde krystallonomisch unmöglich, wie eine gleichkantige dihexagonale Pyramide.

Fig. 283.



Je nachdem der Zahlenwerth von n näher an 1 oder an 2 liegt, ähnelt das dihexagonale Prisma mehr dem einen oder dem anderen der beiden folgenden Formen, dem Prisma erster Ordnung oder demjenigen zweiter Ordnung. Seine Flächen liegen zwischen den Flächen dieser beiden letzterwähnten Formen, und sie bilden Zuschärfungen der Kanten sowohl des einen, wie des anderen.

Die dihexagonalen Pyramiden mit gleichem n sind um so spitzer, sie nähern sich um so mehr der verticalen Stellung der Flächen, je grösser m ist; das Endglied einer solchen Reihe ist das dihexagonale Prisma mit demselben Werth von n; dieses ist zugleich identisch für alle hexagonalen Substanzen, weil seine Winkel nicht von dem Verhältniss $1 : c$, sondern nur von der rationalen Zahl n, welche bei allen jenen Körpern verwirklicht sein kann, abhängt. Die Combinationskanten der dihexagonalen Pyramiden mit dem Prisma, dessen n dasselbe ist, liegen horizontal.

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung $\{10\bar{1}0\}$ ist die dihexagonale Pyramide mit den besonderen Werthen $m = \infty$ und $n = 1$, oder die hexagonale Pyramide erster Ordnung, deren m den Grenzwerth ∞ angenommen, ihr Zeichen ist also ∞P. Es ist gleichsam eine Pyramide erster Ordnung, mit verticalen, der Hauptaxe parallelen Flächen, welche

Form für sich den Raum nicht umschliesst. Diese Gestalt ist in Fig. 284 in Combination mit der Basis dargestellt. Da ihr Parameterverhältniss $1 : 1 : \infty$ gar keine Variation mehr zulässt, so giebt es nur ein hexagonales Prisma erster Ordnung, dessen Kantenwinkel 60^0, identisch für alle

Fig. 284.

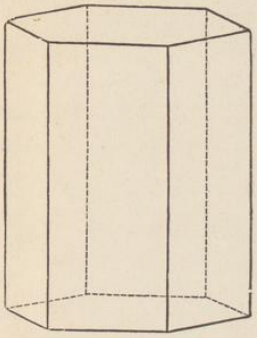


Fig. 285.

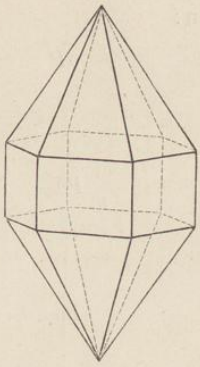
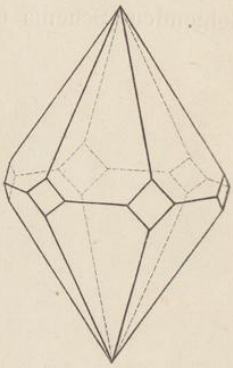


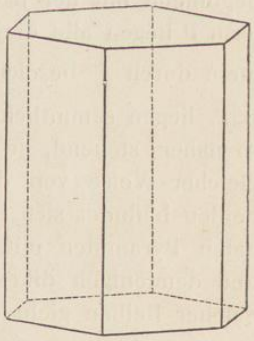
Fig. 286.



hexagonal krystallisirenden Körper. Dasselbe erscheint in Combinationen an allen hexagonalen Pyramiden derselben Ordnung als gerade Abstumpfung der Basiskanten (Fig. 285), an denen der anderen Ordnung als gerade Abstumpfung der Basisecken (Fig. 286).

6) Das hexagonale Prisma zweiter Ordnung $\{11\bar{2}0\} = \infty P2$, Fig. 287, ist die Grenzform der hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung für den Fall, dass $m = \infty$, es kann also auch nur eine einzige solche Gestalt geben, welche sich von der vorigen nur durch ihre Stellung (sie erscheint um 30^0 gegen jene gedreht) unterscheidet. Die Figg. 285 und 286 können auch als Combinationen dieses Prismas mit einer Pyramide zweiter Ordnung, resp. erster Ordnung dienen, wenn man die Neben- und Zwischenaxen vertauscht, d. h. jene Gestalten sich um die Hauptaxe und zwar um 30^0 gedreht denkt.

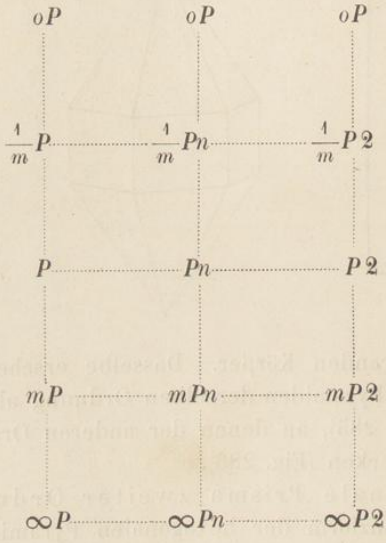
Fig. 287.



7) Die hexagonale Basis $\{0001\}$, die Haupt-Symmetrieebene selbst, ist die untere Grenzform aller hexagonaler Pyramiden, welche um so stumpfer werden, sich in der Lage ihrer Flächen um so mehr derselben nähern, als die Ableitungszahl m sich der Null nähert. Ist $m = 0$, so sind die Polkantenwinkel Null, die Flächen der Pyramide fallen in eine einzige Horizontalebene zusammen. Daher bezeichnet Naumann die Basis mit $0P$. Diese Form, deren es natürlich auch nur eine einzige giebt, kann noch weniger für sich allein auftreten, als die Prismen, da sie den Raum nur in einer Richtung (von oben nach unten) abschliesst. Die Gestalt ihres Um-

risses in den Combinationen ist entweder diejenige eines Hexagons oder eines gleichwinkeligen Zwölfecks (zwei um 30° gegen einander gedrehte Sechsecke), oder eines Dihexagons mit sechs schärferen und sechs stumpferen Winkeln.

Den Zusammenhang aller dieser soeben beschriebenen holoëdrischen Gestalten einer hexagonalen Krystallreihe kann man am besten in nachfolgendem Schema übersehen:



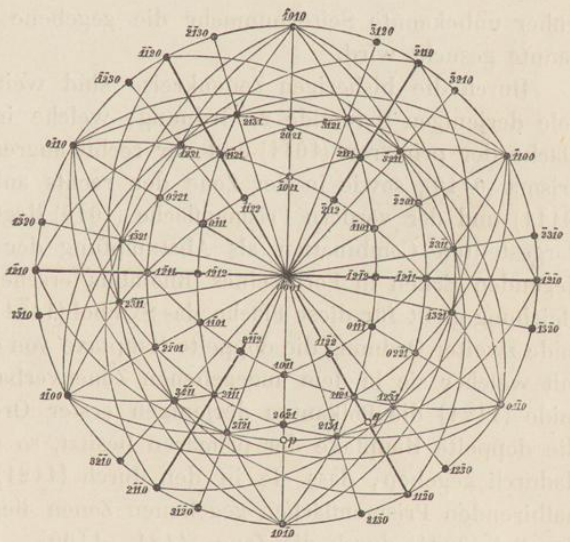
Die vorderste Verticalreihe ist diejenige der Pyramiden erster Ordnung, beginnend mit der flachsten, der Basis; zwischen dieser und der Grundform P liegen alle diejenigen, deren Ableitungszahl ein echter Bruch (allgemein durch $\frac{1}{m}$ bezeichnet) ist, zwischen P und dem Prisma erster Ordnung, ∞P, liegen sämmtliche spitzeren Pyramiden, dem Endglied der Reihe um so näher stehend, je grösser m. Die letzte Verticalreihe wird in ganz gleicher Weise von den Pyramiden zweiter Ordnung gebildet. Zwischen beiden befindet sich die Reihe der durch ihr m verschiedenen dihexagonalen Pyramiden mit gleichem n, welche sämmtlich zwischen der Basis und demjenigen dihexagonalen Prisma liegen, welches dasselbe n besitzt. Solcher Reihen giebt es natürlich so viele, als verschiedene Zahlenwerthe von n vorkommen; in dem Schema ist nur die allgemeine Reihe mit der unbestimmten Zahl n als Repräsentant derselben aufgeführt. Jede dihexagonale Pyramide ist nun zugleich ein Glied einer Horizontalreihe, welche sämmtliche dihexagonale Pyramiden mit gleichem m, und als Endglieder die erste und zweite Pyramide mit demselben m umfasst. So liegen z. B. alle dihexagonalen Pyramiden mit dem Zeichen Pn zwischen der primären Pyramide erster und der zweiter Ordnung, in der Lage ihrer Flächen um so näher an der ersteren, je weniger sich n von 1 unterscheidet, da-

gegen um so näher an der letzteren, je mehr sich n der 2 nähert. Endlich liegen auch alle unendlich spitzen dihexagonalen Pyramiden, d. h. die dihexagonalen Prismen, zwischen dem ersten und dem zweiten Prisma und bilden eine fortlaufende Reihe von $n = 1$ bis $n = 2$.

Sowohl die Flächen der in einer Verticalreihe stehenden, als der in Horizontalreihen vereinigten Krystallformen bilden mit den entsprechenden Flächen aller Formen derselben Reihe je eine Zone, schneiden einander also in parallelen Kanten.

§. 68. **Projection und Berechnung der hexagonalen Formen.** Es kann nicht zweifelhaft sein, dass eine Projection auf die Haupt-Symmetrieebene diejenige sein wird, welche am vollkommensten die Symmetrieverhältnisse der projicirten Flächen und Zonen zur Darstellung bringt; eine solche soll daher der Erläuterung der Zonenverhältnisse und der Berechnung zu Grunde gelegt werden. Der Grundkreis enthält alsdann offenbar die Pole der Flächen aller Prismen, von welchen diejenigen des 1. und 2. Prisma direct durch ihre Abstände von 60°, resp. 30° einzutragen sind (s. Fig. 288). Den Mittelpunkt der Projection bildet der Pol der Basis (0001), und mittelst der sechs den Neben- und Zwischenaxen parallelen Durchmesser sind die Zonen zwischen (0001) und dem Prisma 1. Ordnung, in welchen sämmtliche Pyramiden 1. Ordnung liegen, sowie die Zonen zwischen Basis und Prisma 2. Ordnung, d. h. die Zonen der Pyramiden 2. Ordnung, gegeben. Um die Pole einer Pyramide zu construiren, bedarf es also nur der Kenntniss ihrer Neigung zur Hauptaxe, resp. des Abstandes zwischen dem Pol einer ihrer Flächen und dem der Basis, welchen man auf einem Kreise vom Durchmesser des Grundkreises abträgt und so in bekannter Weise die Länge des Bogens auf der Projection findet. Seien $10\bar{1}1$, $01\bar{1}1$ u. s. f. die in dieser Weise bestimmten sechs Pole der primären Pyramide, so ergeben sich aus den Zonen je zweier, in welche jedesmal noch die beiden gegenüberliegenden Pole derjenigen Prismenfläche 1. Ordnung liegen, welche die von den beiden Pyramidenflächen gebildete Polkante symmetrisch halbirt, direct die Pole der Flächen der primären Pyramide

Fig. 288.



2. Ordnung $\{11\bar{2}2\}$, welche die Polkanten von $\{10\bar{1}1\}$ abstumpft. Ist der Winkel der Basiskante letzterer Pyramide bekannt, folglich auch der Winkel derselben zu (0001) (d. i. die Hälfte von dessen Supplement), so dient das rechtwinkelige sphärische Dreieck: 0001, $10\bar{1}1$, $11\bar{2}2$, in welchem der Winkel an $0001 = 30^0$, dazu, den Polkantenwinkel derselben Pyramide zu berechnen — denn die Seite $10\bar{1}1 : 11\bar{2}2$ ist offenbar die Hälfte desselben — ebenso umgekehrt, um aus dem bekannten Winkel der Polkante denjenigen der Basiskante herzuleiten. Handelt es sich um die Berechnung des Axenverhältnisses c aus einem dieser beiden Winkel, so hat man nur den Bogen $0001 : 11\bar{2}2$, d. h. allgemein: die Neigung derjenigen Pyramide 2. Ordnung zu berechnen, welche die Polkante der Pyramide 1. Ordnung, deren Axenverhältniss man sucht, abstumpft. Wie eine einfache Betrachtung lehrt, ist die tang jenes Bogens das gesuchte Axenverhältniss c*). Hat man endlich den Basiskantenwinkel einer Pyramide 2. Ordnung selbst gemessen, so ergiebt dieser ohne Berechnung direct das Parameterverhältniss der Pyramide, derjenige der primären also das Axenverhältniss der Substanz. Ist umgekehrt dieses Axenverhältniss gegeben, und sollen aus demselben die Winkel der Pyramiden berechnet werden, so verfährt man genau ebenso, nur dass in dem benutzten rechtwinkeligen Dreiecke die früher unbekannte Seite nunmehr die gegebene ist, und die vorher bekannte gesucht wird.

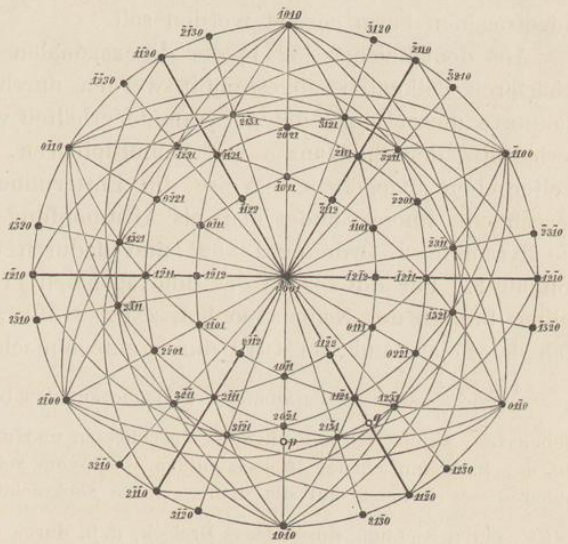
Durch die bisherigen Zonenkreise sind weiterhin noch bestimmt die Pole derjenigen Pyramide 2. Ordnung, welche in der Zone der vorderen Fläche der primären $(10\bar{1}1)$ und der rechts angrenzenden Fläche des ersten Prisma $(01\bar{1}0)$, sowie in der Zone der rechts anliegenden Pyramidenfläche $(01\bar{1}1)$ und der vordern Prismenfläche $(10\bar{1}0)$ liegt, also an der in Fig. 285 dargestellten Combination als Abstumpfung der über den Prismenkanten liegenden Ecken in Form eines Rhombus erscheinen würde. Die Zonengleichung giebt für diese Fläche das Symbol $\{11\bar{2}1\}$, allgemein hat eine Pyramide zweiter Ordnung die doppelte Hauptaxe von derjenigen erster Ordnung, mit welcher sie in dem angegebenen Zonenverbande steht. Da die Pyramide $\{11\bar{2}1\}$ die Polkanten derjenigen erster Ordnung abstumpft, welche die doppelte Hauptaxe der primären besitzt, so sind die Pole der letzteren dadurch gegeben, dass sie in den durch $\{11\bar{2}1\}$ und die jene Polkanten halbirenden Prismenflächen gegebenen Zonen liegen; so ergiebt sich z. B. der Pol $(20\bar{2}1)$ durch die Zone $[11\bar{2}1, 1\bar{1}00]$. In derselben Weise kann man weiter aus der Zone $[20\bar{2}1, 01\bar{1}0]$ den Pol $(22\bar{4}1)$ und mittelst dieses $(40\bar{4}1)$ finden u. s. f.

Gehen wir nunmehr zur Projection dihexagonaler Pyramiden über, so sei als Beispiel gewählt die häufigste $\{3\bar{1}2\bar{1}\}$, welche in den Zonen $[2\bar{1}\bar{1}1,$

*) Die cotang jenes Bogens ist $= \cos\gamma \cdot \text{tang } 30^0$, wenn $\gamma = 0001 : h0\bar{h}l$, d. h. wenn der Basiskantenwinkel gemessen worden ist; aus dem halben Polkantenwinkel $\alpha = h0\bar{h}l : kk\bar{h}l$ findet man seinen $\sin = \frac{\cos 30^0}{\cos\alpha}$.

$10\bar{1}0]$ und $[20\bar{2}1, 1\bar{1}00]$ liegt. Da die erstere dieser beiden Zonen zugleich die Polkantenzone der primären Pyramide ist, also eine der wichtigsten Zonen, welche an flächenreichen Krystallen häufig durch eine Reihe von Formen repräsentirt wird, so soll an dieser Stelle die Bedingung allgemein entwickelt werden, welche erfüllt sein muss, damit eine dihexagonale Pyramide zwischen den Flächen $(2\bar{1}\bar{1}1)$ und $(10\bar{1}0)$ mit parallelen Kanten liege. Die Indices der Zone der beiden angeführten Flächen, bezogen auf die vorderen beiden Hälften der Nebenaxen A_1 und A_3, diese positiv genommen (vergl. S. 327), sind $[\bar{1}11]$, die auf die gleichen Axenlängen bezogenen Indices hkl der dihexagonalen Pyramide $\{h\bar{i}\bar{k}l\}$ müssen also die Bedingung erfüllen, dass $h = k + l$, wie es in der That bei der Pyramide $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$, ebenso bei $\{4\bar{1}\bar{3}1\}$, $\{6\bar{1}\bar{5}1\}$ u. s. w. der Fall ist*). — Trägt man die Pole dreier benachbarter Flächen der dihexagonalen Pyramide, z. B. $3\bar{1}\bar{2}1$, $21\bar{3}1$ und $12\bar{3}1$ in die Projection ein, so ist durch je zwei derselben eine Polkantenzone der Form bestimmt, und der betreffende Zonenkreis leicht zu construiren, da er zugleich durch den Pol derjenigen Prismenfläche 1. oder 2. Ordnung geht, welche die bezügliche Polkante der dihexagonalen Pyramide halbirt. Da wo einer dieser Zonenkreise einen Durchmesser $0001 : 10\bar{1}0$ etc. senkrecht durchschneidet, z. B. in p, liegt ein Pol derjenigen Pyramide 1. Ord., welche die nach den Zwischenaxen herablaufenden Polkanten (bei dem gewählten Beispiel sind es die schärferen) der dihexa-

Fig. 288.



*) Das allgemeine Zeichen der entsprechenden Pyramiden nach Naumann ergiebt sich leicht aus den Relationen $n = \frac{h}{k}$, $m = \frac{h}{l}$. In Folge der oben gefundenen Bedingung ist

$$m = \frac{k+l}{k} = 1 + \frac{l}{k} \qquad n = \frac{k+l}{l} = 1 + \frac{k}{l}.$$

Da folglich $\frac{l}{k} = m - 1$, so ist $n = 1 + \frac{1}{m-1} = \frac{m}{m-1}$.

Es liegen also alle dihexagonalen Pyramiden, welche das Zeichen $mP\frac{m}{m-1}$ besitzen, mit parallelen Kanten zwischen $2P2$ und ∞P.

gonalen Pyramide abstumpft, in den Schnittpunkten von der Lage q liegen die Pole der Pyramide 2. Ordnung, welche die nach den Nebenaxen herablaufenden Kanten abstumpft. Die Zeichen dieser beiden Pyramiden sind durch die Indices der dihexagonalen gegeben, ebenso das Zeichen des dihexagonalen Prisma, welches das gleiche Verhältniss der Nebenaxen besitzt und dessen Pole daher in den Zonen $[0001, hikl]$ liegen. Aus Fig. 288, in welcher die Pole des zu $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$ gehörigen dihexagonalen Prisma vollständig eingetragen sind, ersieht man sofort, dass man die Pole jeder beliebigen dihexagonalen Pyramide aus ihrem Zeichen finden kann, indem man die Pole einer der beiden Abstumpfungen ihrer Polkanten und diejenigen des zugehörigen dihexagonalen Prisma einträgt und die betreffenden Zonenkreise construirt. Damit sind zugleich die sphärischen Dreiecke gegeben, durch welche für jede beliebige dihexagonale Pyramide die Berechnung ihrer Winkel zu erfolgen hat, wie an dem Beispiel der in Fig. 288 eingetragenen Form gezeigt werden soll.

Aus dem Zeichen $\{3\bar{2}\bar{1}1\}$ der dihexagonalen Pyramide folgt, dass ihre schärferen Polkanten abgestumpft werden durch $\{50\bar{5}2\}$. Die Länge der Hauptaxe dieser abgeleiteten Pyramide erhalten wir, indem wir das Axenverhältniss der Substanz c mit $\frac{5}{2}$ multipliciren, und können also in der weiter oben angegebenen Weise die Entfernung ihres Poles p von 0001 berechnen. Ebenso findet man als Abstumpfung der stumpferen Polkanten die Pyramide 2. Ordnung $\{33\bar{6}\bar{2}\}$ und dadurch den Abstand des Poles q von 0001. Für die Fläche des dihexagonalen Prisma endlich, welche dieselben Indices der Nebenaxen hat, z. B. $(21\bar{3}0)$, allgemein: $(hik0)$, ergiebt sich der Polabstand von $10\bar{1}0$ durch eine einfache Berechnung:

$\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{h}$ sind die Parameter der Fläche auf den beiden benachbarten Seiten der Nebenaxen, welche 60° mit einander einschliessen und mit der Trace der Fläche selbst auf der Basis ein ebenes Dreieck bilden. Die vom Schnittpunkt der beiden ersteren Seiten dieses Dreiecks auf die dritte gefällte Senkrechte ist die Normale zur Fläche $(kih0)$, deren Richtung durch jenes Dreieck, d. h. durch die Längen $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{h}$ bestimmt ist. Für $k : h = 2 : 3$ z. B. ist der Abstand des Poles $21\bar{3}0$ von $10\bar{1}0 = 19° 6\frac{1}{2}'$, von $11\bar{2}0$ daher $= 10° 53\frac{1}{2}'$ *).

Der Bogen $10\bar{1}0 : 21\bar{3}0$ ist nun offenbar gleich dem Winkel an 0001 in dem Dreieck 0001, $21\bar{3}1$, p, und seine Differenz von 30°, d. i. der Bogen $21\bar{3}0 : 11\bar{2}0$, gleich dem entsprechenden Winkel im Dreieck 0001, $21\bar{3}1$, q. Aus diesen Winkeln und den bekannten Bögen $0001 : p$ und $0001 : q$ können in jenen Dreiecken, da dieselben rechtwinkelige sind, die Seiten $21\bar{3}1 : p$, $21\bar{3}1 : q$ und $21\bar{3}1 : 0001$ berechnet werden. Die beiden ersten sind die halben Polkantenwinkel von $\{21\bar{3}1\}$, die letzte giebt von 90° subtrahirt den Bogen $21\bar{3}1 : 21\bar{3}0$, d. h. den halben Winkel der Basiskante.

*) Daraus folgt der Winkel der an den Zwischenaxen liegenden Kanten des Prisma $\infty P\frac{3}{2} = 38° 13'$, derjenige der Kanten an den Nebenaxen $= 21° 47'$.

Soll dagegen aus den gemessenen Winkeln einer dihexagonalen Pyramide deren Parameterverhältniss und somit ihr Zeichen berechnet werden, so benutzt man natürlich dieselben Dreiecke in umgekehrter Weise. Seien z. B. die beiden Polkantenwinkel, also die Bögen $a = p : 21\bar{3}1$ (allgemein: $ki\bar{h}l$) und $a' = q : 21\bar{3}1$, gegeben, so folgt genau so wie S. 265

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}$$

und da hier $A' = 30^0 - A$, so ist

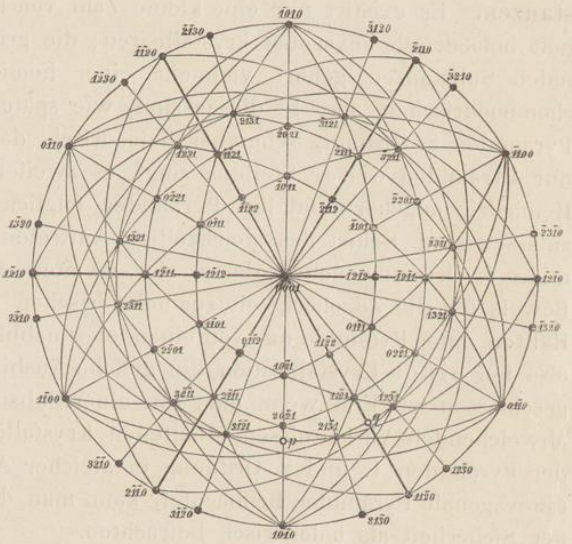
$$\tfrac{1}{2} \operatorname{cotang} A - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

folglich

$$\operatorname{cotang} A = \frac{2 \sin a'}{\sin a} + \sqrt{3}.$$

Das so gefundene A ist gleich dem Bogen $10\bar{1}0 : 21\bar{3}0$ (allgemein: $ki\bar{h}0$), aus welchem sich mittelst ebener Trigonometrie das Verhältniss $h : k$ (n) berechnen lässt. Das Verhältniss $h : l$ (m) gilt zugleich für die abstumpfende Pyramide 2. Ordnung q, man hat also nur den Bogen $0001 : q$ (aus dem Dreieck: 0001, q, $21\bar{3}1$) zu berechnen und die hieraus sich ergebende Länge der Hauptaxe der Pyramide q durch c, die Hauptaxenlänge der Grundform, zu dividiren; der dem gefundenen Quotienten nächstliegende rationale Werth wird für $h : l$ eingesetzt. Sind statt der beiden Polkanten der dihexagonalen Pyramide nur eine und der Winkel der Basiskanten gemessen, so gestaltet sich die Berechnung des Zeichens noch einfacher: Aus dem halben Basiskantenwinkel erhält man durch Subtraction von 90^0 den Bogen $0001 : 21\bar{3}1$ (allgemein: $0001 : ki\bar{h}l$); dieser bildet mit der halben gemessenen Polkante, z. B. mit dem Bogen $p : 21\bar{3}1$ und mit dem Bogen $0001 : p$ ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem somit die letzterwähnte Seite und der Winkel an 0001 (oben mit A bezeichnet) ohne Weiteres berechnet werden können. Damit sind aber für die Fläche $21\bar{3}1$ (allgemein: $ki\bar{h}l$) zwei Zonen bestimmt, nämlich $[p, \bar{1}2\bar{1}0]$ und $[0001, 21\bar{3}0]$, aus welchen ihre Indices sich ergeben.

Fig. 288.



In den meisten Fällen hat man zur Berechnung des Zeichens einer dihexagonalen Pyramide nur eine Winkelmessung nöthig, wenn ihre Flächen nämlich in einer bekannten Zone liegen. Auch das alsdann einzuschlagende Verfahren der Rechnung lässt sich leicht an dem Beispiel Fig. 288 erläutern. Sei z. B. der Bogen $11\bar{2}1 : 21\bar{3}1$*) gemessen worden, so bildet dieser eine Seite des rechtwinkeligen Dreiecks $11\bar{2}1$, $21\bar{3}1$, q, in welchem noch der Winkel an $11\bar{2}1$ bekannt ist, da derselbe zugleich dem Dreieck $11\bar{2}1$, $11\bar{2}0$, $10\bar{1}0$ angehört und daher aus dem Axenverhältniss der Substanz berechnet werden kann. In dem ersteren Dreieck lässt sich daher der Bogen $11\bar{2}1 : q$ und aus diesem das Zeichen der Pyramide q bestimmen. Die Indices dieser letzteren, zusammen mit der Bedingungsgleichung für die Lage in der Zone $[11\bar{2}1, 10\bar{1}0]$ (vergl. S. 333), liefern das Zeichen der dihexagonalen Pyramide.

§. 69. **Beispiele holoëdrisch hexagonal krystallisirender Substanzen.** Es existirt nur eine kleine Zahl von Körpern, welche unzweifelhaft holoëdrisch hexagonal krystallisiren; die grosse Mehrzahl der hexagonalen Substanzen gehört vielmehr einer hemiëdrischen Abtheilung, der rhomboëdrischen, an. In dieser sind, wie später gezeigt werden wird, die Pyramiden 2. Ordnung scheinbar holoëdrisch, daher, im Falle eine Substanz nur Pyramiden einer Stellung zeigt, es zweifelhaft ist, ob sie nicht jener Hemiëdrie angehört und ihre Pyramiden folglich als solche 2. Ordnung aufzufassen sind. Selbst das gleichzeitige Auftreten aller Flächen einer Pyramide 1. Ordnung neben denen der zweiten giebt noch keinen strengen Beweis für die Zugehörigkeit zur holoëdrischen Abtheilung, weil die beiden Hälften einer Pyramide nur von einander »unabhängige« Gestalten darstellen, also bei einer Krystallisation die gleiche Ausbildung derselben nicht ausgeschlossen ist. Erst wenn man von einer Substanz an verschiedenen, unter abweichenden Verhältnissen erhaltenen Krystallisationen stets alle Flächen der Pyramiden 1. und 2. Ordnung in gleicher Ausbildung oder vollzählige dihexagonale Pyramiden beobachtet, kann man die Substanz mit volkommener Sicherheit als holoëdrisch betrachten.

Da die Hemimorphie als eine von der Hemiëdrie verschiedene und unabhängige Erscheinung auftreten kann (s. S. 228), so ist eine solche möglich in Bezug auf die Hauptaxe der hexagonalen Krystalle. Während unter der kleinen Zahl unzweifelhaft holoëdrischer Substanzen sich keine hemimorph krystallisirende befindet, sind deren mehrere unter den hemiëdrisch und tetartoëdrisch krystallisirenden Körpern und werden daher in den folgenden Abtheilungen dieses Systems Erwähnung finden.

Ebenso sind für die Zwillingsbildung des hexagonalen Systems wichtigere Beispiele nur unter den zahlreichen rhomboëdrisch-hemiëdrischen Körpern zu finden, daher an dieser Stelle nur darauf hingewiesen werden

*) Es ist dies an der S. 337 abgebildeten Combination des Beryll der Winkel $q : s$ in der bekannten Zone $q : m$.

möge, dass als Zwillingsebenen holoëdrisch-hexagonaler Krystalle möglich sind alle Flächen, mit Ausnahme derjenigen der beiden hexagonalen Prismen und der Basis, weil diese den Symmetrieebenen parallel gehen.

In der folgenden krystallographischen Beschreibung holoëdrisch-hexagonaler Substanzen bedeutet $a : c$ das Verhältniss einer Nebenaxe (= 1 gesetzt) zur Hauptaxe der primären Pyramide, und ist demselben der Autor beigefügt, dessen Messungen dem Werthe des Axenverhältnisses zu Grunde liegen.

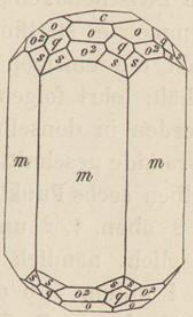
Magnesium = *Mg*. $a : c = 1 : 1{,}6391$ Des Cloizeaux. Bildet sublimirt kleine hexagonale Prismen $\{10\bar{1}0\}$ mit $\{0001\}$, zuweilen mit $\{10\bar{1}1\}$. *)

Beryllium = *Be*. $a : c = 1 : 1{,}5802$ Brögger. Aeusserst kleine Krystalle mit den Formen: $\{0001\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}2\}$.

Zink = *Zn*. $a : c = 1 : 2{,}177$ G. Rose. Die auf Hütten durch Destillation entstehenden Krystalle bilden horizontal gestreifte Prismen mit Basis und untergeordneter Pyramide.

Beryll (wenn grün gefärbt, »Smaragd«) = $Be^3Al^2(SiO^3)^6$. $a : c = 1 : 0{,}4989$ N. von Kokscharow. Häufig nur $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$ in prismatischer Ausbildung, nicht selten auch die flächenreichere Combination Fig. 289, $m = \{10\bar{1}0\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $c = \{0001\}$, $o^2 = \{20\bar{2}1\}$, $q = \{11\bar{2}1\}$, $s = \{3\bar{2}\bar{1}1\}$. Von diesen Flächen liegen die dihexagonale Pyramide s, sowie q in der Zone einer Fläche von o und einer seitlich anstossenden m (s. S. 333). Doppelbrechung negativ, schwach. Brechungsexponenten:

Fig. 289.



Linie B ;	$\omega = 1{,}5663$	$\varepsilon = 1{,}5616$
- D :	- 1,5703	- 1,5659
- E :	- 1,5743	- 1,5697

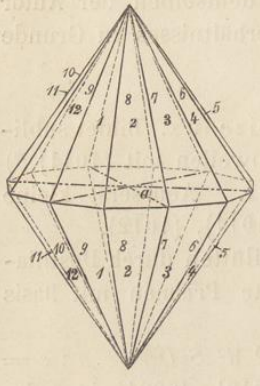
(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 42, 120). Häufig durch Spannungen inhomogen und daher scheinbar optisch zweiaxig (vergl. S. 141).

§. 70. **Die rhomboëdrische Hemiëdrie.** In gleicher Weise, wie die verschiedenen möglichen Arten von Hemiëdrie im regulären System zunächst an dem allgemeinsten Repräsentanten aller Formen, dem Hexakisoktaëder, entwickelt werden mussten, weil sich daraus ihr Einfluss auf die übrigen Gestalten gesetzmässig ergiebt, so hat das Gleiche auch im hexagonalen System, dessen allgemeinste Form die dihexagonale Pyramide ist, zu geschehen.

*) Magnesium und Zink sind, obgleich bisher an denselben nur Pyramiden einer Ordnung (s. S. 336) beobachtet wurden, wegen ihrer unzweifelhaften Isomorphie mit Beryllium, welches nach Brögger in verschiedenen Krystallisationen ganz holoëdrische Entwickelung der Pyramiden zeigt (s. Zeitschr. f. Kryst. **9**, 236), ebenfalls mit grosser Wahrscheinlichkeit als holoëdrisch zu betrachten.

Denken wir uns diese durch drei senkrechte, gleichwerthige Symmetrieebenen des Hexagonalsystems, z. B. diejenigen, welche durch die Nebenaxen (die strichpunktirten Linien *a* in Fig. 290) gehen, in sechs Sechstel zerlegt, so liegen in jedem solchen Sechstel vier Flächen der dihexagonalen Pyramide, 1, 2 oben und 1, 2 unten, welche sämmtlich die nach vorn gehende Zwischenaxe in demselben Abstande schneiden. Würden wir nun von diesen Sechsteln drei so auswählen, dass stets die zu den theilenden Ebenen symmetrischen der andern Hälftform angehören, also die drei abwechselnden, so würde offenbar jene Zwischenaxe vorn von vier Flächen, hinten in demselben Abstande von keiner einzigen (weil die Flächen 7, 8 nach einer theilenden Ebene zu 1, 2 symmetrisch sind) geschnitten werden. Da die so entstehende Hälftform nicht den S. 226 angegebenen Bedingungen einer hemiëdrischen genügt, ist es nöthig, die Theilung der dihexagonalen Pyramiden ausser nach jenen drei Ebenen auch noch durch die Haupt-Symmetrieebene, oder durch die drei anderen senkrechten Symmetrieebenen (durch die Zwischenaxen), oder endlich durch alle sieben Ebenen, nach denen Symmetrie stattfindet, vorzunehmen. Dass diese drei Methoden in der That die einzigen sind, durch welche man je eine mögliche Hemiëdrie erhält, lehrt folgende Betrachtung: Die sechs Seiten der drei Zwischenaxen werden in denselben Abständen von je vier Flächen der dihexagonalen Pyramide geschnitten; von einer hemiëdrischen Form müssen also durch dieselben sechs Punkte je zwei Flächen gehen; aus jenen vier Flächen, z. B. 1, 2 oben, 1, 2 unten, ist aber eine Auswahl von zweien auf dreierlei Art möglich, nämlich *a*) je zweier neben einander gelegener, z. B. 1, 2 oben, 3, 4 unten, 5, 6 oben u. s. f. *b*) je zweier in einer Basiskante zusammentreffender, z. B. 2 oben und unten, 4 oben und unten u. s. f. *c*) je zweier kreuzweise gelegener, z. B. 1 unten, 2 oben, 3 unten, 4 oben u. s. w.

Fig. 290.



Jede dieser drei Arten der Auswahl der Flächen giebt, wie man sich leicht an einem colorirten Modelle überzeugen kann, eine Hälftform, welche in Bezug auf alle Symmetrieaxen die S. 226 aufgestellten Bedingungen erfüllt. Es sind demnach, ebenso wie im ersten Krystallsystem, drei verschiedene Arten von Hemiëdrie möglich, von denen zunächst diejenige betrachtet werden soll, bei der die obigen sechs Sechstel noch durch die Haupt-Symmetrieebene halbirt, die Formen also in zwölf Dodekanten zerlegt werden. Sechs dieser Zwölftel enthalten also folgende Flächen der dihexagonalen Pyramide:

1, 2 oben, 3, 4 unten, 5, 6 oben, 7, 8 unten, 9, 10 oben, 11, 12 unten.

Die zu diesen nach den zerlegenden Ebenen symmetrischen Flächen der anderen Hälfte sind:

1, 2 unten, 3, 4 oben, 5, 6 unten, 7, 8 oben, 9, 10 unten, 11, 12 oben.

1) Die dihexagonale Pyramide liefert nach dem Gesetz dieser Hemiëdrie, durch Beibehaltung der Paare neben einander liegender Flächen in allen alternirenden Dodekanten und Verschwindenlassen der anderen, Fig. 291, je zwei Hälften, welche die Gestalt Fig. 292 besitzen, und zwar bilden die weiss gelassenen Flächen diese Form in der in letzterer Figur gezeichneten Stellung, während die zweite Hälfte eine genau gleiche, aber um 180° (oder 60°, was zu demselben Resultat führt) gedrehte Gestalt liefert. Eine solche Krystallform heisst, weil bei gleicher Centraldistanz ihre Flächen die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke (Skalene) haben, hexagonales Skalenoëder, und unterscheidet man die beiden, aus einer dihexagonalen Pyramide sich ableitenden Hemiëder als positives und negatives Skalenoëder und bezeichnet dieselben mit Hülfe der Indices einer ihrer Flächen $\varkappa\{hi\bar{k}l\}$ und $\varkappa\{ik\bar{h}l\}$*), nach Naumann mit:

Fig. 291.

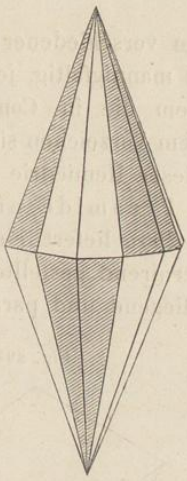
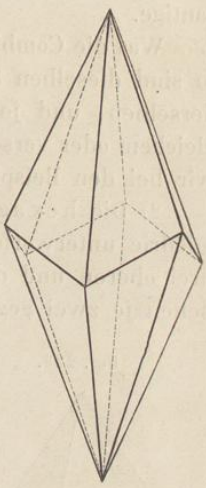


Fig. 292.



$$+\frac{mPn}{2} \text{ und } -\frac{mPn}{2}$$ **)

Selbstverständlich ist es an und für sich beliebig, welche der beiden Hälftformen man in einem speciellen Falle positive, welche negative nennt, und es sind hier dieselben Erwägungen, welche S. 320 über die Wahl der Grundform angestellt wurden, Platz greifend; so ist es z. B. üblich, die an einem derartig krystallisirenden Stoffe regelmässig vorherrschenden, oder die durch Spaltbarkeit ausgezeichneten Hälftformen als positive zu bezeichnen. Ist eine solche Wahl einmal an einem Krystall getroffen, so ist damit natürlich das Vorzeichen + oder — für alle anderen, daran auftretenden Formen gegeben.

*) Diese Hemiëdrie bietet, wie aus der Betrachtung der entsprechenden des tetragonalen Systems hervorgehen wird, gewisse Analogien mit der tetraëdrischen, daher sie mit dem Zeichen $\varkappa$ von den übrigen unterschieden werden soll, obgleich ihre Formen keine »geneigtflächige« sind, sondern aus parallelen Flächenpaaren bestehen.

**) Eine allgemein gebrauchte Abkürzung dieser Zeichen wird im nächsten Paragraphen erörtert werden.

Ein hexagonales Skalenoëder besteht aus drei oberen und drei, in alternirender Stellung dazu befindlichen, unteren Flächenpaaren, deren Flächen sich je in einer stumpferen Polkante, deren Winkel gleich demjenigen der entsprechenden Polkante an der dihexagonalen Pyramide ist, schneiden. Ausser diesen sechs stumpferen Polkanten besitzt das Skalenoëder noch sechs schärfere, mit jenen abwechselnd, und ebenso viel (im Zickzack auf- und niedersteigende), unter sich gleiche, Mittelkanten. Die Polecken desselben sind also 3 + 3kantige, die Seitenecken 2 + 1 + 1-kantige.

Was die Combinationen verschiedener Skalenoëder mit einander betrifft, so sind dieselben äusserst mannigfaltig, je nach den Werthen von m und n derselben, und je nachdem die in Combination tretenden Formen von gleichem oder verschiedenem Vorzeichen sind. Die wichtigsten Fälle werden wir bei den Beispielen dieser Hemiëdrie kennen lernen.

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 293), liefert eine Form, welche nur aus sechs, drei oberen und drei alternirend gestellten unteren Flächen besteht, von denen je zwei gegenüberliegend und parallel sind. Diese Form, Fig. 294, heisst Rhomboëder*) und besteht aus drei, einander unter demselben schiefen Winkel durchschneidenden Paaren paralleler Flächen, daher deren Gestalt bei gleicher Centraldistanz diejenige eines Rhombus ist. Bei dem in Fig. 294 dargestellten Rhomboëder ist der stumpfe Winkel dieses Rhombus an der Polecke, bei demjenigen Fig. 295 der spitze ebendaselbst befindlich; ein Rhomboëder der ersteren Art nennt man ein stumpfes, eines der zweiten Art ein spitzes. Die beiden durch die Hemiëdrie entstehenden Rhomboëder sind um so spitzer, je spitzer die hexagonale Pyramide ist, von der sie sich ableiten. Wie aus der Ableitung hervorgeht, sind die sechs Polkanten eines Rhomboëders unter einander genau gleich, ebenso die sechs Mittelkanten, und da die Form parallelflächig ist, so sind die Winkel der Polkanten die Supplemente von denjenigen der Mittelkanten. Bei den spitzen Rhomboëdern ist der Winkel der Polkanten grösser, als 90°, derjenige der Mittelkanten um ebenso viel kleiner; bei den stumpfen ist das Umgekehrte der Fall. Da an jedem rhomboëdrisch

Fig. 293.

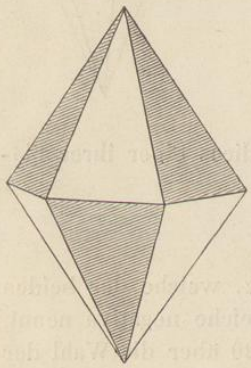
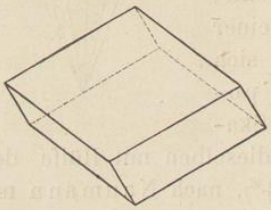


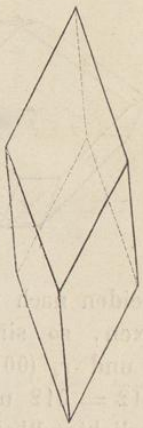
Fig. 294.



*) Wegen der durch ihre Häufigkeit veranlassten Wichtigkeit der Rhomboëder ist diese Hemiëdrie nach denselben benannt worden.

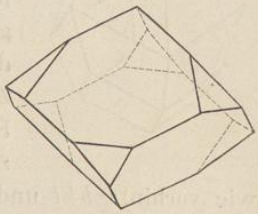
krystallisirenden Körper eine beliebig grosse Reihe von Rhomboëdern möglich ist, so kommt zuweilen auch ein solches vor, dessen Winkel sehr wenig von 90° abweicht, welches also fast die Gestalt eines Würfels hat; da ein solcher Krystall sich in der Richtung der Hauptaxe anders mit der Temperatur ausdehnt, als senkrecht dazu, demnach die Rhomboëder spitzer oder stumpfer werden, je nachdem die Ausdehnung durch die Wärme in der Hauptaxe grösser oder kleiner, als in den übrigen Richtungen, — so kann ein solches würfelähnliches Rhomboëder, wie es bei jeder dieser Abtheilung zugehörigen Substanz krystallonomisch möglich ist, bei einer bestimmten Temperatur sogar genau rechtwinkelige Polkanten und Mittelkanten besitzen, ohne deshalb ein reguläres Hexaëder zu sein. Denn zum Wesen eines regulären Krystalls gehört eben die Constanz seiner Winkel und somit seiner weit höheren Symmetrie für alle Temperaturen, gehört die Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit nach allen Richtungen, während jenes scheinbare Hexaëder natürlich ein optisch einaxiger Krystall bleibt, also nur als »Rhomboëder von 90°« betrachtet werden darf. Von einem Uebergang des hexagonalen Systems in das reguläre könnte nur dann die Rede sein, wenn mit der Annäherung jenes Rhomboëders an den Würfel auch die übrigen Eigenschaften des betreffenden Krystalls, z. B. seine optischen, sich denen eines regulären näherten; dies ist aber keineswegs der Fall.

Fig. 295.



Die beiden, aus derselben Pyramide erster Ordnung abgeleiteten Rhomboëder, welche natürlich ganz gleiche Gestalt haben und sich nur durch ihre, um 60° oder 180° gegen einander gedrehte Stellung unterscheiden, werden ebenso wie die Skalenoëder als positives und negatives bezeichnet, und zwar ist es üblich, in allen Fällen, in denen nach den Flächen eines derselben Spaltbarkeit stattfindet, dieses das positive zu nennen.

Fig. 296.



Zwei zusammengehörige Rhomboëder erscheinen derart mit einander combinirt, Fig. 296, dass das eine die Seitenecken des andern, bei gleicher Neigung beider Arten von Flächen gegen die Hauptaxe, abstumpft. Die Bezeichnung zweier solcher Rhomboëder ist $z\{h\,0\,\bar{h}\,l\}$ und $z\{0\,h\,\bar{h}\,l\}$, nach Naumann:

$$+\frac{mP}{2} \text{ und } -\frac{mP}{2}.$$

Die Combination Fig. 297 stellt ebenfalls zwei Rhomboëder von entgegengesetztem Vorzeichen dar; bezeichnen wir das vorherrschende, r, mit $z\{10\bar{1}1\}$,

so gehört das zweite, s, welches die Polkanten des ersten gerade abstumpft, offenbar einer stumpferen Pyramide, also einer solchen mit kleinerer Hauptaxe, an. Um diese letztere zu bestimmen, bedarf es noch einer Fläche, z. B. der in derselben Figur mit c bezeichneten Basis $\{0001\}$, deren Combinationskante mit s horizontal sein muss, da sie ja die Kante zwischen $\{0001\}$ und einer Pyramidenfläche ist; dieselbe Richtung besitzt aber auch die Kante einer s-Fläche mit einer darunter liegenden r-Fläche, da andernfalls s keine gerade Abstumpfung der Polkanten von r wäre; es liegen demnach z. B. s_1, c und r_4 in einer Zone, und da s_1 zugleich in der Zone $r_1\, r_2$ liegt, so sind seine Indices bestimmt. Beziehen wir diese wieder auf die beiden nach vorn gehenden und positiv angenommenen Seiten der Nebenaxen, so sind die Symbole von r_1 und r_2 (111) und $(\bar{1}01)$, die von c und r_4 (001) und $(01\bar{1})$; aus diesen beiden Zonen folgen die Indices $01\bar{2} = 012$ und daraus das Zeichen der Fläche $s_1 = (01\bar{1}2)$. Für jedes beliebige Rhomboëder $r = \varkappa\{h\,0\,\bar{h}\,l\}$ ergiebt sich in derselben Weise für das die Polkanten abstumpfende Rhomboëder das Zeichen $\varkappa\{0.h.\bar{h}.2l\}$. Da $\frac{h}{l} = m$, so erhält das zweite Rhomboëder das Naumann'sche Zeichen $-\frac{\frac{m}{2}P}{2}$, wenn man das erste Rhomboëder $+\frac{mP}{2}$ bezeichnet.

Fig. 297.

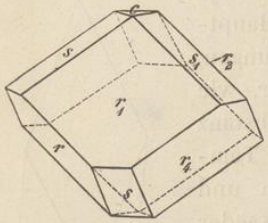
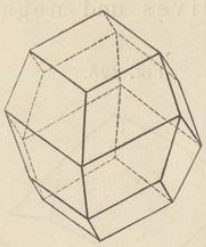


Fig. 298 zeigt ein Rhomboëder in Combination mit einem Skalenoëder, welches die Mittelkanten des ersteren zuschärft. Die Mittelkanten des Skalenoëders sind also parallel denen des Rhomboëders, und da ein Rhomboëder durch die Richtung seiner Mittelkanten vollkommen bestimmt ist (je zwei Mittelkanten bestimmen die Lage einer Fläche desselben), so muss es möglich sein, aus dem Zeichen eines Skalenoëders dasjenige des Rhomboëders, welches mit ihm gleiche Mittelkanten hat, des sogenannten »Rhomboëders der Mittelkanten«, abzuleiten. Sei $\varkappa\{hi\bar{k}l\}$ das Zeichen des Skalenoëders, so sind die Indices zweier Flächen desselben, welche in der linken Mittelkante zusammenstossen (auf dieselben Nebenaxen bezogen, wie vorhin): hkl und $hi\bar{l}$, diejenigen der beiden Flächen, welche die rechts vorn gelegene Mittelkante bilden, khl und $ih\bar{l}$. Die oben vorn sichtbare Rhomboëderfläche ist, da sie in beiden Zonen liegt, durch jene Werthe bestimmt, und zwar findet man, wenn man ihre Indices aus jenen beiden Zonen berechnet und dann für i seinen Werth $h—k$ einsetzt, die drei Indices der Rhomboëderfläche, bezogen auf die beiden vordern Nebenaxen und die Hauptaxe:

Fig. 298.



$$2k-h \qquad 2k-h \qquad l$$

Das vollständige Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten ist also

$$z\{2k-h \,.\, 0 \,.\, -2k+h \,.\, l\}.$$

Will man das Parameterverhältniss dieses Rhomboëders ausdrücken durch die Werthe $m = \frac{h}{l}$ und $n = \frac{h}{k}$, so ergeben sich, weil $k = \frac{h}{n}$ und $l = \frac{h}{m}$, die Indices zweier Nebenaxen und der Hauptaxe:

$$\frac{2h}{n} - h \qquad \frac{2h}{n} - h \qquad \frac{h}{m}$$

d. i.

$$\frac{2-n}{n} \qquad \frac{2-n}{n} \qquad \frac{1}{m}$$

also die Parameter:

$$\frac{n}{2-n} \qquad \frac{n}{2-n} \qquad mc$$

d. i.

$$1 \qquad 1 \qquad \frac{m(2-n)}{n}c.$$

Das Rhomboëder hat also das Zeichen

$$+\frac{\frac{m(2-n)}{n}P}{2}.$$

Denkt man sich die Flächen dieses Rhomboëders durch die Mittelkanten des Skalenoëders $+\frac{mPn}{2}$ gelegt, so wird es von diesem vollständig umhüllt und beide Formen berühren einander in ihren Mittelkanten (Fig. 299). In ähnlicher Weise umhüllt ein Skalenoëder noch zwei andere Rhomboëder, welche man das der kürzeren und dasjenige der längeren Polkanten nennt. Das erstere hat zu Polkanten die kürzeren Polkanten des Skalenoëders, k Fig. 300, es ist also ebenfalls durch dessen Zeichen vollkommen bestimmt. In genau derselben Weise berechnet, wie es soeben für das Rhomboëder der Mittelkanten geschah, ergiebt sich dessen Zeichen

Fig. 299.

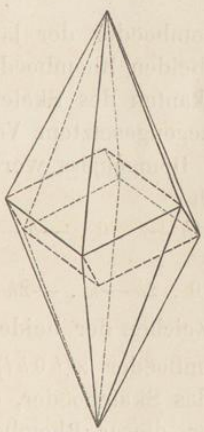
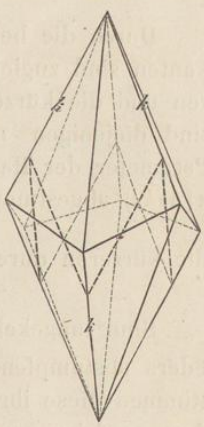


Fig. 300.



$$z\{2h-k \,.\, 0 \,.\, -2h+k \,.\, l\} = +\frac{\frac{m(2n-1)}{n}P}{2}$$

Ein Skalenoëder, mit seinem Rhomboëder der kürzeren Polkanten combinirt, erscheint als Zuschärfung der Polkanten des letzteren, Fig. 301.

Dasjenige Rhomboëder, dessen Polkanten die längeren Polkanten des Skalenoëders sind, ist ebenfalls hierdurch bestimmt. Die Rechnung, in derselben Weise durchgeführt, liefert dafür das Zeichen

$$\varkappa\{0 \,.\, h+k \,.\, -h-k \,.\, l\} = -\frac{\frac{m(n+1)}{n}}{2} P$$

Fig. 301.

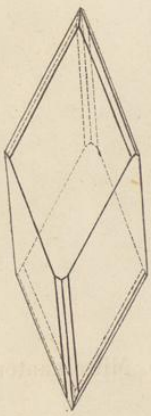
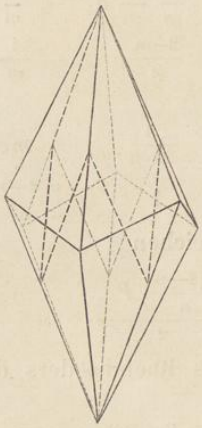


Fig. 302.



Es ist das spitzeste Rhomboëder (s. Fig. 302), welches von dem Skalenoëder umhüllt wird, und ist von entgegengesetztem Vorzeichen, da seine Flächen in denjenigen Dodekanten liegen, denen die des Skalenoëders nicht angehören.

Vergleicht man die Längen der Hauptaxe dieser drei, von einem Skalenoëder sich ableitenden Rhomboëder (die Längen der Nebenaxen $= 1$ gesetzt), so sieht man, dass diejenige des dritten gleich der Summe der beiden ersten, denn

$$n+1 = (2n-1)+(2-n).$$

Durch die beiden Rhomboëder der längeren und der kürzeren Polkanten sind zugleich die beiden Rhomboëder bestimmt, welche die längeren und die kürzeren Polkanten des Skalenoëders gerade abstumpfen, es sind diejenigen mit entgegengesetztem Vorzeichen und halb so grossem Parameter der Hauptaxe. Demgemäss werden die längeren Polkanten von $\varkappa\{h\bar{i}k l\}$ abgestumpft durch

$$\varkappa\{h+k \,.\, 0 \,.\, -h-k \,.\, 2l\}$$

die kürzeren durch:

$$\varkappa\{0 \,.\, 2h-k \,.\, -2h+k \,.\, 2l\}$$

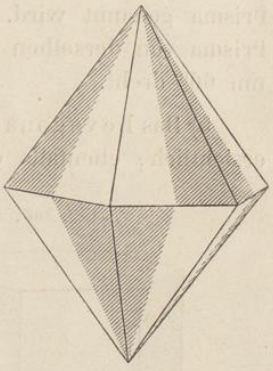
Sind umgekehrt die Zeichen der beiden die Polkanten eines Skalenoëders abstumpfenden Rhomboëder $\varkappa\{h0\bar{h}l\}$ und $\varkappa\{0h'\bar{h}'l'\}$ gegeben, so bestimmen diese ihrerseits das Skalenoëder, da dasselbe in den beiden Zonen liegt, welche von je einer dieser Rhomboëderflächen und der die zugehörige Polkante des Skalenoëders halbirenden Prismenfläche 2. Ordnung gebildet wird. Führt man diese Zonenrechnung durch, so ergiebt sich das Zeichen des Skalenoëders:

$$\varkappa\{2(hl'+h'l) \,.\, -2(2h'l-hl') \,.\, -2(2hl'-h'l) \,.\, 3ll'\}.$$

3) Je grösser der Werth von n bei einem Skalenoëder, d. h. je näher er 2 ist, desto mehr ähnelt dasselbe einer Pyramide der zweiten Ordnung, desto weniger unterscheiden sich die stumpferen und die schärferen Polkanten in ihren Winkeln von einander. Ist $n = 2$, so sind

alle Polkanten gleich, die Mittelkanten horizontal, und die Form fällt zusammen mit einer Pyramide zweiter Ordnung. Da ein Skalenoëder einem Rhomboëder um so ähnlicher ist, je weniger dessen n von 1 verschieden, so ist dieses Romboëder selbst die Grenzgestalt für den Fall $n = 1$, in welchem der Winkel der stumpferen Polkanten gleich Null wird. Die andere Grenzform einer solchen Reihe von Skalenoëdern ist eine Pyramide der andern Ordnung. Man ersieht dies am leichtesten, wenn man die rhomboëdrische Hemiëdrie auf diese Form anwendet, Fig. 303, wobei dieselbe zu betrachten ist als diejenige dihexagonale Pyramide, deren $n = 2$. Es resultiren dann nämlich zwei vollkommen zusammenfallende hemiëdrische Formen, welche sich folglich auch nicht von der holoëdrischen unterscheiden können.

Fig. 303.



Von den Combinationen der hemiëdrischen Pyramiden der zweiten Ordnung mit Rhomboëdern u. s. w. werden wir einige gelegentlich der Beispiele dieser Abtheilung kennen lernen.

4) Die dihexagonalen Prismen sind in den holoëdrischen Krystallreihen diejenigen dihexagonalen Pyramiden, deren $m = \infty$; werden dieselben nun hemiëdrisch, Fig. 304, so liefern sie zwei Formen, bei denen die Flächen der einen vollkommen zusammenfallen mit denjenigen der andern, d. h. es entsteht durch die Hemiëdrie dasselbe dihexagonale Prisma, welches anzusehen ist als ein Skalenoëder, dessen $m = \infty$. Es unter-

Fig. 304.

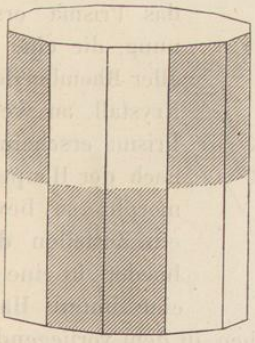
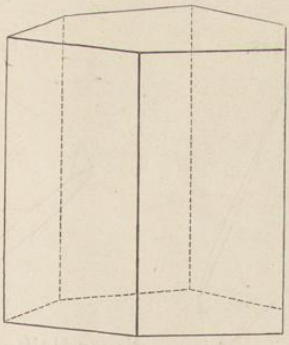


Fig. 305.



scheidet sich daher diese Form von der holoëdrischen dadurch, dass drei ihrer Flächenpaare (die oben weiss gelassenen) den drei oberen Flächenpaaren des Skalenoëders Fig. 292, die anderen den drei unteren Flächenpaaren des Skalenoëders entsprechen. Tritt daher zu der Hemiëdrie eine Hemimorphie nach der Hauptaxe hinzu, durch welche die obere und die untere Hälfte des Skalenoëders in zwei von einander unabhängige Gestalten

verwandelt werden, so muss diese sich auch auf die Grenzformen erstrecken, d. h. die jenen Hälften entsprechenden Prismenflächen müssen ebenfalls von einander unabhängig werden; es kann also die eine Hälfte allein am Krystalle erscheinen, z. B. nur die oben weiss gelassenen; diese bilden alsdann die in Fig. 305 dargestellte Form, welche ditrigonales Prisma genannt wird. Die andere Hälfte ist ebenfalls ein ditrigonales Prisma von derselben Gestalt, welches man erhält, wenn man das erste um 60^0 dreht.

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung wird, wie aus Fig. 306 ersichtlich, ebenfalls durch die Hemiëdrie scheinbar nicht geändert, ist

Fig. 306.

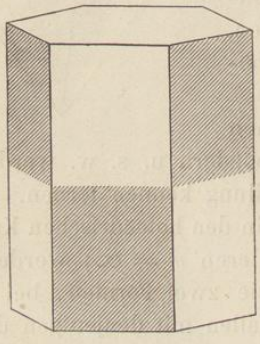
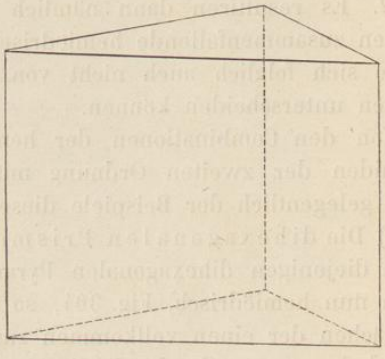


Fig. 307.



aber in einer hemiëdrischen Krystallreihe nicht die Pyramide erster Ordnung mit unendlich langer Hauptaxe, sondern dasjenige Rhomboëder, dessen $m = \infty$. Je grösser m, desto spitzer ist das Rhomboëder; das spitzeste ist das Prisma erster Ordnung, die eine Grenzform aller Rhomboëder. Ist der Krystall, an welchem das Prisma erscheint, zugleich nach der Hauptaxe hemimorph, so bewirkt dies ein Zerfallen des Rhomboëders in eine obere und eine untere Hälfte; jeder dieser Hälften entsprechen in dem vorliegenden Grenzfalle drei abwechselnde Flächen des Prisma, also zerfällt dieses durch die Hemimorphie in zwei von einander unabhängige Gestalten, von welchen in Fig. 307 die aus den Flächen $(10\bar{1}0)$ $(\bar{1}100)$ $(0\bar{1}10)$ bestehende dargestellt ist. Eine solche Form heisst nach ihrem Querschnitt trigonales Prisma.

Fig. 308.

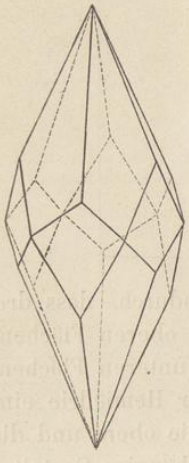
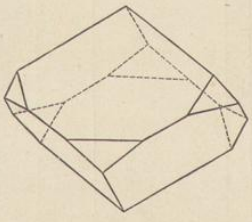


Fig. 309.



In Combination mit einem Skalenoëder erscheint das Prisma erster Ordnung als verticale Abstumpfung der Mittelecken, welche $2+1+1$-kantig sind, s. Fig. 308, in Combination mit einem Rhomboëder ebenso; die abgestumpften Mittelecken sind hier $2+1$ kantig, und die eine der Combinationskanten zwischen je einer Prismen- und einer Rhomboëderfläche ist horizontal, s. Fig. 309.

6) Das hexagonale Prisma der zweiten Ordnung ist die Pyramide derselben Stellung mit unendlich langer Hauptaxe; da jene für endliche Werthe von m durch die Hemiëdrie nicht in ihrer Flächenzahl alterirt wird, so kann dies auch nicht mit der Grenzform, für den Fall $m = \infty$, stattfinden, wie auch Fig. 310 zeigt. Das Prisma zweiter Ordnung erscheint deshalb an rhomboëdrisch-hemiëdrischen Krystallen mit der vollen Flächenzahl, und zwar gehören seine Flächen ebenso wohl dem oberen, als dem

Fig. 310.

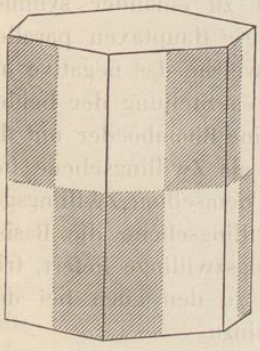


Fig. 311.

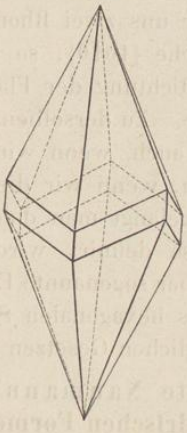
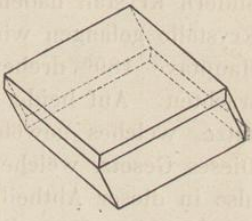


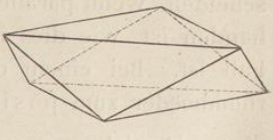
Fig. 312.



unteren Pole der Hauptaxe an, wie aus Fig. 310 unmittelbar ersichtlich, es kann daher auch durch die Hemimorphie nicht verändert werden. Das Prisma $\{11\bar{2}0\}$ bildet die gerade Abstumpfung der Mittelkanten sowohl eines jeden Skalenoëders, Fig. 311, als auch eines jeden Rhomboëders, Fig. 312.

7) Die Basis ist in dieser hemiëdrischen Abtheilung aufzufassen als dasjenige Rhomboëder, dessen $m = 0$ ist. Im Falle der Hemimorphie sind obere und untere Fläche in ihrem Auftreten von einander unabhängig. $\{0001\}$ stumpft die Polecken der Rhomboëder wie der Skalenoëder gerade ab. Fig. 313 stellt die Combination derselben mit einem Rhomboëder dar, welche nach jener tafelartig ausgebildet ist.

Fig. 313.



Der Einfluss, welchen die Hemimorphie nach der Hauptaxe auf die rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen ausübt, ist der deutlichste Beweis

dafür, dass man in der That, wie es bisher geschehen, die durch eine Hemiëdrie anscheinend unveränderten Formen nicht als holoëdrische, sondern nur als »scheinbar holoëdrische« anzusehen habe; denn wenn z. B. das hexagonale Prisma 1. O. in dieser Abtheilung wirklich holoëdrisch wäre, wie es zu sein scheint, so würden seine Flächen sämmtlich gleichmässig dem oberen und unteren Pole der Hauptaxe angehören, also durch die Hemimorphie auch gleichmässig beeinflusst werden. Dass dies nicht der Fall ist, sondern die Form stets in zwei von einander unabhängige trigonale Prismen zerfällt, ist nur erklärlich dadurch, dass dieselbe eine von dem holoëdrischen Prisma verschiedene, nämlich ein unendlich spitzes Rhomboëder ist, dessen Flächen abwechselnd dem obern und untern Pole angehören.

Die vorstehend beschriebenen Formen sind nicht mehr, wie die holoëdrischen, symmetrisch nach der Basis und nach den Flächen des Prisma 1. Ordnung, daher nun auch nach diesen Flächen eine Zwillingsbildung eintreten kann. Denken wir uns zwei Rhomboëder zu einander symmetrisch in Bezug auf eine Fläche $\{10\bar{1}0\}$, so sind ihre Hauptaxen parallel, und das eine hat diejenige Richtung der Flächen, welche das negative am andern Krystall haben würde. Zu derselben relativen Stellung der beiden Krystalle gelangen wir aber auch, wenn wir das eine Rhomboëder um die Hauptaxe 180^0 drehen, d. h. wenn wir die Basis als Zwillingsebene betrachten. Auf beide Arten gelangt man daher zu demselben Zwillingsgesetze, welches gewöhnlich so definirt wird: »Zwillingsebene die Basis.« Dieses Gesetz, welches offenbar sogenannte Ergänzungszwillinge liefert, tritt also in dieser Abtheilung des hexagonalen Systems zu den auch bei den holoëdrischen Krystallen möglichen Gesetzen noch hinzu.

§. 71. **Die abgekürzte Naumann'sche und die Miller'sche Bezeichnung der rhomboëdrischen Formen.** Wegen der grossen Häufigkeit dieser Hemiëdrie und der dadurch bewirkten oftmaligen Wiederholung des Schreibens ihrer Zeichen wurde von Naumann eine abgekürzte Bezeichnungsweise für die Formen derselben vorgeschlagen, welche eine sehr ausgedehnte Anwendung gefunden hat.

Von der zur Grundform gewählten Pyramide P leiten sich zwei Rhomboëder ab, von denen nun wieder eines, falls beide an den Krystallen auftreten, als positives auszuwählen ist. Da die Rhomboëder parallelflächige Gestalten sind, somit keine Fläche des positiven einer des negativen parallel ist, so sind dieselben in unzweifelhafter Weise stets von einander zu unterscheiden, wenn parallel den Flächen des einen derselben Spaltbarkeit vorhanden ist, wie dies in der That bei vielen hierher gehörigen Körpern der Fall ist. Bei einem derartigen Krystall wird man stets das Spaltungsrhomboëder zum positiven primären Rhomboëder $z\{10\bar{1}1\}$ wählen; dieses bezeichnet man nun, statt mit $+\frac{P}{2}$, mit

$+R$ (oder auch einfach mit R ohne $+$ Zeichen),

das zugehörige negative $z\{01\bar{1}1\}$ mit

$$-R.$$

Jedes davon abgeleitete Rhomboëder $z\{h0\bar{h}l\}$ resp. $z\{0h\bar{h}l\}$ wird entsprechend, statt mit $\frac{mP}{2}$, mit

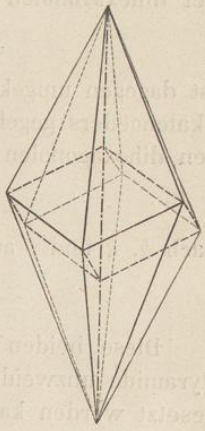
$$+ \text{ oder } - mR$$

bezeichnet; da nun m jeden beliebigen rationalen Werth haben kann zwischen 0 und ∞, von denen der erstere der Basis, der letztere dem hexagonalen Prisma erster Ordnung entspricht, als dem spitzesten Rhomboëder, welches existirt, so können diese beiden Grenzformen in derselben Weise bezeichnet werden, nämlich $0R$ und ∞R, und die Ableitungsreihe der verschiedenen Rhomboëder einer Krystallreihe, incl. ihrer Grenzglieder, wird sodann die folgende sein:

$$0 \ldots . R \pm mR, \ldots . \pm R \ldots . \pm mR \ldots . \infty R.$$
$$(m<1) \qquad (m>1)$$

Wir haben im vorigen § gesehen, dass zu jedem Skalenoëder $z\{\bar{h}i\bar{k}l\}$ ein Rhomboëder existirt, welches dieselben Mittelkanten und das Zeichen $z\{2k-h.0.-2k+h.l\}$ besitzt, daher immer derselben Krystallreihe angehören muss. Die in diesen beiden Zeichen aufgeführten speciellen Werthe der Indices, in denen $h>k>i$, entsprechen offenbar der linken oberen vorderen Skalenoëder- und der oberen vorderen Rhomboëderfläche. Soll, wie es in Fig. 314 dargestellt ist, die erstere durch die Mittelkante des Rhomboëders gehen, so müssen wir uns dieselbe parallel sich selbst verschoben denken, bis sie auf der nach links vorn gehenden Nebenaxe dieselbe Parameterlänge abschneidet, wie die Rhomboëderfläche, also ihr erster Index ebenfalls $= 2k-h$ wird; dies entspricht offenbar einer Multiplication aller ihrer Indices mit $\frac{2k-h}{h}$, wodurch derjenige der Hauptaxe $\frac{2k-h}{h}\,l$ wird. Setzen wir also, wie es die Figur zeigt, die Nebenaxen des Rhomboëders und des Skalenoëders gleich gross, so verhalten sich die Längen ihrer Hauptaxen wie

Fig. 314.



$$\frac{1}{l} : \frac{h}{2k-h} \cdot \frac{1}{l} = 1 : \frac{h}{2k-h},$$

stehen also immer in einem rationalen Verhältniss zu einander. Die Gestalt eines Skalenoëders ist nun offenbar vollkommen bestimmt durch die Richtung ihrer Mittelkanten und durch das Verhältniss ihrer Hauptaxe zu der des durch ihre Mittelkanten gelegten Rhomboëders, welches wir mit n bezeichnen wollen; denn gehen wir von irgend einem Rhomboëder mR aus und verlängern dessen Hauptaxe auf die $n$fache Grösse, also auf ein rationales Vielfaches, und verbinden die Mittelecken desselben mit den

neuen Endpunkten der Hauptaxe durch Gerade, so sind letztere die Polkanten des Skalenoëders. Bezeichnen wir dieses mit

$$+ \text{ oder } - mRn,$$

wo $\pm mR$ das Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten und n die Vervielfachung der Hauptaxe (in Fig. 314 ist $n = 3$) angiebt, so haben wir hierdurch ein Zeichen gewonnen, welches weit leichter als die bisher benutzten eine Vorstellung von der Form zu geben geeignet ist und zugleich das Zeichen der wichtigsten im Zonenverbande mit derselben stehenden Formen in sich enthält, endlich auch häufig aus einfacheren Zahlen besteht, als dasjenige der holoëdrischen Form*).

Da man in dem Zeichen des Rhomboëders der Mittelkanten $\varkappa\{2k - h.\ 0.\ -2k + h.\ l\}$ für h und k die verschiedensten Werthe einsetzen kann, ohne das Verhältniss $(2k - h) : l$, also ohne die Gestalt des Rhomboëders zu ändern, so giebt es eine ganze Reihe von Skalenoëdern $\varkappa\{h\,\bar{i}\,\bar{k}\,l\}$, welche sämmtlich das gleiche Rhomboëder der Mittelkanten besitzen, also derselben Zone (der Mittelkantenzone des Rhomboëders) angehören, und deren Hauptaxe stets $\frac{h}{2k-h}$ mal so gross ist, als diejenige des Rhomboëders, nur dass letzterwähnte Zahl jedesmal einen andern Werth erhält. Diese Reihe von mR abgeleiteter Skalenoëder erhalten wir also, wenn wir in das Zeichen mRn für n die verschiedensten rationalen Zahlen > 1 einsetzen.

Die Ableitung dieses Zeichens aus dem Symbol derjenigen dihexagonalen Pyramide $\{h\,\bar{i}\,\bar{k}\,l\}$, deren Hälftform das Skalenoëder darstellt, ist eine sehr einfache: m ist das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen für das Rhomboëder der Mittelkanten, also das reciproke der Indices, folglich $\frac{2k-h}{l}$; n ist aber die S. 349 hergeleitete Zahl, welche die Verlängerung der Hauptaxe angiebt; das Zeichen des Skalenoëders, bezogen auf die Indices der dihexagonalen Pyramide, ist demnach:

$$\frac{2k-h}{l}\ R\ \frac{h}{2k-h}.$$

Ist dagegen umgekehrt das abgekürzte Naumann'sche Zeichen mRn eines Skalenoëders gegeben, und will man aus diesem die Indices der zugehörigen dihexagonalen Pyramide ableiten, so hat man die Gleichungen

$$\frac{2k-h}{l} = m \text{ und } \frac{h}{2k-h} = n$$

nach h, k und l aufzulösen und findet leicht:

$$\frac{h}{k} = \frac{2n}{n+1} \qquad \frac{l}{k} = \frac{2}{m(n+1)}.$$

Diese beiden Verhältnisse bestimmen das Symbol der dihexagonalen Pyramide unzweideutig, da ein Index, z. B. k, einer beliebigen Zahl gleich gesetzt werden kann, um h und l auf den möglichst einfachen Ausdruck

*) Diese abgekürzten Zeichen sollen deshalb bei den Beispielen (§. 73) stets neben den anderen aufgeführt werden.

ganzer Zahlen zu bringen. Setzt man $k = n + 1$, so erhält man als Symbol der dihexagonalen Pyramide

$$\left\{2n \,.\, -(n-1) \,.\, -(n+1) \,.\, \frac{2}{m}\right\}$$

Hieraus kann man leicht für das Rhomboëder der kürzeren und das der längeren Polkanten, deren Symbole S. 343 *f.* angegeben sind, die abgekürzten Zeichen, bezogen auf das Zeichen mRn ihres Skalenoëders, angeben und findet:

für das Rhomboëder der kürzeren Polkanten $\frac{m}{2}(3n-1)R$,

für das Rhomboëder der längeren Polkanten $-\frac{m}{2}(3n+1)R$,

während dasjenige der Mittelkanten natürlich $= mR$ ist. Für die Abstumpfung der längeren und der kürzeren Polkanten erhält man, entsprechend den S. 344 gegebenen Symbolen, die Zeichen:

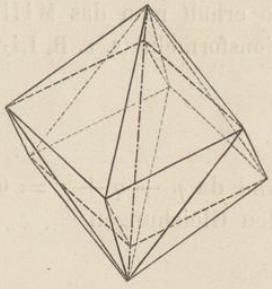
Abstumpfung der längeren Polkanten $\frac{m}{4}(3n+1)R$

- - kürzeren - $-\frac{m}{4}(3n-1)R$.

Bezeichnet man z. B. das in Fig. 299 dargestellte Rhomboëder als primäres positives mit R, das Skalenoëder derselben Figur also mit $R3$, so resultirt als Rhomboëder der kürzeren Polkanten $4R$, als Rhomboëder der längeren Polkanten $-5R$, als Abstumpfung der letzteren $\frac{5}{2}R$, der kürzeren Polkanten $-2R$.

Vervollständigt man die Reihe der von einem Rhomboëder mR abgeleiteten Skalenoëder bis zu ihren beiden Grenzgliedern, so ist offenbar das eine, dessen $n = 1$, das Rhomboëder der Mittelkanten selbst. Die auf dieses zunächst folgenden Glieder der Reihe haben, so lange n wenig grösser als 1, sehr stumpfe längere Polkanten, wie aus Fig. 315 ersichtlich, welche ein Rhomboëder mR mit dem Skalenoëder $mR\frac{4}{3}$ darstellt. Je grösser n, desto spitzer werden, bei unverändertem Verlauf der Mittelkanten, die Skalenoëder, und für $n = \infty$ resultirt das zweite Grenzglied der Reihe, das Prisma zweiter Ordnung, welches zugleich allen Ableitungsreihen der Skalenoëder gemeinschaftlich ist.

Fig. 315.



Die Pyramiden zweiter Ordnung lassen sich bei dieser Ableitungsmethode nicht, wie bei der ursprünglichen, in der sie Grenzformen von dihexagonalen Pyramiden bilden, als solchen Ableitungsreihen angehörig betrachten, daher die Bezeichnung derselben und des zugehörigen Prisma $mP2$ und $\infty P2$ bleibt.

Eine andere Bezeichnung der rhomboëdrischen Formen, welche ebenfalls die Zonenverhältnisse der Skalenoëder zu den Rhomboëdern zu einfachem Ausdruck zu bringen geeignet ist, hat Miller eingeführt, indem er als Axenebenen die drei Flächen des positiven primären Rhomboëders nahm, als Axen demnach dessen drei Polkanten. Da diese gleichwerthig sind, so werden die Elemente des Krystalls bei dieser Auffassung:

$\alpha = \beta = \gamma$ (d. i. der ebene Winkel zwischen zwei Polkanten von R)
$a = b = c = 1$.

Die Grundform $\{111\}$, welche alle drei Axen in gleichem Abstande schneidet, ist offenbar die Basis oR; zu dieser Form gehört aber nur noch die parallele Gegenfläche $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$; die sechs anderen Flächen mit den Indices 1, nämlich $(11\bar{1})$ $(\bar{1}\bar{1}1)$ u. s. w., entsprechen dem Rhomboëder $-2R$, so dass also bei dieser Bezeichnungsweise nicht alle Flächen mit gleichen Indices einer und derselben einfachen Form angehören. Ebenso wenig erhalten die beiden Rhomboëder und Skalenoëder, welche sich aus derselben hexagonalen, resp. dihexagonalen Pyramide ableiten und allerdings auch zwei von einander unabhängige Formen darstellen, gleiche Indices, wie folgende Beispiele zeigen: das positive Rhomboëder R ist $\{010\}$, weil seine Flächen zu Axenebenen genommen sind, $-R$ dagegen wird $\{22\bar{1}\}$; $-\frac{1}{2}R$, welches die Polkanten von R abstumpft, erhält, wie leicht einzusehen, das Zeichen $\{110\}$, dagegen ist $\frac{1}{2}R = \{131\}$; $R3$ wird $\{\bar{1}20\}$, $-R3 = \{25\bar{4}\}$ u. s. f. Da ein Rhomboëder stets zwei gleiche Indices hat, so giebt die Vertauschung der drei Werthe, welche sich auf gleichwerthige Axen beziehen, nur drei Flächen, zu denen durch Multiplication aller Indices mit -1 noch die drei parallelen hinzukommen, während bei dem Zeichen der Skalenoëder durch alle möglichen Vertauschungen sechs Flächen nebst ihren parallelen Gegenflächen resultiren.

Sei in unserer Bezeichnung das Symbol einer beliebigen Fläche $= (pqrl)$, so erhält man das Miller'sche Symbol (uvw) aus folgenden Transformationsformeln (s. z. B. Liebisch, Geometrische Krystallographie S. 439):

$$u = q - p + l$$
$$v = p - r + l$$
$$w = r - q + l$$

und da $p + q + r = 0$, umgekehrt aus Miller's Symbol das unsrige nach den Gleichungen

$$3p = v - u$$
$$3q = u - w$$
$$3r = w - v$$
$$3l = u + v + w.$$

Diese Bezeichnung hat allerdings vor der von Bravais vorgeschlagenen und bisher verwendeten den Vortheil, dass sie dreizählige Symbole besitzt, welche unmittelbar zur Berechnung der Zonen benutzt werden können; dafür entbehren dieselben jedoch der Beziehung auf die holoëdrischen Formen und der Rücksicht auf die wichtigste Richtung in den hexagonalen Krystallen, der Hauptaxe, so dass bei dieser Auffassung die durch die Uebereinstimmung in physikalischer Beziehung bedingte Analogie des hexagonalen Systems mit dem tetragonalen vollständig verloren geht. Diesem Umstande ist es zuzuschreiben, dass die Bravais'schen Symbole trotz der kleinen Unbequemlichkeiten, welche durch den vierten Index

bei der Zonenrechnung entstehen, in neuerer Zeit eine fast ganz allgemeine Anwendung gefunden haben.

§. 72. **Projection und Berechnung der rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen.** Während im regulären System die Projection und Berechnung der hemiëdrischen Formen sich so einfach aus denen der holoëdrischen ergiebt, dass eine besondere Betrachtung derselben umgangen werden konnte, ist dies nicht thunlich in der rhomboëdrischen Abtheilung des hexagonalen Systems, welcher so zahlreiche Substanzen mit zum Theil so flächenreichen Krystallen angehören, dass hier auch weniger einfache Fälle der Berechnung nicht selten vorkommen.

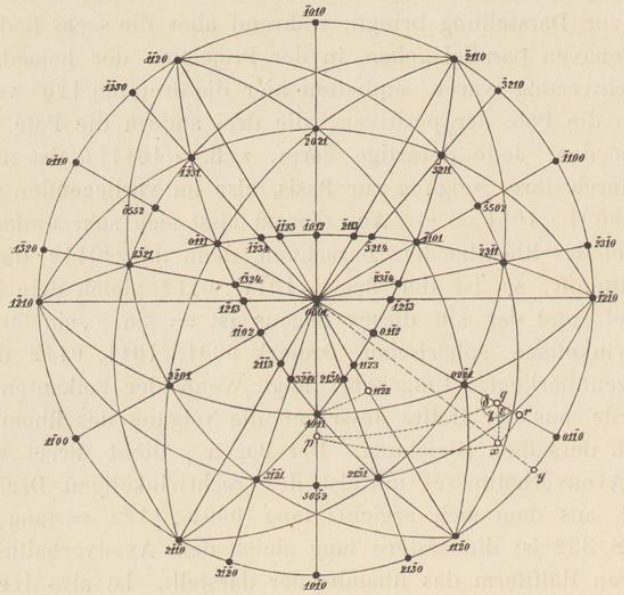
Wie die holoëdrischen, so werden auch die rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen auf die Basis (0001) projicirt, deren Pol also in der Mitte des Grundkreises erscheint (s. Fig. 316, welche die wichtigsten Formen des Kalkspaths zur Darstellung bringt); während aber die sechs Radien, welche den Zwischenaxen parallel gehen, in der Projection der holoëdrischen Gestalten gleichwerthig waren, enthalten hier die drei um 120° von einander abstehenden die Pole der positiven, die drei andern die Pole der negativen Rhomboëder. Jede derartige Form, z. B. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, ist nun offenbar bestimmt durch ihre Neigung zur Basis, also im vorliegenden Falle durch den Bogen $0001 : 10\bar{1}1 = \gamma$. Aus diesem lässt sich sehr einfach der Polkantenwinkel des Rhomboëders berechnen, denn da $\varkappa\{01\bar{1}2\}$ die Polkanten gerade abstumpft, so ist der Bogen $10\bar{1}1 : 01\bar{1}2$ gleich dem halben Polkantenwinkel, und der sin dieses Bogens ist $= \sin\gamma . \sin 60^0$, da er in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck 0001, $10\bar{1}1$, $01\bar{1}2$ dem Winkel von 60° gegenüberliegt. Umgekehrt folgt, wenn der Polkantenwinkel gemessen wurde, aus der Hälfte desselben die Neigung des Rhomboëders zur Basis γ nach derselben Gleichung. Der Bogen γ dient direct zur Berechnung des Axenverhältnisses mittelst des rechtwinkeligen Dreiecks 0001, $10\bar{1}1$, $11\bar{2}2$, aus dem sich ergiebt: $\text{tang}\,(0001 : 11\bar{2}2) = \text{tang}\,\gamma . \cos 30^0$; denn nach S. 332 ist die erstere tang gleich dem Axenverhältniss der Pyramide, deren Hälftform das Rhomboëder darstellt. Ist also die Neigung eines Rhomboëders zur Basis $= \gamma$ bekannt, so folgt daraus die Länge seiner Hauptaxe nach der Formel:

$$c\ (\text{resp. } mc) = \text{tang}\,\gamma . \cos 30^0.$$

Bei der Berechnung der Skalenoëder können verschiedene Fälle vorkommen. Der einfachste ist der, dass ein solches in Combination mit seinem Rhomboëder der Mittelkanten auftritt; ist dieses bestimmt und damit eine Zone für das Skalenoëder gegeben, so genügt zu seiner Berechnung die Messung eines Winkels in dieser Zone. So liegt z. B. das Skalenoëder $\varkappa\{21\bar{3}1\} = R3$ in der Zone $[10\bar{1}1 : 11\bar{2}0] = R : \infty P2$; es sei sein Zeichen noch unbekannt, aber der Bogen $10\bar{1}1 : 21\bar{3}1$ gemessen. Alsdann hat man zunächst in dem rechtwinkeligen Dreieck $10\bar{1}1$, $10\bar{1}0$, $11\bar{2}0$ den Winkel an $10\bar{1}1$ zu berechnen; dieser gehört zugleich einem rechtwinkeligen Dreieck an, welches man erhält, wenn man den Zonenkreis der stumpfen Polkante

des Skalenoëders construirt; da wo dieser den Durchmesser $0001 : 10\bar{1}0$ schneidet, liegt der Pol desjenigen Rhomboëders, welches jene Polkante gerade abstumpft. Von dem betreffenden Dreiecke (bei dem in der Figur gewählten Beispiele hat es die Eckpunkte $10\bar{1}1$, $50\bar{5}2$, $21\bar{3}1$) sind also ausser dem rechten Winkel noch zwei Stücke bekannt; man kann daher die Seite $10\bar{1}1 : 50\bar{5}2$, d. h. das Zeichen des abstumpfenden Rhomboëders, und den Bogen $50\bar{5}2 : 21\bar{3}1$, d. i. den halben stumpfen Polkantenwinkel des Skalenoëders, berechnen. Diese beiden Werthe liefern aber mittelst des Dreiecks 0001, $50\bar{5}2$, $21\bar{3}1$ den Winkel zwischen den Durchmessern $0001 : 21\bar{3}0$ und $0001 : 10\bar{1}0$, d. h. das Zeichen des dihexagonalen Prisma $\{21\bar{3}0\}$. Damit ist das Verhältniss zweier Indices bestimmt, durch das die

Fig. 316.



Polkante abstumpfende Rhomboëder ein weiteres und somit das Zeichen des Skalenoëders.

In derselben Zone $[10\bar{1}1 : 11\bar{2}0]$, aber über $10\bar{1}1$, liegen die Pole derjenigen Skalenoëder, welche statt der Mittelkanten die Polkanten des Rhomboëders zuschärfen; während die ersteren sämmtlich positiv, d. h. von demselben Vorzeichen wie das Rhomboëder sind, können die über $10\bar{1}1$ liegenden ebenfalls positiv sein, wie $\varkappa\{21\bar{3}4\} = \frac{1}{4}R3$, z. Th. sind sie aber negativ, wenn nämlich ihre Pole näher an $\varkappa\{01\bar{1}2\}$ liegen. An der Grenze der beiden Sextanten, welche die Pole der Formen mit entgegengesetztem Vorzeichen enthalten, nämlich auf den den Nebenaxen parallelen Durchmessern, liegen die Pole der Pyramiden 2. Ordnung, und da diese Durchmesser von der Zone jener, theils positiver, theils negativer Skalenoëder

geschnitten werden, so gehört den letzteren auch der Pol einer Pyramide 2. Ordnung an, der Polkantenzone von $\varkappa\{10\bar{1}1\}$ z. B. die Form $\{11\bar{2}3\}$, deren Indices sich aus den beiden angeführten Zonen für jeden beliebigen Fall leicht ergeben. Die Berechnung eines oberen Skalenoëders der Polkantenzone eines Rhomboëders aus dem gemessenen Winkel desselben zu letzterem ist so übereinstimmend mit der Berechnung eines unteren, dass ihre Ausführung überflüssig erscheint.

Tritt ein Skalenoëder allein auf, so hat man dasselbe aus zweien seiner Kantenwinkel zu berechnen. Seien z. B. die beiden Polkanten gemessen worden, so sind deren Hälften die Winkel zwischen einer Skalenoëderfläche und den beiden Rhomboëderflächen, welche die längere resp. kürzere Polkante gerade abstumpfen, z. B. die Bögen $a = 21\bar{3}1 : 50\bar{5}2$ resp. $a' = 21\bar{3}1 : 02\bar{2}1$. Aus den beiden Dreiecken, welche diese Bögen mit 0001 bilden, kann man in derselben Weise, wie S. 335, die beiden Winkel an letzterem Pol, deren Summe $= 60^0$, berechnen nach der Gleichung:

$$\text{cotang } (10\bar{1}0 : 21\bar{3}0) = \frac{\sin a'}{\sin a \,.\, \sin 60^0} + \frac{1}{2 \sin 60^0},$$

ebenso die Abstände der beiden Pole $50\bar{5}2$ und $02\bar{2}1$ von 0001, und hat damit alle Daten für die Indices des Skalenoëders. Ist der Winkel einer Polkante und derjenige der Mittelkante gemessen, so hat man zu erwägen, dass die Hälfte des letzteren gleich dem Winkel des Skalenoëders zu dem Prisma 2. Ordnung ist, da dieses die Mittelkanten aller Skalenoëder abstumpft. Will man also z. B. das Zeichen des Skalenoëders $\varkappa\{21\bar{3}1\}$ aus dem Bogen $21\bar{3}1 : 11\bar{2}0 = \beta$ und dem halben Polkantenwinkel $21\bar{3}1 : 50\bar{5}2 = \alpha$ berechnen, so sind in dem sphärischen Dreiecke $21\bar{3}1$, $\bar{1}2\bar{1}0$, $11\bar{2}0$ die drei Seiten $= 90^0 - \alpha$, 60^0 und β, gegeben; der hieraus folgende Winkel an $\bar{1}2\bar{1}0$ ist nun offenbar gleich dem Bogen $50\bar{5}2 : 10\bar{1}0$, aus welchem man mit Hinzunahme von α das Zeichen des Skalenoëders berechnen kann, wie vorher.

Dass man bei der umgekehrten Berechnung eines Skalenoëders aus seinen Parameterverhältnissen von den beiden abstumpfenden Rhomboëdern (s. S. 344) ausgeht, und wie man aus deren Neigungen zu 0001 die halben Polkantenwinkel des Skalenoëders findet, versteht sich nach Obigem von selbst. Der halbe Winkel der Mittelkante, d. i. bei dem in Fig. 316 gewählten Beispiele der Bogen $21\bar{3}1 : 11\bar{2}0$, wird alsdann am einfachsten aus dem rechtwinkeligen Dreieck $21\bar{3}1$, $11\bar{2}0$, $21\bar{3}0$ berechnet, in welchem $11\bar{2}0 : 21\bar{3}0$ und der Winkel an $11\bar{2}0$ durch die Indices des Skalenoëders bestimmt sind, da letzterer Winkel zugleich dem rechtwinkeligen Dreieck $11\bar{2}0$, $10\bar{1}0$, $10\bar{1}1$ angehört, in welchem der zuletzt angeführte Pol ebenfalls aus dem Zeichen des Skalenoëders folgt.

Die Lage einer beliebigen Krystallfläche ist bekanntlich bestimmt, wenn ihre Neigung gegen zwei bekannte Flächen gemessen wurde, und da es bei flächenreichen Krystallen, wenn auch seltener, vorkommt, dass für eine Skalenoëderfläche keine Zonen beobachtet sind, so soll schliesslich noch die

Berechnung einer solchen betrachtet werden. Sei z. B. der Winkel der unbekannten Fläche x (Fig. 316) zu p und q gemessen worden, so bilden die beiden Bögen xp und xq mit pq ein sphärisches Dreieck (in der Figur punktirt bezeichnet), in welchem alle drei Seiten bekannt sind, da pq aus dem Zeichen der Rhomboëder, d. h. aus den Bögen $0001 : p$ und $0001 : q$ und dem dazwischen liegenden Winkel von 60^0 berechnet werden kann; aus dem hierbei benutzten Dreieck 0001, p, q leite man zugleich den Winkel δ her. In dem Dreieck pqx wird nunmehr der Winkel χ berechnet und daraus $\varepsilon = 180^0 - \delta - \chi$. Hierauf legt man durch x einen Zonenkreis senkrecht zum Durchmesser $0001 : 01\bar{1}0$ und erhält dadurch ein rechtwinkeliges Dreieck xqr, in welchem qx und der Winkel ε bekannt sind; der hieraus berechnete Werth qr bestimmt die Lage des Rhomboëders r, welches die Polkante des Skalenoëders x abstumpft, während man aus dem ebenfalls zu berechnenden Bogen xr mittelst des Dreiecks x, r, 0001 leicht den Ort des Poles y erhält. Durch r und y ist aber das Zeichen des Skalenoëders x bestimmt und die Aufgabe gelöst. Noch einfacher gestaltet sich die Lösung, wenn die beiden Rhomboëder von dem gleichen Vorzeichen sind, da alsdann der Winkel zwischen denselben direct aus dem Zeichen folgt, während der übrige Theil der Rechnung dem obigen ganz analog ist.

§. 73. Beispiele rhomboëdrisch-hemiëdrischer Substanzen.

Tellur = *Te*. $a : c = 1 : 1{,}3298$ G. Rose. Rhomboëder von $93^0\,3'$ Polkante; nat. Krystalle: $\{10\bar{1}0\}\infty R$ (darnach spaltbar); $\varkappa\{10\bar{1}1\}R, \varkappa\{01\bar{1}1\} - R$.

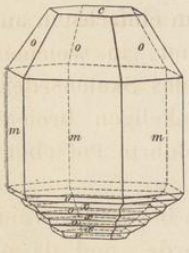
Arsen = *As*. $a : c = 1 : 1{,}4025$ G. Rose. Rhomboëder von $94^0\,54'$ Polkante; spaltbar nach $\{0001\}\,oR$.

Antimon = *Sb*. $a : c = 1 : 1{,}3236$ Laspeyres. Rhomboëder von $92^0\,53'$ Polkante; spaltbar nach $\{0001\}\,oR$ und $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$.

Wismuth = *Bi*. $a : c = 1 : 1{,}3035$ G. Rose. Rhomboëder von $92^0\,20'$ Polkante; spaltbar nach $\{0001\}\,oR$ und $\varkappa\{02\bar{2}1\} - 2R$.

Schwefelzink (nat. Wurtzit) = *ZnS*. $a : c = 1 : 0{,}9353$ Friedel. An künstlichen, wie natürlichen Krystallen wurden bisher nur die Flächen der Basis, des 1. und 2. Prisma und einer Pyramide in holoëdrischer Ausbildung beobachtet. Wegen der Isomorphie mit dem rhomboëdrisch spaltbaren *NiS* ist jedoch rhomboëdrische Hemiëdrie anzunehmen (vergl. S. 336), daher man sich die primäre Pyramide um 30^0 gedreht und als Pyramide 2. Ordnung zu denken hat; unter dieser Annahme ist das obige Axenverhältniss berechnet. Förstner (Zeitschr. f. Kryst. 5, 363) fand beiderseits ausgebildete Krystalle eines Hüttenproductes von *ZnS* deutlich hemimorph (s. Fig. 317).

Fig. 317.



Schwefelcadmium (nat. Greenockit) = *CdS*. $a : c = 1 : 0{,}9387$ von Kokscharow. Künstliche mikroskopische Krystalle zeigen Rhomboëder und Skalenoëder, die natürlichen dagegen die

ausgezeichnet hemimorphe Combination, (Fig. 318) : $p = \{11\bar{2}0\}\infty P2$, oben: $c = \{0001\}\ oR$, $o' = \{11\bar{2}4\}\ \frac{1}{2}P2$, $o = \{11\bar{2}2\}\ P2$, $o'' = \{11\bar{2}1\}\ 2P2$, unten: $c = \{000\bar{1}\}\ oR$ gross, $o' = \{11\bar{2}\bar{4}\}$. Wegen der holoëdrischen Ausbildung sind die beobachteten Pyramiden als solche 2. Ordnung genommen worden, wie bei dem damit isomorphen $Zn\,S$, daher man sich die Figur um 30° gedreht zu denken hat.

Fig. 318.

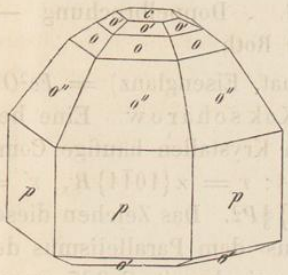


Fig. 319.

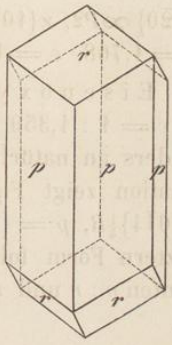
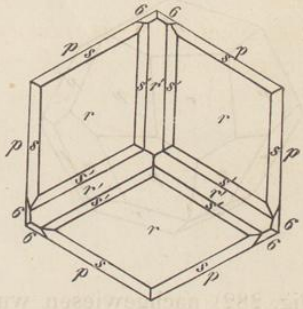


Fig. 320.



Antimonsilberblende (dunkles Rothgiltigerz) $= Ag^6Sb^2S^6$. $a : c = 1 : 0{,}7880$ Miller. Fig. 319 stellt die einfache Combination $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$ mit dem Polkantenwinkel 71° 18′, $p = \{11\bar{2}0\}\ \infty P2$ dar, Fig. 320 eine flächenreichere (in der Richtung der Hauptaxe von oben gesehen), wie solche sehr häufig von diesem Mineral vorkommen; es ist $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}\ R$, $p = \{11\bar{2}0\}\ \infty P2$, ein Skalenoëder s zwischen r und p, welches folglich dieselben Mittelkanten wie r hat; durch Messung des Winkels $p : s = 24° 55\frac{1}{2}'$, aus welchem der Mittelkantenwinkel folgt, ergiebt sich das Zeichen $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}1\}$ $R3$; ferner $r' = \varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$; zwischen diesem und r ein Skalenoëder s', dessen kürzere Polkanten zugleich diejenigen von r sind, so dass die Messung eines Winkels $s' : r = 21° 47'$ genügt, das Zeichen $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}4\}\ \frac{1}{4}R3$ desselben zu berechnen; endlich erscheint noch ein negatives Skalenoëder σ mit den Polkanten 14° 3′ resp. 103° 43′ und dem Zeichen $\varkappa\{7\bar{1}\bar{6}1\} - 5R\frac{7}{5}$. Wenn $\{10\bar{1}0\}$ am Rothgiltigerz auftritt, erscheint es gewöhnlich als trigonales Prisma, wodurch bewiesen wird, dass diese Substanz hemimorph ist; in der That finden sich, wenn auch selten, Krystalle mit Ausbildung beider Enden und verschiedenen Formen an denselben. Doppelbrechung negativ. Brechungsexponenten: $\omega = 3{,}084$, $\varepsilon = 2{,}881$ Roth (Lithium). Spaltbarkeit nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$.

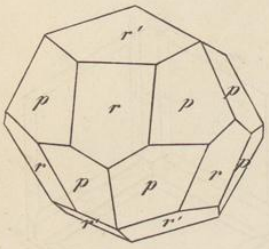
Arsensilberblende (lichtes Rothgiltigerz) $= Ag^6As^2S^6$. $a : c = 1 : 0{,}7851$ Miller. Genau dieselben Combinationen wie das vorige: der Winkel der Polkante von $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ ist 72° 10′. Doppelbrechung —.

Wasser $= H^2O$. $a : c = 1 : 1{,}400$? Gewöhnlich hexagonale Tafeln, doch kommen auch rhomboëdrische Combinationen (z. B. in manchen Hagelfällen) vor. Doppelbrechung +, schwach. See-Eis ist gewöhnlich aus paral-

lelen Krystallpartikeln zusammengesetzt, deren Hauptaxe senkrecht zur gefrorenen Wasserfläche steht, daher eine natürliche Eisplatte direct das einaxige Interferenzbild im convergenten polarisirten Lichte zeigt.

Magnesiumhydroxyd (nat. Brucit) $= MgH^2O^2$. $a : c = 1 : 0{,}5208$ Hessenberg. Tafelförmige Combinationen von $\{0001\}oR$ und $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbarkeit nach $\{0001\}$. Doppelbrechung +.

Fig. 321.



Thonerde (nat. Korund) $= Al^2O^3$. $a : c = 1 : 1{,}363$ v. Kokscharow. Vorherrschend $\{11\bar{2}0\}\infty P2$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Doppelbrechung —. $\omega = 1{,}768$, $\varepsilon = 1{,}760$ Roth.

Eisenoxyd (nat. Eisenglanz) $= Fe^2O^3$. $a : c = 1 : 1{,}359$ v. Kokscharow. Eine besonders an natürlichen Krystallen häufige Combination zeigt Fig. 321: $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $r' = \varkappa\{10\bar{1}4\}\frac{1}{4}R$, $p = \{22\bar{4}3\}\frac{4}{3}P2$. Das Zeichen dieser letztern Form folgt aus dem Parallelismus der Kanten $p : r$ und $r : p$, wie bereits S. 327 (vergl. Fig. 282) nachgewiesen wurde.

Chromoxyd $= Cr^2O^3$. $a : c = 1 : 1{,}368$ G. Rose. Man erhält tafelförmige Combinationen $\{0001\}oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ oder dem vorigen sehr ähnliche mit $\{22\bar{4}3\}\frac{4}{3}P2$ und $\{11\bar{2}0\}\infty P2$.

Magnesiumsiliciumfluorid $= MgSiF^6 + 6H^2O$. $a : c = 1 : 0{,}5174$ Topsøe. Combin. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\{11\bar{2}0\}\infty P2$, ersteres vorherrschend (ähnlich Fig. 312) oder beide Formen gleich gross, so dass die Krystalle einem Dodekaëder ähneln. Durchwachsungszwillinge nach $\{0001\}$. — Mit diesem Salze ist eine grosse Reihe anderer isomorph, in denen *Mg* durch andere zweiwerthige Metalle, *Si* durch *Ti*, *Zr*, *Sn* etc., endlich *F* durch *Cl*, *Br*, *J* ersetzt ist.

Kaliumnitrat $= KNO^3$. Beim Verdampfen eines Tropfens der warmen Lösung bilden sich zuerst mikroskopische Rhomboëder von ca. 74° Polkantenwinkel.

Natriumnitrat $= NaNO^3$. $a : c = 1 : 0{,}8276$ Brooke. Natürlich und aus wässerigen Lösungen künstlich $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$; Polkante 73° 30′. Krystallform und physikalische Eigenschaften sehr ähnlich denen des Kalkspaths. Vollkommen spaltbar nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Doppelbrechung negativ. Brechungsexponenten für die Linien:

	ω	ε
B	1,579	1,335
D	1,587	1,336
E	1,594	1,337
H	1,626	1,344

(Schrauf, Wien. Ak. Sitz. Ber. 41, 786.) Diese ausserordentlich starke Doppelbrechung veranlasste W. Kohlrausch (Ann. d. Phys. n. F. 6, 86),

mittelst des Totalreflectometers in einer grösseren Zahl von Richtungen innerhalb einer Spaltungsfläche und einer der Axe parallelen Ebene die Lichtgeschwindigkeiten zu messen. Fig. 322 und 323 zeigen die den genannten beiden Ebenen parallelen Durchschnitte der Wellenfläche in den richtigen Verhältnissen (s. S. 60 Anmerk.); die markirten Punkte entsprechen den Radien, in denen die Messung ausgeführt wurde (bei dem Kreis in Fig. 323 genügten einige wenige, um die Gleichheit des Durchmessers nach allen Richtungen zu constatiren.

Fig. 322.

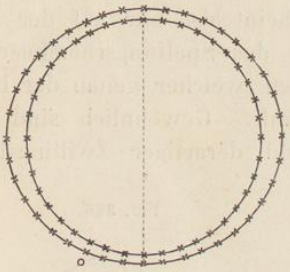
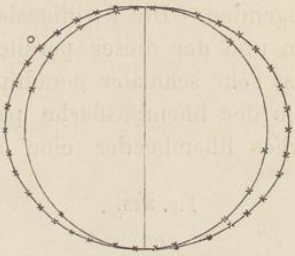


Fig. 323.



Kalkspath (Calcit) $= CaCO^3$. $a : c = 1 : 0{,}8543$ Kupffer. Die natürlichen Krystalle zeigen sehr viele Formen, am häufigsten: $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, $\varkappa\{02\bar{2}1\} - 2R$, $\varkappa\{40\bar{4}1\}4R$, $\{10\bar{1}0\}\infty R$, $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}1\}R3$, und höchst mannigfaltige Combinationen, wie die Figuren 297, 298, 301, 308, 311, 312, 313. Spaltbar sehr vollkommen nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ (Fig. 294 = Fig. 39). Die Gleitflächen sind nach Reusch (Poggendorff's Ann. d. Phys. 132, 44) die Flächen von $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$.

Der Kalkspath bietet die ausgezeichnetsten Beispiele für die Zwillingsbildung im hexagonalen System dar und zwar nach mehreren Gesetzen.

Zwillingsebene eine Rhomboëderfläche: Dieses Gesetz entspricht vollkommen demjenigen in der Holoëdrie, nach welchem die Zwillingsebene eine Pyramidenfläche ist. Am häufigsten ist dasjenige Gesetz, nach welchem die Zwillingsebene eine Fläche von $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, d. i. von demjenigen Rhomboëder, welches die Polkanten des Spaltungsrhomboëders gerade abstumpft. Fig. 324 stellt zwei Spaltungsrhomboëder, jedes nur zur Hälfte ausgebildet und mit der Zwillingsebene, der Abstumpfung der Polkante AB, an einander gewachsen, dar. In dieser Weise sind jedoch die Kalkspathzwillinge selten ausgebildet, sondern gewöhnlich so, dass an den Krystall *II*

Fig. 324.

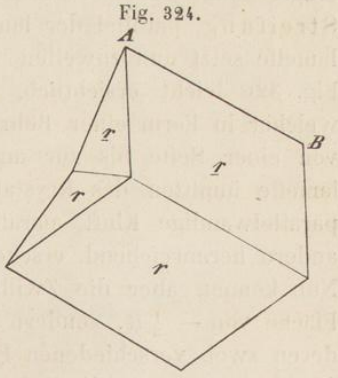


Fig. 325 (die Zwillingsebene von *I* und *II* ist hier nicht die Abstumpfung der seitlichen Polkante, wie in der vorigen Figur, sondern der nach vorn herablaufenden) ein dritter *III*, nach derselben Ebene symmetrisch, angewachsen ist. Da nun *III* und *I* parallel sind, so kann man sie als einen einzigen Krystall betrachten, welcher eine in Zwillingsstellung befindliche parallelwandige Lamelle, *II*, umschliesst; die Flächen 2 und 3 (und ihre parallelen), deren Kante die Zwillingsebene abstumpft, fallen für beide Krystalle zusammen, dagegen bildet die Kante zwischen III_1 und II_1 einen einspringenden (die parallelen hinteren Flächen einen ausspringenden) Winkel von 38° 14′, diejenige von II_1 und I_1 einen ebenso grossen ausspringenden. Die Zwillingslamelle erscheint also nur auf der unteren vorderen und der dieser parallelen Fläche des Spaltungsrhomboëders als ein meist sehr schmaler geradliniger Streifen, welcher genau der längeren Diagonale der Rhombusfläche parallel verläuft. Gewöhnlich sind nun in ein solches Rhomboëder eine grössere Zahl derartiger Zwillingslamellen

Fig. 325.

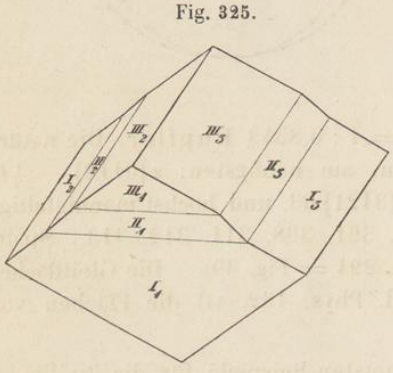
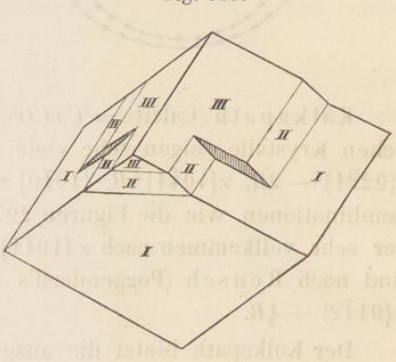


Fig. 326.



eingeschaltet, so dass dasselbe auf zwei gegenüber liegenden Flächen eine Streifung, parallel der längeren Diagonale, zeigt. Eine solche Zwillingslamelle setzt nun zuweilen in eine andere Ebene über, und es ist aus Fig. 326 leicht ersichtlich, dass alsdann ein Hohlraum entstehen muss, welcher in Form einer Röhre von rhombischem Querschnitt den Krystall von einer Seite bis zur andern durchzieht; hört eine solche Zwillingslamelle inmitten des Krystalls ganz auf, so muss statt der Röhre eine parallelwandige Kluft, parallel einer Spaltungsfläche, bis an die beiden andern heranreichend, erscheinen, und auch dies beobachtet man häufig. Nun können aber die Zwillingslamellen dieser Art nicht nur nach einer Fläche von $-\frac{1}{2}R$, sondern auch nach den beiden anderen auftreten; wo deren zwei, verschiedenen Ebenen angehörig, sich durchkreuzen, ist ebenfalls keine vollständige Ausfüllung des Raumes durch Krystallsubstanz möglich, und es entsteht somit ein röhrenförmiger Hohlraum auf der Durchkreuzungslinie der beiden Lamellen. Diese hohlen Kanäle im Innern der

Kalkspathkrystalle, welche durch die Doppelbrechung als zwei von dem Punkte aus, wo sie die Oberfläche berühren, divergirende Röhren erscheinen, sind schon vor langer Zeit beobachtet worden, aber erst durch eine Untersuchung von G. Rose (»über die im Kalkspath vorkommenden hohlen Kanäle«, Abhandlungen der Berl. Akad. d. Wiss. 1868) als sämmtlich von Zwillingslamellen herrührend erklärt worden. Schon vorher wurde von Reusch (Poggendorff's Ann. 132. 441) die interessante Entdeckung gemacht, dass man Zwillingslamellen nach $-\frac{1}{2}R$ künstlich herstellen könnte, wodurch dann auch die Möglichkeit zur Herstellung jener Kanäle gegeben ist. Schleift man nämlich an ein Spaltungsrhomboëder von Kalkspath, dessen Durchschnitt $abcd$ Fig. 327*a* darstellt (wobei ab und cd zwei Polkanten, bc und ad die Diagonalen zweier Flächen), zwei horizontale Flächen an, wie sie die punktirten Linien andeuten, und lässt mittelst einer Pressung in der Richtung der Pfeile einen Druck auf das Kalkspathstück wirken, so geht ein Abwärtsgleiten der rechten, eine Aufwärtsbewegung der linken Hälfte vor sich, und

Fig. 327*a*.

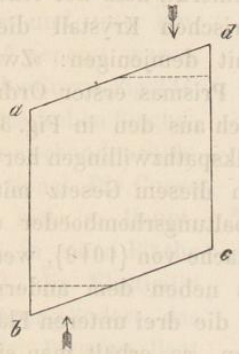
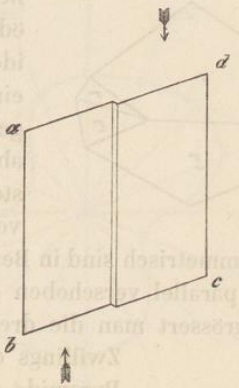


Fig. 327*b*.



zwar in der Weise, dass innerhalb eines Raumes, der von zwei Ebenen, parallel der Abstumpfung der Kanten ab und cd, begrenzt ist, eine Umlagerung der Theilchen bis zur Zwillingsstellung stattfindet, d. h. es entsteht eine Zwillingslamelle nach $-\frac{1}{2}R$, s. Fig. 327*b*. Da eine solche im Innern ohne Zertrümmerungen, vielmehr vollkommen homogen und oben und unten von einer (neu entstandenen) spiegelnden, in der Zwillingsstellung befindlichen Fläche begrenzt ist, so unterscheidet sie sich in Nichts von einer natürlichen, und es ist daher sehr wahrscheinlich, dass auch die natürlichen Zwillingslamellen dieses Gesetzes durch Druck ihre Entstehung gefunden haben.

Vollständig symmetrische Zwillinge, der Fig. 324 entsprechend, erhält man künstlich nach einem Verfahren, welches Baumhauer lehrte (Zeitschr. f. Kryst. 3, 589). Legt man ein kleines prismatisches Spaltungsstück mit einer stumpfen Kante auf, setzt auf die nach oben gekehrte senkrecht dazu

die Schneide eines Messers auf und drückt diese allmählich in den Krystall ein, so verschiebt sich der Theil des Krystalls, welcher zwischen der nach oben gekehrten Polecke und dem Messer liegt, bis zur Zwillingsstellung nach der horizontalen Fläche von $-\frac{1}{2}R$. Drückt man das Messer bis zur Mitte des Krystalls ein, so entsteht ein Zwilling, wie er in Fig. 328 dargestellt ist; die Fläche *cef* des ursprünglichen Rhomboëders, dessen Polecke *f* war, hat die Lage *ceg* angenommen, an den beiden seitlichen Rhomben des umgelagerten Theiles sind die Diagonalen vertauscht; ein vorher auf einer solchen eingerissener Kreis ist in eine Ellipse verwandelt, eine vorher darauf dargestellte Aetzfigur nach der nunmehrigen längeren Diagonale verzerrt; stellt man aber nun auf der Fläche neue Aetzfiguren dar, so haben diese eine neue Stellung, entsprechend dem Umstande, dass jetzt die Hauptaxe nach links geneigt ist.

Fig. 328.

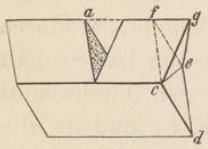
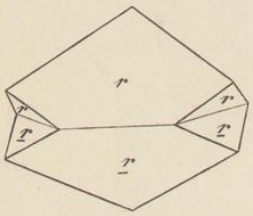
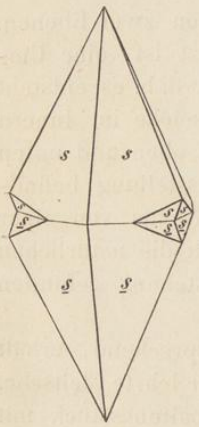


Fig. 329.



Zwillingsebene die Basis: Es wurde bereits S. 348 bemerkt, dass bei einem rhomboëdrisch-hemiëdrischen Krystall dieses Gesetz identisch sei mit demjenigen: »Zwillingsebene eine Fläche des Prismas erster Ordnung«. Dies geht sehr deutlich aus den in Fig. 329 und 330 abgebildeten Kalkspathzwillingen hervor. Fig. 329 stellt zwei nach diesem Gesetz mit der Basis verwachsene Spaltungsrhomboëder dar, welche ebenso symmetrisch sind in Bezug auf eine Fläche von $\{10\bar{1}0\}$, wenn man sich das eine parallel verschoben denkt, bis es neben dem andern befindlich ist. Vergrössert man die drei oberen und die drei unteren Flächen dieses Zwillings durch Abspalten, so erhält man eine trigonale Pyramide ohne einspringende Winkel, welche dadurch als Zwilling kenntlich ist, dass die Spaltbarkeit der oberen Hälfte nicht in die untere sich fortsetzt, und umgekehrt. Fig. 330 ist ein Zwilling desselben Gesetzes, gebildet von zwei mit der Basis verwachsenen Skalenoëdern $\varkappa\{3\bar{1}\bar{2}1\}R3$.

Fig. 330.



Doppelbrechung —, sehr stark. Brechungsexponenten nach Rudberg:

	ω	ε
Linie *B*	1,6531	1,4839
- *C*	1,6545	1,4845
- *D*	1,6585	1,4863
- *E*	1,6636	1,4887
- *F*	1,6680	1,4907
- *G*	1,6762	1,4945
- *H*	1,6833	1,4978.

Die neuesten Messungen von Sarasin ergaben:

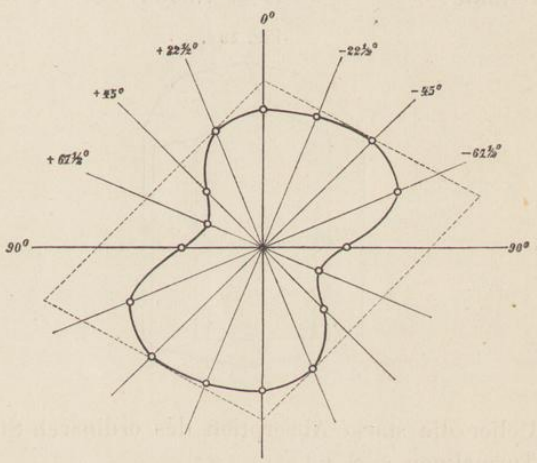
		ω	ε
Linie	A	1,6499	1,4826
-	B	1,6528	1,4839
-	D	1,6583	1,4864
-	F	1,6678	1,4907
-	H	1,6832	1,4977

und für die äusserste Cadmiumlinie im Ultraviolett (Wellenlänge = 0,000214 mm):

1,8459 1,5600.

Ueber die verschiedenen physikalischen Eigenschaften des Kalkspaths, namentlich seine thermische Ausdehnung, ist bereits in der I. Abtheilung ausführlich gehandelt worden. Ueber die Elasticität desselben nach verschiedenen Richtungen liegen genaue Messungen von Baumgarten (Poggendorff's Annalen d. Phys. 152, 369) vor. Derselbe bestimmte die Biegungen von Stäbchen, deren Längsrichtungen parallel dem Hauptschnitt des Kalkspathrhomboëders und unter einander $22^1/_2{}^0$ geneigt waren. Die Radien der Curve, Fig. 331, sind den elastischen Biegungen der entsprechenden Stäbchen proportional. Die Curve zeigt, wie sich im Hauptschnitt, d. i. in einer Fläche von $\{11\bar{2}0\}$, die Elasticität mit der Richtung ändert; das Minimum der Biegung liegt parallel der Rhomboëderkante, das Maximum parallel der kurzen Diagonale der Rhomboëderfläche, und die Curve ist nicht symmetrisch nach der Basis und der zum Hauptschnitt senkrechten Prismenfläche 1. Ordnung, entsprechend der fehlenden geometrischen Symmetrie nach diesen Ebenen.

Fig. 331.



Magnesit = $MgCO^3$. $a : c = 1 : 0{,}8095$ Rumpf. Nur $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, nach welchem auch die Krystalle vollkommen spalten. Doppelbrechung —, stark.

Eisenspath = $FeCO^3$. $a : c = 1 : 0{,}8171$ Breithaupt. Aehnliche Combinationen, wie Kalkspath, häufig nur $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$; darnach vollkommen spaltbar. Doppelbrechung —, stark.

Manganspath = $MnCO^3$. $a : c = 1 : 0{,}8183$ Sansoni. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbar nach derselben Form.

Zinkspath = $ZnCO^3$. $a : c = 1 : 0{,}8062$ Breithaupt. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbarkeit wie vor.

Turmalin = $(\dot{R}^2, \ddot{R})Al^2BHSi^2O^{10}$ ($\dot{R} = Li, Na, K$, $\ddot{R} = Mg, Fe$). $a . c$

$= 1 : 0{,}4474$ Kupffer. Unter den Mineralien das wichtigste Beispiel der Hemimorphie und der polaren Pyroëlektricität nach der Hauptaxe. Fig. 332 stellt eine Combination der häufigeren Formen dar: $p = \{10\bar{1}0\}\,\infty R$ als trigonales Prisma, $m = \{11\bar{2}0\}\,\infty P2$ vollflächig, wie es nach S. 347 der Fall sein muss, $p' = \{5\bar{1}\bar{4}0\}\,\infty P\frac{5}{4}$ dagegen als ditrigonales Prisma; der obere (antiloge) Pol zeigt $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $2r = \varkappa\{02\bar{2}1\} - 2R$, der untere (analoge) $r = \varkappa\{01\bar{1}\bar{1}\}R$ und die Abstumpfung der Polkanten desselben $r' = \varkappa\{10\bar{1}\bar{2}\} - \frac{1}{2}R$. Der analoge Pol ist nach G. Rose stets derjenige, an welchem die Flächen von r auf die Flächen, nicht auf die Kanten des herrschenden trigonalen Prisma aufgesetzt erscheinen. Nach Kundt's Untersuchungen kommen aber auch Zwillinge nach $\{0001\}$ mit unregelmässiger Durchwachsung vor, äusserlich einfachen Krystallen gleichend, aber aus Partien mit entgegengesetzter Lage der Pole bestehend, daher man auf einem basischen Querschnitt an verschiedenen Stellen entgegengesetzte Elektricität erhält. — Die Brechungsexponenten des farblosen Turmalins sind für die D-Linie: $\omega = 1{,}6366$ $\varepsilon = 1{,}6193$.

Fig. 332.

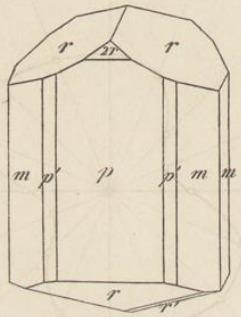
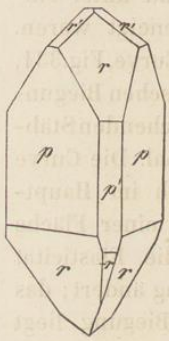


Fig. 333.



Ueber die starke Absorption des ordinären Strahls in den dunkel gefärbten Turmalinen s. S. 63.

Chlorit $= H^8\,(Mg, Fe)^5 Al^2\,Si^3\,O^{18}$. $a : c = 1 : 3{,}495$ Des Cloizeaux. Combination: $\{0001\}oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Spaltbarkeit oR sehr vollkommen. Doppelbrechung sehr schwach, theils — ($\omega = 1{,}577$, $\varepsilon = 1{,}576$ Roth), theils +. Sehr starker Pleochroïsmus; Strahlen $\perp$ zur Axe schwingend smaragdgrün, $\parallel$ zur Axe vibrirende hyazinthroth bis braun.

Aldehydammoniak $= C^2 H^7 NO$. $a : c = 1 : 1{,}3949$ Rammelsberg. Combination: $\varkappa\{10\bar{1}1\} + R$, $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, $\{0001\}oR$. Doppelbrechung —, nicht stark.

Hydrochinon $= C^6 H^6 O^2$. $a : c = 1 : 0{,}6591$ Groth. Combination: $\varkappa\{10\bar{1}1\} + R$, $\{11\bar{2}0\}\,\infty P2$. Doppelbrechung +, schwach.

Thymol $= C^{10} H^{14} O$. $a : c = 1 : 1{,}5685$ Groth. $\varkappa\{10\bar{1}1\} + R$, darnach vollkommen spaltbar, $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, $\{0001\}oR$. Doppelbrechung +.

Tolylphenylketon $= C^{14} H^{13} O$. $a : c = 1 : 1{,}2254$ Bodewig. Hemimorph und polar pyroëlektrisch. Combination Fig. 333: $p = \{10\bar{1}0\}\,\infty R$

als trigonales Prisma, die drei alternirenden Flächen p' stets untergeordnet; am oberen (analogen) Pol $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $r' = \varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$; am unteren (antilogen) Pol $r = \{01\bar{1}\bar{1}\}R$, $-r = \varkappa\{10\bar{1}\bar{1}\} - R$. Brechungsexponenten für die D-Linie: $\omega = 1{,}7170$, $\varepsilon = 1{,}5629$.

§. 74. **Die pyramidale Hemiëdrie.** Die zweite mögliche Art der Hemiëdrie im hexagonalen System entsteht nach S. 338 dadurch, dass die Formen durch die sechs in der Hauptaxe einander schneidenden Symmetrieebenen in zwölf gleiche Theile zerlegt werden, und die eine Hälfte derselben, z. B. die Flächen 2 oben und unten, 4 oben und unten u. s. f. der dihexagonalen Pyramide Fig. 290, zu einer hemiëdrischen Form vereinigt wird. Diese kann demnach weder nach dem Prisma 1. noch nach dem 2. Ordnung, sondern nur nach der Basis Symmetrie zeigen.

Fig. 334.

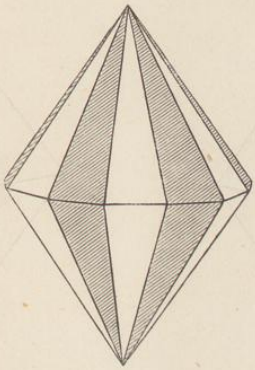
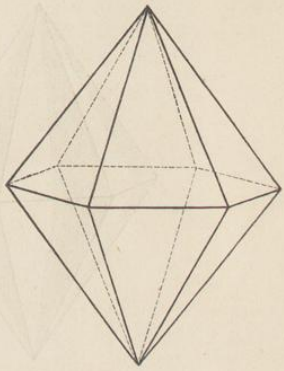
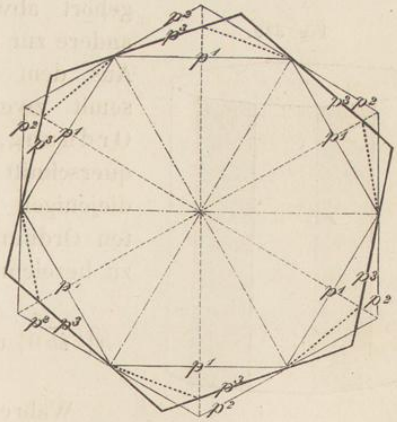


Fig. 335.



1) Indem, zufolge dem angegebenen Gesetze, von den 4 Flächen einer dihexagonalen Pyramide, welche zwischen den durch zwei Nebenaxen gehenden Symmetrieebenen liegen, zwei über einander liegende (Fig. 334) verschwinden, bleibt eine hemiëdrische Form Fig. 335 übrig, welche einer hexagonalen Pyramide entspricht, da ihre Kanten theils horizontale Basiskanten, identisch mit den abwechselnden Basiskanten der holoëdrischen Gestalt, theils Polkanten sind, welche sämmtlich gleiche Winkel haben. Die so entstehende hexagonale Pyramide hat den horizontalen Querschnitt p^3 . . . Fig. 336, während p^1 derjenige der Pyramide erster, p^2 der zweiter Ordnung ist, so dass aus der Gleichheit der Winkel zwischen p^3 und p^1 unmittelbar hervorgeht, dass auch p^3 ein gleichwinkeliges Hexagon, und folglich alle Polkanten dieser hemiëdrischen Form denselben Winkel haben müssen. Wegen ihrer Stellung zwischen der Pyramide erster und zweiter Ordnung heisst die aus der pyramidalen Hemiëdrie hervorgehende Hälftgestalt der dihexagonalen, die hexagonale

Fig. 336.



Pyramide dritter Ordnung oder der Zwischenrichtung. Die beiden, einander zur holoëdrischen Form ergänzenden Pyramiden dritter Ordnung werden bezeichnet: $\pi\{k i \bar{h} l\}$ und $\pi\{h \bar{i} \bar{k} l\} =$

$$+ \text{ und } - \left[\frac{m P n}{2}\right]$$

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 337, bleibt geometrisch unverändert. Für den Grenzfall $n = 1$ fällt die positive mit der negativen Pyramide dritter Ordnung und mit der holoëdrischen zusammen.

3) Wie Fig. 338 zeigt, ist das Gleiche der Fall mit der Pyramide zweiter Ordnung.

Fig. 337.

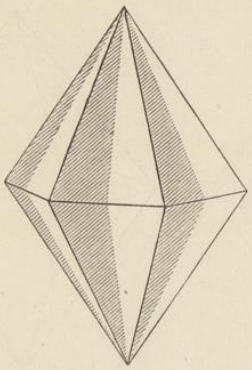
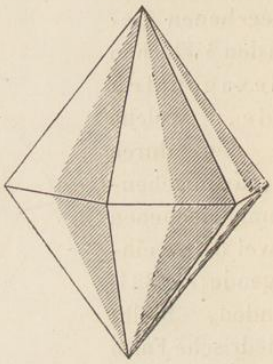
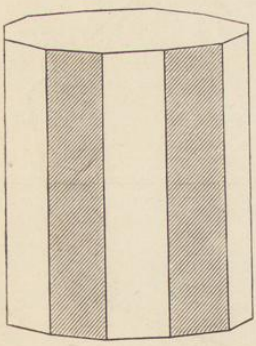


Fig. 338.



4) Wird dagegen, während n zwischen 1 und 2, $m = \infty$, so fallen die übereinander liegenden Flächen in eine Ebene, und von solchen gehört abwechselnd die eine zur positiven, die andere zur negativen hemiëdrischen Form, Fig. 339. Aus dem dihexagonalen Prisma entstehen somit zwei hexagonale Prismen dritter Ordnung, von denen das eine den Hauptquerschnitt p^3, Fig. 336, besitzt, wenn p^1 und p^2 diejenigen des Prismas der ersten und der zweiten Ordnung sind. Jene Formen sind demnach zu bezeichnen:

Fig. 339.



$$\pi\{k \bar{i} h 0\} \text{ und } \pi\{h \bar{i} \bar{k} 0\} = + \text{ und } - \left[\frac{\infty P n}{2}\right].$$

Während das dihexagonale Prisma die Kanten desjenigen erster Ordnung zuschärft, stumpft ein Prisma dritter Ordnung dieselben schief ab.

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 340, in gleicher Weise hemiëdrisch werdend, liefert zwei völlig congruente, scheinbar holoëdrische Formen.

6) Die hemiëdrischen Formen des Prismas zweiter Ordnung, Fig. 341, unterscheiden sich ebenso wenig von einander, wie von der holoëdrischen; endlich

Fig. 340.

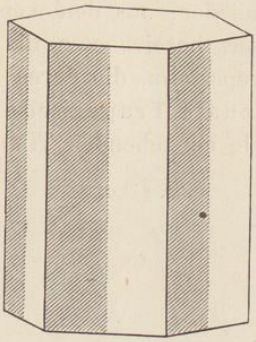
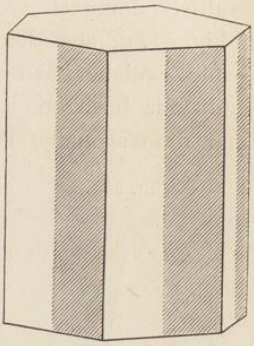


Fig. 341.

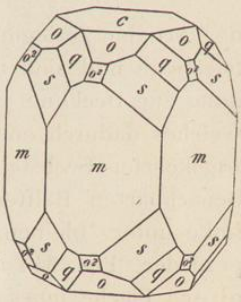


7) bleibt auch die Basis oP unverändert.

Die Krystallformen dieser Hemiëdrie gleichen demnach vollkommen den holoëdrischen, mit Ausnahme der dihexagonalen Pyramiden und Prismen welche nur mit der Hälfte ihrer Flächen, als Formen der Zwischenrichtung, auftreten.

Beispiele: Apatit $= Ca^5 Cl (PO^4)^3$. $a : c = 1 : 0{,}7346$ v. Kokscharow. Eine häufig vorkommende Combination zeigt Fig. 342, nämlich $c = \{0001\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $o^2 = \{20\bar{2}1\}$, $q = \{11\bar{2}1\}$, $s = \pi\{21\bar{3}1\}$. Die Zeichen dieser Flächen sind sämmtlich gegeben durch Zonen, wenn wir von o als $\{10\bar{1}1\}$ ausgehen, denn q liegt in zwei Zonen $o : m$ von links nach rechts und von rechts nach links, o^2 dadurch, dass q seine Polkanten abstumpft, endlich s durch die Zonen $oqsm$ und $o^2 s m$ (vergl. auch die Projection Fig. 288). Die Aetzfiguren auf $\{0001\}$ werden von einer Pyramide dritter Ordnung gebildet; diejenigen auf $\{10\bar{1}0\}$ sind Trapeze, welche nach oben und unten, nicht aber nach rechts und links symmetrisch sind, entsprechend der Symmetrie des Krystalls (Baumhauer, Sitzber. d. b. Akad. Münch. 1875). Doppelbrechung —. Brechungsexponenten für die Linien D und E:

Fig. 342.



D:	$\omega = 1{,}6461$	$\varepsilon = 1{,}6417$
E:	1,6500	1,6464.

Pyromorphit $= Pb^5 Cl (PO^4)^3$
und Mimetesit $= Pb^5 Cl (AsO^4)^3$
zeigen nur $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$ $\{10\bar{1}1\}$, gehören aber wegen ihrer Isomorphie mit Apatit hierher. Auch verhalten sich ihre Prismenflächen beim Aetzen, wie die des Apatit, daher die Krystalle unzweifelhaft pyramidal-hemiëdrisch sind.

§. 75. **Die trapezoëdrische Hemiëdrie.** Bei der dritten und letzten möglichen Hemiëdrie findet die Zerlegung statt nach allen Symmetrieebenen (vergl. S. 338). 1) Die trapezoëdrisch-hemiëdrischen Formen der dihexagonalen Pyramiden entstehen demnach durch Auswahl von 12 alternirend oben und unten gelegenen Flächen, Fig. 343. Aus jeder derselben resultiren demnach zwei Hemiëder, aus den weiss gelassenen Flächen die in Fig. 344 *a*, aus den schwarz bezeichneten die in Fig. 344 *b* dargestellte Gestalt, welche nach der Trapezform, die deren Flächen bei gleicher Centraldistanz besitzen, hexagonale Trapezoëder heissen. Die beiden aus einer dihexagonalen Pyramide entstehenden Trapezoëder besitzen wie aus

Fig. 343.

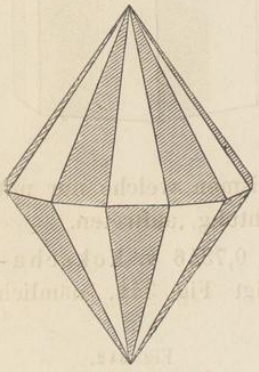


Fig. 344 *a*.

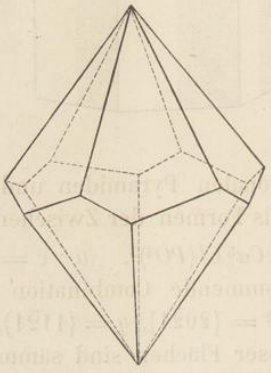
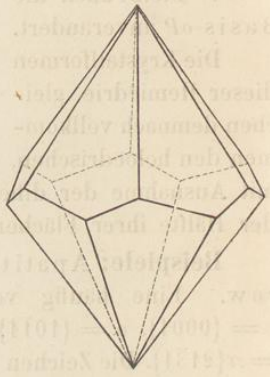


Fig. 344 *b*.



der Art der Zerlegung der holoëdrischen Form hervorgeht, keine Symmetrieebene und sind daher enantiomorph, sie können durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden. Wir nennen dasjenige von beiden, welches dadurch entsteht, dass von den vier Flächen des dem Beobachter zugekehrten Sechstels der dihexagonalen Pyramide, welches zwischen den benachbarten Hälften zweier Nebenaxen liegt, die rechte obere und linke untere bleiben, die beiden anderen verschwinden, das rechte Trapezoëder (Fig. 344 *a*), das entgegengesetzte, in welchem also die linke obere Fläche jenes Sechstels auftritt, das linke (Fig. 344 *b*), und bezeichnen dieselben mit $r\{ki\bar{h}l\}$ und $r\{h\bar{i}\bar{k}l\}$

$$= \frac{mPn}{2} r \text{ und } \frac{mPn}{2} l$$

Die Trapezoëder besitzen je 12 gleiche Polkanten und 12 Mittelkanten (zum Unterschied von den Basiskanten so genannt, weil sie nicht horizontal sind), von denen sechs stumpfere (bei dem rechten Trapezoëder von rechts oben nach links unten, bei dem linken umgekehrt laufend*)) und sechs schärfere sind.

*) Wenn, wie in den Figg. 343 und 344, $n = \frac{3}{2}$ (also $> 1{,}366$), folglich die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen sind; ist dagegen $n < 1{,}366$, so ist das Verhältniss der Mittelkanten der Trapezoëder das umgekehrte.

2) Die hexagonalen Pyramiden erster Ordnung, demselben Gesetze der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 345, liefern Formen, welche sich geometrisch nicht von den holoëdrischen unterscheiden, da von den zwei Flächen der dihexagonalen Pyramide, welche hier in eine Ebene fallen, eine zur hemiëdrischen Form gehört, also diese Ebene, und ebenso alle elf anderen an der hemiëdrischen Form auftreten müssen.

3) Das Gleiche ist der Fall mit den hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung, welche, wie Fig. 346 zeigt, durch diese Hemiëdrie anscheinend nicht verändert wird.

Fig. 345.

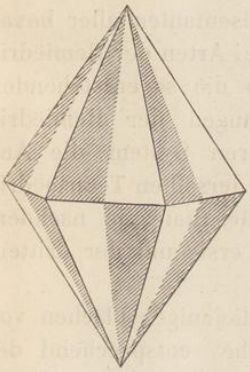


Fig. 346.

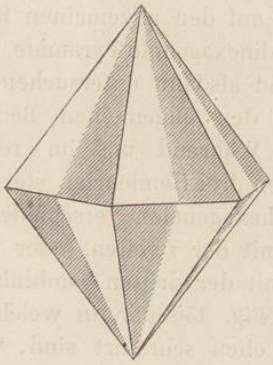
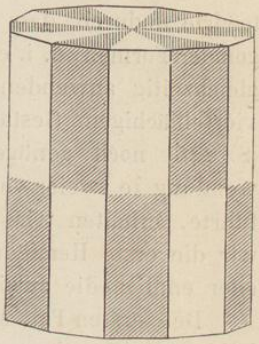


Fig. 347.



4) Die dihexagonalen Prismen, Fig. 347,
5) das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 348,
6) das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, Fig. 349, und

Fig. 348.

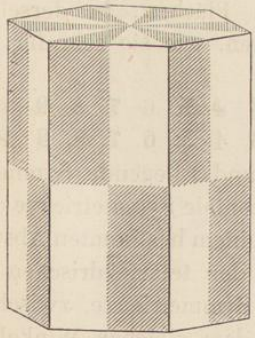
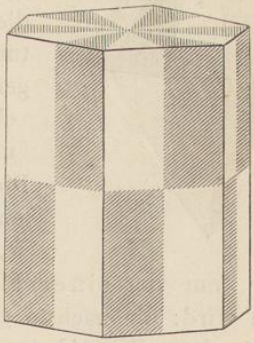


Fig. 349.



7) die Basis, s. Fig. 347 bis 349, liefern in Folge dessen ebenfalls hemiëdrische Formen dieser Abtheilung, welche vollkommen mit den holoëdrischen übereinstimmen.

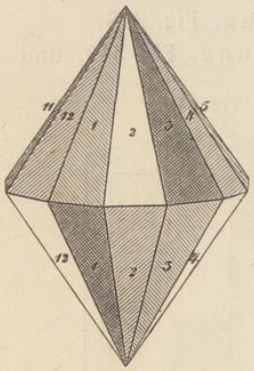
Eine Substanz, welche in dieser Abtheilung des hexagonalen Systems krystallisirte, ist bis jetzt nicht aufgefunden worden. Da sich die Krystall-

formen derselben nur in den dihexagonalen Pyramiden von den holoëdrischen unterscheiden, so würde eine solche Substanz, falls keine jener flächenreichsten Formen, sondern etwa nur hexagonale Pyramiden und Prismen an deren Krystallen beobachtet würden, sich geometrisch nicht von einer holoëdrisch krystallisirenden unterscheiden, wäre aber als hierher gehörig zu betrachten, wenn sie in der Richtung der Hauptaxe die Polarisationsebene des Lichtes drehen würde, da alle circularpolarisirenden Krystalle, welche man bisher beobachtet hat, einer enantiomorphen Hemiëdrie oder Tetartoëdrie angehören.

§. 76. **Mögliche Arten der Tetartoëdrie des hexagonalen Systems.** Nach Früherem erhalten wir die verschiedenen möglichen Arten der Tetartoëdrie dadurch, dass wir auf den allgemeinen Repräsentanten aller hexagonaler Formen, d. i. eine dihexagonale Pyramide, zwei Arten der Hemiëdrie gleichzeitig anwenden, und alsdann untersuchen, ob die so entstehenden viertelflächigen Gestalten den allgemeinen Bedingungen der Hemiëdrie (S. 226) noch genügen. Während uns im regulären System die Anwendung je zweier von den drei Hemiëdrien stets zu derselben Tetartoëdrie führte, erhalten wir im hexagonalen verschiedene Resultate, je nachdem wir die erste Hemiëdrie mit der zweiten, oder die erste mit der dritten, oder endlich die zweite mit der dritten combiniren.

Den ersten Fall stellt Fig. 350 dar, in welcher diejenigen Flächen von links unten nach rechts oben schraffirt sind, welche, entsprechend der Fig. 291, vermöge der rhomboëdrischen Hemiëdrie ausfallen, dagegen von links oben nach rechts unten diejenigen, welche nach Fig. 334 d. i. gemäss dem Gesetze der pyramidalen Hemiëdrie die zweite Hälftgestalt bilden. Numerirt man die Flächen ebenso, wie in der Fig. 290, so sind die ausfallenden Flächen, in derselben Richtung durchstrichen, wie sie schraffirt sind, folgende:

Fig. 350.



oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ 10 ~~11~~ ~~12~~

unten: ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8 ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ 12.

Die zwischen 1 und 2 liegende Symmetrieebene enthält eine horizontale Symmetrieaxe (Zwischenaxe), welche in einem bestimmten Abstande statt von vier, nur von einer Fläche (2 oben) der tetartoëdrischen Form geschnitten wird: die nächste gleichwerthige Symmetrieaxe, zwischen 3 und 4, wird in demselben Abstande und unter dem gleichen Winkel ebenfalls von einer Fläche (4 unten) durchschnitten; die dritte gleichartige Halbaxe ganz ebenso von »6 oben«, die vierte von »8 unten«, die fünfte von »10 oben«, die sechste endlich von »12 unten«. Ganz ebenso ersieht man aus der Figur, dass die sechs gleichwerthigen Seiten der Nebenaxen in gleichem Abstande je von einer Fläche getroffen werden. Was die beiden Seiten

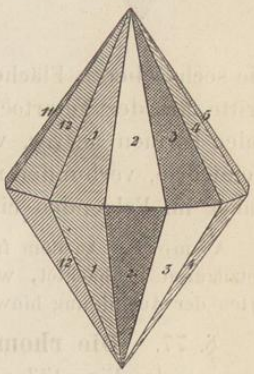
der Hauptaxe betrifft, so wird die obere von den Flächen 2, 6 und 10, die untere in demselben Abstande von 4, 8, 12 geschnitten, und aus der Vertheilung dieser Flächen, zwischen denen jedesmal drei der dihexagonalen Pyramide fehlen, ersieht man unmittelbar, dass die dreikantige Ecke, welche die drei oberen Flächen mit einander bilden, dieselben drei gleichen Winkel haben muss, wie die von den drei unteren gebildete Ecke. Die so erhaltene tetartoëdrische Form entspricht also in Bezug auf alle Symmetrieaxen den Bedingungen der Hemiëdrie, und da die Fläche »8 unten« die parallele Gegenfläche von »2 oben«, »12 unten« diejenige von »6 oben«, endlich »4 unten« die von »10 oben« ist, so besteht die tetartoëdrische Form aus drei Paaren paralleler Flächen, d. h. sie besitzt die Gestalt eines Rhomboëders, daher diese Art der Tetartoëdrie die »rhomboëdrische« genannt wird.

Combinirt man die trapezoëdrische mit der rhomboëdrischen Hemiëdrie, Fig. 351, in welcher die erstere, wie in Fig. 343, durch Schraffirung von links unten nach rechts oben, die letztere durch solche von links oben nach rechts unten angedeutet ist, so werden, in derselben Richtung durchstrichen, folgende Flächen in Fortfall kommen:

oben: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
unten: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12.

Es zeigt sich, dass die 6 Flächen der so entstehenden tetartoëdrischen Form eine ganz andere Vertheilung haben, als in dem ersten Falle. Die in der Symmetrieebene, welche zwischen die Flächen 1 und 2 fällt, liegende halbe Zwischenaxe wird von »2 oben«, die nächste gleichwerthige von »3 unten«, die »dritte von »6 oben«, die vierte von »7 unten«, die fünfte von »10 oben«, die sechste von »11 unten«, stets in demselben Abstande geschnitten. Die drei unteren Flächen 3, 7, 11 sind zwar nicht den drei oberen parallel, wie im vorigen Falle, aber da zwischen je zweien derselben stets drei Flächen ausfallen, so bilden die drei oberen wie die drei unteren je eine dreikantige Ecke mit denselben Kantenwinkeln. In Bezug auf Haupt- und Zwischenaxen erfüllt also diese Tetartoëdrie alle Bedingungen der Hemiëdrie; nicht so in Bezug auf die Nebenaxen, denn die zwischen 2 und 3 liegende Nebenaxe wird vorn von zwei, hinten im gleichen Abstande von keiner Fläche geschnitten, die zwischen 1 und 12 gelegene vorn von keiner, hinten von zwei u. s. f. Es tritt also hier der S. 227 erwähnte Fall ein, dass durch die Tetartoëdrie eine »Hemimorphie« nach gewissen Symmetrieaxen resultirt. Die aus den Flächen 2, 6, 10 oben, 3, 7, 11 unten bestehende Form, das trigonale Trapezoëder, ist hemimorph nach

Fig. 351.



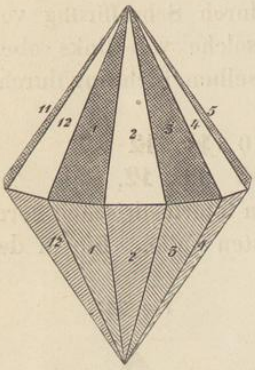
den drei Nebenaxen. Nach dieser Form wird die zweite Art der Tetartoëdrie die »trapezoëdrische« genannt.

Endlich kann noch die trapezoëdrische mit der pyramidalen Hemiëdrie zur Erzeugung einer Tetartoëdrie combinirt werden. In Fig. 352 entspricht die von links ansteigende Schraffirung der ersteren, die von links abfallende der letzteren. Welche Flächen übrig bleiben, ersieht man leicht aus dem folgenden Schema, in welchem die ausfallenden Flächen in derselben Richtung durchstrichen sind:

oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ 10 ~~11~~ 12
unten: ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~.

Es bleiben also nur oben sechs Flächen übrig, so dass zwar jede Seite einer Neben- wie einer Zwischenaxe in demselben Abstande von einer Fläche geschnitten wird, nicht aber die beiden Seiten der Hauptaxe gleichartig getroffen werden. Diese Tetartoëdrie führt also zu einer Hemimorphie nach der Hauptaxe. Dass die letztere aber auch unabhängig von der Hemiëdrie erscheinen kann, hat eine Anzahl von Beispielen rhomboëdrischer Substanzen gelehrt. Wie die Hemimorphie an diesen mit der rhomboëdrischen Hemiëdrie verbunden auftrat, so könnte sie ebenso sich mit der pyramidalen oder mit der trapezoëdrischen Hemiëdrie verbinden. Denken wir uns aber die Pyramide 3. Ordnung (vergl. Fig. 334) oder das hexagonale Trapezoëder (vergl. Fig. 343) nach der Hauptaxe hemimorph, so sind die sechs oberen Flächen dieselben, wie sie in Fig. 352 übrig bleiben. Die dritte Art der Tetartoëdrie bringt also denselben Einfluss auf die hexagonalen Formen hervor, wie ihn auch die pyramidale oder die trapezoëdrische Hemiëdrie, verbunden mit Hemimorphie nach der Hauptaxe, erzeugen würde, daher im Folgenden eine weitere Ausführung dieses Falles nicht nöthig ist.

Fig. 352.



Anmerk. An dem früher für holoëdrisch gehaltenen Nephelin hat Baumhauer Aetzfiguren beobachtet, welche auf eine dieser drei, in ihren Resultaten identischen Arten der Ausbildung hinweisen (Zeitschr. f. Kryst. 6, 209).

§. 77. **Die rhomboëdrische Tetartoëdrie.** 1) Die dihexagonale Pyramide Fig. 353 zerfällt zunächst durch die rhomboëdrische Hemiëdrie in ein positives und ein negatives Skalenoëder. Das erstere enthält die folgenden Flächen:

1 2 . . 5 6 . . 9 10 . .
. . 3 4 . . 7 8 . . 11 12

und ist in Fig. 354 für sich dargestellt. Wählt man von dessen 12 Flächen abermals die Hälfte aus, indem man auf die ursprüngliche holoëdrische Gestalt auch noch die pyramidale Hemiëdrie anwendet, so entstehen aus

demselben zwei Tetartoëder, deren eines von folgenden Flächen gebildet wird:

. 2 . . . 6 . . . 10 . .
. . . 4 . . . 8 . . . 12

Diese Form ist, wie bereits S. 371 nachgewiesen wurde, ein Rhomboëder, und da dasselbe weder die Flächenlage einer pyramidalen Form erster, noch einer solchen zweiter Ordnung besitzt, so wird es Rhomboëder dritter Ordnung oder Rhomboëder der Zwischenrichtung genannt und mit $\varkappa\pi\{k\bar{i}\bar{h}l\}$

$$= + \frac{mPn}{4}\frac{r}{l}$$

Fig. 353.

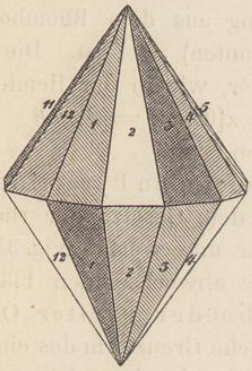
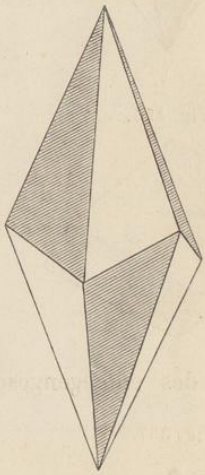


Fig. 354.



bezeichnet; die 6 schraffirten Flächen des Skalenoëders Fig. 354 bilden ebenfalls ein Rhomboëder dritter Ordnung, $\varkappa\pi\{h\bar{i}\bar{k}l\} = + \frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$, von genau derselben Form und nur durch eine Drehung, welche von dem Werthe des Coëfficienten n abhängt, von dem ersten verschieden. Wir haben es hier also nicht mit einer enantiomorphen Tetartoëdrie zu thun. Selbstverständlich haben die beiden negativen Rhomboëder $\varkappa\pi\{\bar{i}h\bar{k}l\} = - \frac{mPn}{4}\frac{r}{l}$ und $\varkappa\pi\{ik\bar{h}l\} = - \frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$, welche aus dem negativen Skalenoëder entstehen, ebenfalls eine den beiden ersten congruente Gestalt. Alles, was bei Gelegenheit der rhomboëdrischen Hemiëdrie über die Rhomboëder gesagt wurde, gilt auch hier, mit Ausnahme ihres Auftretens in den Combinationen, welches ihrer abweichenden Stellung wegen ein anderes ist (s. unter Beispiele am Schluss dieses §).

2) Die hexagonalen Pyramiden erster Ordnung, nach demselben Gesetze tetartoëdrisch werdend, Fig. 355, liefern dieselben Rhomboëder, welche wir auch in der Hemiëdrie kennen lernten. Sie sind die Grenzgestalten je einer Reihe von Skalenoëdern; deren Flächen fallen dann zu je zweien, von denen eine dem ersten, die andere dem zweiten Rhomboëder der Zwischenrichtung angehört, zusammen, folglich ist ein Rhomboëder erster Ordnung (die Hälfte einer Pyramide erster Ordnung) die gemeinschaftliche Grenzform des rechten und linken Rhomboëders dritter Ordnung (in Fig. 356 durch Schraffirung des letzteren unterschieden) für den Fall, dass die Ableitungszahl des Skalenoëders (bei der Ableitung aus dem Rhomboëder mit denselben Mittelkanten) = 1 ist. Die Rhomboëder können daher, wie in der Hemiëdrie, mit

$$\varkappa\{h\,0\,\bar{h}\,l\},\ \varkappa\{0\,h\,\bar{h}\,l\} = \pm mR$$

bezeichnet werden.

Fig. 355.

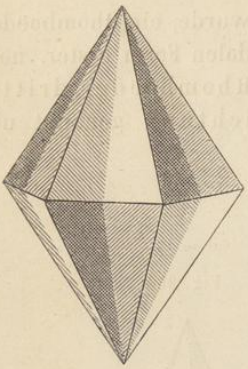
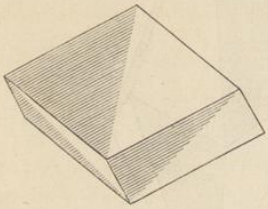


Fig. 356.



3) Die hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung, dem Gesetze der rhomboëdrischen Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 357, liefern je ein aus sechs abwechselnden Flächen gebildetes »Rhomboëder zweiter Ordnung« als gemeinschaftliche Grenzform des einen positiven und des entgegengesetzten negativen Rhomboëders dritter Ordnung, während die beiden anderen Tetartoëder für den Grenzfall $h : k = 2$ in dasjenige Rhomboëder zweiter Ordnung zusammenfallen, welches von den übrigen sechs Flächen gebildet wird. Rhomboëder als Theilgestalten der Pyramiden zweiter Ordnung sind nur in dieser Tetartoëdrie möglich. Sie werden bezeichnet:

Fig. 357.

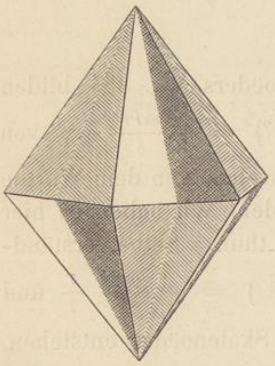
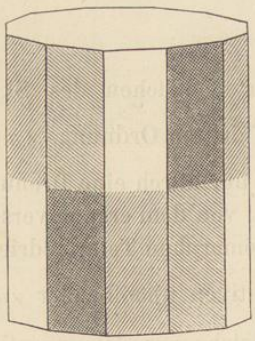


Fig. 358.



$$\varkappa\pi\{kkh\,l\} = \frac{mP2}{4}\,\frac{r}{l} \text{ und } \varkappa\pi\{h\bar{k}\bar{k}l\} = \frac{mP2}{4}\,\frac{l}{r}$$

4) Die dihexagonalen Prismen liefern in dieser Tetartoëdrie, wie aus Fig. 358 hervorgeht, je ein hexagonales Prisma dritter Ordnung,

welches sich geometrisch nicht unterscheidet von demjenigen der pyramidalen Hemiëdrie; während dieses indess als eine hexagonale Pyramide dritter Ordnung, deren $l = 0$, aufzufassen ist, muss man jenes als ein unendlich spitzes Rhomboëder dritter Ordnung betrachten. Bezeichnet wird dasselbe

$$\varkappa\pi\{ki\bar{h}0\} = \frac{\infty Pn}{4}\frac{r}{l} \cdot \cdot \cdot$$

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 359, erscheint in der rhomboëdrischen Tetartoëdrie mit seiner vollen Flächenzahl, wie schon daraus folgt, dass es als Rhomboëder, dessen $l = 0$, nicht weniger Flächen haben kann, als sechs. Wir können es daher, wie in der rhomboëdrischen Hemiëdrie, mit $\{10\bar{1}0\}$ ∞R bezeichnen.

Fig. 359.

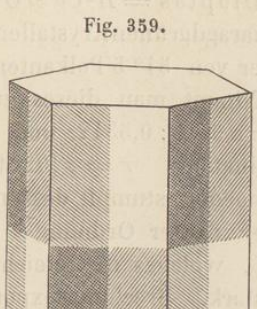
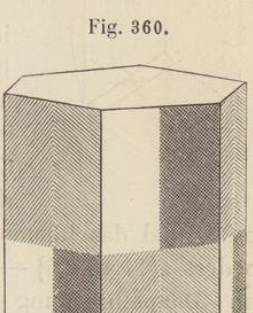


Fig. 360.



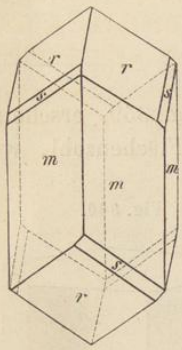
6) Das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, demselben Gesetze der Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 360, giebt eine Form, welche sich ebensowenig, wie vorige, von der holoëdrischen unterscheidet und daher auch mit $\{11\bar{2}0\} = \infty P2$ bezeichnet wird. Es ist die gemeinschaftliche Grenzgestalt, in welche die beiden Rhomboëder, welche je aus einer Pyramide zweiter Ordnung entstehen, zusammenfallen, sobald l den Minimalwerth Null erreicht.

7) Sowohl die Rhomboëder erster Ordnung, wie diejenigen zweiter und dritter, liefern, wenn der Coëfficient $m = 0$ wird, ein und dasselbe Flächenpaar, die Basis $\{0001\} = oR$.

Ueberblicken wir die so resultirenden Formen, so ersehen wir, dass die beiden hexagonalen Prismen und die Basis genau so, wie in der Holoëdrie, erscheinen, dass ferner auch das Auftreten der hexagonalen Prismen dritter Ordnung, welche sich ebenso auch in der pyramidalen Hemiëdrie vorfinden, nicht genügt, um diese Tetartoëdrie nachzuweisen, wohl aber dasjenige der Rhomboëder zweiter Ordnung, da in allen Hemiëdrien die Pyramiden zweiter Ordnung vollflächig, in der trapezoëdrischen Tetartoëdrie (s. S. 378) als trigonale Pyramiden erscheinen. Sobald also an einem Krystall Rhomboëder beobachtet werden, welche sich von hexagonalen Pyramiden verschiedener Ordnung ableiten, gleichviel, welche derselben man als erster, welche als zweiter Ordnung betrachtet, so kann dieser Krystall keiner andern Abtheilung des hexagonalen Systems angehören, als der rhom-

boëdrischen Tetartoëdrie. Ebenso unzweifelhaft ist dies natürlich nachgewiesen durch das Auftreten von Rhomboëdern dritter Ordnung in Combination mit anderen Formen, welche sie als solche zu erkennen gestatten.

Fig. 361.



Beispiele: Der rhomboëdrisch-tetartoëdrischen Abtheilung gehören nur eine kleine Zahl wenig wichtiger Substanzen an; es wird daher genügen, eine einzige derselben, aus der Reihe der in der Natur vorkommenden, hier etwas näher zu betrachten:

Dioptas $= H^2 Cu Si O^4$. Dieses Mineral findet sich in smaragdgrünen Krystallen, welche nach einem Rhomboëder von 54° 5′ Polkantenwinkel (Breithaupt) spalten. Nimmt man dieses zum primären $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, so ist $a : c = 1 : 0{,}5342$, und die in Fig. 361 abgebildete Combination: $r = \varkappa\{02\bar{2}1\} — 2R$ (das Spaltungsrhomboëder stumpft dessen Polkanten ab), $m = \{11\bar{2}0\}$ $\infty P2$, und das Rhomboëder dritter Ordnung s, die Hälftform eines Skalenoëders $\varkappa\{14.\bar{1}3.\bar{1}.6\} — 2R_6^7$, welches die gleichen Mittelkanten mit $— 2R$ hat. Doppelbrechung +, stark. Brechungsexponenten:

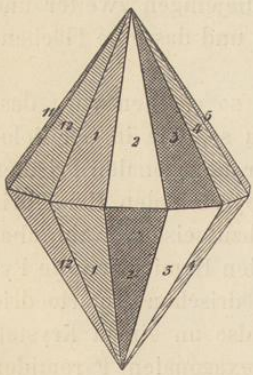
$$\omega = 1{,}667, \qquad \varepsilon = 1{,}723.$$

§. 78. **Die trapezoëdrische Tetartoëdrie.** 1) Die dihexagonale Pyramide Fig. 362 zerfällt durch die rhomboëdrische Hemiëdrie in ein positives und ein negatives Skalenoëder. Das erstere enthält die folgenden Flächen:

oben: 1 2 . . 5 6 . . 9 10 . .
unten: . . 3 4 . . 7 8 . . 11 12

und ist in Fig. 363 für sich dargestellt. Wählt man von dessen 12 Flächen abermals die Hälfte aus, indem man auf die holoëdrische Form das Gesetz der trapezoëdrischen Hemiëdrie anwendet, so entstehen daraus zwei Tetartoëder, von denen das eine von folgenden Flächen gebildet wird:

Fig. 362.

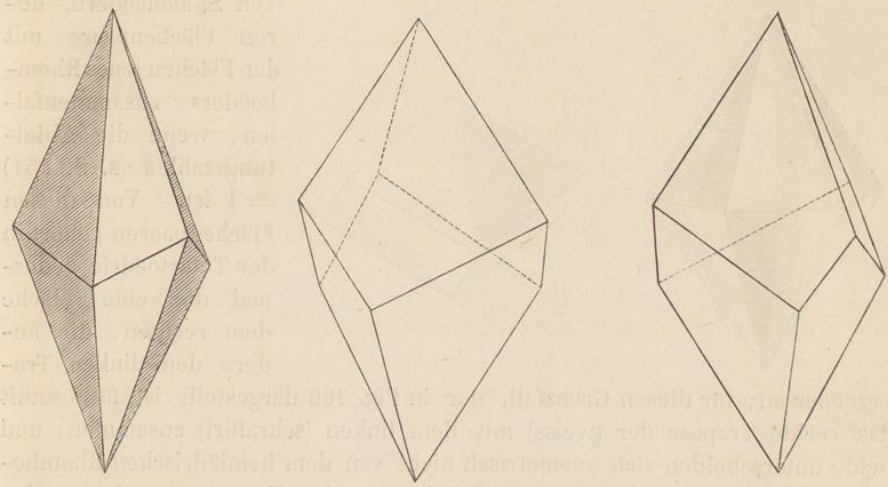


. 2 . . . 6 . . . 10 . .
. . 3 . . . 7 . . . 11 .

Diese Flächen sind in Fig. 362 und 363 weiss gelassen, und sie umschliessen die in Fig. 364 *a* dargestellte Gestalt, welche nach der Trapezform ihrer Flächen und der Dreikantigkeit ihrer Polecken das trigonale Trapezoëder genannt wird. Da von dem, oben dem Beobachter zugekehrten Flächenpaare 1 und 2 die rechte mit ihren zugehörigen jene Form zusammensetzt, so heisst dieselbe das rechte trigonale Trapezoëder. Die sechs anderen Flächen des positiven Skalenoëders, in Fig. 363 schraffirt, bilden

die in Fig. 364*b* dargestellte Form, welche das linke Trapezoëder heisst, weil zu demselben die linke Fläche des oben bezeichneten Flächenpaares gehört. Da das Skalenoëder nur symmetrisch ist zu den drei Ebenen, welche durch je eine längere und eine kürzere Polkante gehen, d. h. zu den Flächen des Prismas zweiter Ordnung, einem Trapezoëder aber jedesmal nur die Flächen auf der einen Seite einer solchen Ebene, die auf der anderen dem entgegengesetzten zugehören, so ist das eine Trapezoëder symmetrisch zum anderen in Bezug auf jene Ebenen, besitzt aber selbst keine Symmetrieebenen, d. h. das rechte und linke Trapezoëder sind enantiomorph, sie können durch keine Drehung zur Congruenz gebracht werden.

Fig. 363. Fig. 364*a*. Fig. 364*b*.



Das negative Skalenoëder besitzt die gleiche Gestalt, wie das positive, und unterscheidet sich nur durch seine um 60^0 oder 180^0 gedrehte Stellung von demselben; lässt man dieses nun abermals hemiëdrisch werden, so resultiren bei derselben Art der Auswahl der Flächen daraus wiederum ein rechtes Trapezoëder, welches mit dem vorerwähnten rechten gleiche Gestalt hat, und ein linkes, welches sich ebenfalls von dem linken, aus dem positiven Skalenoëder entstehenden, nur durch die Stellung unterscheidet. Die dihexagonale Pyramide zerfällt also durch diese Tetartoëdrie in vier Viertelgestalten, welche wir zu bezeichnen haben:

1) Rechtes positives Trapezoëder $= \varkappa r\{k i \bar{h} l\} \quad + \frac{mPn}{4} r = \quad \frac{mRn}{2} r.$

2) Linkes positives Trapezoëder $= \varkappa r\{h \bar{i} \bar{k} l\} \quad + \frac{mPn}{4} l = \quad \frac{mRn}{2} l.$

3) Rechtes negatives Trapezoëder $= \varkappa r\{h \bar{k} \bar{i} l\} \quad - \frac{mPn}{4} r = - \frac{mRn}{2} r.$

4) Linkes negatives Trapezoëder $= \varkappa r\{k \bar{h} i l\} \quad - \frac{mPn}{4} l = - \frac{mRn}{2} l.$

Von diesen vier Formen sind 1 und 2, sowie 3 und 4 enantiomorph, dagegen 1 und 3, sowie 2 und 4 congruent.

Ein trigonales Trapezoëder besitzt sechs (drei obere und drei untere) einander gleiche Polkanten, ferner drei schärfere und drei stumpfere Mittelkanten, von denen die letzteren identisch sind mit den Mittelkanten des zugehörigen Skalenoëders.

Trigonale Trapezoëder hat man bisher nur in Combinationen, und zwar mit den einfacheren Formen dieser Tetartoëdrie, beobachtet, daher dieselben erst nach diesen (bei den Beispielen) betrachtet werden sollen.

2) Eine hexagonale Pyramide erster Ordnung, derselben Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 365, liefert ein Rhomboëder, welches sich nicht von dem hemiëdrischen unterscheidet. Bekanntlich ist jedes Rhomboëder die Grenzgestalt einer Reihe von Skalenoëdern, deren Flächenpaare mit den Flächen jenes Rhomboëders zusammenfallen, wenn die Ableitungszahl n (s. S. 351) $= 1$ ist. Von diesen Flächenpaaren gehört in der Tetartoëdrie jedesmal die eine Fläche dem rechten, die andere dem linken Trapezoëder an; für diesen Grenzfall, der in Fig. 366 dargestellt ist, fällt somit das rechte Trapezoëder (weiss) mit dem linken (schraffirt) zusammen, und beide unterscheiden sich geometrisch nicht von dem hemiëdrischen Rhomboëder. Ebenso liefern das rechte und linke negative Trapezoëder als gemeinschaftliche Grenzform das negative Rhomboëder, daher diese beiden Gestalten ganz ebenso, wie in der Hemiëdrie, mit $\varkappa\{h\,0\,\bar{h}\,l\} = mR$ und $\varkappa\{0\,h\,\bar{h}\,l\} = -mR$ (die primären mit $\pm R$) bezeichnet werden.

Fig. 365.

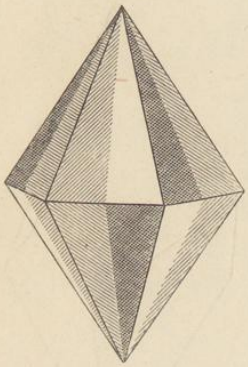


Fig. 366.

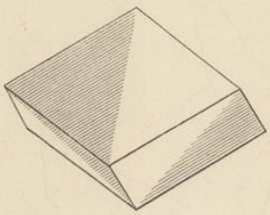
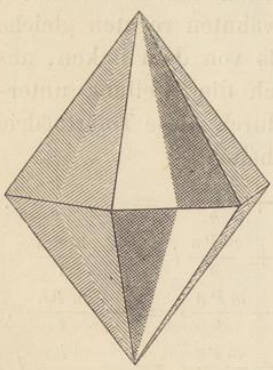


Fig. 367.



In den Combinationen der Rhomboëder mit den Trapezoëdern tritt der Unterschied des rechten von dem linken, obgleich beide geometrisch zusammenfallen, hervor, indem z. B. statt der Zuschärfung der Polkanten eines Rhomboëders (Skalenoëder) nur einseitig, entweder rechts oder links, geneigte schiefe Abstumpfungen auftreten.

3) Die Pyramide zweiter Ordnung, Fig. 367, liefert in dieser Tetartoëdrie eine aus sechs Flächen bestehende Form, nämlich den drei abwechselnden oben und den darunter liegenden (nicht den alternirenden) drei unteren. Dieselbe heisst trigonale Pyramide und besitzt drei einander gleiche Polkanten. Die in Fig. 368 *a*

dargestellte, entsprechend den weiss gelassenen Flächen in Fig. 367, ist diejenige Form, in welche das positive rechte Trapezoëder übergeht, wenn $h : k = 2$ wird; Fig. 368 *b* dagegen zeigt die Grenzform des linken positi-

Fig. 368 *a*.

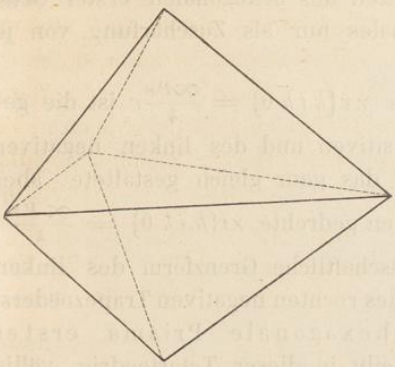
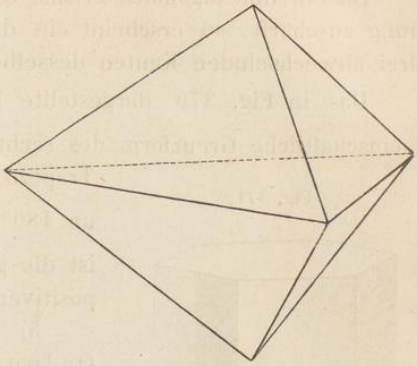


Fig. 368 *b*.



ven Trapezoëders für denselben Fall. Aus Fig. 367 ist unschwer zu ersehen, dass die erste trigonale Pyramide zugleich die Grenzform der linken negativen Trapezoëder, und Fig. 368 *b* die gemeinschaftliche Grenzform der linken positiven und der rechten negativen ist, sobald $h : k$ den Werth 2 annimmt.

Auch die trigonalen Pyramiden, mit

$$\varkappa r\{kk\bar{h}l\} = \frac{mP2}{4} r \text{ die erste}$$

$$\text{und } \varkappa r\{h\bar{k}\bar{k}l\} = \frac{mP2}{4} l \text{ die zweite}$$

zu bezeichnen, kommen nur in Combinationen vor, welche bei den Beispielen zu erläutern sind.

4) Wenden wir auf ein dihexagonales Prisma dasselbe Gesetz der Tetartoëdrie, wie auf die dihexagonale Pyramide Fig. 362, an, so ist aus Fig. 369 ersichtlich, dass das rechte positive Trapezoëder für den Fall $l = 0$

Fig. 369.

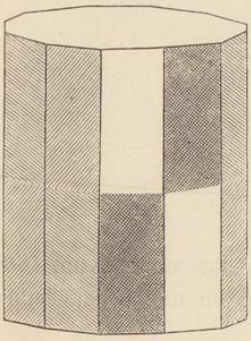
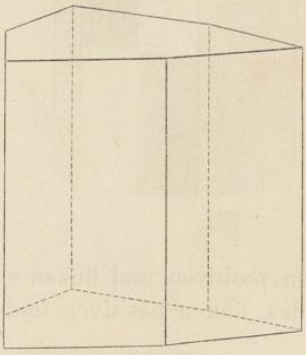


Fig. 370.



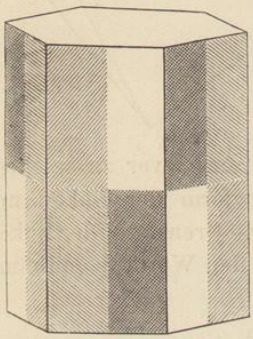
übergeht in eine Form, welche, statt von sechs, nur von drei Paaren verticaler Flächen gebildet wird und in Fig. 370 in Combination mit der Basis

dargestellt ist. Sie wird ditrigonales Prisma genannt und besitzt drei schärfere und drei stumpfere verticale Kanten, deren letztere denselben Winkel haben, wie diejenigen Kanten der holoëdrischen Form, in denen die Nebenaxen endigen *).

Da ein dihexagonales Prisma die Kanten des hexagonalen erster Ordnung zuschärft, so erscheint ein ditrigonales nur als Zuschärfung von je drei abwechselnden Kanten desselben.

Das in Fig. 370 dargestellte Prisma $\varkappa r\{k\, i\, \bar{h}\, 0\} = \frac{\infty P n}{4} r$ ist die gemeinschaftliche Grenzform des rechten positiven und des linken negativen Trapezoëders, das ganz gleich gestaltete, aber um 180° dagegen gedrehte, $\varkappa r\{h\, \bar{i}\, \bar{k}\, 0\} = \frac{\infty P n}{4} l$ ist die gemeinschaftliche Grenzform des linken positiven und des rechten negativen Trapezoëders.

Fig. 371.



5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung bleibt in dieser Tetartoëdrie völlig unverändert, wie aus Fig. 371 zu ersehen. Es ist die gemeinschaftliche Grenzform aller vier Trapezoëder, wenn in dem Zeichen der dihexagonalen Pyramide $h = k$ und $l = 0$ werden.

6) Dagegen zerfällt das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, Fig. 372, in zwei trigonale Prismen, deren eines Fig. 373 die gemeinschaftliche Grenzgestalt

Fig. 372.

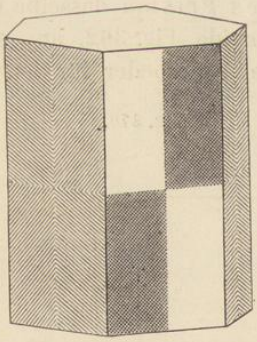
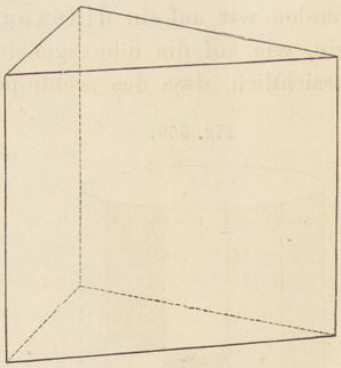


Fig. 373.



des rechten positiven und linken negativen, das andere, um 180° gedrehte, diejenige des linken positiven und des rechten negativen Tetartoëders ist,

*) Diese Form ist demnach wesentlich verschieden von dem ditrigonalen Prisma Fig. 305, welches aus dem Zusammenwirken der rhomboëdrischen Hemiëdrie und der Hemimorphie entsteht, denn das letztere besitzt drei stumpfe Kanten, welche mit den

wenn $h : k = 2$ und $l = 0$. Die beiden Formen sind daher zu bezeichnen $\varkappa r\{11\bar{2}0\} = \frac{\infty P 2}{4} r$ und $\varkappa r\{2\bar{1}\bar{1}0\} = \frac{\infty P 2}{4} l$.

Das erstere ist zugleich das Endglied der Reihe der trigonalen Pyramiden $\varkappa r\{kk\bar{h}l\} \frac{mP2}{4} r$, welche sich demselben um so mehr nähern, je mehr $\frac{k}{l} = m$ sich dem Grenzwerth ∞ nähert; das zweite, $\varkappa r\{2\bar{1}\bar{1}0\} = \frac{\infty P 2}{4} l$, ebenso des Endglied der Reihe der linken trigonalen Pyramiden.

Während das hexagonale Prisma zweiter Ordnung alle Kanten desjenigen erster Ordnung gerade abstumpft, tritt ein trigonales in derselben Weise nur an den abwechselnden drei Kanten desselben auf.

7) Dass die Basis {0001}, in der abgekürzten Naumann'schen Weise als untere Grenzform der Reihe der Rhomboëder mit oR bezeichnet, die Gestalt ist, in welche alle vier Tetartoëder einer dihexagonalen Pyramide übergehen, wenn $\frac{h}{l} = m$ gleich Null wird, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

§. 79. **Beispiele trapezoëdrisch-tetartoëdrischer Substanzen.** Wir haben im vorigen § gesehen, dass zwei Formen, die Basis und das Prisma erster Ordnung, in dieser Tetartoëdrie unverändert bleiben; ein Körper, welcher nur die Flächen dieser beiden zeigte, wäre daher geometrisch nicht von einem holoëdrischen zu unterscheiden. Wie aber bereits früher bemerkt wurde, zeigen die circularpolarisirenden Krystalle stets eine enantiomorphe Hemiëdrie oder Tetartoëdrie, oder wenigstens nur solche Formen, die einer derartigen Abtheilung ihres Krystallsystems angehören können. Beobachtet man daher in der Richtung der optischen Axe an einem Krystall, welcher nur von dem Prisma erster Ordnung und der Basis gebildet wird, Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, so ist mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass derselbe einer enantiomorphen Hemiëdrie oder Tetartoëdrie angehöre; eine solche ist aber sowohl die trapezoëdrische Hemiëdrie (§. 75), als die im vorigen § betrachtete trapezoëdrische Tetartoëdrie; um zu entscheiden, welcher von diesen beiden Abtheilungen der Krystall zuzurechnen ist, bedarf es noch der Beobachtung weiterer Flächen an demselben. Es genügen zu diesem Zwecke die einer Pyramide erster Ordnung, welche anscheinend holoëdrisch auftritt in der trapezoëdrischen Hemiëdrie, dagegen als Rhomboëder in der gleichnamigen Tetartoëdrie. Sobald wir also an einem hexagonalen Krystall rhomboëdrische Formenausbildung und zugleich Circularpolarisation wahrnehmen, so haben wir ihn, obigem Erfahrungsgesetz zufolge, der trapezoëdrischen Tetartoëdrie zuzurechnen. In der That sind an den Krystallen einiger der unten folgenden Beispiele nur Formen beobachtet, denen zufolge dieselben

---

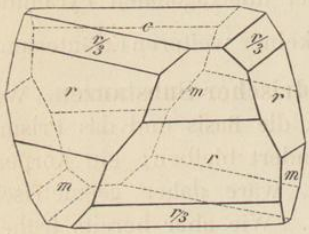
an den Zwischenaxen liegenden Kanten der holoëdrischen Form in ihrem Winkel übereinstimmen. Dem entsprechend sind auch die Combinationen dieser beiden Arten von ditrigonalen Prismen mit dem Prisma 1. Ordnung ganz verschieden.

auch der rhomboëdrischen Hemiëdrie angehören könnten, wenn sie nicht circularpolarisirend wären. Ohne die letztere Eigenschaft ist die trapezoëdrische Tetartoëdrie natürlich schon durch die Krystallform erwiesen, sobald das Auftreten von trigonalen Pyramiden oder Trapezoëdern beobachtet ist.

Folgende sind die bis jetzt bekannten Substanzen dieser Abtheilung:

Zinnober $= HgS$. $a : c = 1 : 1{,}1448$ Schabus. Die gewöhnliche Combination Fig. 374 zeigt $c = \{0001\}\, oR$, $r/_3 = \varkappa\{10\bar{1}3\}\, \frac{1}{3}R$, $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}\, R$, $m = \{10\bar{1}0\}\, \infty R$; als Seltenheit hat man beobachtet $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\}\, \frac{\infty P2}{4}$ als schmale Abstumpfung der abwechselnden Prismenkanten und kleine Flächen von trigonalen Trapezoëdern. Spaltbarkeit nach ∞R ziemlich vollkommen. Die Krystalle besitzen das stärkste Drehungsvermögen der Polarisationsebene, welches überhaupt existirt, indem dasselbe nach Des Cloizeaux, welcher es entdeckte (Ann. d. mines, XI, 339), 15 mal so gross als das des Quarzes ist. Zwillinge nach $\{0001\}$, je aus einem rechts- und einem linksdrehenden Krystall bestehend, zeigen die Airy'schen Spiralen (S. 88). Doppelbrechung +; $\omega = 2{,}854$. $\varepsilon = 3{,}201$ Roth.

Fig. 374.



Quarz $= SiO^2$. $a : c = 1 : 1{,}0999$ Kupffer. Gewöhnliche Combination Figg. 375 und 376: $m = \{10\bar{1}0\}\, \infty R$, $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}\, R$, $r' = \varkappa\{01\bar{1}1\} - R$, letzteres gewöhnlich kleiner und zuweilen matter als r (diese beiden Rhomboëder, von denen das positive parallel der unvollkommenen Spaltbarkeit, haben Polkanten von 85° 46′, sind also sehr würfelähnlich); $s = \varkappa\tau\{11\bar{2}1\}\, \frac{2P2}{4}$, wie sich aus seiner Lage in zwei Zonen ergiebt, deren jede von einer Rhomboëder- und einer Prismenfläche bestimmt wird (s. S. 332); in derselben Zone, als Abstumpfungen derjenigen Combinationskante $s : m$, welche entweder rechts oder links unter r (nicht unter r') liegt, erscheinen nun die gewöhnlicheren trigonalen Trapezoëder, unter denen das häufigste $x = \varkappa\tau\{6\bar{1}\bar{5}1\} = \frac{4R\frac{3}{2}}{2}$. Da wir r zum positiven primären Rhomboëder gewählt haben, so ist das in Fig. 375 dargestellte $x = \varkappa\tau\{51\bar{6}1\} + \frac{4R\frac{3}{2}}{2}\, r$, das in Fig. 376 $= \varkappa\tau\{6\bar{1}\bar{5}1\} = \frac{4R\frac{3}{2}}{2}\, l$. Ausser

Fig. 375.

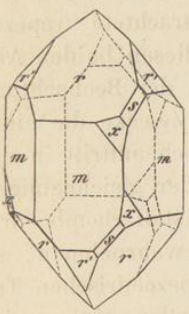
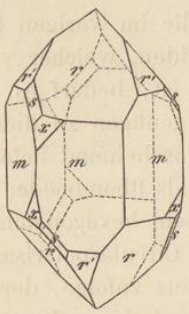


Fig. 376.



diesen Trapezoëdern finden sich noch andere positive, meist in derselben Zone gelegene (vergl. S. 333), während solche, deren Flächen unter r' liegen, und welche wir daher als negative Trapezoëder zu bezeichnen haben (Hälften der negativen Skalenoëder), ziemlich selten auftreten. In Bezug auf das Zusammenvorkommen der verschiedenen Arten von Formen sind, vorzüglich durch G. Rose (Abhandl. der Berl. Akad. 1844), folgende Gesetzmässigkeiten erkannt worden: es giebt zweierlei Quarzkrystalle: 1) rechte; diese zeigen r, r', verschiedene andere Rhomboëder, m; ferner s nur rechts von r, positive Trapezoëder unter r rechts (s. Fig. 375), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoëder unter r', diese aber links; 2) linke mit r, r', anderen Rhomboëdern und m, wie die vorigen; dagegen s links von r, positive Trapezoëder unter r links (s. Fig. 376), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoëder unter r', diese aber rechts. Es findet sich demnach an den Krystallen der ersten Klasse neben rechten positiven und linken negativen Trapezoëdern diejenige trigonale Pyramide, welche zu den gemeinschaftlichen Grenzformen jener gehört; an den Krystallen der zweiten Art linke positive und rechte negative Trapezoëder, sowie die andere trigonale Pyramide, welche deren gemeinsame Grenzform für den Fall $\frac{h}{k} = 2$ ist. Diese Verschiedenheit steht nun in gesetzmässigem Zusammenhange mit dem Sinne der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch die Quarzkrystalle; diejenigen der ersten Klasse sind nämlich die rechts drehenden, die der zweiten die links drehenden. Das Gesetz des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und der Circularpolarisation des Quarzes lautet daher, wenn dasjenige Rhomboëder, welches meist grösser und glänzender ist, als das entgegengesetzte, und unter welchem die gewöhnlichen Trapezoëder vorkommen, zum positiven gewählt wird, folgendermaassen:

1) Rechts drehende Krystalle zeigen die trigonale Pyramide s rechts von r, sowie rechte positive und linke negative Trapezoëder;

2) die links drehenden Krystalle zeigen s links von r, sowie linke positive und rechte negative Trapezoëder.

Aus Fig. 375 und 376 ersieht man leicht, dass nach den Nebenaxen, d. i. nach den Verbindungslinien zwischen zwei gegenüberliegenden Prismenkanten, Hemimorphie vorhanden ist, wie S. 371 als nothwendige Folge dieser Tetartoëdrie nachgewiesen wurde. Dem entsprechend zeigt ein Quarzkrystall, wenn er erwärmt oder nach dem Erwärmen abgekühlt wird, polare Pyroëlektricität, wie namentlich Hankel durch eingehende Untersuchungen nachgewiesen hat; die Nebenaxen sind die »elektrischen Axen«, d. h. die beiden gegenüberliegenden Prismenkanten werden entgegengesetzt elektrisch, daher die Krystalle sechs abwechselnd positiv und negativ elektrische Zonen zeigen, welche durch unelektrische Zonen, die über die Mitte der Prismenkanten herablaufen, getrennt werden. Beim Abkühlen werden negativ elektrisch die drei Prismenkanten, an denen s und die

Trapezoëder d. h. diejenigen Formen erscheinen, welche nach dem obigen Gesetze den Sinn der Circularpolarisation zu erkennen gestatten. Hiernach ist man im Stande, auch an einem Krystall, welcher jene Formen nicht zeigt, zu bestimmen, ob er, nach der Basis geschliffen, die Polarisationsebene des Lichtes rechts oder links drehen würde; es gehört dazu nur die Unterscheidung von r und r', welche wegen der grösseren Ausdehnung, anderen Flächenbeschaffenheit u. s. w. des ersteren meist nicht zweifelhaft ist. Untersucht man alsdann den Krystall nach der Kundt'schen Methode (S. 181), und erscheinen dabei die elektrisch negativen Zonen rechts von r, so ist der Krystall rechts drehend, im entgegengesetzten Falle links drehend.

Die Hemimorphie des Quarzes nach den Nebenaxen bedingt eine gegenseitige Unabhängigkeit in der Ausbildung an den beiden Enden dieser Richtungen, aber nicht ein vollständiges gegenseitiges Ausschliessen der an denselben auftretenden Formen; darnach könnten auch an den der Fläche s und den gewöhnlichen Trapezoëdern gegenüberliegenden Ecken trigonale Pyramiden, Trapezoëder etc. auftreten, aber als von jenen unabhängige Formen, also mit anderem Zeichen oder anderer Flächenbeschaffenheit. In der That ist dies der Fall, wenn auch nur ausserordentlich selten. Derartige Krystalle zeigen also Formen, für welche das oben angegebene Gesetz des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und dem Sinne der Drehung gerade das entgegengesetzte wäre. Abgesehen aber von ihrem äusserst seltenen Vorkommen und der leichten Unterscheidbarkeit von den gewöhnlichen Formen mittelst der Oberflächenbeschaffenheit, sind diese Formen als die entgegengesetzten dadurch mit Sicherheit zu bestimmen, dass sie in den beim Abkühlen positiv elektrisch werdenden Zonen am Krystall liegen, während die in den negativen Zonen liegenden es sind, welche den Sinn der Drehung dem angeführten Gesetze gemäss bestimmen. Das ausgezeichnetste Beispiel dieser seltenen Art von Krystallen bilden gewisse Quarze von Carrara, an denen diejenigen Prismenkanten, an welchen die Trapezoëderflächen nicht liegen, durch das trigonale Prisma $\varkappa r\{11\bar{2}0\}\ \frac{\infty P2}{4}$ abgestumpft erscheinen. Von grosser Wichtigkeit ist die elektrische Methode auch für die Erkennung der Zwillingskrystalle des Quarzes, welche besonders nach zwei Gesetzen gebildet vorkommen:

1) Gewöhnliches Gesetz: Zwei gleichartige, d. h. zwei rechtsdrehende oder zwei linksdrehende Krystalle sind mit parallelen Hauptaxen so mit einander verbunden, dass die positiven Rhomboëderflächen des einen parallel den negativen des andern sind. Da das Spiegelbild eines enantiomorphen Krystalls stets einen entgegengesetzten darstellt, so kann ein solcher Zwilling aus zwei gleichartigen Quarzen niemals symmetrisch sein in Bezug auf irgend eine Krystallfläche. Man erhält die relative Stellung der beiden Krystalle, wenn man, von der parallelen ausgehend, den einen um

180° um die Hauptaxe dreht; s. Fig. 377 *a* und *b*, zwei rechtsdrehende Krystalle darstellend, an denen das negative Rhomboëder r' durch Punktirung unterschieden ist. Zwei derartige Krystalle verwachsen nun fast immer so mit einander, dass sie sich gegenseitig mit unregelmässigen Grenzen vollständig durchdringen und äusserlich ganz so erscheinen, wie ein einfacher Krystall, Fig. 378, dessen Oberfläche jedoch theilweise dem einen, theilweise dem andern Krystall angehört. Die Zusammensetzung des scheinbar einfachen Krystalls wird durch zweierlei Eigenschaften desselben erkannt: die Flächen der trigonalen Pyramide *s* und des Trapezoëders *x* liegen oft an zwei benachbarten Ecken, während sie an einfachen Krystallen oben (ebenso unten) nur an den abwechselnden vorkommen dürfen; je nach der Art der Durchdringung sind die bezeichneten Flächen in der verschiedensten Zahl und Vertheilung am Krystall vorhanden, es können z. B. oben alle sechs, unten gar keine auftreten u. s. f. Ein zweites Er-

Fig. 377*a*.

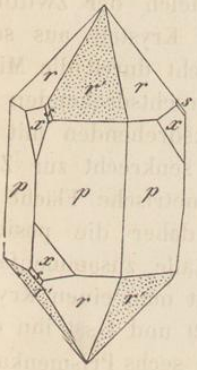


Fig. 377 *b*.

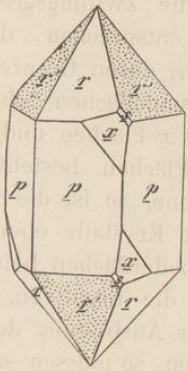
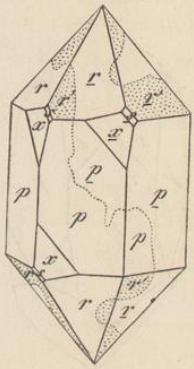


Fig. 378.

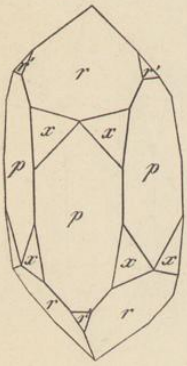


kennungsmittel der Verwachsung liegt in der verschiedenen Oberflächenbeschaffenheit der beiden Rhomboëder *r* und r', von welchen gewöhnlich das letztere weniger eben und glänzend, als das erstere, manchmal auch ganz matt ist; hierdurch sind nun bei sehr vielen derartigen Verwachsungen auf den Rhomboëderflächen die Grenzen der beiden Krystalle deutlich zu sehen, da Theile derselben glänzend (*r* des einen), andere matter (r' des andern) erscheinen; natürlich muss an den Kanten stets eine glänzende an eine matte Fläche, demselben Krystall angehörig, zusammenstossen. Wenn die Differenz der Beschaffenheit der beiden Flächen so gering ist, dass sie sich der Beobachtung entzieht, und wenn weder trigonale Pyramiden, noch Trapezoëder an einem Krystall auftreten, ist er von einem einfachen nur durch pyroëlektrische Untersuchung desselben zu unterscheiden. Während ein einfacher Krystall regelmässig abwechselnde positive und negative Zonen zeigt, werden durch die Zwillingsstellung offenbar die beiden Enden der Nebenaxen vertauscht; wenn also zwei benachbarte Prismenkanten

nicht demselben Krystall, sondern die eine dem ersten, die andere dem zweiten angehört, so zeigen sie gleiche Elektricität statt verschiedener; geht die Zwillingsgrenze über eine Prismenkante fort, wie in Fig. 378 vorn rechts, so ist an dieser Stelle die elektrische Zone unterbrochen durch den Beginn der entgegengesetzten. Auf diesem Wege erkennt man, dass viele äusserlich einfach erscheinende Quarzkrystalle aus zahlreichen, unregelmässig einander durchdringenden und vielfach mit einander abwechselnden Theilen zweier Krystalle in Zwillingsstellung bestehen.

2) Brasilianisches Gesetz: Zwillingsebene ist eine Fläche des Prisma 2. Ordnung, und nach dieser Fläche sind die beiden Krystalle zu einander symmetrisch, daher immer ein rechter mit einem linken verbunden ist. Auch bei diesem Gesetze sind die beiden Krystalle des Zwillings fast immer so durcheinander gewachsen, dass sie äusserlich wie ein einfacher erscheinen, welcher Symmetrie nach $\{11\bar{2}0\}$ zeigt. Treten, wie es an Krystallen von Brasilien Fig. 379 der Fall ist, die Flächen des Trapezoëders x auf, so müssen diese scheinbar ein Skalenoëder bilden, wenn die Zwillingsgrenzen zugleich der Zwillingsebene entsprechen, d. h. der Krystall aus sechs Sectoren, deren Grenzen senkrecht durch die Mitten der Prismenflächen gehen, drei rechtsdrehenden mit rechten x-Flächen und drei linksdrehenden mit linken x-Flächen, besteht. Da r senkrecht zur Zwillingsebene, so ist die zu r symmetrische Fläche des zweiten Krystalls ebenfalls r, daher die positiven Rhomboëderflächen beider Krystalle zusammenfallen, ebenso die negativen. Erwärmt man einen Krystall von der Ausbildung der Fig. 379 und lässt ihn dann abkühlen, so müssen sämmtliche sechs Prismenkanten negativ elektrisch werden, weil diejenigen Enden der Nebenaxen, welche die Trapezflächen tragen, nach aussen gekehrt sind. Ist das Umgekehrte der Fall, besteht ein derartiger Zwilling aus sechs Sectoren, deren jeder die entgegengesetzte Seite der Nebenaxe nach aussen kehrt, so zeigt er gar keine Trapezoëderflächen und muss, da auch die r-Flächen beider Krystalle zusammenfallen, vollkommen wie ein normaler einfacher Krystall erscheinen; von einem solchen ist er aber leicht zu unterscheiden durch sein pyroëlektrisches Verhalten, denn nunmehr muss beim Erkalten an allen sechs Prismenkanten positive Elektricität auftreten. Ebenso wie durch elektrische Untersuchung lassen sich diese Krystalle als Zwillinge natürlich auch erkennen durch Prüfung ihrer optischen Eigenschaften. Diese zeigt, dass sie aus rechts- und linksdrehenden Partien zusammengesetzt sind, und dass in einem Zwilling von der Form Fig. 379 die rechtsdrehenden Theile sich da befinden, wo äusserlich das rechte Trapezoëder x auftritt, die linksdrehenden am linken x. Da, wo die Grenzen horizontal verlaufen, zeigt eine basische Platte im polarisirten Lichte die Airy'schen

Fig. 379.



Spiralen (S. 88). An Krystallen ohne Trapezoëderflächen ist sehr häufig die Art der Durchwachsung eine weit innigere, indem dieselben aus abwechselnden Schichten von Rechts- und Linksquarz bestehen; sind diese zahlreich und dünn, so zeigt eine Platte eines derartigen Krystalls das gewöhnliche schwarze Kreuz der nicht drehenden einaxigen Krystalle. Charakteristisch ist diese Erscheinung für den violett gefärbten Quarz, den sogenannten Amethyst (über die complicirten Doppelzwillinge beider Gesetze, welche beim brasilianischen Amethyst vorkommen, s. Groth, Zeitschr. f. Kryst. 1, 297). — Ueber die elektrischen Eigenschaften des Quarzes s. besonders B. von Kolenko, Zeitschr. f. Kryst. 9, 1.

Die Aetzfiguren, welche man auf den Krystallflächen des Quarzes mittelst Flusssäure erhält, gestatten eine sichere Unterscheidung der beiden Rhomboëder, sowie der rechts- und linksdrehenden Krystalle von einander. Auf r erscheinen horizontal verlängerte Vertiefungen, auf r' schief verlängerte, und zwar geht deren Längsrichtung bei den rechtsdrehenden Krystallen, wenn man eine obere r'-Fläche betrachtet, von links oben nach rechts unten, bei den linksdrehenden umgekehrt. Ausserdem entstehen an Krystallen, welche keine Trapezoëder- oder s-Flächen zeigen, solche durch die Aetzung und zwar an den Kanten rechts von r, wenn der Krystall rechtsdrehend ist, links von r im entgegengesetzten Falle (Leydolt, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss. 1855, 15, 59).

Die Drehung des Quarzes beträgt für 1 mm Dicke nach den Messungen von Soret und Sarasin:

für die	Linie	A	$= 12^{\circ},65$
- -	-	B	$= 15,75$
- -	-	C	$= 17,31$
- -	-	D	$= 21,70$
- -	-	E	$= 27,54$
- -	-	F	$= 32,76$
- -	-	G	$= 42,59$

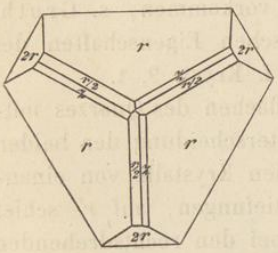
(für die äusserste ultraviolette Linie 26 im Cadmiumspectrum: $235^{\circ},97$.)
Der Quarz ist optisch positiv und besitzt eine sehr schwache Doppelbrechung; die Brechungsexponenten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls sind für dieselben Linien (nach Rudberg):

	ω	ε
A	1,53913	1,54805 *)
B	1,54090	1,54990
C	1,54181	1,55085
D	1,54418	1,55328
E	1,54711	1,55631
F	1,54965	1,55894
G	1,55425	1,56365.

*) Für diese Linie, welche Rudberg nicht beobachtete, sind die von v. d. Willigen gefundenen Werthe eingesetzt. Für die übrigen Linien stimmen die Zahlen beider

Ueberjodsaures Natrium $= NaJO^4 + 3H^2O$. $a : c = 1 : 1{,}094$. Die Krystalle dieses Salzes, dessen Circularpolarisation von Ulrich entdeckt wurde, besitzen ausser der durch die Tetartoëdrie bedingten Hemimorphie nach den Nebenaxen noch eine solche nach der Hauptaxe; sie zeigen an einem Ende nur die Basis, daher in Fig. 380 nur das andere, in der Richtung der Hauptaxe gesehen, abgebildet ist; hier herrscht das Rhomboëder $r = \varkappa\{10\bar{1}1\}$ R vor, dessen Polkanten (deren Winkel 85° 32′) abgestumpft durch $r/_2 = \varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$, und zu welchem noch $2r = \varkappa\{02\bar{2}1\} - 2R$ hinzutritt; von den Combinationskanten von r und $r/_2$ sind die abwechselnden drei abgestumpft durch ein Trapezoëder, welches bei der obigen Wahl des positiven Rhomboëders die Hälfte eines negativen Skalenoëders, und zwar

Fig. 380.



$$z = \varkappa r\{\bar{1}5\bar{4}9\} = -\frac{\frac{1}{3}R3}{2}\, r$$

darstellt; Krystalle dieser Art sind links drehend. Sind dagegen die drei anderen jener Kanten abgestumpft, d. h. tritt das linke Trapezoëder:

$$\varkappa r\{14\bar{5}9\} = -\frac{\frac{1}{3}R3}{2}\, l$$

auf, so sind die Krystalle rechts drehend. Die durch das Vorherrschen von r naturgemäss erscheinende Wahl desselben als positiven Rhomboëders giebt also hier dieselbe Beziehung, wie beim Quarz, nämlich: 1) Rechts drehende Krystalle zeigen linke negative Trapezoëder; 2) links drehende zeigen rechte negative Trapezoëder. Solche Trapezoëder, welche bei dieser Stellung positiv wären (beim Quarz die gewöhnlichen), kommen nicht vor. — Zwillinge nach {0001}, je ein rechts- und ein linksdrehender Krystall mit den rhomboëdrischen Enden der Hauptaxe aneinander gewachsen.

Das überjodsaure Natrium ist optisch positiv und besitzt ziemlich schwache Doppelbrechung. Die Drehung der Polarisationsebene ist stärker, als beim Quarz, und beträgt:

Linie	C	19°,4
-	D	23,3
-	E	28,5
-	F	34,2
-	G	47,1

(Groth, Berl. Akad. Mon. Ber. 1869. Poggendorff's Ann. d. Phys. 137. Bd.).

Unterschwefelsaures Kalium $= K^2S^2O^6$. $a : c = 1 : 0{,}6467$

Beobachter bis auf einige Einheiten der 5. Decimale überein. Für die oben erwähnte ultraviolette Cadmiumlinie 26 fand Sarasin: $\omega = 1{,}63040$, $\varepsilon = 1{,}64268$; für die Strahlen grösster beobachteter Brechbarkeit (Aluminium 32): $\omega = 1{,}67500$, $\varepsilon = 1{,}68940$. Die Doppelbrechung nimmt also mit der Brechbarkeit der Strahlen zu.

Weiss. $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ und $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$ gleich gross, $\{10\bar{1}0\}\infty R$, seltener $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\}\frac{\infty P2}{4}$. Doppelbrechung +. Drehung:

Linie	C =	6°,2
-	D =	8,4
-	E =	10,5
-	F =	12,3

(Pape, Poggend. Ann. d. Phys. 139. Bd. 225 f.).

Unterschwefelsaures Blei = $PbS^2O^6 + 4H^2O$. $a : c = 1 : 1{,}5160$ Brezina. Combination von $\{0001\}oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$, von denen das vorherrschende zum positiven genommen ist; gewöhnlich nur diese Formen; selten treten hierzu die trigonalen Pyramiden $\varkappa\tau\{11\bar{2}3\}\frac{\frac{2}{3}P2}{4}$ und $\varkappa\tau\{11\bar{2}1\}\frac{2P2}{4}$, sowie das Prisma $\varkappa\tau\{11\bar{2}0\}\frac{\infty P2}{4}$, und zwar: an rechts drehenden Krystallen links von R, an links drehenden rechts davon gelegen. Březina (Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 64. I, 1871) beobachtete ausserdem die Pyramide $\{11\bar{2}2\}$ und zwar anscheinend holoëdrisch, d. h. an benachbarten Ecken. — Zwillinge nach $\{0001\}$.

Die Krystalle sind optisch positiv, schwach doppeltbrechend und zeigen folgende Drehung:

Linie	C =	4°,1
-	D =	5,5
-	E =	7,2
-	F =	8,9

(Pape, Poggend. Ann. d. Phys. 139. Bd. 225 f.).

Unterschwefelsaures Calcium = $CaS^2O^6 + 4H^2O$. Axenverhältniss dem vorigen sehr ähnlich (isomorph)*). Doppelbrechung —, Drehung 2°1 für Grün (Pape, l. c.).

Unterschwefelsaures Strontium = $SrS^2O^6 + 4H^2O$. $a : c = 1 : 1{,}5024$ Heeren. $\{0001\}oR$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ und $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$ in ungefähr gleicher Grösse. Doppelbrechung —. Drehung für Gelb mindestens 3°,4 (die Krystalle enthalten nach Bodländer, s. Zeitschr. f. Kryst. 9, 309, stets entgegengesetzt drehende Partien und ergeben daher sehr verschiedene Werthe der Drehung; die angegebene Zahl ist die höchste von dem genannten Beobachter gefundene, welche aber möglicher Weise noch zu niedrig ist, da die untersuchte Platte ebenfalls noch umgekehrt drehende Theile enthalten haben kann.

---

*) Es muss bemerkt werden, dass bei diesem und dem folgenden Salze von Baumhauer Aetzfiguren beobachtet wurden, welche von Skalenoëderflächen gebildet waren, also insofern nicht mit der trapezoëdrischen Tetartoëdrie im Einklang stehen, als beim Quarz die rechten und linken Hälften der Skalenoëder einander auch in den Aetzfiguren ausschliessen.

Benzil $= C^{14}H^{10}O^2$. $a : c = 1 : 1{,}6288$ Des Cloizeaux. Vorherrschend $\{10\bar{1}0\}\infty R$, an den Enden $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$ (Polkanten 99° 46′) oder: $\{0001\}oR$, untergeordnet: $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\varkappa\{01\bar{1}1\} - R$, $\varkappa\{01\bar{1}2\} - \frac{1}{2}R$. Drehung 25°,0 für Natriumlinie. Doppelbrechung +; Brechungsexponenten:

$$\omega = 1{,}6588. \quad \varepsilon = 1{,}6784$$

für die Linie *D*. (Des Cloizeaux, Compt. rend. de l'Acad. 68. Bd. 310. 1869.)

Matico-Stearopten $= C^{10}H^{16}O$. $a : c = 1 : 0{,}3160$ Hintze. Gewöhnlich nur $\{10\bar{1}0\}\infty R$, $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, seltener die trigonale Pyramide $\varkappa\tau\{22\bar{4}1\}\frac{4P2}{4}r$ und das Trapezoëder $\varkappa\tau\{32\bar{5}1\}\frac{R5}{2}r$ (an rechts drehenden Krystallen). Doppelbrechung schwach und negativ. Brechungsexponenten:

	ω	ε
Lithiumlinie	1,5415	1,5404
Natriumlinie	1,5447	1,5436
Thalliumlinie	1,5488	1,5478.

Für dieselben drei homogenen Farben beträgt die Drehung:

$$Li = 1^\circ\ 41'$$
$$Na = 2\ \ 4$$
$$Tl = 2\ 28$$

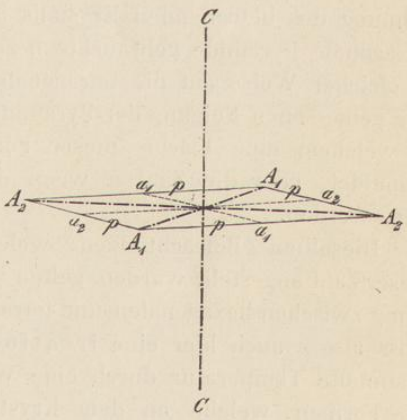
(Hintze, Tschermak's mineralog. Mitth. 1874, 227).

III. Das tetragonale*) Krystallsystem.

§. 80. **Grundform, Ableitung und Bezeichnung der tetragonalen Formen.** Das tetragonale System ist die Gesammtheit aller Formen, welche ausser einer Haupt-Symmetrieebene noch vier andere, senkrecht dazu und einander unter 45° durchschneidend, besitzen. Für die krystallographische Betrachtung werden die Formen, ebenso wie die hexagonalen, stets so gestellt, dass die Haupt-Symmetrieebene horizontal, die Hauptaxe folglich vertical steht. Die tetragonalen Krystallgestalten sind derart beschaffen, dass sie nach einer Drehung von 90° um die Hauptaxe sich selbst wieder genau congruent sind. Seien in Fig. 381 die Geraden A_1, a_1, A_2, a_2 die Durchschnitte der vier Symmetrieebenen mit der Haupt-Symmetrieebene, so heisst jener Satz: die Richtungen A_1 und A_2 können beliebig mit einander vertauscht werden, ebenso a_1 und a_2, ohne die Formen zu ändern. Es sind demnach A_1 und A_2 gleichwerthige Richtungen, ebenso a_1 und a_2.

Es wird daher eine Form zu den krystallonomisch möglichen gehören, deren Flächen je zwei dieser gleichwerthigen Richtungen in gleichem Abstande vom Mittelpunkte durchschneiden, deren Durchschnitte mit der Haupt-Symmetrieebene also die Geraden p Fig. 381 sind. Es wird sich der Einfachheit wegen empfehlen, eine solche Form zur Grundform, und zu Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei einander unter 90° schneidende Symmetrieebenen, also zu Axen die Hauptaxe und entweder die beiden Linien A oder die beiden a, zu wählen. Nehmen wir zu diesem Zwecke A_1, A_2**) und die Hauptaxe, und nennen wir die ersteren die beiden

Fig. 381.

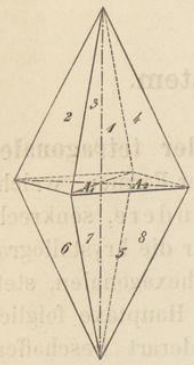


*) Vielfach ist auch der Name »quadratisches System« im Gebrauch.

**) Die Formen sollen stets so gestellt werden, dass A_1 horizontal auf den Beobachter zu, A_2 horizontal quer, und die Hauptaxe vertical läuft.

Nebenaxen, so durchschneidet die Fläche 1 (s. Fig. 382) der Grundform, welche in dem Oktanten des Raumes, zwischen A_1 und A_2 oberhalb, liegt, die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, die Hauptaxe in einer vorläufig noch unbekannten Entfernung. Da diejenige Ebene, welche die Haupt-Symmetrieebene in A_1 vertical schneidet (kurz: die Ebene A_1), eine Symmetrieebene ist, so muss jene Grundform ausser dieser ersten Fläche noch eine zweite 2 besitzen, welche zu jener in Bezug auf A_1 symmetrisch liegt; da die verticale Ebene durch A_2 ebenfalls eine Symmetrieebene der vollständigen Form ist, so müssen zu derselben noch zwei Flächen 3 und 4 gehören, welche in Bezug auf A_2 symmetrisch zu 1 und 2 liegen; endlich müssen noch, symmetrisch in Bezug auf die Haupt-Symmetrieebene zu den genannten, vier untere Flächen 5, 6, 7, 8 vorhanden sein. Die vollständige einfache Krystallform besitzt also 8 Flächen, es ist eine tetragonale Pyramide, Fig. 382, deren sämmtliche Flächen gleiche Neigung gegen die Hauptaxe besitzen.

Fig. 382.



Da die tetragonale Pyramide ebenso, wie die hexagonale, einem einaxigen Krystall angehört, so muss die Neigung ihrer Flächen gegen die Hauptaxe in gleicher Weise mit der Temperatur veränderlich sein, d. h. die Pyramide muss bei steigender Temperatur spitzer oder stumpfer werden, je nachdem die Hauptaxe die Axe der grössten oder der kleinsten thermischen Ausdehnung des betreffenden Krystalls ist. Wenn wir die S. 314 u. f. für die hexagonale Pyramide gebrauchte Bezeichnung des Parameters der Hauptaxe in gleicher Weise auf die tetragonale Form anwenden, so ergiebt sich aus der gemessenen Neigung der Pyramidenflächen zur Hauptaxe das Verhältniss, in welchem eine Fläche dieser Form die Haupt- und eine Nebenaxe schneidet, oder die Zahl c, wenn die Parameter der Nebenaxen $= 1$ gesetzt werden.

Dieselben Betrachtungen, welche S. 314—315 über die Bedeutung dieser Zahl angestellt wurden, gelten wegen der physikalischen Uebereinstimmung zwischen hexagonalen und tetragonalen Krystallen auch für letztere, es muss also c auch hier eine irrationale Zahl sein. Ist dieselbe für eine bestimmte Temperatur durch eine Winkelmessung bestimmt, so sind damit alle Formen, welche an dem Krystall überhaupt möglich sind, gegeben, denn wir kennen nunmehr sämmtliche Elemente (Axenwinkel: 90^0, 90^0, 90^0; Parameterverhältniss der Grundform: $1 : 1 : c$), es sind demnach nur solche Formen krystallonomisch möglich, deren Indices rationale Zahlen sind.

Nachdem für die tetragonalen Formen die Haupt-Symmetrieebene und zwei gleichwerthige Symmetrieebenen als Axenebenen, eine tetragonale Pyramide als Grundform gewählt worden sind, kann zur Bezeichnung der

Formen durch die Indices übergegangen werden. Die 8 Flächen der Grundform Fig. 382 haben offenbar sämmtlich gleiche Indices, nämlich

$$(1\,1\,1)\quad (1\,\bar{1}\,1)\quad (\bar{1}\,\bar{1}\,1)\quad (\bar{1}\,1\,1)$$
$$(1\,1\,\bar{1})\quad (1\,\bar{1}\,\bar{1})\quad (\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1})\quad (\bar{1}\,1\,\bar{1}).$$

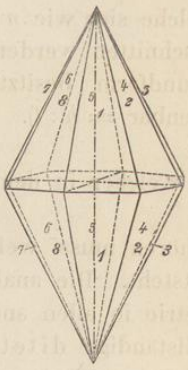
Diese 8 Symbole sind aber zugleich alle möglichen, aus denselben Indices zusammengesetzten; es stellt also auch in diesem System die Gesammtheit aller möglicher Flächen mit denselben Indices eine einfache Krystallform von tetragonaler Symmetrie dar.

Der allgemeinste Ausdruck für eine beliebige Fläche des tetragonalen Krystallsystems ist das Symbol (hkl); die bereits betrachtete tetragonale Grundform bildet davon den speciellen Fall $h = k = l = 1$. In dem allgemeinen Symbol (hkl) beziehen sich h und k auf die beiden gleichwerthigen Nebenaxen, beide Werthe sind also beliebig vertauschbar, nicht so die dritte Zahl l, welche sich auf die Hauptaxe bezieht. Daraus ergeben sich folgende 16 Flächen mit den Indices h, k, l als möglich:

$$(h\,k\,l)\quad (k\,h\,l)\quad (\bar{k}\,h\,l)\quad (\bar{h}\,k\,l)$$
$$(\bar{h}\,\bar{k}\,l)\quad (\bar{k}\,\bar{h}\,l)\quad (k\,\bar{h}\,l)\quad (h\,\bar{k}\,l)$$
$$(h\,k\,\bar{l})\quad (k\,h\,\bar{l})\quad (\bar{k}\,h\,\bar{l})\quad (\bar{h}\,k\,\bar{l})$$
$$(\bar{h}\,\bar{k}\,\bar{l})\quad (\bar{k}\,\bar{h}\,\bar{l})\quad (k\,\bar{h}\,\bar{l})\quad (h\,\bar{k}\,\bar{l})$$

In Fig. 383 sind diese sämmtlichen Flächen für den speciellen Fall {313}, bezogen auf die Grundform Fig. 382, in gleicher Centraldistanz gezeichnet und bilden, wie man sieht, eine geschlossene Form, welche das vollkommene Analogon der auf gleiche Art entwickelten dihexagonalen Pyramide des vorigen Systems darstellt, demnach ditetragonale Pyramide zu benennen ist. Diese Gestalt bildet den allgemeinsten Repräsentanten der tetragonalen Formen, aus welchem alle übrigen als specielle Fälle (dadurch, dass die Indices besondere Werthe, z. B. 0 oder 1, annehmen) sich ableiten. Setzen wir etwa $h = k$, so liefert selbstverständlich die Vertauschung von h und k keine neue Fläche; es befindet sich also in jedem Oktanten des Raumes nur eine mögliche Fläche, statt deren zwei, wie im allgemeinen Fall. Diese eine durchschneidet die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, sie bildet also mit den 7 anderen zugehörigen eine tetragonale Pyramide, in dem besonderen Falle, dass $h = k = l$, die zur Grundform gewählte Pyramide. Setzt man einen der beiden Indices h oder $k = 0$, so liefern die Symbole zweier benachbarter Flächen, z. B.

Fig. 383.

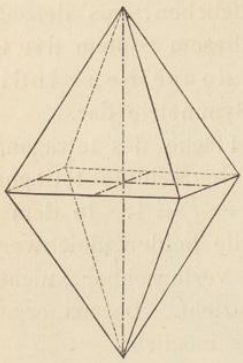


$$(h\,0\,l) \text{ und } (h\,\bar{0}\,l)$$

nur eine einzige Fläche, weil $0 = -0$, und ebenso alle folgenden gleichartig benachbarten Flächenpaare der ditetragonalen Pyramide; es giebt also nur 8 Flächen mit den Indices h, 0, l, deren jede einer Nebenaxe parallel

ist und welche daher eine tetragonale Pyramide bilden, die sich durch ihre Stellung von den zuerst besprochenen, z. B. von der Grundform, unterscheidet, s. Fig. 384. Ihr horizontaler Querschnitt ist ebenfalls ein Quadrat, dessen Seiten indess den Nebenaxen parallel sind, welches also gegen die Querschnittsfigur der ersten Art von Pyramiden um 45° gedreht erscheint. Diese beiden Arten von Pyramiden unterscheidet man ebenso, wie im hexagonalen System, als solche erster und zweiter Ordnung. Zu den so resultirenden drei Arten von Formen, den ditetragonalen Pyramiden, den tetragonalen Pyramiden erster und denen zweiter Ordnung, erhalten wir nun noch drei weitere, wenn wir den Index der Hauptaxe $l = 0$ setzen. Diese Formen gehen also der Hauptaxe parallel. Endlich giebt es nur noch einen speciellen Fall, nämlich den, dass $h = k = 0$; dies liefert eine Fläche, welche beiden Nebenaxen parallel ist.

Fig. 384.



Es giebt also auch in diesem System sieben verschiedene Arten von Formen, welche genau den sieben Arten im hexagonalen System entsprechen.

Um zu der Naumann'schen Bezeichnung zu gelangen, welche auf dem Verhältniss der Parameter (als Vielfachem des Parameterverhältnisses der Grundform) beruht, denken wir uns diese aufgetragen auf die beiden gleichwerthigen Nebenaxen a und auf die Hauptaxe c. Der allgemeinste Fall ist dann offenbar, dass die Nebenaxen in verschiedenen Abständen, welche sich wie $n : 1$ verhalten (wobei n eine rationale Zahl, nämlich $h : k$), geschnitten werden, und dass die Hauptaxe den $m$fachen Parameter der Grundform besitzt (m selbstverständlich ebenfalls rational, denn es ist offenbar $= h : l$). Alsdann ist das Parameterverhältniss einer solchen Fläche

$$= a : na : mc,$$

zu welcher in demselben Oktanten noch eine zweite Fläche

$$= na : a : mc$$

gehören muss, welche durch Vertauschung der gleichwerthigen Nebenaxen entsteht. Die analogen Flächenpaare müssen wegen der tetragonalen Symmetrie in allen anderen sieben Oktanten auftreten, und so entsteht: 1) die vollständige ditetragonale Pyramide (Fig. 383) als Gesammtheit aller möglicher Flächen mit dem Parameterverhältniss $a : na : mc$. 2) Setzen wir $n = 1$, also die Nebenaxen gleich, so kann in jedem Oktanten nur eine Fläche existiren, da die Vertauschung der beiden Nebenaxen nun keine neue Fläche mehr liefert; es resultirt eine tetragonale Pyramide erster Ordnung. 3) Lassen wir n den speciellen Werth ∞ annehmen, so durchschneidet die Fläche $a : \infty a : mc$ die Haupt-Symmetrieebene in einer Geraden, welche offenbar der einen Nebenaxe parallel ist; diese Fläche fällt

also zusammen mit der benachbarten, welche das Parameterverhältniss $a : -\infty a : mc$ besitzt, d.h. für diesen speciellen Fall haben je zwei benachbarte Flächen der ditetragonalen Pyramide Fig. 383, wie 2 mit 3, 8 mit 1 u. s. f. dieselbe Lage im Raum; also ist die entstehende Pyramide nur eine tetragonale, unterscheidet sich aber von der vorigen durch ihre Stellung und heisst Pyramide zweiter Ordnung. 4) Die Hauptaxe kann unendlich gross werden, d. h. $m = \infty$, während die Nebenaxen verschieden sind; dann resultiren acht der Hauptaxe parallele Flächen, das ditetragonale Prisma (Fig. 385) mit dem Parameterverhältniss $a : na : \infty c$. 5) Das Gleiche kann der Fall sein bei gleichen Nebenaxen, dann liefert das Parameterverhältniss $a : a : \infty c$ nur vier, der Hauptaxe parallele Flächen, deren Durchschnitt durch die Haupt-Symmetrieebene zusammenfällt mit demjenigen

Fig. 385.

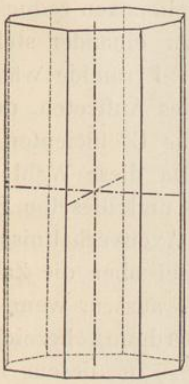
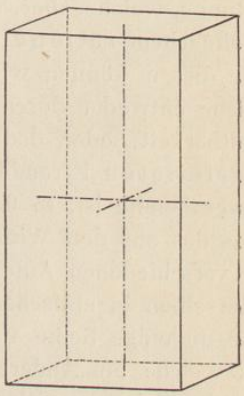


Fig. 386.

Fig. 387.



der tetragonalen Pyramide erster Ordnung mit derselben Fläche. Diese Form ist das tetragonale Prisma erster Ordnung, Fig. 386. 6) Es können bei unendlich grosser Hauptaxe die Nebenaxen im Verhältniss $1 : \infty$ stehen; dann ergeben sich ebenfalls vier der Hauptaxe parallele Flächen, welche aber die Nebenaxen nicht in gleichem Abstande schneiden, sondern paarweise der einen derselben parallel sind, daher ihre Durchschnittsfigur mit der Hauptsymmetrie gleich ist derjenigen der Pyramide zweiter Ordnung. Das Prisma mit dem Parameterverhältniss $a : \infty a : \infty c$ wird deshalb Prisma zweiter Ordnung, Fig. 387, genannt. 7) Endlich kann der Coëfficient beider Nebenaxen $= \infty$ werden; das Axenverhältniss $\infty a : \infty a : c$ liefert nur ein Paar paralleler Flächen, die Basis genannt, welche zugleich der Haupt-Symmetrieebene parallel ist, während die Flächen der beiden tetragonalen Prismen den vier dazu senkrechten Symmetrieebenen entsprechen. So giebt uns die Herleitung der möglichen Arten von Formen mit tetragonaler Symmetrie aus den Parameterverhältnissen ebenso sieben Arten, wie es die Ableitung aus den Indices gethan hat.

Da die beiden gleichwerthigen Nebenaxen sich zu einander ganz ebenso verhalten, wie die beiden, deren Winkel halbirenden Symmetrieaxen, die sogen. Zwischenaxen, wir also S. 391 ebenso gut die Richtungen a_1 und a_2 (statt A_1 und A_2) hätten zu Nebenaxen nehmen können, so folgt, dass man die beiden Klassen von tetragonalen Pyramiden, die erste und zweite Ordnung, beliebig mit einander vertauschen, also auch eine Pyramide zweiter Ordnung zur Grundform wählen kann; alsdann werden selbstverständlich alle Pyramiden, sowie das Prisma derselben Ordnung zu solchen erster, die bisherigen Pyramiden und das Prisma erster Ordnung nunmehr zweiter.

Genau dieselben Betrachtungen, welche wir im §. 66 anstellten, können wir hier, auf die tetragonalen Formen angewendet, wiederholen. Wir beobachten in gleicher Weise an einem oder an verschiedenen Krystallen einer tetragonal krystallisirenden Substanz verschiedene Pyramiden gleicher Ordnung, welche aber, wenn wir sie auf gleich lange Nebenaxen reduciren, in einfachem rationalem Verhältniss der Hauptaxen zu einander stehen. Von diesen können wir eine beliebig zur primären Pyramide wählen, welche entweder durch Häufigkeit, durch vorherrschendes Auftreten, durch Spaltbarkeit, oder dadurch, dass sie besonders einfache Coëfficienten der abgeleiteten Pyramiden liefert, ausgezeichnet ist. Da diese Wahl eine conventionelle ist, so findet sich auch hier oft für eine und dieselbe Substanz das aus den Winkeln der Grundform berechnete Axenverhältniss $1 : c$ bei verschiedenen Autoren verschieden angegeben, wobei aber die Zahlen c derselben in einfachem rationalem Verhältniss stehen, ausser, wenn der Eine diejenige Reihe von Pyramiden als solche erster Ordnung bezeichnet hat, welche ein Anderer zur zweiten Ordnung wählte. In diesem Falle verhalten sich die Werthe von c bei beiden Autoren wie $1 : \sqrt{2}$*) oder wie ein rationales Vielfaches dieser Zahl.

Haben wir uns einmal für eine bestimmte Wahl der Grundform entschieden und deren Axenverhältniss bestimmt, so sind nunmehr durch die Kantenwinkel aller übriger tetragonaler Pyramiden desselben Körpers deren absolute Ableitungszahlen m, d. h. ihr Axenverhältniss $a : a : mc$, gegeben. Dasselbe ist alsdann auch der Fall mit den Ableitungscoëfficienten aller übriger Formen derselben Krystallreihe, z. B. den etwa noch vorkommenden ditetragonalen Pyramiden $a : na : mc$. Da es sich hierbei um die Bestimmung zweier, von einander unabhängiger Grössen, der Werthe von m und n handelt, müssen zwei von einander verschiedene Winkel gemessen werden.

Dass hier ebenso wenig, wie im hexagonalen Systeme, das Axenverhältniss eines Körpers bestimmt werden kann, wenn die Krystalle desselben nur prismatische Formen (tetragonale und ditetragonale Prismen) zeigen,

*) Bei einer tetragonalen Pyramide ist das Verhältniss einer Zwischenaxe zur Nebenaxe $= 1 : \sqrt{2}$, wie aus Fig. 381 unmittelbar ersichtlich.

dass vielmehr sowohl das tetragonale Prisma erster, als das zweiter Ordnung, sowie die verschiedenen ditetragonalen Prismen, für alle tetragonal krystallisirenden Körper identisch sind, bedarf kaum der Erwähnung.

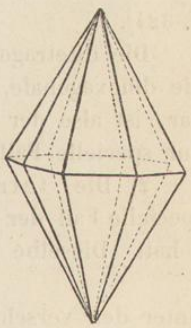
Haben wir dagegen vermittelst einer tetragonalen oder ditetragonalen Pyramide das Axenverhältniss $1 : c$ einer Substanz bestimmt, so ist damit nach dem Gesetz der Rationalität der Indices die Gesammtheit aller übriger möglicher Formen, d. h. die Krystallreihe der Substanz gegeben, in welche nach der Definition dieses Wortes nur diejenigen Formen gehören, die sich von der Grundform durch rationale Zahlen ableiten.

Was die Krystallreihen chemisch verschiedener Körper betrifft, so gelten für dieselben wörtlich die S. 322 über die hexagonalen Krystalle angestellten Betrachtungen, die uns zu dem nothwendigen Schlusse führen, dass dieselben in keiner bestimmten Beziehung zu einander stehen, und dass ebenso viele, scharf von einander durch Irrationalität ihres Verhältnisses getrennte Krystallreihen im tetragonalen System existiren, als es tetragonal krystallisirende Substanzen giebt.

Im Folgenden werden nun die Formen einer beliebigen tetragonal-holoëdrischen Krystallreihe und die Art ihrer Combinationen beschrieben, und alles hier Gesagte gilt natürlich für jede andere Krystallreihe desselben Systems, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Winkel der pyramidalen Gestalten andere, das Axenverhältniss der Grundform ein anderes ist.

§. 81. **Beschreibung der holoëdrischen tetragonalen Formen und ihrer Combinationen.** 1) Die ditetragonalen Pyramiden $\{hkl\}$, Fig. 388, durchschneiden die Axen in dem Verhältniss $a : na : mc$, also ist das, genau ebenso wie bei den dihexagonalen Pyramiden gebildete, Naumann'sche Zeichen $= mPn$.

Fig. 388.



Die ditetragonale Pyramide besitzt dreierlei Kanten, nämlich acht Basiskanten und je acht stumpfere und schärfere, mit einander abwechselnde Polkanten. Eine derartige Pyramide, aber mit 16 genau gleichen Polkanten ist krystallonomisch unmöglich, weil bei derselben die Ableitungszahl $h : k = n$ gleich tang $67\frac{1}{2}^0 = 2.4142\ldots$, also eine irrationale Zahl sein würde. Ist die Zahl n kleiner, als 2,4142, z.B. 2, so sind diejenigen Polkanten die stumpferen, welche vom Pol der Hauptaxe nach denen der Zwischenaxen herablaufen; in diesem Falle ähnelt die Pyramide um so mehr einer tetragonalen erster Ordnung, je weniger h von k verschieden ist; in dem Grenzfall, dass $h = k$, d.h. n seinen kleinsten Werth 1 annimmt, ist der Winkel der bezeichneten Polkanten $= 0$, d.h. je zwei in einer solchen Polkante an einander stossende Flächen, also die Flächen eines Oktanten, fallen in eine Ebene; es resultirt eine tetragonale Pyramide erster

Ordnung als untere Grenzgestalt jener Reihe von ditetragonalen. Ist dagegen n grösser, als 2,4142, z. B. 3, so sind die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen, und zwar um so stumpfwinkeliger, je grösser $h : k$ ist. Für den Grenzfall $k = 0$, d. i. $n = \infty$, sind die Basiskanten der Pyramide den Nebenaxen parallel, also werden die oben bezeichneten Polkantenwinkel Null, d. h. zwei an solchen zusammenstossende, benachbarten Oktanten angehörige Flächen fallen in eine Ebene, es entsteht eine tetragonale Pyramide zweiter Ordnung als zweite Grenzgestalt derselben Reihe von ditetragonalen Pyramiden. Die sämmtlichen möglichen ditetragonalen Pyramiden, welche gleiche Ableitungszahl m, aber verschiedene n besitzen, bilden also eine Reihe, deren Endglieder einerseits die tetragonale Pyramide erster Ordnung, andererseits diejenige zweiter Ordnung, mit demselben m, sind. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe, ebenso wie die der beiden Grenzformen, die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss, $mc : 1$, schneiden, so müssen die einander entsprechenden Flächen sämmtlich derselben Geraden, welche jene beiden Axen in dem bezeichneten Verhältniss schneidet, parallel sein, also in einer Zone liegen, d. h. die Flächen der ditetragonalen Pyramiden liegen, mit parallelen Combinationskanten, zwischen je einer Fläche derjenigen tetragonalen Pyramide erster Ordnung und derjenigen zweiter Ordnung, mit welchen beiden sie gleiche Ableitungszahl m haben. Wenn zwei solcher ditetragonaler Pyramiden mit einander combinirt erscheinen, so schärft die eine die Polkanten der anderen zu.

Zwei ditetragonale Pyramiden mit gleichem n, aber verschiedenem m, treten so in Combination, dass die flachere als 8-flächige Zuspitzung der $4 + 4$-kantigen Polecken der anderen erscheint, und die Combinationskanten beider horizontal laufen (vergl. die entsprechende hexagonale Combination S. 324).

Die ditetragonale Pyramide stellt, ebenso wie im hexagonalen System die dihexagonale, den allgemeinsten Fall einer tetragonalen Krystallgestalt dar, ist also der allgemeine Repräsentant aller anderen, welche gleichsam nur specielle Fälle desselben bilden.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung ist derjenige specielle Fall der ditetragonalen, in welchem $h = k$, n demnach den Werth 1 hat. Dieselbe ist also zu bezeichnen durch

$$\{h\,h\,l\} = mP.$$

Unter den verschiedenen Pyramiden einer Krystallreihe wird nach bereits bekannten Grundsätzen eine zur primären gewählt, diese erhält die Zeichen

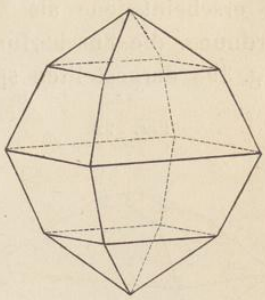
$$\{1\,1\,1\} = P.$$

Alle abgeleiteten Pyramiden, welche stumpfer sind als diese, haben Symbole, in welchen l grösser als h, während das m des Naumann'schen Zeichens ein echter Bruch ist. Bei den spitzeren Pyramiden ist $h > l$ und folglich $m > 1$.

Eine tetragonale Pyramide besitzt acht (vier obere und vier untere) gleiche Polkanten, sowie vier davon verschiedene, unter einander gleiche, Basiskanten.

Da der Hauptquerschnitt aller Pyramiden erster Ordnung dasselbe rechtwinkelige Tetragon ist, so erscheinen je zwei derselben combinirt so, dass die stumpfere die Polecken der spitzeren vierflächig mit horizontalen Combinationskanten zuspitzt, oder diese die Basiskanten jener zuschärft, s. Fig. 389.

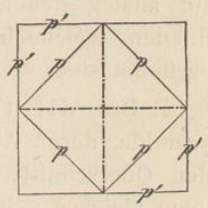
Fig. 389.



Eine ditetragonale Pyramide mit einer tetragonalen combinirt, erscheint als Zuschärfung von deren Polkanten, wenn beide gleiche Ableitungszahl m haben, als achtflächige Zuspitzung der Polecken, wenn erstere ein kleineres m besitzt.

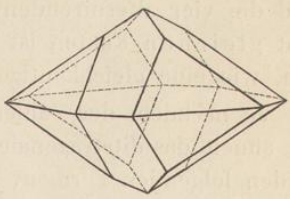
3) Die tetragonale Pyramide zweiter Ordnung $\{h0l\}$ ist derjenige specielle Fall der ditetragonalen Pyramide, in welchem $n = \infty$ ist. Ihr horizontaler Querschnitt hat dieselbe Form eines rechtwinkeligen Tetragons, wie der der Pyramide erster Ordnung, erscheint aber gegen diesen um 45^0 gedreht, s. Fig. 390. Das Parameterverhältniss dieser Art von Gestalten ist also $a : \infty a : mc$. Fig. 390 stellt den Hauptquerschnitt p einer Pyramide erster Ordnung und denjenigen p' der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar, d. h. zweier Pyramiden verschiedener Ordnung mit gleicher Ableitungszahl m.

Fig. 390.



Da eine Fläche der Pyramide zweiter Ordnung die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss schneidet, wie eine Polkante, also wie zwei in einer solchen zusammenstossende Flächen der zugehörigen Pyramide erster Ordnung, so liegt sie mit zwei solchen Flächen in einer Zone, d. h. sie stumpft die Polkante der Pyramide erster Ordnung gerade ab. Es stellt demnach Fig. 391 die Combination einer Pyramide erster Ordnung mit der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar. Dieselben sind nach Naumann zu bezeichnen mit mP und $mP\infty$ (letzteres das allgemeine Zeichen der Pyramiden zweiter Ordnung); wenn $m = 1$, d. h. erstere zur primären $= \{111\}$ genommen worden ist, erhält diejenige, welche ihre Polkanten abstumpft, das Zeichen $\{101\} = P\infty$, und wird die primäre Pyramide zweiter Ordnung genannt. Dieselbe ist stumpfer, d. h. hat schärfere Basis- und stumpfere Polkanten, als die zugehörige erster Ordnung.

Fig. 391.



In den Combinationen zweier Pyramiden verschiedener Ordnung, welche nicht einander zugehörige sind, erscheint diejenige zweiter Ordnung, wenn sie einen kleineren Ableitungscoëfficienten m hat, als die der ersten Ordnung, an dieser als vierflächige Zuspitzung der Polecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gerade aufgesetzt, Fig. 392. Ist dagegen m grösser, so erscheint jene als Zuschärfung der Basisecken der Pyramiden erster Ordnung, die Zuschärfungsflächen auf die Polkanten aufgesetzt. In dem in Fig. 393 dargestellten speciellen Falle, dass die Combinationskanten einer Fläche der letzteren mit zwei Flächen der ersteren einander parallel sind, ist das m der Pyramide zweiter Ordnung doppelt so gross, als das der ersten, also beispielsweise ihre Zeichen $\{111\}P$ und $\{201\}2P\infty$, wie leicht aus den Indices herzuleiten ist.

Fig. 392.

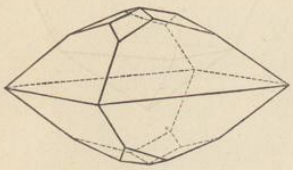
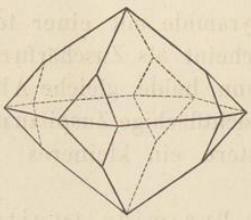


Fig. 393.



Die Combinationen der Pyramiden zweiter Ordnung mit ditetragonalen sind analog denen der Pyramiden erster Ordnung, nur mit den Unterschieden, welche in der Verschiedenheit der Stellung von beiderlei Formen begründet sind.

4) Das ditetragonale Prisma $\{hk0\}$ ist diejenige ditetragonale Pyramide, deren Ableitungszahl $m = \infty$ ist; es besitzt denselben horizontalen Querschnitt, wie diejenigen ditetragonalen Pyramiden, welche mit jenem gleiches n haben; seine Flächen sind aber sämmtlich der Hauptaxe parallel, also vermag diese Form für sich allein den Raum nicht zu umschliessen. Fig. 385 stellt dieselbe in Combination mit der Basis dar. Ihr Naumann'sches Zeichen ergiebt sich nunmehr ganz von selbst als: ∞Pn.

Das ditetragonale Prisma hat acht Kanten, von denen vier schärfer und die vier alternirenden stumpfer sind. Ein ditetragonales Prisma mit acht gleichen Kanten ist aus demselben Grunde krystallonomisch unmöglich, wie eine gleichkantige ditetragonale Pyramide.

Je nachdem der Zahlenwerth von n näher an 1 liegt oder sehr gross ist, ähnelt das ditetragonale Prisma mehr dem einen oder dem anderen der beiden folgenden Formen, dem Prisma erster oder dem zweiter Ordnung. Seine Flächen liegen zwischen den Flächen dieser beiden letzterwähnten Formen, und sie bilden Zuschärfungen der Kanten sowohl des einen, wie des anderen.

Die ditetragonalen Pyramiden mit gleichem n sind um so spitzer, sie nähern sich um so mehr der verticalen Stellung der Flächen, je grösser m ist; das Endglied einer solchen Reihe ist das ditetragonale Prisma mit demselben Werth von n; dieses ist zugleich identisch für alle tetrago-

nalen Substanzen, weil seine Winkel nicht von dem Verhältniss $1 : c$, sondern nur von der rationalen Zahl n, welche bei allen jenen Körpern verwirklicht sein kann, abhängt. Ein ditetragonales Prisma stumpft die Basiskanten der ditetragonalen Pyramiden, welche dasselbe n haben, gerade ab.

5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung $\{110\}$ ist die ditetragonale Pyramide mit den besonderen Werthen $l = 0$, d. h. $m = \infty$, und $h = k$, d. h. $n = 1$, oder die tetragonale Pyramide erster Ordnung, deren m den Grenzwerth ∞ angenommen hat, daher von Naumann ∞P bezeichnet. Es ist also eine Pyramide erster Ordnung mit verticalen, der Hauptaxe parallelen Flächen, welche Form für sich den Raum nicht umschliesst. Diese Gestalt ist in Fig. 386 in Combination mit der Basis dargestellt. Da ihr Parameterverhältniss $1 : 1 : \infty$ gar keiner Variation mehr fähig ist, so giebt es nur ein tetragonales Prisma erster Ordnung, dessen Kantenwinkel 90^0, identisch für alle tetragonal krystallisirenden Körper.

Dasselbe erscheint in Combinationen an allen tetragonalen Pyramiden derselben Ordnung als gerade Abstumpfung der Basiskanten (Fig. 394),

Fig. 394.

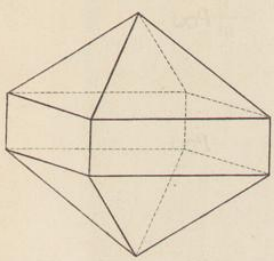
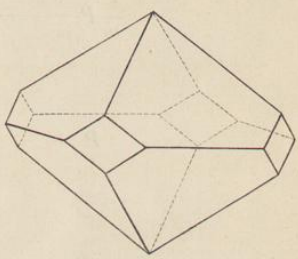


Fig. 395.



an denen der anderen Ordnung als gerade Abstumpfung der Basisecken (Fig. 395).

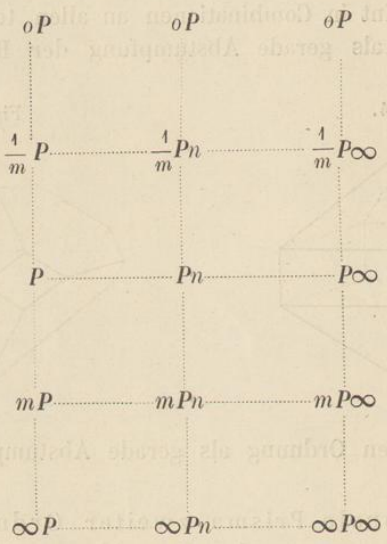
6) Das tetragonale Prisma zweiter Ordnung $\{100\} = \infty P\infty$ ist die Grenzform der tetragonalen Pyramiden zweiter Ordnung für den Fall, dass $m = \infty$, es kann also auch nur eine einzige solche Gestalt geben, welche sich von der vorigen nur durch ihre Stellung (sie erscheint um 45^0 gegen jene gedreht) unterscheidet. Die Figg. 394 und 395 können auch als Combinationen dieses Prismas mit einer Pyramide zweiter Ordnung, resp. erster Ordnung, dienen, wenn man die Nebenaxen mit den Zwischenaxen vertauscht, d. h. jene Gestalten sich um die Hauptaxe, und zwar um 45^0, gedreht denkt.

7) Die tetragonale Basis $\{001\}$, die Haupt-Symmetrieebene selbst, ist die untere Grenzform aller tetragonaler Pyramiden, welche um so stumpfer sind, sich in der Lage ihrer Flächen um so mehr derselben nähern, als die Ableitungszahl m sich der Null nähert. Ist $m = 0$, so sind die Polkantenwinkel $= 0^0$, die Flächen der Pyramide fallen in eine einzige

Horizontalebene zusammen. Daher bezeichnet Naumann auch in diesem System die Basis mit oP.

Diese Form, deren es natürlich auch nur eine einzige giebt, kann noch weniger für sich allein auftreten, als die Prismen, da sie den Raum nur in einer Richtung, von oben nach unten, abschliesst. Die Gestalt ihres Umrisses in den Combinationen ist entweder diejenige eines rechtwinkeligen Tetragons oder eines gleichwinkeligen Achtecks (zwei um 45° gedrehte Rechtecke), oder eines Ditetragons mit vier schärferen und vier stumpferen Winkeln.

Den Zusammenhang aller dieser soeben beschriebenen holoëdrischen Gestalten einer tetragonalen Krystallreihe kann man am besten in nachfolgendem Schema, welches vollkommen analog dem des hexagonalen Systems S. 330 ist, übersehen:



Die vorderste verticale Reihe ist diejenige der Pyramiden erster Ordnung, welche sämmtlich zwischen der Basis und dem Prisma erster Ordnung liegen; wird m stets grösser als 1 angenommen, so ist das Zeichen der flacheren, zwischen der primären und der Basis liegenden, $\frac{1}{m}P$, derjenigen, welche spitzer sind als die Grundform, mP. Ganz analog stellt die letzte Verticalreihe alle Pyramiden zweiter Ordnung dar. Dazwischen liegen die Verticalreihen der ditetragonalen Pyramiden, von denen nur die allgemeine Reihe mit der unbestimmten Zahl n als Repräsentant der übrigen aufgeführt ist. Jede ditetragonale Pyramide ist nun zugleich ein Glied einer Horizontalreihe, welche sämmtliche ditetragonale Pyramiden mit gleichem m, und als Endglieder die erste und zweite Pyramide mit demselben m umfasst. Ebenso

wird die letzte Horizontalreihe von den ditetragonalen Prismen, sämmtlich zwischen dem ersten und dem zweiten Prisma liegend, gebildet.

Sowohl die Flächen der in einer Verticalreihe stehenden, als der in Horizontalreihen vereinigten Krystallformen bilden mit den entsprechenden Flächen aller Formen derselben Reihe je eine Zone, d. h. schneiden einander in parallelen Kanten.

§. 82. **Projection und Berechnung der tetragonalen Formen.** Wie im hexagonalen System, so werden auch im tetragonalen die Formen stets auf die Basis als Ebene des Grundkreises projicirt, um einen Ueberblick über die Symmetrie der Zonenverhältnisse zu erhalten. Es sind daher (s. Fig. 396 folg. S.) der Pol von {001} in die Mitte des Grundkreises und die Pole der beiden tetragonalen Prismen mit 90° resp. 45° Abstand auf dem Umfange desselben einzutragen. Der Durchmesser 001 : 110 enthält die Pole der Pyramiden 1. Ordnung, 001 : 100 diejenigen der Pyramiden 2. Ordnung, zu deren Projicirung also nur die Kenntniss ihrer Neigung zur Hauptaxe nöthig ist. Seien 111 u. s. f. die aus dem erwähnten Winkel in bekannter Weise zu construirenden Pole der primären Pyramide 1. Ordnung, so giebt die Zone zweier derselben, z. B. 111 und $1\bar{1}1$, in welcher zugleich die Prismenflächen 010 und $0\bar{1}0$ liegen, den Pol 101 und ebenso die übrigen der zugehörigen Pyramide 2. Ordnung, welche die Polkante jener abstumpft. Ist der Basiskantenwinkel der letzteren gemessen, so liefert dieser direct das Parameterverhältniss c, denn dieses ist offenbar gleich der tang des Winkels 001 : 101, d. h. des halben Supplementes vom Winkel der Basiskante der Form {101}.

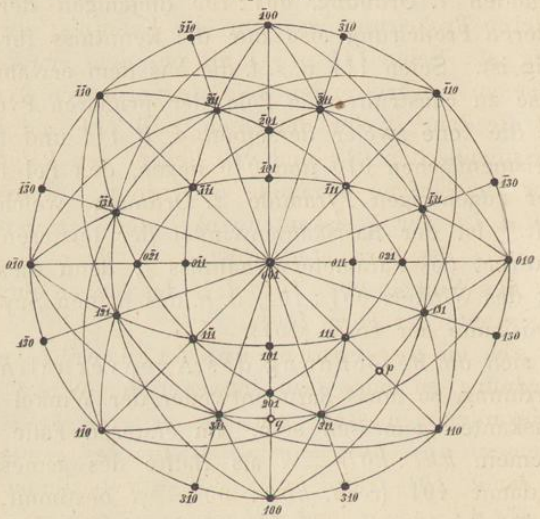
Handelt es sich um Berechnung des Axenverhältnisses aus der Pyramide 1. Ordnung, so muss dazu entweder der Winkel ihrer Polkanten oder ihrer Basiskanten gemessen sein. Im ersteren Falle ist der Bogen 111 : 101 (allgemein $hhl : h0l) = \alpha$ als Hälfte des gemessenen Winkels gegeben und damit 101 (resp. $h0l$): 001 $= \beta$ bestimmt, da sin $\beta =$ tang $\alpha \cdot$ cotang 45° d. i. tang α, und das gesuchte Axenverhältniss $c =$ tang β. Hat man die Basiskante gemessen, so folgt daraus unmittelbar 111 (allgemein : hhl) : 001 $= \gamma$ und das Axenverhältniss $c =$ tang $\beta =$ tang $\gamma \cdot$ cos 45°. Dasselbe rechtwinkelige Dreieck 001, 111, 101 benutzt man natürlich ebenfalls, wenn umgekehrt aus dem Axenverhältniss, d. i. aus β, die beiden anderen Seiten desselben, d. h. die Winkel der Pol- und der Basiskante der Pyramide berechnet werden sollen.

Da {111} die Polkanten von {201} abgestumpft, in deren Zone zugleich das Prisma 1. Ordnung liegt, so sind durch die Pole der ersten und letzten Form diejenigen von {201} gegeben, z. B. der Pol 201 als Durchschnittspunkt der Zonen [$1\bar{1}0$, 111] mit [001, 100] u. s. f.

In der Polkantenzone einer Pyramide, z. B. zwischen 111 und $\bar{1}11$, liegen nun sämmtliche ditetragonale Pyramiden, welche die Polkanten der ersteren zuschärfen, in derselben Zone, aber zwischen 111 und 100, eine Reihe spitzerer ditetragonaler Pyramiden, welche in den Combinationen

als Abstumpfungen der Kanten der Pyramide 1. Ordnung mit dem Prisma 2. Ordnung erscheinen (s. d in Fig. 401); eine dieser Formen liegt zugleich in der Zone $201 : 110$, wodurch sich unmittelbar ihr Zeichen als $\{311\}$ ergiebt. Trägt man die Pole dreier benachbarter Flächen dieser Form in der Projection ein (s. Fig. 396), so ist durch je zwei eine Polkantenzone der ditetragonalen Pyramide bestimmt und der betreffende Zonenkreis mit Hülfe der in dieselbe Zone fallenden Prismenflächen leicht zu construiren. Einer dieser Kreise, z. B. $311 : 131$, schneidet den Durchmesser $001 : 110$ in einem Punkte p, dem Pol derjenigen Pyramide 1. Ordnung, welche die nach den Zwischenaxen herablaufenden Polkanten der ditetragonalen Pyramide abstumpft, der Kreisbogen $311 : 3\bar{1}1$ dagegen bestimmt den Pol q derjenigen Pyramide 2. Ordnung, welche die anderen Polkanten der ditetragonalen

Fig. 396.



abstumpft. Endlich ist durch 311 auch der Pol 310 auf dem Grundkreise bestimmt. Dadurch sind, wie in dem analogen Falle des hexagonalen Systems, die sphärischen Dreiecke gegeben, durch welche die Winkel jeder beliebigen ditetragonalen Pyramide aus ihrem Zeichen berechnet werden können, wie an dem Beispiele der Form $\{311\}$ gezeigt werden soll.

Aus dem Symbol $\{311\}$ ergiebt sich $p = 221$ und $q = 301$, und aus dem Axenverhältniss der Substanz sind alsdann leicht die beiden Bögen $001 : 221$ und $001 : 301$ zu berechnen. Der Bogen $100 : 310$, dessen cotg $= 3$, ist zugleich der Winkel der beiden Zonenkreise $001 : 100$ und $001 : 310$. Damit sind in dem rechtwinkeligen Dreieck 001, q, 311 der Winkel an 001 und die Seite $001 : q$ gegeben, aus denen der halbe Polkantenwinkel $311 : q$ einfach abzuleiten ist. Die Hälfte des anderen Polkantenwinkels $311 : p$ findet man durch das ebenfalls rechtwinkelige Dreieck 001, p, 311, dessen Winkel an 001 die Differenz des entsprechenden Winkels im vorigen Dreieck von 45^0 ist, und in welchem man den Bogen $001 : p$ kennt. Der

beiden Dreiecken angehörige und daher in einem derselben mit zu berechnende Bogen 001 : 311 liefert unmittelbar die Basiskante von {311}.

Soll dagegen aus den beobachteten Winkeln einer ditetragonalen Pyramide deren Parameterverhältniss und somit das Zeichen derselben berechnet werden, so benutzt man die gleichen Dreiecke umgekehrt. Sei $311 : q = \alpha$ und $311 : p = \alpha'$ gemessen, so gilt für die diesen Bögen gegenüberliegenden Winkel an 001 die Gleichung:

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$$

und da $A' = 45^0 - A$, so ist

$$\text{cotang } A = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha \cdot \sin 45^0} + 1$$

Der nach dieser Gleichung aus den Messungen hergeleitete Werth von cotang A ist gleich dem Verhältniss der Indices $h : k$ des zugehörigen ditetragonalen Prisma, also auch der ditetragonalen Pyramide selbst. Das Verhältniss $h : l$ derselben folgt aus dem Zeichen der Pyramide q, welche mit ihr dieses Verhältniss gemeinsam haben muss. Man hat daher nur nöthig, mit Hülfe des Winkels A und der Seite $q : 311$ den Bogen $001 : q$ zu berechnen und daraus das Symbol von q herzuleiten. Ist statt der Polkante $311 : p$ die Basiskante der ditetragonalen Pyramide gemessen worden, so giebt deren Hälfte, von 90^0 subtrahirt, die Seite $311 : 001$ in dem rechtwinkeligen Dreieck 001, 311, q, in welchem die andere Polkante, d. h. $311 : q$, bekannt ist; es können daher die Seiten $001 : q$ und der Winkel an 001 berechnet werden, welche direct zum gesuchten Zeichen der ditetragonalen Pyramide führen.

Liegt zur Bestimmung der letzteren statt zweier nur eine Winkelmessung vor, aber in einer bekannten Zone, z. B. in [111, 100], so hat man zuerst in dem rechtwinkeligen Dreieck 111, 110, 100 den Winkel an 111 zu berechnen. Derselbe gehört zugleich dem rechtwinkeligen Dreieck 111, 311, p an; ist also die Neigung zwischen den Flächen (111) und (311) gemessen, so folgt daraus der Bogen $111 : p$, d. h. das Zeichen von p und damit eine zweite Zone zur Bestimmung der Indices der ditetragonalen Pyramide.

§. 83. **Beispiele holoëdrisch-tetragonal krystallisirender Substanzen.** Wie im hexagonalen System, existirt auch im tetragonalen eine Anzahl Körper, für welche es zweifelhaft ist, ob dieselben der holoëdrischen oder einer hemiëdrischen Abtheilung angehören, da an deren Krystallen nur Pyramiden einer Ordnung oder wenigstens noch keine ditetragonalen beobachtet worden sind, welche durch ihr vollzähliges Auftreten den Beweis für die Holoëdrie liefern würden. Die betreffenden Substanzen, soweit sie wichtige Beispiele des Systems darstellen, sind im Folgenden unter den holoëdrisch krystallisirenden mit aufgezählt, mit Ausnahme der circularpolarisirenden, welche man mit grosser Wahrscheinlichkeit einer Hemiëdrie, der trapezoëdrischen, zuzuzählen hat (vergl. S. 370).

Hemimorphie kann bei tetragonalen Krystallen, wie bei den hexagonalen, vorhanden sein nach der Hauptaxe (s. Jodsuccinimid).

Zwillingsbildung kann bei holoëdrisch tetragonalen Krystallen stattfinden nach allen krystallographischen Ebenen ausser denen des 1. und 2. Prisma und der Basis; der einfachste Fall ist offenbar derjenige, bei welchem eine tetragonale Pyramide die Zwillingsebene bildet.

Bor $= B$. $a : c = 1 : 0{,}576$ Sella. Die von Wöhler und Deville durch Schmelzen von Borsäure mit Aluminium im Kohlentiegel erhaltenen diamantharten Krystalle zeigen $o = \{111\}$, $2o = \{221\}$, $o' = \{101\}$, $m = \{110\}$, $m' = \{100\}$, Fig. 397.

Fig. 397.

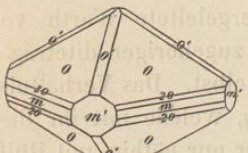
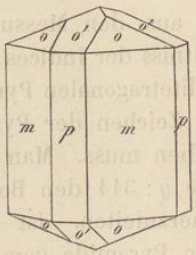


Fig. 398.



Zinn $= Sn$. $a : c = 1 : 0{,}3857$ (Miller, Poggend. Ann. 58, 660). Die galvanisch ausgeschiedenen Krystalle dieses Metalles sind entweder nadelförmige Combinationen: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $o = \{001\}$, $o' = \{101\}$, Fig. 398, oder nur die flache Pyramide o; im letzteren Falle häufig Zwillinge nach einer Fläche derselben Form.

Fig. 399.

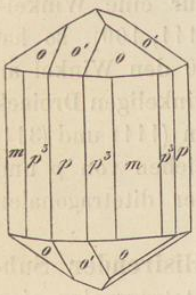
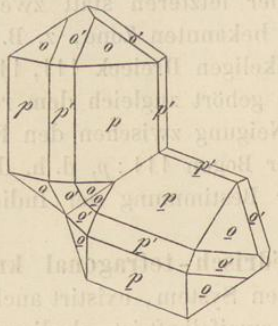


Fig. 400.



Zinndioxyd $= SnO^2$ (natürl. Zinnerz). $a : c = 1 : 0{,}6724$ Miller. Combination: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $p^3 = \{310\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{101\}$, Fig. 399. Doppelbrechung +, schwach. Sehr häufig Zwillinge nach $\{101\}$, Fig. 400, bei denen vorn und hinten die Flächenpaare von $p' = \{100\}$ in eine Ebene fallen, da sie normal zur Zwillingsebene sind. Da eine tetragonale Pyramide aus vier Paaren paralleler Flächen besteht, so kann an einem Krystall nicht blos nach einem derselben, sondern auch noch, symmetrisch in Bezug auf das zweite, dritte und vierte Paar, je ein Krystall angewachsen sein, und so ein Fünflingskrystall entstehen, der bei vollständiger Durchwachsung aller Einzelkrystalle gleichsam die tetragonale Symmetrie wieder herstellt, welche im Zwilling gestört ist.

Titandioxyd $= TiO^2$ (Rutil). $a : c = 1 : 0{,}6442$ Miller. Dieselbe

Combination wie die vorige Substanz, Fig. 399. Brechungsexponenten nach Baerwald:

	ω	ε
Li-Licht	2,5671	2,8415
Na-Licht	2,6158	2,9029
Tl-Licht	2,6725	2,9817

Zirkon = $ZrSiO^4$. $a : c = 1 : 0{,}6404$ Haidinger. Combination: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $o = \{111\}$, $3o = \{331\}$, $d = \{311\}$*), Fig. 401. Brechungsexponenten: $\omega = 1{,}92$, $\varepsilon = 1{,}97$ Sénarmont.

Fig. 401.

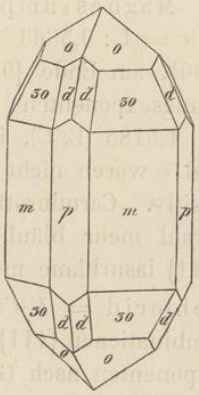
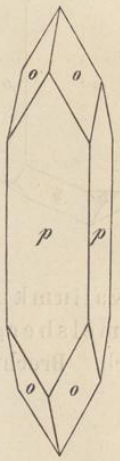


Fig. 402.



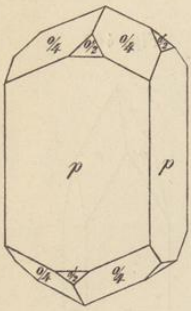
Quecksilberchlorür = Hg^2Cl^2 (nat. Quecksilberhornerz). $a : c = 1 : 1{,}7414$ Miller. Die Krystalle sind prismatische Combinationen von $p = \{100\}$ und $o = \{111\}$, Fig. 402. Doppelbrechung positiv: $\omega = 1{,}96$, $\varepsilon = 2{,}60$ f. Roth (Des Cloizeaux, Ann. d. min. XI, 300).

Quecksilberjodid = HgJ^2. $a : c = 1 : 1{,}9955$ (Mitscherlich, Pogg. Ann. 28, 116). Kleine dunkelrothe spitze Pyramiden $\{111\}$ mit $\{001\}$, selten $\{114\}$. Spaltbar nach $\{001\}$ vollkommen. Doppelbrechung negativ (Des Cloizeaux, a. a. O. 307). Die Krystalle dieses Körpers bieten ein bemerkenswerthes Beispiel für die bereits S. 138 f. allgemein besprochenen Erscheinungen der inneren Spannung und dadurch bewirkter Veränderung der optischen Erscheinungen. Während die aus einer Auflösung in Jodkalium erhaltenen Krystalle gewöhnlich ohne alle Störung ihrer Structur sind, erscheinen die aus gewissen organischen Lösungsmitteln auskrystallisirten, wenn man dünne Spaltungsplatten nach der Basis im parallelen polarisirten Licht bei gekreuzten Nicols betrachtet, nur stellenweise dunkel, häufig nur die Mitte der Platte, während der grösste Theil beim Drehen hell und dunkel wird, und zwar derart, dass die Substanz gespannt erscheint parallel den Diagonalen der Basis (den Nebenaxen). Im convergenten Lichte erscheinen denn auch die ersteren Partien einaxig, die letzteren zweiaxig mit wechselndem Axenwinkel, wobei die Axenebene stets einer der beiden Nebenaxen parallel ist. Sehr häufig sind die dünnsten Spaltungsplatten noch aus mehreren über einander liegenden Schichten zusammengesetzt, in welchen die Spannungsrichtungen, also auch die Axenebenen, gekreuzt sind. Es entstehen dann, um so regelmässiger, je mehr solcher Schichten mit einander abwechseln, die

*) d ist bestimmt durch die beiden Zonen $[3o, 3o]$ und $[o, p]$. Vergl. S. 404.

farbigen Hyperbeln Fig. 96, welche sich mit der Platte drehen und welche man stets erhält, wenn man dünne Platten einer zweiaxigen Substanz, z. B. Glimmertafeln, kreuzweise auf einander schichtet.

Fig. 403.



Quecksilbercyanid $= HgCy^2$. $a : c = 1 : 1{,}8384$ de la Provostaye. Combination: $^o/_4 = \{114\}$, $^{o'}/_2 = \{102\}$, $p = \{100\}$, s. Fig. 403. Doppelbrechung negativ. (Des Cloizeaux, a. a. O. 307).

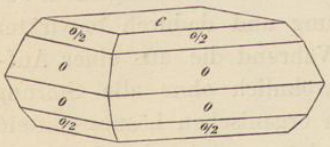
Magnesiumplatincyanür $= MgPtCy^4 + 7H^2O$. $a : c = 1 : 0{,}5863$ Haidinger. Dicke kurze Prismen $\{100\}$, am Ende $\{001\}$ und untergeordnet $\{111\}$. Brechungsexponenten nach Grailich: $n = 1{,}5472$ (Linie B), 1,5485 (L. C), 1,5532 (L. D); die beiden Strahlen ω und ε waren nicht deutlich getrennt. Doppelbrechung positiv. Carminroth mit schwachem Pleochroismus (ord. Strahl mehr bläulich); auf $\{100\}$ grüne, auf $\{001\}$ und $\{111\}$ lasurblaue metallische Oberflächenfarbe (s. S. 155).

Kaliumkupferchlorid $= K^2CuCl^4 + 2H^2O$. $a : c = 1 : 0{,}7531$ Rammelsberg. Combinationen $\{111\}$, $\{100\}$, einem regulären Dodekaëder ähnlich. Brechungsexponenten nach Grailich:

		ω	ε
Linie	B	1,6311	1,6070
-	D	1,6365	1,6148
-	E	1,6468	1,6227

Deutl. Pleochroïsmus (ω grün, ε himmelblau).

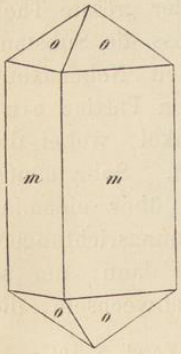
Fig. 404.



Schwefelsaures Nickel $= NiSO^4 + 6H^2O$. $a : c = 1 : 1{,}9061$ Mitscherlich, Poggend. Ann. 11, 323). $o = \{111\}$, $^o/_2 = \{112\}$, $c = \{001\}$ Fig. 404. Spaltbarkeit nach $\{001\}$. Doppelbrechung —, Brechungsexponenten nach Topsøe und Christiansen:

		ω	ε
Linie	C	1,5078	1,4844
-	D	1,5109	1,4873
-	F	1,5173	1,4930

Fig. 405.



Saures Kaliumphosphat $= KH^2PO^4$. $a : c = 1 : 0{,}6640$ (Mitscherlich, Ann. de chim. et phys. 19, 364). Combination: $o = \{111\}$, $m = \{110\}$, Fig. 405. Doppelbrechung —; Brechungsexponenten nach Topsøe.

		ω	ε
Linie	C	1,5064	1,4664
-	D	1,5095	1,4684
-	F	1,5154	1,4734

Saures Ammoniumphosphat $= (NH^4)H^2PO^4$. $a : c = 1 : 0{,}7124$ (Mitscherlich, a. a. O. 373). Dieselbe Combination, wie das vorige Salz. Doppelbr. —; $\omega = 1{,}5112$ (C), $1{,}5246$ (D), $\varepsilon = 1{,}4768$ (C), $1{,}4792$ (D) Topsøe.

Leucit $= (K, Na)^2Al^2[SiO^3]^4$. $a : c = 1 : 0{,}5264$ (vom Rath, Mon. Ber. d. Berl. Akad. 1873). Combination: $o = \{111\}$, $d = \{421\}$ in gleicher Ausdehnung, deshalb dem regulären Ikositetraëder $\{211\}$ täuschend ähnlich, Fig. 406. Meist complicirte Durchwachsungszwillinge nach $\{201\}$. Sehr schwache Doppelbrechung +, $\omega = 1{,}508$, $\varepsilon = 1{,}509$. (Des Cloizeaux, Man. de min. II, XXXIV.)

Fig. 406.

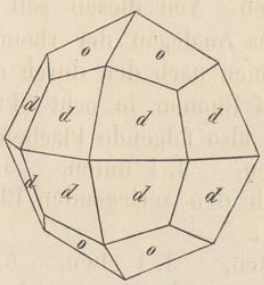
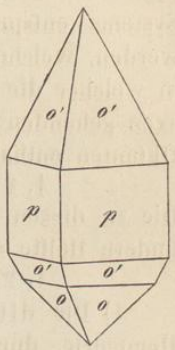


Fig. 407.

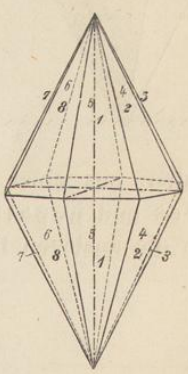


Jodsuccinimid $= C^4H^4O^2NJ$. $a : c = 1 : 0{,}8733$ Groth. Hemimorphe Combination Fig. 407: $p = \{110\}$, oberer Pol: $o' = \{221\}$, unterer Pol: $o = \{111\}$, untergeordnet $\{221\}$. Spaltbarkeit nach $\{111\}$ ziemlich deutlich. Doppelbrechung —.

§. 84. **Die sphenoidische Hemiëdrie.** Die Entwickelung der möglichen Arten der Hemiëdrie wird, wie bisher, an dem allgemeinen Repräsentanten aller Formen des Systems, an der ditetragonalen Pyramide, auszuführen und werden damit alsdann die entsprechenden hemiëdrischen Hälften der anderen Gestalten gegeben sein.

Denken wir uns die genannte Form von denjenigen zwei senkrechten Symmetrieebenen, in welchen die Nebenaxen liegen, in 4 Viertel getheilt, so liegen in jedem solchen Quadranten vier Flächen der ditetragonalen Pyramide, zwei obere und zwei untere, z. B. 1, 2 oben und unten, Fig. 408. Wir werden nur dann eine hemiëdrische Form erhalten, wenn wir die Hälfte aller Flächen so auswählen, dass in jedem Quadranten zwei Flächen in gleicher Weise genommen werden. Jede andere Auswahl der Flächen liefert, ganz ebenso, wie wir S. 338 im hexagonalen Systeme sahen, Formen, welche nicht den Bedingungen der Hemiëdrie genügen. Die Auswahl von zwei Flächen unter jenen vier ist auch hier nur auf dreierlei Art möglich, nämlich: *a*) zweier neben einander gelegener, z. B. 1, 2 oben, 3, 4 unten u. s. f., was einer Theilung der dihexagonalen Pyramide durch die Ebenen des Prisma 2. Ordnung und der Basis entsprechen würde; *b*) je zweier in einer

Fig. 408.



Basiskante zusammentreffender, z. B. 2 oben und unten, 4 oben und unten etc., entsprechend einer Theilung nach den vier senkrechten Symmetrieebenen; *c*) je zweier kreuzweise gelegener, z. B. 1 unten, 2 oben, 3 unten, 4 oben u. s. f., wie es der Theilung nach allen Symmetrieebenen entspricht. Hierdurch entstehen drei verschiedene Arten von Hemiëdrie, welche ganz genau den drei, auf dieselbe Art abgeleiteten Hemiëdrien des hexagonalen Systems entsprechen. Von diesen soll zunächst diejenige (*a*) betrachtet werden, welche das Analogon der rhomboëdrischen Hemiëdrie bildet und in welcher die Formen nach den durch die Haupt- und die beiden Nebenaxen gehenden drei Ebenen in acht Oktanten getheilt wird. Vier dieser Oktanten enthalten also folgende Flächen der ditetragonalen Pyramide:

1, 2 oben, 3, 4 unten, 5, 6 oben, 7, 8 unten.

Die zu diesen nach den zerlegenden Ebenen symmetrischen Flächen der andern Hälfte sind:

1, 2 unten, 3, 4 oben, 5, 6 unten, 7, 8 oben.

1) Die ditetragonale Pyramide liefert nach dem Gesetz dieser Hemiëdrie, durch Beibehaltung der Paare neben einander liegender Flächen in allen alternirenden Oktanten und Verschwindenlassen der anderen, Fig. 409, je zwei Hälften, welche die Gestalt Fig. 410 besitzen, und zwar bilden die weiss gelassenen Flächen diese Form genau in der Stellung, wie sie die Figur zeigt, während die andere Hälfte derselben eine genau gleiche, aber um 90° gedrehte Gestalt liefert. Eine solche Krystallform heisst, weil bei gleicher Centraldistanz ihre Flächen die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke (Skalene) haben, tetragonales Skalenoëder, und unterscheidet man die beiden, aus einer ditetragonalen Pyramide entstehenden Formen als positives und negatives Skalenoëder, welche genau so bezeichnet werden, wie die analogen Formen des hexagonalen Systems

Fig. 409.

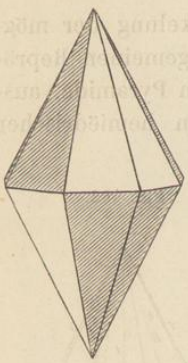
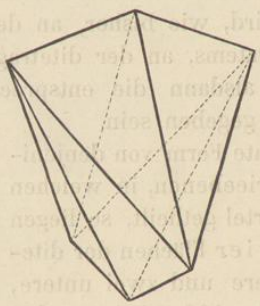


Fig. 410.



$$\varkappa\{hkl\}^{*}) = + \frac{mPn}{2}$$

und $$\varkappa\{h\bar{k}l\} = - \frac{mPn}{2}.$$

*) Die vorliegende Hemiëdrie ist eine »geneigtflächige« und entspricht, da zu ihrer Herleitung die holoëdrischen Formen nach drei auf einander senkrechten Symmetrieebenen zerlegt werden müssen, der tetraëdrischen Hemiëdrie im regulären System, daher die Bezeichnung durch $\varkappa$. Die Analogie mit der tetraëdrischen Hemiëdrie tritt am meisten hervor bei den Hälftflächnern der Pyramiden 1. Ordn., welche unter Umständen sogar genau dieselbe geometrische Form haben können, wie das reguläre Tetraëder (s. S. 412.)

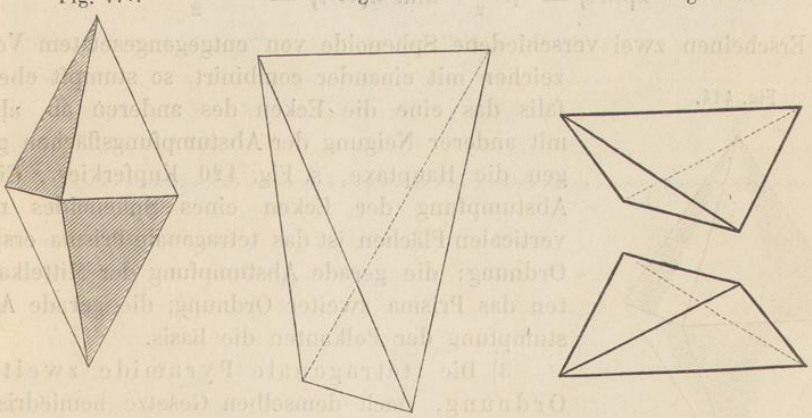
Selbstverständlich ist es an und für sich beliebig, welche der beiden Hälftformen man in einem speciellen Falle positive, welche negative nennt, und geschieht die Wahl nach denselben Grundsätzen, wie die einer Grundform, also die etwa regelmässig vorherrschende Hälfte ist als positive zu bezeichnen. Ist eine solche Wahl an einem Krystall einmal getroffen, so ist damit natürlich das Vorzeichen, + oder —, für alle anderen, daran auftretenden Formen gegeben.

Ein tetragonales Skalenoëder besteht aus zwei oberen und zwei, in alternirender Stellung dazu befindlichen unteren Flächenpaaren, deren Flächen sich je in einer stumpferen Polkante, deren Winkel gleich demjenigen der entsprechenden Polkante an der ditetragonalen Pyramide ist, schneiden. Ausser diesen vier stumpferen Polkanten besitzt das Skalenoëder noch vier schärfere, mit jenen abwechselnd, und ebenso viel einander gleiche Mittelkanten. Die Polecken desselben sind also 2 + 2kantige, die Seitenecken 2 + 1 + 1kantige.

Combinationen mehrerer Skalenoëder mit einander sind sehr mannigfachen Ansehens je nach dem Verhältniss der Zahlen m und n des einen zu denen des anderen, und je nach dem Vorzeichen. Wie aus den Beispielen zu ersehen, kommen jedoch gewöhnlich nur Combinationen eines solchen mit einfacheren Formen vor.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 411), liefert eine Form, welche nur aus vier, zwei oberen und zwei alternirend gestellten unteren Flächen besteht. Diese Form (Fig. 412) heisst Sphenoid*), die Umrissfigur ihrer vier Flächen bei gleicher Centraldistanz ist die gleichschenkeliger Dreiecke. Ein Sphenoid

Fig. 411. Fig. 412. Fig. 413.



besitzt nur zwei, horizontal laufende, einander gleiche Polkanten, dagegen vier davon verschiedene, unter einander aber gleiche Mittelkanten. Bei dem in Fig. 412 dargestellten Sphenoid sind die Polkanten schärfer, als die Mittelkanten, bei den Fig. 413 dargestellten (+ und —) dagegen sind die Polkanten

*) Nach dieser Form ist die vorliegende Hemiëdrie benannt, ebenso wie die analoge hexagonale nach der entsprechenden Form des Rhomboëders.

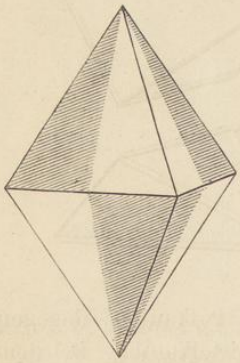
die stumpferen; erstere Form zeigt besonders die Aehnlichkeit mit einem Keil (Sphen), welcher derselben den Namen verliehen hat. Darnach unterscheidet man die Sphenoide als spitze und stumpfe, und ist ein solches natürlich um so spitzer oder stumpfer, je mehr dies der Fall ist mit der tetragonalen Pyramide, von der dasselbe sich ableitet. Ein Sphenoid, welches genau zwischen den spitzen und stumpfen mitten inne stände, d. h. dessen Polkanten gleich den Mittelkanten wären, würde die Form des regulären Tetraëders haben. Ein Sphenoid, welches diesem sehr nahe kommt, ist krystallonomisch bei jeder tetragonal krystallisirenden Substanz dieser Hemiëdrie möglich. Da nun dessen Polkanten beim Erwärmen schärfer werden, die Mittelkanten stumpfer, wenn die Hauptaxe die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme ist, dagegen beide sich in umgekehrtem Sinne ändern, wenn der Krystall sich parallel der Hauptaxe am wenigsten ausdehnt, so wird es eine Temperatur geben, bei welcher jenes Sphenoid sogar genau gleiche Pol- und Mittelkanten besitzt. Dass es deshalb noch keineswegs als ein reguläres Tetraëder betrachtet werden darf, lehren dieselben Betrachtungen, welche über den scheinbaren Uebergang der entsprechenden hexagonalen Form, des Rhomboëders, in einen regulären Würfel, S. 341, angestellt worden sind.

Die beiden, aus einer tetragonalen Pyramide entstehenden Sphenoide werden als positives und negatives unterschieden; dieselben haben genau gleiche Gestalt, nur ist das eine gegen das andere um 90° gedreht. Combinirt erscheinen beide so, dass eines die Ecken des anderen abstumpft, s. die Combination des Kupferkies Fig. 418. Sie werden folgendermassen bezeichnet:

$$\varkappa\{hhl\} = +\frac{mP}{2} \text{ und } \varkappa\{h\bar{h}l\} = -\frac{mP}{2}$$

Erscheinen zwei verschiedene Sphenoide von entgegengesetztem Vorzeichen mit einander combinirt, so stumpft ebenfalls das eine die Ecken des anderen ab, aber mit anderer Neigung der Abstumpfungsflächen gegen die Hauptaxe, s. Fig. 420 Kupferkies. Eine Abstumpfung der Ecken eines Sphenoides mit verticalen Flächen ist das tetragonale Prisma erster Ordnung; die gerade Abstumpfung der Mittelkanten das Prisma zweiter Ordnung; die gerade Abstumpfung der Polkanten die Basis.

Fig. 414.



3) Die tetragonale Pyramide zweiter Ordnung, nach demselben Gesetze hemiëdrisch werdend, Fig. 414, liefert eine der holoëdrischen vollkommen gleiche Form, weil jede Fläche derselben zwei derjenigen ditetragonalen Pyramide, deren $n = \infty$ ist, repräsentirt, von denen jedesmal eine der hemiëdrischen Form angehört. Ganz in derselben Art bleibt auch in der entsprechenden

Hemiëdrie des hexagonalen Systems, der rhomboëdrischen, die Pyramide zweiter Ordnung scheinbar ungeändert (s. S. 345).

4) Das ditetragonale Prisma hat seine Flächen gleichzeitig in den benachbarten oberen und unteren Oktanten liegen; wenn also dieselben auch in den abwechselnden fortfallen (Fig. 415), so ist doch die hemiëdrische Form aus ebenso viel Flächen gebildet, als die holoëdrische, sie ist aber nicht diejenige ditetragonale Pyramide, sondern dasjenige Skalenoëder, dessen $m = \infty$ ist, besteht also aus zwei dem oberen Pol der Hauptaxe und zwei dem unteren angehörigen Flächenpaaren. Würden diese beiden Pole durch Hemimorphie in der Ausbildung von einander unabhängig, so würden die Flächen 1, 2, 5, 6 ein rhombisches Prisma, die übrigen ein zweites von derselben Gestalt bilden, welche beide Formen in Bezug auf ihr Auftreten am Krystall sich als von einander unabhängige erweisen würden.

5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung unterscheidet sich sphenoidisch-hemiëdrisch (Fig. 416) ebenso wenig vom holoëdrischen, wie das hexagonale in der rhomboëdrischen Hemiëdrie. Dasselbe ist jedoch hier nicht aufzufassen als eine tetragonale Pyramide, deren $m = \infty$, sondern als ein Sphenoid, dessen m diesen Grenzwerth erreicht, als das Endglied der Reihe von Sphenoiden mit wachsendem m. Tritt also zu dieser Hemiëdrie noch Hemimorphie nach der Hauptaxe, so verwandelt sich dieses Prisma in zwei von einander unabhängige Paare paralleler Flächen.

6) Das tetragonale Prisma zweiter Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 417), liefert natürlich ebenfalls eine der holo-

Fig. 415.

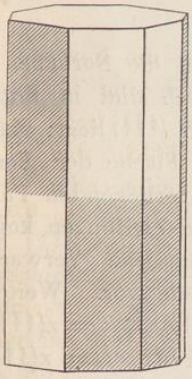


Fig. 416.

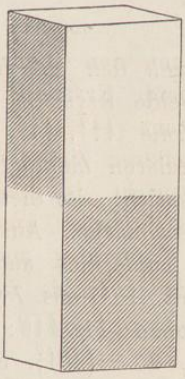
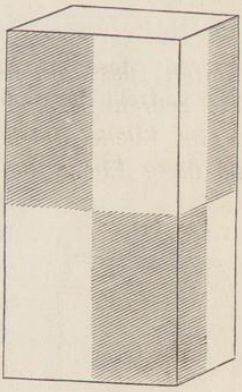


Fig. 417.



ëdrischen gleiche Form, die Pyramide zweiter Ordnung, deren $m = \infty$. Da ihre Flächen sämmtlich sowohl dem oberen, wie dem unteren Pol der Hauptaxe angehören, so kann diese Form durch Hemimorphie nicht verändert werden.

7) Die Basis ist dasselbe Flächenpaar, wie die holoëdrische; sie ist als das Grenzglied der Reihe der flachen Sphenoide, dessen m nämlich $= 0$ ist, zu betrachten.

Da die sphenoidisch-hemiëdrischen Krystalle keine Symmetrie nach {100} und {001}, als zerlegenden Ebenen, besitzen, so können die Flächen dieser Formen als Zwillingsebenen symmetrischer Verwachsungen fungiren.

Beispiele. Folgende Substanzen krystallisiren sphenoidisch-hemiëdrisch:

Kupferkies $CuFeS^2$. $a : c = 1 : 0{,}9856$ Haidinger. Häufigste Combination: $o = \varkappa\{111\}$, $-o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, Fig. 418 (einem regulären Oktaëder sehr ähnlich), durch die Oberflächenbeschaffenheit der beiden Sphenoide (das eine glänzend, das andere matt) leicht als hemiëdrisch zu erkennen. Diese Combination erscheint gewöhnlich in Zwillingen vom Ansehen derer des Spinell (Fig. 182), bei denen aber, wie bei den Zwillingen der Zinkblende (Fig. 203), an der Zwillingsgrenze o und $-o$ alterniren, daher keine Symmetrie nach {111} stattfindet. Man kann dieses Gesetz so

Fig. 418.

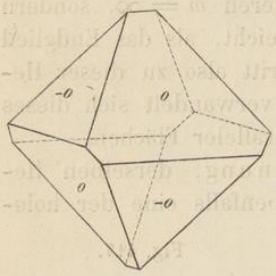


Fig. 419.

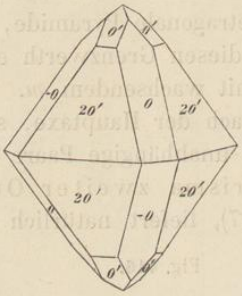
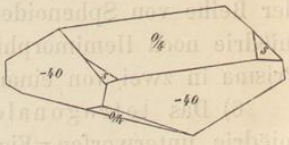
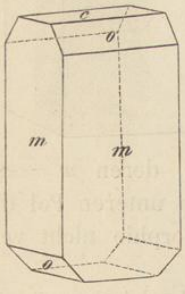


Fig. 420.



definiren, dass ein Krystall gegen den andern 180° um die Normale zu {111} gedreht ist, oder dass beide Krystalle symmetrisch sind in Bezug auf eine Ebene, welche in der Zone [11$\bar{1}$, 111] normal zu (111) liegt; während diese Ebene bei der regulären Zinkblende einer Fläche der Form {211} entspricht, ist dieselbe im vorliegenden Falle keine Krystallfläche. Ausser diesen Zwillingen kommen am Kupferkies auch symmetrische Verwachsungen mit (101) als Zwillingsebene vor. Weitere Combinationen: Fig. 419: $o = \varkappa\{111\}$, $-o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, $o' = \{101\}$, $2o' = \{201\}$, und Fig. 420: $^0/_4 = \varkappa\{114\}$, $-4o = \varkappa\{4\bar{4}1\}$, $s = \varkappa\{6.3.16\}$.

Fig. 421.



Harnstoff $= CH^4N^2O$. $a : c = 1 : 0{,}8345$ Schabus. Combination Fig. 421: $o = \varkappa\{111\}$, $m = \{110\}$, $c = \{001\}$. Spaltbarkeit {110} vollkommen, {001} unvollkommen. Doppelbrechung +, stark.

§. 85. **Die pyramidale Hemiëdrie.** Die zweite mögliche Art der Hemiëdrie des tetragonalen Systems entsteht nach S. 409 dadurch, dass die

Formen nach den vier in der Hauptaxe einander schneidenden Symmetrieebenen in acht gleiche Theile zerlegt werden, und die eine Hälfte derselben, z. B. die Flächen 2 oben und unten, 4 oben und unten u. s. f. der ditetragonalen Pyramide Fig. 408, zu einer hemiëdrischen Form vereinigt wird. Diese kann demnach nur nach der Basis Symmetrie zeigen.

1) Die ditetragonale Pyramide liefert, wenn man nach diesem Gesetze die Hälfte der Flächen auswählt (Fig. 422), eine tetragonale Pyramide dritter Ordnung oder der Zwischenstellung, ganz entsprechend der hexagonalen Pyramide dritter Ordnung, welche sich auf dieselbe Art aus der dihexagonalen ableitet. Stellt in Fig. 423 $p^1p^1p^1p^1$ den horizontalen Querschnitt der Pyramide erster Ordnung, also die Richtung der Basiskanten derselben, $p^2p^2p^2p^2$ die der Basiskanten der Pyramide zweiter Ordnung dar, so ist $p^3p^3p^3p^3$ der Querschnitt der einen Pyramide der dritten Ordnung. Diese Formen werden ebenso, wie die entsprechenden des hexagonalen Systems, bezeichnet:

Fig. 422.

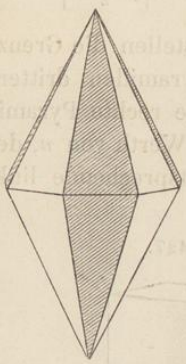
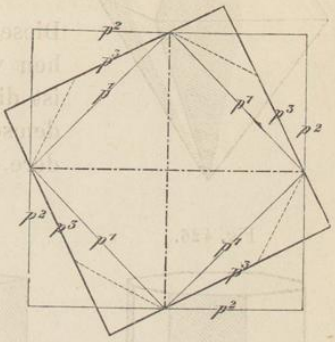


Fig. 423.

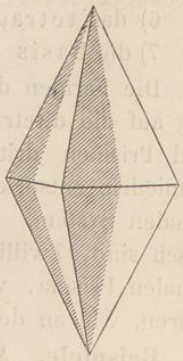


$$\pi\{khl\} = +\left[\frac{mPn}{2}\right] \text{ und } \pi\{hkl\} = -\left[\frac{mPn}{2}\right]$$

Ihre Combinationen mit anderen Formen werden bei den Beispielen betrachtet werden.

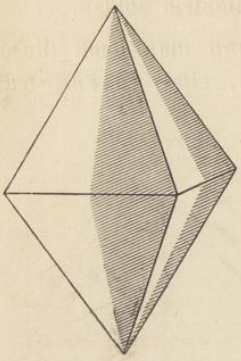
2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung, in gleicher Weise hemiëdrisch werdend, Fig. 424, bleibt scheinbar völlig ungeändert, und die Verschiedenheit einer derartigen hemiëdrischen Pyramide von der geometrisch ihr gleichenden holoëdrischen ist nur in Combinationen ersichtlich. Während z.B. die Kanten der letzteren von einer ditetragonalen Pyramide zugeschärft sein können, würden an der hemiëdrischen entweder nur die an der weissen oder nur die an der schwarzen Seite der Kanten gelegenen Zuschärfungsflächen (als Pyramide dritter Ordnung) auftreten und somit gleichsam die Ungleichwerthigkeit der beiden Hälften jeder Fläche der scheinbar holoëdrischen Form documentiren.

Fig. 424.



3) Die tetragonale Pyramide zweiter Ordnung, dem Gesetze der pyramidalen Hemiëdrie unterworfen, Fig. 425, behält ebenfalls ihre volle Flächenzahl bei.

Fig. 425.



4) Das ditetragonale Prisma dagegen wird, wie Fig. 426 zeigt, durch diese Hemiëdrie zerlegt in zwei tetragonale Prismen dritter Ordnung

$$\pi\{khl\} = +\left[\frac{\infty P n}{2}\right] \quad \text{und} \quad \pi\{hkl\} = -\left[\frac{\infty P n}{2}\right]$$

Dieselben stellen die Grenzformen der beiden Reihen von Pyramiden dritter Ordnung vor; das eine ist diejenige rechte Pyramide dritter Ordnung mit demselben Werth von n, deren $m = \infty$ ist, die andere die entsprechende linke.

Fig. 426.

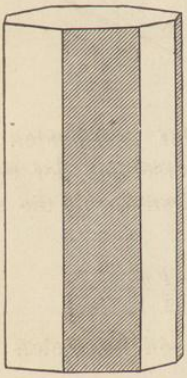


Fig. 427.

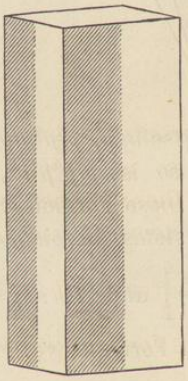
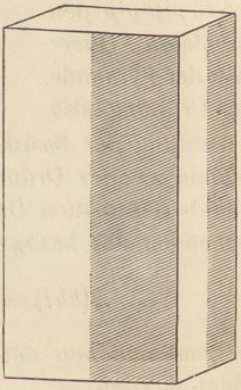


Fig. 428.



5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung Fig. 427,
6) das tetragonale Prisma zweiter Ordnung Fig. 428, und
7) die Basis erfahren durch diese Hemiëdrie keine Aenderung.

Die Formen dieser Abtheilung unterscheiden sich demnach nur in Bezug auf die ditetragonalen Pyramiden und Prismen, welche als Pyramiden und Prismen dritter Ordnung erscheinen, von den holoëdrischen; diese Hemiëdrie entspricht also in jeder Beziehung der gleichbenannten im hexagonalen System. Ihre Formen können, da sie nur nach der Basis symmetrisch sind, Zwillingsbildung zeigen nach dem 1., wie nach dem 2. tetragonalen Prisma, welche Fälle beide zu dem gleichen Verwachsungsgesetz führen, wie an den Scheelitzwillingen gezeigt werden soll.

Beispiele. An folgenden Körpern hat man bisher erkannt, dass sie pyramidal-hemiëdrisch krystallisiren:

Wolframsaurer Kalk (Scheelit) = $CaWO^4$. $a : c = 1 : 1{,}5359$ Dauber. Häufige Combination Fig. 429: $o = \{111\}$, $e = \{101\}$, $s = \pi\{131\}$, $h = \pi\{313\}$, und zwar von den beiden Pyramiden dritter Ordnung die eine an der einen, die andere an der anderen Seite. Nicht selten Zwillinge nach einer Fläche eines tetragonalen Prisma (Fig. 430, von derselben Form, wie Fig. 429, vertical von oben gesehen), zu einander symmetrisch stehend in Bezug auf eine Fläche $\{010\}$, welche die Basiskante der Pyramide e abstumpfen würde; dieselben sind auch zu einander symmetrisch in Bezug auf das Prisma $\{110\}$, die Abstumpfung der Basiskanten von $o = \{111\}$. Zwei Krystalle in dieser relativen Stellung erscheinen nun vollständig durch einander gewachsen, wie es Fig. 431 darstellt (ebenfalls von oben gesehen), so dass von den acht Achteln des Zwillings je vier abwechselnde dem einen, vier dem andern Krystall angehören, wie es die übereinstimmende Numerirung der Flächen e, h, o und s in beiden Figuren zeigt. Da von den Flächen e je eine des einen Krystalls mit einer des andern in eine Ebene fällt, so erscheint das Ganze wie eine einfache tetragonale Pyramide von der Form $\{101\}$, aber mit einspringenden Winkeln an den vier Basisecken und den Mitten der Basiskanten. Durch die Zwillingsbildung ist gleichsam die holoëdrische Symmetrie wieder hergestellt. Bei einer nicht ganz vollständigen Durchdringung der Krystalle können die einspringenden Ecken theilweise fehlen, oder sie können durch grössere Ausdehnung von o und e zum Verschwinden gebracht werden, in welchem Falle dann der Krystall wie ein einfacher mit holoëdrisch ausgebildetem h erscheinen würde und von einem solchen wegen des Parallelismus der Hauptaxe in beiden Krystallen nicht zu unterscheiden wäre. Spaltbarkeit $\{111\}$ und $\{001\}$ unvollkommen. Doppelbrechung +,

$$\omega = 1{,}918, \qquad \varepsilon = 1{,}934 \text{ Roth.}$$

Fig. 429.

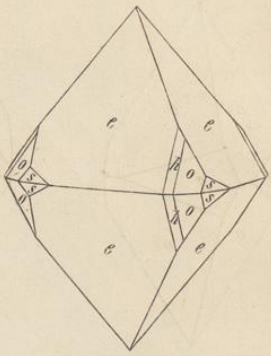


Fig. 430.

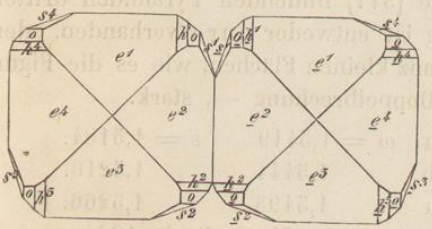
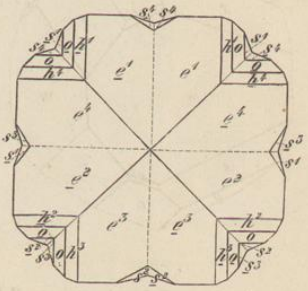


Fig. 431.



Wolframsaures Blei (nat. Scheelbleispath) = $PbWO^4$. $a : c = 1 : 1{,}567$ Lévy. Combination Fig. 432: $o = \{111\}$, $p = \pi\{430\}$ als Prisma dritter Ordnung. Spaltbarkeit $\{111\}$ unvollkommen.

Fig. 432.

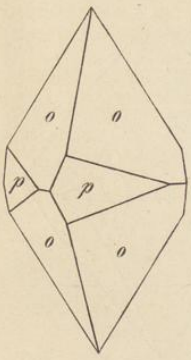
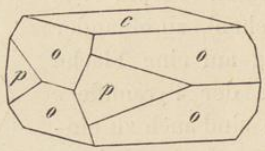
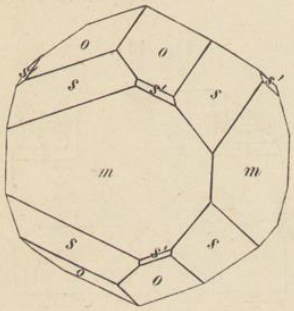


Fig. 433.



Molybdänsaures Blei (Wulfenit) = $PbMoO^4$. $a : c = 1 : 1{,}574$ Dauber. Combination Fig. 433: $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $p = \pi\{430\}$. Spaltbarkeit $\{111\}$. Doppelbrechung —, $\omega = 2{,}402$, $\varepsilon = 2{,}304$ Roth. (Des Cloizeaux, Ann. d. min. XIV.).

Fig. 434.



Erythroglucin = $C^4H^{10}O^4$ (Erythrit, Phycit). $a : c = 1 : 0{,}3762$ Schabus. Combination Fig. 434: $o = \{111\}$, $m = \{100\}$, $s = \pi\{131\}$, $s' = \pi\{311\}$. Von diesen beiden, zusammen die ditetragonale Pyramide $\{311\}$ bildenden Pyramiden dritter Ordnung ist entweder nur s vorhanden, oder s' mit ganz kleinen Flächen, wie es die Figur zeigt. Doppelbrechung —, stark.

Roth	$\omega = 1{,}5419$	$\varepsilon = 1{,}5184$.
Gelb	1,5444	1,5210.
Blau	1,5495	1,5266.

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 12.)

§ 86. **Die trapezoëdrische Hemiëdrie.** Bei der dritten und letzten der möglichen Hemiëdrien findet die Zerlegung statt nach allen Symmetrieebenen (vergl. S. 410).

1) Die trapezoëdrisch-hemiëdrischen Formen der ditetragonalen Pyramiden entstehen demnach durch Auswahl von acht alternirend oben und unten gelegenen Flächen, Fig. 435. Aus jeder derselben resultiren demnach zwei Hemiëder, aus den weiss gelassenen Flächen die in Fig. 436*a*, aus den schwarz bezeichneten die in Fig. 436*b* dargestellte Gestalt, welche nach der Trapezform, die deren Flächen bei gleicher Centraldistanz besitzen, tetragonale Trapezoëder heissen. Die beiden aus einer ditetragonalen Pyramide entstehenden Trapezoëder sind enantiomorph, sie können durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden. Denken wir uns zwei senkrechte Ebenen durch die Nebenaxen gelegt und dadurch die ditetragonale Pyramide in vier Quadranten getheilt, so entsteht eine hemiëdrische Form (Fig. 436*a*) dadurch,

dass die rechte obere und linke untere Fläche jedes Quadranten bleibt, die beiden anderen verschwinden; diese Form wird das rechte

Fig. 435.

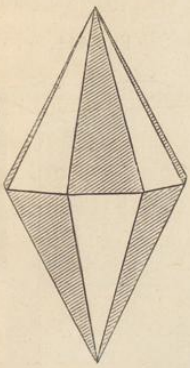


Fig. 436 *a*.

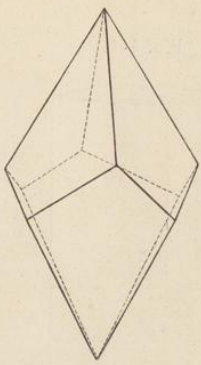
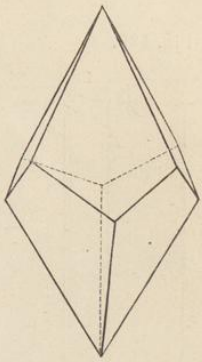


Fig. 436 *b*.



Trapezoëder genannt, die entgegengesetzte, in welcher also die linke obere Fläche jenes Quadranten auftritt, das linke; bezeichnet werden dieselben mit $r\{khl\}$ und $r\{hkl\}$

$$= \frac{mPn}{2} r \text{ und } \frac{mPn}{2} l$$

Die Trapezoëder besitzen je acht gleiche Polkanten und ebenso viel Mittelkanten, von denen vier stumpfere (bei den rechten Trapezoëdern von links unten nach rechts oben, bei den linken entgegengesetzt laufend, falls, wie in Fig. 435 und 436, $n > 2{,}4142$, vergl. S.397) und vier schärfere sind.

2) Die tetragonalen Pyramiden erster Ordnung, demselben Gesetze der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 437, liefern Formen, welche sich geometrisch nicht von den holoëdrischen unterscheiden, da von den zwei Flächen der ditetragonalen Pyramide, welche hier in eine Ebene fallen, eine zur hemiëdrischen Form gehört, also diese Ebene, und ebenso alle sieben anderen an dieser auftreten müssen.

Fig. 437.

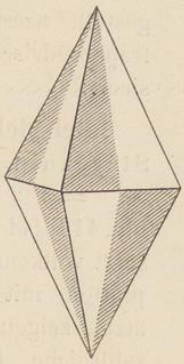
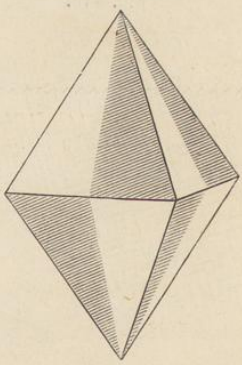


Fig. 438.



3) Das Gleiche ist der Fall mit den tetragonalen Pyramiden zweiter Ordnung, welche, wie Fig. 438 zeigt, durch diese Hemiëdrie nicht verändert werden.

4) Die ditetragonalen Prismen Fig. 439,
5) das tetragonale Prisma erster Ordnung Fig. 440,
6) das tetragonale Prisma zweiter Ordnung Fig. 441,
7) die Basis (s. Fig. 439 bis 441) liefern in Folge dessen ebenfalls

Fig. 439.

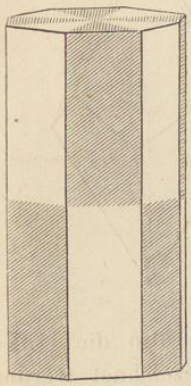


Fig. 440.

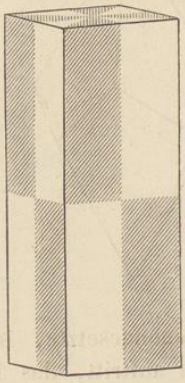
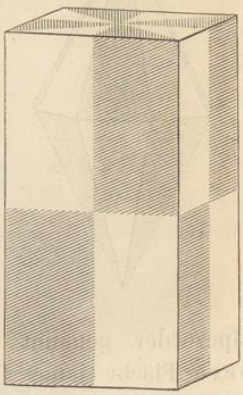


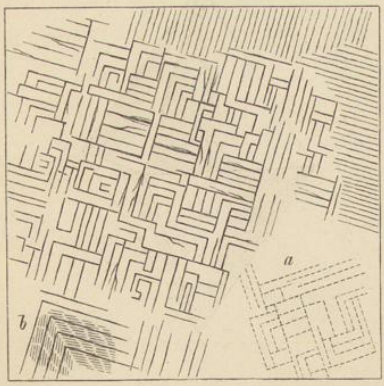
Fig. 441.



hemiëdrische Formen dieser Abtheilung, welche vollkommen mit den holoëdrischen übereinstimmen.

Da sich demnach die Krystallformen dieser Art von Hemiëdrie nur in Beziehung auf die ditetragonalen Pyramiden von den holoëdrischen unterscheiden, so müssen die hierher gehörigen Körper, deren man bis jetzt vier (sämmtlich organische Verbindungen) kennt, wenn keine Flächen von ditetragonalen Pyramiden an deren Krystallen vorkommen, sich nur durch ihre Circularpolarisation in der Richtung der Hauptaxe als hierher gehörig erkennen lassen. Durch diese Eigenschaft ist denn auch zuerst festgestellt worden, dass folgende Stoffe trapezoëdrisch-hemiëdrisch krystallisiren:

Fig. 442.



Beispiele. Schwefelsaures Strychnin $= (C^{21}H^{24}N^2O^2)S^2O^8 + 13$ aq. $a : c = 1 : 3{,}312$. Comb. (ähnlich Fig. 443) {111}, {001}; nach {001} äusserst vollkommen spaltbar. Spaltungsplatten, mit verdünnter Salzsäure geätzt, zeigen unter dem Mikroskop zahlreiche feine Risse (s. Fig. 442), welche stets gegen den Umriss der Platte nach derselben Seite gedreht erscheinen. Aetzt man auch die Unterseite der Platte und stellt das Mikroskop auf diese ein, so erweisen sich dieselben umgekehrt gedreht (s. in Fig. 442

bei *a*), wie es der trapezoëdrischen Hemiëdrie entspricht (Baumhauer, Zeitschr. f. Kryst. 5, 577). Doppelbrechung —. Drehung: 9—10° Roth (für 1 mm), stets links (ebenso, aber in schwächerem Grade, dreht die wässerige Lösung des Salzes, und ist dies das einzige bekannte Beispiel eines Körpers, der fest und in Lösung Circularpolarisation zeigt. — Des Cloizeaux, Ann. d. min. XI, 340.

Schwefelsaures Aethylendiamin $= (C^2H^4)H^4N^2$, H^2SO^4. $a : c = 1 : 1{,}4943$. Combination entweder Fig. 443: $2o = \{221\}$, $c = \{001\}$, oder Fig. 444: $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{101\}$, $2o' = \{201\}$. Spaltbarkeit vollkommen nach $\{001\}$. Doppelbrechung +. Drehung 15° 30′ für Natriumgelb. (V. von Lang, Sitz. Ber. d. Wien. Akad. LXV, II.).

Fig. 443.

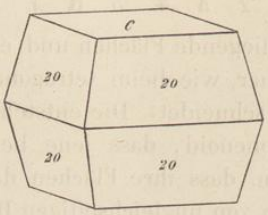
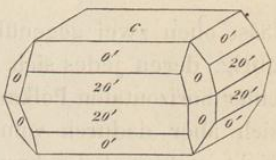


Fig. 444.



Kohlensaures Guanidin $= (CH^5N^3)^2H^2CO^3$. $a : c = 1 : 0{,}9910$. Combination $\{111\}$, $\{001\}$, $\{100\}$, die beiden letzteren klein, so dass diese Combination fast vollkommen einer regulären: $\{111\}$, $\{100\}$ gleicht. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen. Doppelbrechung —, nicht stark.

		ω	ε
Roth	$Li =$	1,4922	1,4818
Gelb	$Na =$	1,4963	1,4864
Grün	$Tl =$	1,5003	1,4899.

Drehung 12° 35′ *Li*, 14° 34′ *Na*, 17° 4′ *Tl* (Bodewig, Poggend. Ann. 157, 122).

Diacetylphenolphtaleïn $= C^{20}H^{12}O^4(C^2H^3O)^2$. $a : c = 1 : 1{,}3593$. Combination (s. Fig. 445): $o = \{111\}$, $p = \{100\}$ und $c = \{001\}$ oder statt der letzteren Fläche eine sehr stumpfe Pyramide m, annähernd $\{1.1.200\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$ deutlich. Doppelbrechung—. Die Krystalle sind theils rechts-, theils linksdrehend.

Fig. 445.

Drehung 17,1° *Li*, 19,7° *Na*, 23,8° *Tl* (Bodewig, Zeitschr. f. Kryst. 1, 72).

§. 87. **Mögliche Arten der Tetartoëdrie des tetragonalen Systems.** Wenden wir auf den allgemeinen Repräsentanten aller Formen, die ditetragonale Pyramide, zwei von den drei Arten der Hemiëdrie gleichzeitig an, so sind, wie in dem hexagonalen System (§. 76) drei Fälle möglich, von denen wieder, wie dort, nur zwei zu Formen führen, welche den Bedingungen der Hemiëdrie genügen. Während nämlich die gleichzeitige Anwendung der trapezoëdrischen (von links oben durchstrichen) und der

pyramidalen (von rechts oben durchstrichen) Hemiëdrie folgende Flächen übrig lässt:

$$\begin{array}{cccccccc} \not{1} & 2 & \not{3} & 4 & \not{5} & 6 & \not{7} & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

also nur vier die obere Hälfte der Hauptaxe schneidende, so führen die beiden anderen möglichen Wege zu folgenden Resultaten:

1) Gleichzeitige Anwendung der trapezoëdrischen und der sphenoidischen Hemiëdrie:

$$\begin{array}{cccccccc} \not{1} & 2 & \not{3} & 4 & \not{5} & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & \not{4} & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

lässt oben zwei gegenüberliegende Flächen und ein ebensolches Paar unten übrig, deren jedes sich daher, wie beim tetragonalen Sphenoid Fig. 412, in einer horizontalen Polkante schneidet. Die entstehende Form*) unterscheidet sich aber dadurch vom Sphenoid, dass jene beiden Kanten sich bei ihr nicht rechtwinkelig kreuzen, dass ihre Flächen daher nicht die Gestalt von gleichschenkeligen, sondern von ungleichseitigen Dreiecken haben, dass endlich von ihren vier Mittelkanten zwei abwechselnde schärfer, zwei stumpfer sind. Man sieht hieraus, dass diese Form vollständig dem trigonalen Trapezoëder entspricht, nur dass sie oben und unten, statt drei, nur zwei, zu den anderen unsymmetrisch gestellte Flächen besitzt. Jedes tetragonale Skalenoëder zerfällt dabei in ein rechtes und ein linkes Tetartoëder, welche enantiomorph sind, daher ein Körper, welcher in diese Abtheilung gehörte, circularpolarisirend sein könnte. Diese Tetartoëdrie, auf die übrigen Formen angewendet, führt in der That auch auf diejenigen, welche den entsprechenden in der trapezoëdrischen Tetartoëdrie des Hexagonalsystems ganz analog sind: die tetragonalen Pyramiden erster Ordnung werden Sphenoide (entsprechend den Rhomboëdern), die Pyramiden zweiter Ordnung werden horizontale Prismen, bestehend aus zwei gegenüberliegenden Flächen oben und den beiden parallelen unten (entsprechend den trigonalen Pyramiden), das ditetragonale Prisma liefert ein solches von rhombischem Querschnitt (entsprechend dem ditrigonalen), das Prisma erster Ordnung, wie die Basis, bleibt unverändert, das Prisma zweiter Ordnung verwandelt sich in ein paralleles Flächenpaar. Ein Krystall würde demnach schon als hierher gehörig erkannt sein, wenn er statt tetragonaler Pyramiden Sphenoide zeigte und zugleich die Eigenschaft der Circularpolarisation besässe.

2) Die gleichzeitige Anwendung der sphenoidischen und pyramidalen Hemiëdrie:

$$\begin{array}{cccccccc} \not{1} & 2 & 3 & 4 & \not{5} & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & \not{3} & \not{4} & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

liefert offenbar als tetartoëdrische Formen der ditetragonalen Pyramiden tetragonale Sphenoide, welche sich von den hemiëdrischen nur durch ihre

*) Dergl. Formen werden wir in der Hemiëdrie des rhombischen Systems kennen lernen, wo solche in Fig. 494 *a*, *b* dargestellt sind.

Stellung unterscheiden, daher als »Sphenoide dritter Ordnung« zu bezeichnen sind. Wie diese den Rhomboëdern dritter Ordnung in der rhomboëdrischen Tetartoëdrie des hexagonalen Systems entsprechen, so auch die übrigen aus dieser Tetartoëdrie resultirenden Formen. Die Pyramiden erster und zweiter Ordnung werden Sphenoide erster und zweiter Ordnung (entsprechend den Rhomboëdern derselben Ordnungen), die ditetragonalen Prismen werden tetragonale dritter Ordnung, das Prisma erster und zweiter Ordnung, sowie die Basis, bleiben ungeändert.

Von keiner der beiden möglichen Arten der Tetartoëdrie des tetragonalen Systems ist es bisher gelungen, Beispiele aufzufinden; dieselben haben also vorläufig nur ein theoretisches Interesse, welches hauptsächlich in dem Nachweis besteht, dass die vollkommene Analogie des Tetragonal- und Hexagonalsystems, welche sich in allen Einzelheiten der Hemiëdrie documentirte, sich auch auf die Tetartoëdrie erstreckt.

Die physikalischen Eigenschaften der hexagonalen und tetragonalen Krystalle.

§. 88. **Specielle Darstellung des Zusammenhanges zwischen dem physikalischen Verhalten und der Form bei den einaxigen Krystallen.** Bereits in §. 44 wurde aus dem allgemeinen Grundgesetz der physikalischen Krystallographie abgeleitet, dass die hexagonalen und tetragonalen Krystalle ihrer Symmetrie wegen die Klasse der einaxigen bilden, und dass die physikalische Hauptaxe derselben mit ihrer krystallographischen zusammenfallen müsste. Nach der nunmehr erlangten Kenntniss der Formen beider Systeme, welche gezeigt hat, dass die letzteren nur dadurch verschieden sind, dass jede hexagonale Form $1\frac{1}{2}$ mal so viel Flächen besitzt, als die ihr entsprechende tetragonale, können wir jetzt dazu übergehen, den Zusammenhang der physikalischen und geometrischen Eigenschaften dieser beiden Klassen von Krystallen im Einzelnen zu erörtern.

Was zunächst die Elasticität betrifft, so ist klar, dass dieselbe ein Maximum oder Minimum in der Richtung der Hauptaxe haben muss, wodurch indessen nicht ausgeschlossen ist, dass nicht andere Maxima von höherem, oder Minima von geringerem Betrage vorhanden sein können. Von der Richtung der Hauptaxe ausgehend, nimmt die Elasticität zu oder ab, aber nach verschiedenen Richtungen verschieden; nur innerhalb gleichwerthiger Symmetrieebenen in gleicher Weise, so dass die Elasticität denselben Werth besitzt in den Richtungen der zwei, resp. drei Nebenaxen in tetragonalen, resp. hexagonalen Krystallen, ebenso wie sie in den zwei, resp. drei Zwischenaxen gleich sein muss. Diese Gleichheit der Elasticität findet aber nur statt bei holoëdrischen Krystallen. Bei hemiëdrischen, bei denen die Symmetrie eine geringere ist, zeigen auch die Elasticitätsverhältnisse keinen höheren Grad von Symmetrie, als die geometrischen. Dies ist sehr detaillirt nachgewiesen worden durch die bereits S. 363 erwähnte Untersuchung des Kalkspaths von Baumgarten; denkt man sich die in Fig. 331 in einem Durchschnitt dargestellte vollständige Elasticitätsfläche,

so bildet dieselbe eine sehr complicirte krumme Oberfläche, welche, wenn man sie sich um das Spaltungsrhomboëder herum beschrieben denkt, über den drei oberen, wie über den drei unteren Flächen desselben, also alternirend, je einen Buckel, dazwischen je eine Einsenkung zeigt und nur symmetrisch ist zu den drei verticalen Ebenen, in welchen die Zwischenaxen liegen, welche Ebenen ja auch die einzigen Symmetrieebenen des Rhomboëders sind.

Die Härte nach verschiedenen Richtungen ist noch bei sehr wenigen einaxigen Körpern genauer untersucht worden (s. Exner, Härte an Krystallen S. 45 f.), nämlich am unterschwefelsauren Blei, bei dessen Krystallen die Differenzen derselben so gering sind, dass sie in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen, daher die Härtecurven auf allen Flächen Kreise geben (im Zusammenhang damit sind auch die Differenzen der Cohäsion bei diesem Körper so gering, dass er keine erkennbare Spaltbarkeit zeigt); ferner liegen Beobachtungen vor am Kalkspath, nach welchen z. B. die Härtecurve auf der Basis drei Maxima und drei Minima zeigt, welche ganz genau der rhomboëdrischen Symmetrie entsprechen. Da es hiernach auch für die noch nicht untersuchten einaxigen Krystalle anzunehmen ist, dass sie in Bezug auf die Härte sich ähnlich verhalten, und dass sie, wie es bei regulären Körpern gezeigt wurde, die kleinste Zahl von Minimis und Maximis der Härte zeigen, welche ihrer Symmetrie entsprechend möglich ist, so gelangt man hier durch analoge Betrachtungen, wie sie §. 63 bei den regulären Körpern angestellt wurden, zu dem Schlusse, dass eine Spaltbarkeit nicht existiren könne parallel den Flächen einer dihexagonalen oder ditetragonalen Pyramide oder eines dihexagonalen, resp. ditetragonalen Prismas, sondern nur nach der Basis, einer hexagonalen oder tetragonalen Pyramide (bei einem rhomboëdrisch-hemiëdrischen oder einem tetartoëdrischen Krystall nach einem Rhomboëder), oder endlich nach einem hexagonalen resp. tetragonalen Prisma. Die Richtigkeit jener Annahme wird dadurch bestätigt, dass in der That keine anderen Spaltungsrichtungen beobachtet werden, als die zuletzt angeführten. In der Richtung der Hauptaxe kann sowohl ein Cohäsionsminimum, dies giebt basische Spaltbarkeit, als ein Maximum liegen; in letzterem Falle liegen die Minima entweder in den Normalen zu Pyramiden oder Prismen. Daraus folgt, dass die Spaltbarkeit nach {001} etwa so häufig vorkommen muss, als pyramidale und prismatische zusammen genommen, d. h. dass die basische Spaltbarkeit die häufigste sein muss, ein Schluss, welcher durch die Erfahrung bestätigt wird.

Die optischen Eigenschaften ergeben sich sämmtlich aus dem allgemeinen Grundgesetz der physikalischen Krystallographie. Nach diesem ist jede geometrische Symmetrieebene auch eine physikalische; dabei ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass in physikalischer Beziehung noch mehr Symmetrieebenen existiren, welche keine geometrischen sind, d. h. dass in Bezug auf irgend eine physikalische Eigenschaft die Symmetrie eine noch höhere ist. In den mit einander in innigem Zusammenhange stehenden

Eigenschaften der Elasticität, Cohäsion und Härte lernten wir solche kennen, deren Symmetrie bei den tetragonalen und hexagonalen Krystallen absolut zusammenfällt mit deren geometrischer Symmetrie; die optischen Verhältnisse zeigen natürlich dieselbe Symmetrie, aber zugleich noch eine solche höheren Grades. Es sind in optischer Beziehung nicht blos alle Nebenaxen, wie alle Zwischenaxen, unter einander gleichwerthig, sondern auch alle anderen Richtungen, welche denselben Winkel mit der Hauptaxe einschliessen. Da die optische Elasticitätsfläche der einaxigen Krystalle, deren Axe mit ihrer geometrischen Hauptaxe zusammenfällt, symmetrisch ist zu jedem Hauptschnitt, d. h. zu jeder verticalen, durch die optische Axe gehenden Ebene, so besitzen die hexagonalen und tetragonalen Krystalle ausser der horizontalen Haupt-Symmetrieebene in optischer Beziehung noch unendlich viele Symmetrieebenen, da jede Verticalebene eine solche ist. Die Erscheinungen, welche ein durch zwei parallele Flächen betrachteter Krystall im polarisirten Licht zeigt, ergeben sich unmittelbar aus dem, was in der ersten Abtheilung über die optischen Eigenschaften der einaxigen Krystalle gesagt worden ist. Blicken wir durch die Basis eines tetragonalen oder hexagonalen Krystalls, welcher entweder nach derselben tafelartig ausgebildet ist, oder an welchem wir jenes Flächenpaar durch Abschleifen künstlich hervorgebracht haben, so bleibt derselbe zwischen gekreuzten Nicols im parallelen Licht bei jeder Drehung dunkel*), im convergenten Licht sehen wir das Axenbild der einaxigen Krystalle. Betrachten wir dagegen einen tetragonalen oder hexagonalen Krystall durch irgend ein anderes Flächenpaar im parallelen Licht, so wird er bekanntlich beim Drehen hell und dunkel, und zwar das letztere jedesmal dann, wenn sein Hauptschnitt, d. h. die Ebene durch die Hauptaxe und durch die Normale zu jenem Flächenpaar (die Richtung der hindurchgehenden Strahlen), einem der beiden gekreuzten Nicolhauptschnitte parallel ist. Durch die Lage des Krystalls gegen die Nicols, wenn diese Auslöschung des Lichtes stattfindet, sind die Schwingungsrichtungen der beiden aus dem Krystall austretenden Strahlen bestimmt, denn die des ausserordentlichen ist im Hauptschnitt, also die Durchschnittsrichtung desselben mit der Ebene des Flächenpaares, die des ordentlichen in der letzteren und senkrecht zur ersteren. Wie sich nun die Schwingungsrichtungen einer Krystallplatte gegen die krystallographischen Richtungen verhalten, ergiebt sich ganz von selbst. Nehmen wir einen prismatisch ausgebildeten tetragonalen oder hexagonalen Krystall und blicken durch irgend zwei parallele Prismenflächen, so müssen die Schwingungsrichtungen offenbar, die eine parallel, die andere senkrecht zu den Prismenkanten stehen; der Krystall muss dunkel erscheinen, sobald seine Hauptaxe der Schwingungsrichtung des einen der beiden Nicols parallel ist.

*) Falls er nicht circularpolarisirend ist, denn alsdann zeigt er eine von seiner Dicke und Stärke der Drehung abhängige Farbe, welche aber dieselbe bleibt, wenn man ihn in seiner Ebene dreht.

Betrachten wir dagegen eine tetragonale oder hexagonale Pyramide durch zwei entgegengesetzte Flächen im polarisirten Licht, so ist die Schwingungsrichtung des ordentlichen Strahls, da sie senkrecht zum Hauptschnitt ist, parallel der Basiskante der betreffenden Pyramide, die des ausserordentlichen parallel der Höhenlinie des Dreiecks, welches die Austrittsfläche mit den benachbarten bildet, oder, was dasselbe ist, parallel der Halbirenden des ebenen Winkels zwischen den beiden die Fläche begrenzenden Polkanten. Einen besonderen Fall hiervon stellt das Rhomboëder dar; blicken wir durch ein paralleles Rhomboëderflächenpaar, so müssen wir finden, dass die Schwingungsrichtungen den beiden Diagonalen der Flächen parallel sind.

Was die Absorption des Lichtes in den hexagonalen und tetragonalen Krystallen betrifft, so ist die Flächenfarbe der Basis, d. h. die Farbe des durch eine basische Platte hindurchgelassenen Lichtes $= A$ (vergl. S. 146), d. i. die Farbe der senkrecht zur Axe schwingenden Strahlen; die Flächenfarbe jeder einer prismatischen Fläche parallelen Platte ist die am meisten von jener abweichende (s. übrigens a. a. O.).

Die thermischen Eigenschaften ergeben sich ebenso aus den Darlegungen der §. 32 u. 33. Die Winkel sämmtlicher Prismenflächen zu einander können durch keine Temperaturänderung alterirt werden, ebenso wenig ihre Neigung gegen die Basis. Dagegen müssen die Neigungen aller der thermischen, d. i. der krystallographischen, Hauptaxe nicht parallelen Flächen (ausser der Basis) mit der Temperatur variiren; und da alle Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Hauptaxe bilden, thermisch, wie optisch, gleichwerthig sind, so findet die Aenderung der Neigung für alle gleichgeneigten Flächen auch gleichartig statt, d. h. die Polkanten einer hexagonalen oder tetragonalen Pyramide oder eines Rhomboëders werden alle gleichmässig spitzer oder stumpfer, wenn die Temperatur des Krystalles steigt. Wenn sich also auch das Axenverhältniss der Substanz ändert, so bleibt Eines doch völlig unabhängig von der Temperatur bestehen, das ist die Symmetrie des Krystalls, oder, was dasselbe sagen will, sein Krystallsystem. Dieses Gesetz, dass das System eines Krystalles durch keine Temperaturänderung desselben alterirt wird, ist ein ganz allgemeines, es fällt zusammen mit demjenigen, welches wir S. 205 als das Gesetz »der Erhaltung der Zonen« bezeichneten.

C. Krystalle ohne Hauptaxe.

(Optisch zweiaxige Krystalle.)

IV. Das rhombische Krystallsystem.

§. 89. **Die Symmetrie der rhombischen Krystalle.** Das rhombische Krystallsystem umfasst alle Formen, welche zwar einer Haupt-Symmetrieebene entbehren, aber drei zu einander senkrechte gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen. Von den Normalen zu diesen Ebenen, den drei Symmetrieaxen der rhombischen Formen, kann also keine mit einer anderen vertauscht werden, ohne die Gestalt zu ändern, keine ist einer anderen gleichwerthig. Nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie müssen die drei Symmetrieebenen nun auch solche sein in Bezug auf alle physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle. Die Elasticität kann ihr Hauptminimum oder -maximum haben in irgend einer der drei Symmetrieaxen, sie kann aber auch Maxima und Minima haben in anderen Richtungen, nur müssen diejenigen, in welchen sie den gleichen Werth besitzt, symmetrisch zu einander liegen in Bezug auf jene drei Ebenen. Trägt man also auf jede Richtung, von einem gemeinsamen Mittelpunkt aus, eine Länge, proportional dem Werthe des Elasticitätscoëfficienten in dieser Richtung, auf, so liegen die Endpunkte aller dieser Radien auf einer geschlossenen krummen Oberfläche, welche symmetrisch getheilt wird durch jede der drei krystallographischen Symmetrieebenen. Ebenso muss nach denselben die Härte und die Cohäsion symmetrisch sein. Existirt in einem rhombischen Krystall also nach irgend einer Richtung ein Minimum der Cohäsion (senkrecht dazu also Spaltbarkeit), so muss das Gleiche stattfinden in jeder Richtung, welche zu jener symmetrisch liegt in Bezug auf eine der drei erwähnten Ebenen.

Wie bereits hergeleitet wurde (§. 44), müssen die Krystalle ohne Hauptaxe optisch zweiaxig sein. Bei der jetzt zu betrachtenden ersten Klasse derselben, der rhombischen, müssen die optischen Verhältnisse in ihrer Gesammtheit der Symmetrie nach den drei auf einander senkrechten krystallographischen Symmetrieebenen unterworfen sein. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die drei Hauptschnitte der optischen Elasticitäts- und der Wellenfläche absolut zusammenfallen, und zwar für alle Farben, mit den drei geometrischen Symmetrieebenen der Krystalle. Dann fallen die Hauptschnitte

also auch für die verschiedenen Farben zusammen, d. h. wir haben denjenigen einfachsten Fall der optisch zweiaxigen Krystalle vor uns, der S. 110 f. ausführlich erörtert worden ist. Daraus folgt, dass die Richtungen der drei optischen Elasticitätsaxen zugleich diejenigen der drei Symmetrieaxen sind; dass stets eine der letzteren die Schwingungsrichtung der grössten Lichtgeschwindigkeit, eine andere die der kleinsten, die dritte die der mittleren ist; dass die optische Axenebene bei den rhombischen Krystallen stets eine der drei Symmetrieebenen ist, wobei nicht ausgeschlossen, dass für einen Theil der Farben die eine, für den übrigen Theil eine der beiden anderen Symmetrieebenen optische Axenebene ist (vergl. S. 112). Diese optische Symmetrie und ihr Verhältniss zur geometrischen muss auch erhalten bleiben, sobald der Krystall eine andere Temperatur annimmt; ändert sich hierbei auch der Winkel der optischen Axen, so bleibt die Lage der Mittellinie doch immer constant einer Symmetrieaxe parallel; ist die Aenderung der drei Hauptbrechungsindices so verschieden, dass ein Wechsel der Axenebene eintritt, so geht dieselbe in eine andere der drei Symmetrieebenen über u. s. f. (vergl. S. 176).

Auch die thermischen Verhältnisse der rhombischen Krystalle befolgen das allgemeine Grundgesetz der physikalischen Krystallographie. So ist eine der drei Symmetrieaxen stets die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme, eine andere die der kleinsten, die dritte die der mittleren. Da die thermische Ausdehnung des Krystalls somit symmetrisch zu den geometrischen Symmetrieebenen erfolgt, so mögen die Aenderungen der Dimensionen nach den verschiedenen Richtungen noch so ungleich sein, niemals wird dadurch der Grad der Symmetrie eines rhombischen Krystalls geändert werden können.

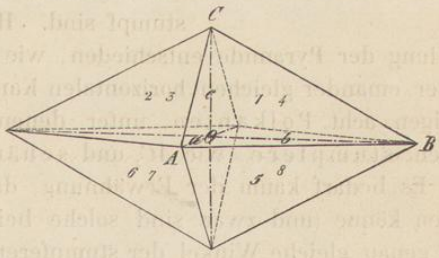
Endlich gilt das Gleiche auch von den übrigen physikalischen Eigenschaften; eine der drei Symmetrieaxen ist z. B. die Richtung des stärksten Para- oder Diamagnetismus, die beiden anderen die des mittleren und kleinsten u. s. f. Dabei aber ist es selbstverständlich nicht nöthig, dass dieselbe Symmetrieaxe, der die Richtung der grössten Lichtgeschwindigkeit parallel ist, zugleich auch die Axe der grössten thermischen Ausdehnung, der grössten Wärmeleitungsfähigkeit u. s. w. ist, da ja selbst für das Licht diese Uebereinstimmung nicht allgemein ist, indem es Krystalle giebt, in welchen die Richtung der mittleren optischen Elasticität in Bezug auf eine Farbe diejenige der kleinsten für eine andere Farbe ist.

§. 90. **Wahl der Axen und der Grundform.** Bei der Betrachtung der bisherigen Krystallsysteme wurden stets Symmetrieebenen zu Axenebenen gewählt, weil alsdann die Indices der übrigen Krystallflächen die einfachsten Werthe erhielten, und vor Allem, weil in diesem Falle alle Flächen einer einfachen Form gleiche Indices hatten. Es wird daher nicht zweifelhaft sein, dass es in jeder Hinsicht das Einfachste und Bequemste sei, im rhombischen Systeme ebenso zu verfahren; nur haben wir hier keine Wahl unter den Symmetrieebenen, da eben nur die erforderliche Zahl von dreien

vorhanden ist. Nehmen wir also diese zu Axenebenen, so werden die drei Symmetrieaxen die Axen, auf welche wir die Formen des rhombischen Systems zu beziehen haben, und welche sämmtlich zu einander senkrecht stehen, so dass diese Wahl auch noch den wichtigen Vortheil sehr vereinfachter Berechnung mit sich bringt. Unter diesen Axen ist nun aber keine eine Hauptaxe, es ist also völlig gleichgültig, welche derselben wir vertical aufstellen, da alle drei gleichsam von demselben Range sind.

Hiermit haben wir von den Elementen eines Krystalls nur die Axenwinkel (sämmtlich $= 90^0$); um auch das Parameterverhältniss festzustellen, haben wir nun eine Grundform auszuwählen, d. h. eine Fläche, welche die drei Axen in endlichen Abständen schneidet, und das Verhältniss der letzteren festzustellen. Sei dieses $= a : b : c$, oder, wenn wir eine Axenlänge gleich 1 setzen, $= a : 1 : c$, so beziehen sich die absoluten Längen a, b und c auf die drei Symmetrieaxen; in deren Richtungen ist aber bekanntlich die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme eine verschiedene, diese Längen ändern sich also mit der Temperatur nicht in dem gleichen Verhältnisse, folglich ändert sich mit dieser das Verhältniss $a : b : c$, oder die absoluten Zahlen a und c in der Relation $a : 1 : c$, stetig: es müssen diese also irrationale Zahlen sein und genau genommen nur für eine bestimmte Temperatur gelten. Bei einer anderen hat die zur Grundform gewählte Fläche andere Neigungswinkel (wenn auch nur sehr wenig verschiedene) zu den Axenebenen (vergl. S. 170). Die Symmetrie des Krystalls erfordert nun zu dieser Fläche noch sieben zugehörige. Seien in Fig. 446 $a = OA$, $b = OB$ und $c = OC$ die Parameter der Grundform, so erfordert die Symmetrie nach der Ebene ac (d. i. AOC) zu jener, mit 1 bezeichnet, die Fläche 2, die Symmetrie nach bc die Flächen 3 und 4, und endlich die Symmetrie nach ab die vier unteren Flächen 5—8. So erhalten wir als vollständige Grundform eine Gestalt, welche, weil ihr Durchschnitt durch jede der drei Symmetrieebenen die Gestalt eines Rhombus hat, rhombische Pyramide genannt wird. Es ist üblich, die zur Grundform gewählte*) und die primäre genannte Pyramide so zu stellen, dass von den beiden horizontalen Axen die kürzere auf den Beobachter zuläuft, also mit a bezeichnet wird; da man gewöhnlich $b = 1$ setzt, so ist demnach der

Fig. 446.



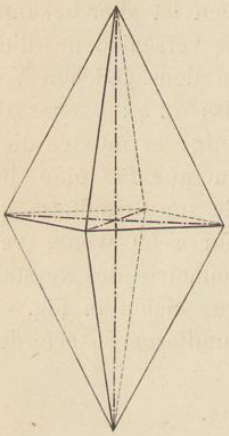
*) Welche von den verschiedenen möglichen oder vorkommenden Pyramiden eines rhombischen Krystalls man zur Grundform wählt, ist an und für sich gleichgültig (vergl. darüber die Bemerkungen S. 319).

Zahlenwerth von a stets kleiner als 1. Man nennt nun diese Axe die Brachydiagonale (auch »Brachyaxe«), die querlaufende b die Makrodiagonale (oder »Makroaxe«). Dass es völlig gleichgültig ist, welche der drei Symmetrieaxen wir vertical stellen, wurde bereits oben erwähnt; die dazu gewählte nennt man Verticalaxe*) oder kurz Verticale, und bezeichnet, wie bisher, ihre Länge mit c. Die in Fig. 446 dargestellte Pyramide hat das Axenverhältniss:

$$a : b : c = 0{,}4271 : 1 : 0{,}5258.$$

Wir hätten aber mit demselben Rechte auch jede der beiden anderen, z. B. die mit b bezeichnete Axe, zur Verticalen machen können; dann würde die bisherige Verticale zur Makrodiagonalen, die frühere Brachydiagonale würde es auch in der neuen Stellung bleiben, und wir hätten die in Fig. 447 dargestellte Form mit dem Axenverhältniss

Fig. 447.



$$a : b : c = 0{,}8130 : 1 : 1{,}9037$$
$$\text{(d. i. } = 0{,}4271 : 0{,}5258 : 1\text{)}.$$

Bei gleicher Ausdehnung der Flächen besitzt die rhombische Pyramide sechs Ecken, welche 2+2kantig sind, da von den vier in einer solchen zusammenstossenden Kanten je zwei gegenüberliegende gleich (wegen der Symmetrie), zwei benachbarte im Allgemeinen ungleich sein müssen (weil sonst die Pyramide tetragonal wäre, also eine höhere Symmetrie hätte). Daraus folgt, dass die genannte Gestalt dreierlei Kanten besitzt, von denen je vier, welche einer Symmetrieebene parallel sind und deren Winkel von derselben halbirt wird, gleich stumpf sind. Haben wir uns für eine bestimmte Stellung der Pyramide entschieden, wie Fig. 446, so nennen wir die vier unter einander gleichen horizontalen Kanten, z. B. AB, Basiskanten, die übrigen acht Polkanten, unter denen wir zweierlei zu unterscheiden haben, stumpfere, wie AC, und schärfere, wie BC.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass es auch rhombische Pyramiden geben könne (und zwar sind solche bei jeder Substanz möglich), welche fast genau gleiche Winkel der stumpferen und schärferen Polkanten haben; ist nun die Brachydiagonale die Richtung der stärksten Ausdehnung durch die Wärme, so wird es eine Temperatur geben, bei welcher jene genau gleich sind, die Pyramide in geometrischer Beziehung also genau mit einer tetragonalen übereinstimmt. Sie ist aber keine solche, denn dazu müsste sie nicht nur deren krystallographische Symmetrie für alle Temperaturen, sondern auch deren physikalische Symmetrie besitzen, was keineswegs der Fall ist.

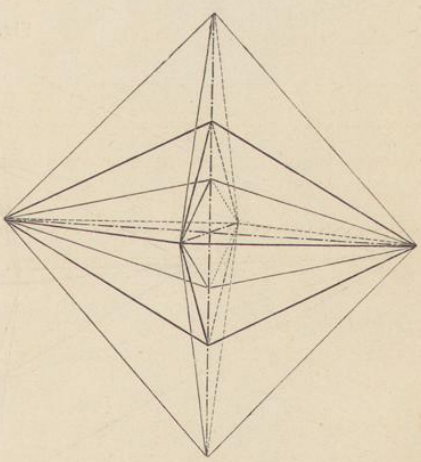
*) Die vertical gestellte Symmetrieaxe wurde früher allgemein »Hauptaxe« genannt. Es bedarf nach dem Bisherigen keiner Erklärung weiter, dass dies unpassend und geeignet ist, eine irrthümliche Ansicht über die Bedeutung derselben zu erregen.

Von den dreierlei Kantenwinkeln, welche die rhombischen Pyramiden (von dem letzterwähnten Fall abgesehen) besitzen, bedarf es nur der Kenntniss zweier, um das Parameterverhältniss zu berechnen, da dasselbe nur zwei von einander unabhängige Grössen enthält.

§. 91. **Ableitung und Bezeichnung der rhombischen Pyramiden.** Die von uns zur Grundform gewählte Fläche, mit ihren zugehörigen die primäre Pyramide bildend, ist an und für sich eine ganz beliebige, und es können an den Krystallen derselben Substanz noch zahlreiche andere rhombische Pyramiden auftreten, deren Axenverhältnisse jedoch in rationaler Relation zu dem der primären stehen, oder deren Indices, bezogen auf die Parameter jener, rationale Zahlen sein müssen. Die Gesammtheit aller in derartigem Zusammenhang stehender Pyramiden (mit Einschluss der besonderen Fälle, welche wir als eigenthümliche Formen im nächsten § kennen lernen werden), bildet die Krystallreihe des betreffenden Körpers. Welche von allen den etwa an den Krystallen desselben vorkommenden oder möglichen Pyramiden wir zur primären wählen, hängt wesentlich von Zweckmässigkeitsgründen ab; so wählt man entweder die am häufigsten vorherrschende, oder diejenige, auf welche sich die übrigen mit den einfachsten Indices beziehen lassen, oder durch welche die Beziehungen des Körpers zu der Krystallform chemisch verwandter Stoffe deutlicher hervortritt. Die üblichen Bezeichnungen der so gewählten Primärform sind:

$\{111\}$ nach Miller,
P nach Naumann.

Fig. 448.



Von dieser haben wir nun alle übrigen Formen abzuleiten. Zunächst ist es klar, dass Pyramiden zu den krystallonomisch möglichen desselben Körpers gehören werden, welche dasselbe Verhältniss der Brachy- zur Makrodiagonale haben, wie die primäre, aber eine in rationalem Verhältnisse kleinere oder grössere Verticalaxe; diese Formen bezeichnen wir, je nachdem sie spitzer oder stumpfer als P sind, mit mP oder $\frac{1}{m}P$, wo m eine rationale Zahl und grösser als 1 ist. Die so von der primären abgeleiteten Pyramiden nennt man diejenigen der Verticalreihe; ihr Miller'sches Zeichen ist $\{hhl\}$, da die beiden ersten Indices in demselben Verhältniss, nämlich 1 : 1, stehen müssen, wie bei $\{111\}$. In Fig. 448 sind neben der stärker gezeichneten $\{111\}\ P$ (= Fig. 446) zwei solcher abgeleiteter Pyramiden dargestellt, nämlich $\{221\}\ 2P$ und $\{112\}\ \frac{1}{2}P$.

Es ist unschwer, sich vorzustellen, wie die Glieder dieser Verticalreihe, deren Grenzform wir erst im nächsten Paragraphen kennen lernen werden, mit einander combinirt erscheinen; diejenige Pyramide, deren letzter, auf die Verticalaxe bezüglicher Index kleiner ist, als die beiden anderen, schärft die Basiskanten der stumpferen zu; umgekehrt spitzt die letztere die Polecken der spitzeren Pyramiden so zu, dass die Combinationskanten den Basiskanten derselben parallel sind. Die Flächen sämmtlicher rhombischer Pyramiden einer Verticalreihe, welche nach der Numerirung der in Fig. 446 dargestellten die Zahlen 1, 3, 5, 7 tragen, liegen in einer Zone, da sie sämmtlich einer und derselben Basiskante parallel sind, ebenso alle mit 2, 4, 6, 8 zu bezeichnenden.

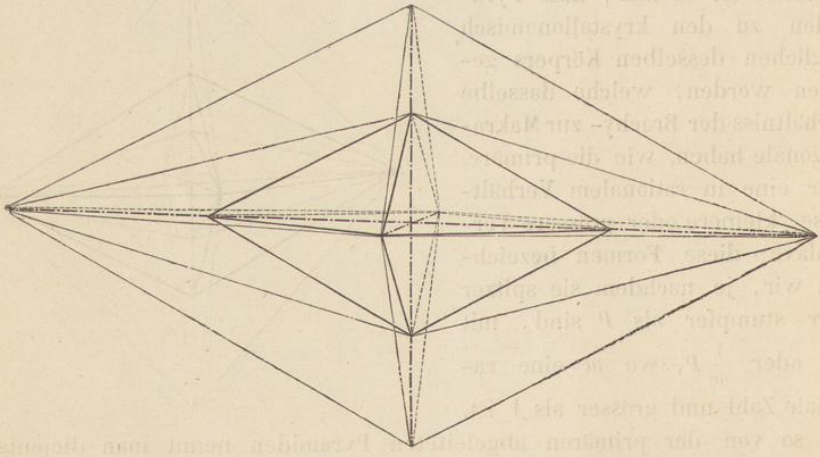
Weitere Pyramiden derselben Krystallreihe werden wir erhalten, wenn wir das Verhältniss der Brachydiagonalen zur Verticalen $a : c$ constant, und die Länge der Makrodiagonalen um rationale Vielfache ihrer eigenen Länge variiren lassen. So resultiren Pyramiden einer sogenannten makrodiagonalen Reihe, welche bezeichnet werden mit

$$\bar{P}n = \{hkh\},$$

wo n, resp. das ihm gleiche $\frac{h}{k}$ angeben, das wie Vielfache die Makrodiagonale von derjenigen der Pyramide P ist. Alle Pyramiden $\bar{P}n$, wenn $n > 1$, erscheinen an P als Zuschärfungen der stumpferen Polkanten. Wie von der primären, lässt sich aber auch von jeder anderen Pyramide der Verticalreihe, so z. B. von $2P$, eine neue makrodiagonale Reihe ableiten, deren Zeichen alsdann $2\bar{P}n = (2h.k.h)$. Das allgemeine Zeichen aller Pyramiden der makrodiagonalen Reihen ist somit

$$m\bar{P}n = (hkl), \text{ worin } h > k.$$

Fig. 449.



Von diesen sind in Fig. 449, bezogen auf dieselbe (stärker gezeichnete) Grundform, wie in Fig. 448, zwei Beispiele dargestellt, nämlich

$$\bar{P}2 = \{212\}$$
$$2\bar{P}2 = \{211\}.$$

Endlich giebt es noch eine dritte Art, krystallonomisch mögliche Pyramiden von der primären abzuleiten, durch Verlängerung der Brachydiagonalen um rationale Vielfache ihrer Länge, so dass wir eine brachydiagonale Reihe von Pyramiden mit dem Zeichen

$$\breve{P}n = (hkk) \quad (k > h)$$

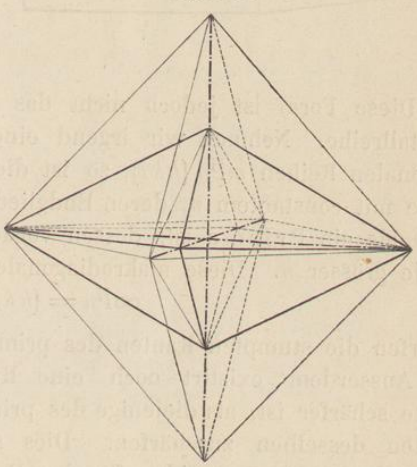
erhalten, welche die schärferen Polkanten von P zuschärfen. Eine solche Reihe kann aber auch hier von jeder Pyramide der verticalen Reihe abgeleitet werden, daher es solcher beliebig viele giebt, deren allgemeines Zeichen

$$m\breve{P}n = (hkl), \text{ worin } h < k.$$

Fig. 449 zeigt neben der mit der früheren identischen Grundform die beiden brachydiagonalen Pyramiden

$$\breve{P}2 = \{122\}$$
$$\text{und } 2\breve{P}2 = \{121\}.$$

Fig. 450.



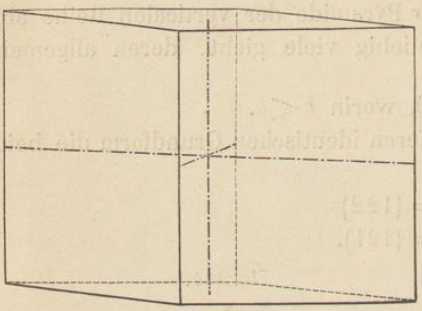
Bei der Ableitung der makrodiagonalen und der brachydiagonalen Pyramiden wurde nur von einer rationalen Vervielfältigung einer Axe gesprochen, also der Coëfficient n stets > 1 angenommen. Es ist aber leicht, zu zeigen, dass damit wirklich alle möglichen Fälle erschöpft sind, denn würde man z. B. von P eine Pyramide $\bar{P}\frac{1}{2}$ ableiten, welche dasselbe Verhältniss $a : c$, wie die primäre, aber nur eine halb so grosse Makrodiagonale habe, so ist deren Axenverhältniss $= \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c$, d. i. aber $= 2a : b : 2c$; diese Pyramide fällt also zusammen mit der brachydiagonalen Pyramide $2\breve{P}2$, und so jede andere mit gebrochenem n. Wir können also, wie weiterhin immer geschehen soll, uns darauf beschränken, $n > 1$ zu nehmen.

Alle Zeichen der abgeleiteten Pyramiden müssen selbstverständlich geändert werden, wenn eine andere Grundform gewählt wird; die neuen ergeben sich unmittelbar aus dem Verhältniss, in welchem die Parameter der neuen Grundform zu denen der früheren stehen.

§. 92. **Ableitung und Bezeichnung der rhombischen Prismen und Pinakoide.** In der oben besprochenen verticalen Ableitungsreihe werden die Pyramiden mP um so spitzer, je grösser der Coëfficient m wird, ihre Flächen nähern sich um so mehr der verticalen Stellung; das Endglied der Reihe ist diejenige rhombische Pyramide, deren $a : b$ demjenigen der primären gleich ist, deren m aber $= \infty$. Da die Flächen dieser Form der

Verticalaxe parallel sind, so fallen bei diesem Grenzwerthe von m je zwei über einander liegende Pyramidenflächen in eine Ebene, die Gestalt besteht nur aus vier verticalen, den Raum allein nicht umschliessenden Flächen, in Fig. 451 in Combination mit der horizontalen Symmetrieebene dargestellt, und heisst das primäre rhombische Prisma:

Fig. 451.



$$\infty P = \{110\}.$$

Der horizontale Querschnitt dieser Form ist derjenige der primären Pyramide, sie bildet also in Combination mit dieser die gerade Abstumpfung der Basiskanten derselben. Je kleiner das Verhältniss $\frac{a}{b}$, desto stumpfer ist die dem Beobachter zugekehrte stumpfe Kante des Prismas.

Diese Form ist jedoch nicht das einzige verticale Prisma derselben Krystallreihe. Nehmen wir irgend eine abgeleitete Pyramide der makrodiagonalen Reihen $m\bar{P}n\{hkl\}$, so ist diese ein Glied einer neuen verticalen Reihe mit constantem n, deren Endglied für den Fall $m = \infty$ (oder $l = 0$) abermals ein Prisma ist, dessen vorderer Kantenwinkel um so stumpfer ist, je grösser n. Diese makrodiagonalen Prismen, deren Zeichen

$$\infty\bar{P}n = \{hk0\}_{(h>k)},$$

schärfen die stumpfen Kanten des primären Prismas zu.

Ausserdem existirt noch eine Reihe von Prismen, deren vordere Kante schärfer ist, als diejenige des primären, welche demnach die scharfen Kanten desselben zuschärfen. Dies sind die Grenzformen der Reihen brachydiagonaler Pyramiden für den Fall $m = \infty$. Ihre Bezeichnung ist

$$\infty\breve{P}n = \{hk0\}_{(k>h)}.$$

So sind also an den Krystallen eines Körpers theoretisch eine unendliche Zahl von verticalen Prismen möglich, von welchen aber gewöhnlich nur sehr wenige, durch die einfachsten Zahlenwerthe des Coëfficienten n von ∞P ableitbar, vorkommen.

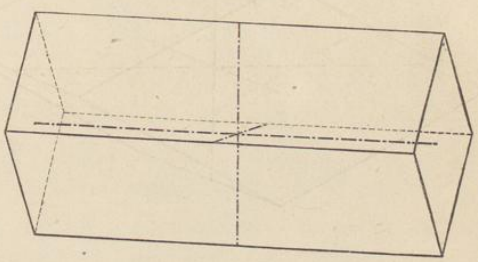
Betrachten wir die von irgend einer Pyramide, z. B. P, sich ableitende makrodiagonale Reihe, so muss deren Endglied diejenige Pyramide $\bar{P}n$ sein, deren $n = \infty$, welche wir also mit

$$\bar{P}\infty = \{101\}^*)$$

*) Es muss bemerkt werden, dass das Makrodoma $\bar{P}\infty$ nur dann das Symbol $\{101\}$ erhält, wenn dem Krystall die übliche Stellung, in welcher $b > a$ (vergl. S. 429 unten), gegeben worden ist. Diese Stellung ist aber nicht nothwendig; es kann vielmehr für die Vergleichung zweier chemisch verwandter Körper nöthig werden, einen Krystall so zu

bezeichnen müssen. Dies ist aber offenbar ebenso eine prismatische Form, wie die zuletzt betrachteten, deren vier Flächen jedoch nicht der Verticalaxe, sondern der Makrodiagonale parallel laufen, denn für deren speciellen Werth $n = \infty$ (d. i. $k = 0$) fallen immer je eine rechte und eine linke Pyramidenfläche in eine Ebene. Ein solches horizontales Prisma, in Fig. 452 in Combination mit einer Symmetrieebene dargestellt, wird seiner Dachform wegen Doma genannt, und das bezeichnete, welches der Makrodiagonale parallel ist und dessen Flächen die beiden anderen Axen im Verhältniss $a : c$ der primären Pyramide schneiden, das primäre Makrodoma. Dasselbe bildet die gerade Abstumpfung der stumpferen Polkanten der Pyramide $P = \{111\}$.

Fig. 452.



Da nun aber von jeder Pyramide mP oder $\frac{1}{m}P$ sich eine makrodiagonale Reihe ableitet, so wird das Endglied jeder solchen Reihe ein Makrodoma, aber ein solches mit anderem Verhältniss der Brachydiagonale zur Verticale, sein. Die spitzeren, deren obere Kante schärfer ist, als diejenige des primären, haben das Zeichen

$$m\bar{P}\infty = \{h\,0\,l\}_{(h>l)};$$

die stumpferen

$$\frac{1}{m}\bar{P}\infty = \{h\,0\,l\}_{(h<l)}.$$

Jedes Makrodoma stumpft die stumpfen Polkanten derjenigen rhombischen Pyramiden ab, welche dasselbe Verhältniss $a : c$ haben, wie das Doma.

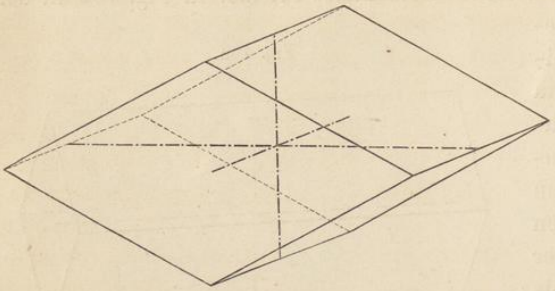
Ganz analoge Formen bilden die Endglieder der brachydiagonalen Ableitungsreihen der Pyramiden für den Fall $n = \infty$, wobei je eine vordere mit einer hinteren Fläche in eine Ebene fällt und so aus der achtflächigen

---

stellen, dass die Brachydiagonale quer läuft; alsdann ist in seinem Axenverhältniss $a > b$, und das Makrodoma geht dann der nach vorn laufenden Axe (welche stets mit a bezeichnet wird) parallel, sein Symbol wird also $\{011\}$. Die Indices beziehen sich demnach in der stets gleichbleibenden Reihenfolge, wie sie S. 195 festgestellt wurde, auf die bestimmte Stellung des Krystalls, welche durch seine Elemente unzweideutig charakterisirt ist; ob aber eine Fläche (hkl) einer makro- oder einer brachydiagonalen Form angehört, wie sie also nach Naumann bezeichnet werden muss, das ist von der beliebigen Wahl der Axen a und b abhängig, ja dies kann sich sogar durch eine Temperaturänderung bei gleicher Aufstellung ändern; denn wenn die Grundform eines Krystalls so gewählt wäre, dass a nur wenig kleiner als b, und wenn in ersterer Richtung die grösste Ausdehnung durch die Wärme stattfände, so gäbe es natürlich eine Temperatur, bei deren Ueberschreitung die Brachydiagonale des Krystalls sich in die Makrodiagonale verwandeln würde.

Pyramide ein vierflächiges horizontales Prisma wird, dessen zwei Paare paralleler Flächen der Brachydiagonale parallel laufen, Fig. 453. Diese Brachydomen sind wieder theils spitzere $m\breve{P}\infty = \{0kl\}_{(k>l)}$, theils stumpfere $\frac{1}{m}\breve{P}\infty = \{0kl\}_{(k<l)}$. Zwischen beiden Classen steht das primäre Brachydoma $\breve{P}\infty = \{011\}$ mitten inne; dieses stumpft die schärferen Polkanten der primären Pyramide ab, die anderen Brachydomen die schärferen Polkanten derjenigen Pyramiden, deren Axenverhältniss $b : c$ das gleiche ist, wie das des betreffenden Domas.

Fig. 453.



Die Makrodomen wie die Brachydomen bilden daher unter einander eine Reihe von den stumpfsten bis zu den spitzesten, d. s. diejenigen $m\bar{P}\infty$ und $m\breve{P}\infty$, bei denen m eine sehr grosse rationale Zahl ist. Das Endglied der einen wie der andern Reihe ist eine Form, für welche auch $m = \infty$ wird, somit je zwei Flächen des Domas in eine verticale Ebene zusammenfallen. So liefert die Reihe der Makrodomen als Endglied ein verticales paralleles Flächenpaar, das Makropinakoid genannt, welches der Makrodiagonale und der Verticalaxe parallel ist und das Zeichen

$$\infty\bar{P}\infty = (100)$$

hat; das Endglied der Reihe der Brachydomen dagegen ist ebenfalls ein Paar paralleler Flächen, das Brachypinakoid, welches zugleich der Brachydiagonale und der Verticalaxe parallel ist und daher mit

$$\infty\breve{P}\infty = (010)$$

bezeichnet wird.

Es leuchtet ein, dass die beiden letzten Formen nichts Anderes sind, als zwei von den drei Symmetrieebenen des rhombischen Systems. Wir haben also auch für die dritte eine Bezeichnung zu suchen. Da sie horizontal ist (den Axen a und b parallel), wird sie, wie in den beiden letzten Systemen, die Basis genannt und, als untere Grenze der Verticalreihe der Pyramiden aufgefasst, mit

$$oP = \{001\}$$

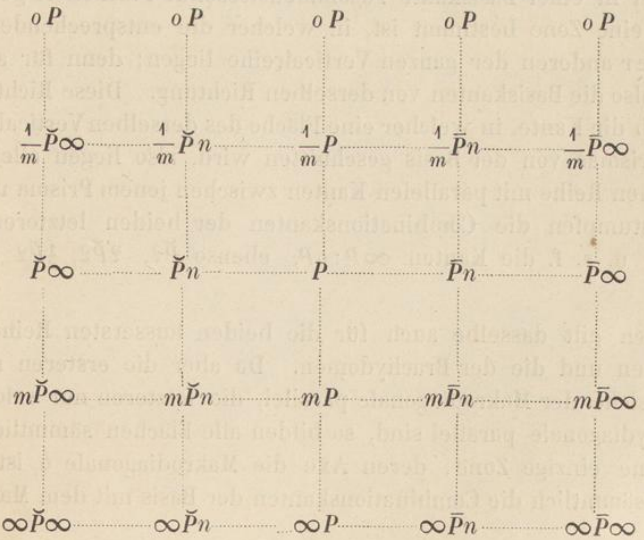
bezeichnet.

Die drei Pinakoide (Basis, Makro- und Brachypinakoid) stumpfen die Ecken jeder Pyramide gerade ab, oP die obere und untere, $\infty\breve{P}\infty$ die vordere und hintere, $\infty\bar{P}\infty$ die rechte und linke; die beiden letzteren bilden die geraden Abstumpfungen der Prismenkanten u. s. f.

Dieselben drei Flächenpaare {001}, {010}, {100} bilden für sich allein in Combination eine Gestalt, welche sich geometrisch nicht vom regulären Hexaëder unterscheidet, selbstverständlich aber physikalisch, in Bezug auf Spaltbarkeit, optische Eigenschaften u. s. f. Es leuchtet ein, dass das Axenverhältniss eines Krystalls nicht zu bestimmen ist, wenn an demselben nur jene drei Flächenpaare vorkommen; durch die Erforschung seiner physikalischen Eigenschaften ist alsdann zwar festzustellen, dass der Krystall rhombisch sei, dass seine Axenwinkel α, β, γ sämmtlich $= 90^0$ seien, aber sein Axenverhältniss $a : b : c$ bleibt unbekannt. Tritt zu diesen Flächen nun noch eine prismatische Form hinzu, so gestattet diese, wenigstens das Längenverhältniss zweier Axen zu bestimmen. Betrachten wir z. B. diese Form als primäres verticales Prisma und messen den Winkel desselben, so ist aus Fig. 451 ersichtlich, dass damit das Verhältniss $a : b$ bestimmt ist. Betrachtet man die prismatische Form als Makrodoma oder Brachydoma, so ist es natürlich das Verhältniss $a : c$, resp. $b : c$, welches auf die angegebene Art gefunden wird.

Sind nun aber zwei prismatische Formen vorhanden, welche zwei verschiedenen Symmetrieaxen parallel laufen, so ist eine vollständige Bestimmung der Krystallform, d. h. aller Elemente des Krystalls, möglich; sei z. B. die eine Form verticales Prisma, so ist $a : b$, sei die andere Brachydoma, so ist $c : b$, also $a : b : c$ bekannt. Daraus geht hervor, dass es nicht des Auftretens rhombischer Pyramiden bedarf, um das Parameterverhältniss vollständig zu bestimmen.

Die verschiedenen Ableitungsreihen einer Krystallreihe des rhombischen Systems lassen sich wieder in einem Schema vereinigen, welches den Zusammenhang derselben in übersichtlicher Weise darlegt:



Gehen wir von der in der Mitte stehenden primären Pyramide aus, so ist diese das mittelste Glied einer horizontalen Reihe, bestehend einerseits aus den Brachypyramiden bis zum Brachydoma, andererseits aus den makrodiagonalen Pyramiden bis zum Makrodoma. Da für alle Formen dieser letzteren Reihe $a : c$ constant, so bestimmt ein in einer stumpferen Polkante zusammenstossendes Flächenpaar von P eine Zone, in welcher die entsprechenden Flächenpaare aller Makropyramiden $\breve{P}n$ liegen; da ebenso für den vorderen Theil der Reihe das Verhältniss $b : c$ constant bleibt, so ist durch zwei in einer längeren (d. i. schärferen) Polkante zusammenstossende Flächen von P eine weitere Zone bestimmt, in welcher die entsprechenden Flächenpaare aller Pyramiden $\breve{P}n$ bis $\breve{P}\infty$ liegen.

Betrachten wir nunmehr eine flachere Pyramide $\frac{1}{m}P$, so leiten sich von dieser nach rechts und links Makro- und Brachypyramiden und je ein Doma ab, und für jede dieser beiden Reihen gilt das analoge Zonenverhältniss, wie für die beiden vorigen Reihen. Ganz dasselbe ist der Fall auch für die beiden von einer spitzeren Pyramide mP sich herleitenden Reihen. Von der spitzesten Pyramide der Verticalreihe, dem Prisma ∞P, werden nun ebenso Makroprismen, deren stumpfestes das Makropinakoid, dessen vorderer Winkel 0^0 ist, und Brachyprismen abgeleitet, von denen das schärfste (der nach vorn gekehrte Winkel $= 180^0$) das Brachypinakoid. Alle Flächen sämmtlicher Formen der untersten Horizontalreihe gehören einer Zone an, denn sie sind ohne Ausnahme der Verticalaxe parallel.

Vergleicht man nun die Glieder irgend einer verticalen Reihe des obigen Schemas, sei es die der primären, sei es die einer makrodiagonalen oder einer brachydiagonalen Pyramide, mit einander, so sieht man leicht, dass durch zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen irgend einer Pyramide eine Zone bestimmt ist, in welcher die entsprechenden Flächenpaare aller anderen der ganzen Verticalreihe liegen; denn für alle ist $a : b$ constant, also die Basiskanten von derselben Richtung. Diese Richtung besitzt ferner auch die Kante, in welcher eine Fläche des derselben Verticalreihe angehörigen Prismas von der Basis geschnitten wird, also liegen alle Pyramiden einer solchen Reihe mit parallelen Kanten zwischen jenem Prisma und der Basis, sie stumpfen die Combinationskanten der beiden letzteren ab, z. B. P, $2P$, $\frac{1}{2}P$ u. s. f. die Kanten $\infty P : oP$, ebenso $\breve{P}2$, $2\breve{P}2$, $\frac{1}{2}\breve{P}2$ die Kanten $\infty\breve{P}2 : oP$.

Endlich gilt dasselbe auch für die beiden äussersten Reihen, die der Makrodomen und die der Brachydomen. Da aber die ersteren nur Flächen haben, welche der Makrodiagonale parallel, die letzteren nur solche, welche der Brachydiagonale parallel sind, so bilden alle Flächen sämmtlicher Makrodomen eine einzige Zone, deren Axe die Makrodiagonale b ist, d. h. sie stumpfen sämmtlich die Combinationskanten der Basis mit dem Makropinakoid

ab; ebenso sind alle Flächen sämmtlicher Brachydomen tautozonal, und ihre Zonenaxe ist die Axe *a*, d. h. die Kante zwischen Basis und Brachypinakoid, welche sie abstumpfen.

Weiteres über die Zonenverhältnisse des rhombischen Systems zu erörtern, wird sich bei den Beispielen Gelegenheit darbieten.

Ueberblicken wir noch einmal die verschiedenen Arten von Formen, welche bei der Symmetrie nach drei auf einander senkrechten Flächen möglich sind, so sehen wir, dass es deren wie in den bisherigen Systemen sieben giebt; es sind folgende:

1) rhombische Pyramiden,
2) verticale Prismen,
3) Makrodomen,
4) Brachydomen,
5) das Makropinakoid,
6) das Brachypinakoid,
7) die Basis.

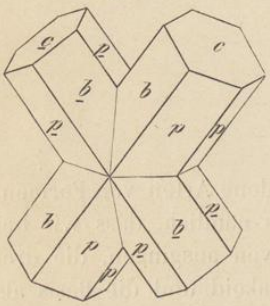
Dies sind aber nur scheinbar sieben verschiedene Arten von Formen, in Wirklichkeit deren nur drei. Erinnern wir uns nämlich, dass wir bei der Ableitung der Formen dieses Krystallsystems davon ausgingen, die drei Symmetrieebenen, das Makropinakoid, das Brachypinakoid und die Basis als Axenebenen*) zu Grunde zu legen, also deren drei Durchschnittsrichtungen, d. i. die drei Symmetrieaxen, als »Axen« zu wählen, — dass es aber a priori keinen Grund gab, eine bestimmte von diesen drei zur Verticalaxe zu machen. Wir können folglich jedes dieser drei Pinakoide zur Basis, jede beliebige zum Brachypinakoid u. s. f. wählen, diese drei Flächenpaare bilden demnach nur eine Art von Formen. Wenn wir von drei möglichen Aufstellungsarten eines rhombischen Krystalls eine bestimmte gewählt haben, so werden die Formen, deren Flächen der Verticalaxe parallel sind, Prismen, die der Axe *a* parallelen Brachydomen, die *b* parallelen Makrodomen; ändern wir dagegen die Stellung, so werden die bisherigen Makro- oder Brachydomen verticale Prismen. Diese drei Arten der prismatischen Formen sind also nicht principiell verschieden, und ihre Unterscheidung beruht nur auf der willkürlichen Stellung der Krystalle. So bleiben denn, wie oben bemerkt, nur drei, wirklich von einander verschiedene Arten von Formen im rhombischen Systeme übrig, nämlich 1) Pyramiden, bestehend aus je acht Flächen, welche für sich den Raum umschliessen; 2) Prismen, bestehend aus vier Flächen, welche nach einer Richtung offene Formen darstellen; 3) Pinakoide, d. i. Paare paralleler Flächen, zu welchen die übrigen symmetrisch sind.

---

*) Selbstverständlich hätten wir auch drei beliebige andere Flächen zu Axenebenen nehmen können.

Zwillingsbildung kann bei holoëdrisch-rhombischen Krystallen, da die Pinakoide als Symmetrieebenen ausgeschlossen sind, stattfinden nach einer Fläche einer prismatischen Form oder einer Pyramide. Im ersteren Falle, wobei es natürlich gleichgültig (weil von der willkürlich gewählten Stellung abhängig), ob die Zwillingsebene einem verticalen Prisma, einem Makrodoma oder einem Brachydoma angehört, haben die beiden mit einander verwachsenen Krystalle diejenige Symmetrieaxe, welcher die Zwillingsebene parallel geht, ebenfalls parallel; dieser einfachste Fall umfasst die grosse Mehrzahl aller rhombischer Zwillinge, deren wichtigste Beispiele in §. 95 Erwähnung finden werden. Ist eine Pyramidenfläche Zwillingsebene, so entsteht eine Verwachsung, in welcher die beiden Krystalle keine einzige Symmetrieaxe parallel haben. Da dies der complicirtere unter den beiden möglichen Fällen ist, finden wir denselben auch nur selten verwirklicht. Als Beispiel desselben möge der nebenstehend abgebildete Staurolith-Zwilling Fig. 454 dienen. Derselbe zeigt die Combination $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$; Zwillingsebene (in der Fig. senkrecht gestellt) ist eine Fläche der Pyramide $\{232\}$.

Fig. 454.



Hemimorphie kann bei rhombischen Krystallen eintreten nach irgend einer der drei Symmetrieaxen. Bei den in §. 95 aufgezählten hemimorphen Substanzen ist stets die Axe der Hemimorphie zur Verticalaxe gewählt worden, was natürlich ganz willkürlich ist. Durch die Hemimorphie zerfallen die rhombischen Pyramiden in zwei von einander unabhängige Hälften, bei der erwähnten Stellung eine obere und eine untere; durch Uebergang zu den Grenzformen findet man, dass alsdann Makrodomen, Brachydomen und basisches Flächenpaar ebenfalls in eine obere und eine untere Hälfte zerfallen, während die übrigen, d. h. die der Axe der Hemimorphie parallelen Formen unbeeinflusst bleiben. Da das zur letzterwähnten Axe senkrechte Pinakoid nicht mehr Symmetrieebene des hemimorphen Krystalls ist, so kann eine symmetrische Verwachsung zweier solcher Krystalle nach dieser Fläche stattfinden (siehe u. d. Beisp. Kieselzinkerz).

§. 93. **Projection und Berechnung der rhombischen Formen.** Die Formen des rhombischen Systems werden zur Gewinnung einer übersichtlichen Darstellung ihrer Zonenverhältnisse auf eine Symmetrieebene projicirt, und zwar ist es üblich, hierzu die Ebene (001) zu wählen. Alsdann fallen die Pole der Prismenflächen in den Grundkreis und können unmittelbar mittelst ihrer Winkel zu 100 und 010 eingetragen werden. In Fig. 455 ist dies in Betreff der beiden Prismen $\{110\}$ und $\{120\}$ geschehen, welche der in Fig. 482 dargestellten Combination des Topas entsprechen, und sind ausserdem die Projectionen der Flächen $\{100\}$ und $\{010\}$, welche

die Prismenwinkel halbiren, hinzugefügt. Die Durchmesser 110:001 u. s. w. enthalten die Pole aller Flächen, deren ersten beiden Indices gleich gross sind, d. h. aller Pyramiden der Verticalreihe. Es genügt also die Kenntniss des Winkels einer solchen Pyramidenfläche zur Basis, um nach bekannter Methode den Pol derselben zu finden. In dieser Weise sind in der Projection die drei Pyramiden {111}, {112} und {113} der Fig. 482 eingetragen. Das zu einer Pyramide zugehörige Makrodoma, welches ihre stumpfen Polkanten abstumpft, ergiebt sich aus dem Zonenkreise, welcher durch die beiden Pyramidenflächen und (010) als Halbirungsebene der Polkanten bestimmt ist; ebenso das zugehörige Brachydoma aus dem Zonenkreise durch die beiden, in der scharfen Polkante einander schneidenden Pyramidenflächen und (100). In dieser Weise sind die Pole der beiden zu {111} zugehörigen Domen {101} und {011} in der Projection eingetragen. Fig. 482 zeigt noch eine abgeleitete Pyramide x, welche in den Zonen [113, $1\bar{1}3$] und [112, 011] (d. i. = der Zone [101, 011]) liegt; hieraus ergiebt sich das Zeichen {123} und somit ihre Zugehörigkeit zu der Zone [001, 120]. Durch zwei der entsprechenden Zonenkreise kann also ihr Pol in der Projection gefunden werden, und in ähnlicher Weise derjenige jeder anderen abgeleiteten Pyramide eines rhombischen Krystalls.

Die Berechnung der Elemente eines rhombischen Krystalls erfordert die Messung zweier von einander unabhängiger Winkel. Der einfachste Fall ist der S. 437 erwähnte, dass die Winkel zweier prismatischer Formen gegeben sind. Werde die eine derselben zum verticalen Prisma {110} genommen, so ergiebt der Winkel $(110):(100) = A$, d. i. die Hälfte des stumpfen Prismenwinkels, direct das Parameterverhältniss $a:b$ oder, wenn $b = 1$ gesetzt wird, die Axenlänge a, denn eine einfache Betrachtung lehrt, dass

$$a = \text{tang}\, A.$$

In derselben Weise führt der gemessene Winkel einer andern prismatischen Form zur Axenlänge c: ist $B = (011):(001) = \frac{1}{2}(011:0\bar{1}1)$ gegeben, so ist

$$c = \text{tang}\, B;$$

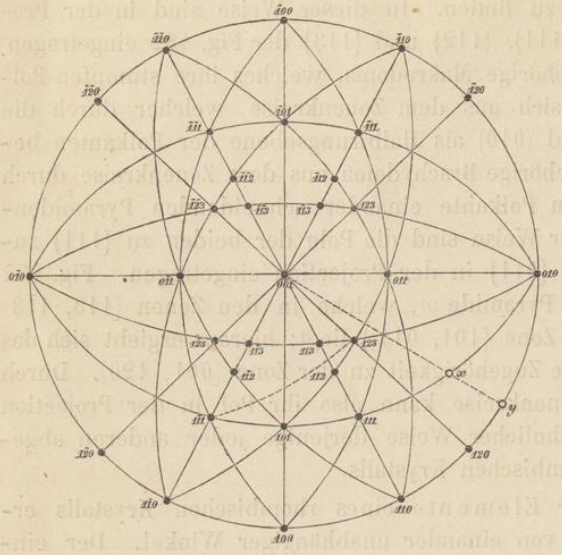
wurde dagegen der Winkel $(101):(\bar{1}01)$ gemessen, dessen Hälfte $C = (101):(001)$, so ist

$$c = a \cdot \text{tang}\, C.$$

Die einfache Beziehung, welche somit zwischen den Axenlängen und den Bögen A, B und C besteht, wird auch benutzt, wenn es sich darum handelt, aus zwei gemessenen Winkeln einer rhombischen Pyramide deren Axenverhältniss zu berechnen. Man leitet nämlich aus diesen Winkeln zunächst jene Bögen, d. h. die Winkel derjenigen prismatischen Formen ab, welche die Kanten der Pyramide abstumpfen, und findet dann aus diesen das Parameterverhältniss. Seien z. B. von der Pyramide {111} die beiden Polkantenwinkel $(111):(1\bar{1}1) = 2P$ und $(111):(\bar{1}11) = 2Q$ gemessen, so ist $P = (111):(101)$ und $Q = (111):(011)$. Diese beiden Bögen sind, wie aus

Fig. 455 ersichtlich, Seiten zweier rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke, welche die Hypotenuse $111 : 001 = R$ gemeinsam haben. Von den Bögen A, B, C, welche ihre vorige Bedeutung behalten sollen, ist A zugleich der Winkel zwischen den Zonenkreisen $001 : 100$ und $001 : 111$, daher aus jenen beiden rechtwinkeligen Dreiecken folgt:

Fig. 455.



$$\sin A = \frac{\sin P}{\sin R}$$

$$\sin (90 - A) = \cos A = \frac{\sin Q}{\sin R}$$

daraus:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin P}{\sin Q}$$

Der Werth tang A ist (da A, wie oben angegeben, der halbe stumpfe Prismenwinkel) gleich der Axenlänge a. Zur Berechnung von c benutzt man nun den Bogen $B = 001 : 011$, welcher sich aus dem Dreieck $001 : 011 : 111$, dessen Winkel an 001 $(90^0 - A)$ nunmehr bekannt ist, unmittelbar ergiebt durch die Gleichung:

$$\sin B = \operatorname{tang} Q \cdot \operatorname{cotang} (90^0 - A) = \operatorname{tang} Q \cdot \operatorname{tang} A.$$

Ist dagegen einer der Polkantenwinkel, $2P$ oder $2Q$, und der Winkel der Basiskante gemessen, so ist durch letzteren der Bogen $111 : 110$ (gleich der Hälfte desselben) und damit, durch Subtraction von 90^0, auch R bestimmt. Aus P und R oder Q und R findet man aber nach einer der beiden obigen Gleichungen A und damit die Axenlänge a. Mit Hülfe von A oder dessen Complement ergiebt sich dann in einem der oben erwähnten rechtwinkeligen Dreiecke der Bogen B oder C und damit das zweite Parameterverhältniss.

Mit dem soeben auseinandergesetzten Verfahren ist zugleich die Methode gegeben, durch welche man aus dem Parameterverhältniss einer rhombischen Pyramide deren Winkel berechnet; man benutzt nämlich dieselben rechtwinkeligen Dreiecke, indem man zuerst aus dem Axenverhältniss die Bögen A, B, C bestimmt und aus diesen die Seiten P, Q und R berechnet.

Handelt es sich um die Bestimmung des Zeichens einer abgeleiteten Pyramide, welche nicht durch zwei Zonen gegeben ist, so können hierzu entweder die Messungen zweier ihrer Kantenwinkel benutzt und daraus, wie bei der primären Pyramide, das Parameterverhältniss berechnet werden,

welches durch Division in dasjenige der Grundform die Indices liefert — oder es genügt eine Winkelmessung zur Herleitung des Zeichens, wenn die Pyramide nämlich in einer bekannten Zone liegt. Sei z. B. die Kante (111): (010) eines Krystalls durch eine derartige Form abgestumpft, so liegt ein Pol x derselben auf dem Zonenkreise 111:010; ist nun der Winkel x:(010) oder x:(111) gemessen worden, so kann man, da die Bögen 101:111 und 101:001 durch das Zeichen der bekannten Pyramide, in diesem Falle {111}, gegeben sind, in dem rechtwinkeligen Dreiecke 101, 001, x aus den beiden Seiten 101:001 und 101:x den der letzteren gegenüberliegenden Winkel an 001 berechnen; dieser ist gleich dem Bogen 100:y, aus welchem direct das Zeichen des zur Pyramide x zugehörigen Prisma y folgt. Mit letzterem hat x die beiden ersten Indices gemein, mit der Pyramide, in deren Polkantenzone sie liegt, im vorliegenden Beispiel {111}, das Verhältniss des ersten und dritten; somit sind ihre Indices sämmtlich bekannt.

Schliesslich sei noch als Beispiel einer Berechnung des Winkels zweier beliebiger Flächen diejenige des Bogens $1\bar{1}1$:123 gegeben: um diesen zu finden, berechnet man aus den Parametern der beiden Pyramiden {111} und {123} die Bögen $1\bar{1}1$:001 (=111:001) und 123:001; diese bilden mit dem gesuchten Bogen ein schiefwinkeliges sphärisches Dreieck, in welchem der an 001 anliegende Winkel ebenfalls bekannt ist, da derselbe gleich dem Winkel $1\bar{1}0$:120, welcher sich sehr einfach aus der Axenlänge a ergiebt. Aus den drei bekannten Stücken des erwähnten Dreiecks folgt der gesuchte Bogen nach bekannter Formel der sphärischen Trigonometrie. Allgemein besteht also das Verfahren zur Berechnung eines beliebigen Bogens darin, dass man den Abstand seiner beiden Endpole von dem einer Symmetrieebene und den Winkel zwischen diesen beiden Bögen aus dem Zeichen der beiden Polen entsprechenden Flächen berechnet. Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite des so gebildeten sphärischen Dreiecks ist der gesuchte Bogen.

§. 94. **Die physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle.** Ueber die Elasticität solcher liegen directe Messungen nicht vor; das Eingangs §. 89 Bemerkte ist daher nur nach Analogie geschlossen aus den Cohäsionsverhältnissen der rhombischen Krystalle. Ueber letztere geben Aufschluss die Bestimmungen der Härte nach verschiedenen Richtungen; wenn der a. a. O. angegebene Zusammenhang mit der Symmetrie, wie er aus dem physikalisch-krystallographischen Grundgesetze folgt, richtig ist, so muss die Härtecurve auf allen drei Pinakoiden symmetrisch sein zu je zwei auf einander senkrechten Geraden, und diese müssen je zwei Symmetrieaxen parallel sein. Dies ist in der That der Fall, wie die Bestimmungen am Schwerspath u. a. gezeigt haben (s. Exner, Härte an Krystallen, S. 60). Am einfachsten wird jener Zusammenhang jedoch bewiesen durch die Verhältnisse der Spaltbarkeit der rhombischen Krystalle, welche genau ihrer Symmetrie entsprechen. Der einfachste Fall hierbei ist offenbar der, dass in der Richtung einer Symmetrieaxe ein Minimum der Cohäsion vorhanden

ist, also Spaltbarkeit nach demjenigen Pinakoid, welches dazu normal steht; in Wirklichkeit ist auch die Theilbarkeit nach einem der drei Pinakoide eine sehr häufig auftretende (s. unter den Beispielen: Quecksilberbromid, Antimon- und Arsensulfid, arsenige Säure, Topas, Citronensäure u. a.). Natürlich kann auch parallel einer zweiten Symmetrieaxe ein Minimum der Cohäsion stattfinden, dieses ist aber nicht gleichwerthig mit dem ersten, folglich existirt alsdann Spaltbarkeit nach zwei Pinakoiden, aber nicht von gleichem Grade der Vollkommenheit (Beisp.: Bleioxyd, Schwerspath). Endlich können alle drei Symmetrieaxen dreien Minimis der Cohäsion entsprechen; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach {001}, {100} und {010}, aber selbstverständlich nicht gleich vollkommen; ein derartiger Körper ist das wegen der Seltenheit seiner Krystalle nicht unter die Beispiele aufgenommene wasserfreie Kalksulfat (nat. Anhydrit), dessen krystallinische Aggregate charakterisirt sind durch die fast gleich vollkommene Spaltbarkeit nach den drei Pinakoiden, wodurch es einem regulären, hexaëdrisch spaltbaren Körper ähnelt.

Sind die Minima der Cohäsion nicht den Symmetrieaxen parallel, in welchem Falle zu der betreffenden Richtung keine andere symmetrische existirt, so ist der nächst einfache der, dass sie wenigstens einer Symmetrieebene parallel gehen, mit den Axen aber schiefe Winkel einschliessen; jedes solche Minimum erfordert aber ein zweites in der dazu symmetrischen Richtung, welche in derselben Axenebene liegt; die beiden zu diesen Richtungen normalen Ebenen müssen demnach einen gleichen Grad der Spaltbarkeit besitzen, der Krystall spaltet nach einem Prisma, je nach der demselben gegebenen Stellung ein verticales, oder ein Makro-, oder ein Brachydoma (Beispiele: Quecksilberchlorid, ameisensaures Barium), doch ist eine derartige Spaltbarkeit ziemlich selten. Weit zahlreicher sind diejenigen Körper, bei denen das Hauptminimum der Cohäsion einer Symmetrieaxe parallel, ausserdem aber noch secundäre Minima vorhanden sind in einer Symmetrieebene, welche also spaltbar sind nach einem Pinakoid und weniger vollkommen nach einer prismatischen Form (Beispiele: Schwefel, überchlorsaures und übermangansaures Kalium, schwefelsaures Baryum, Strontium und Blei u. a.). Bei fast allen diesen Beispielen ist das Spaltungsprisma senkrecht zu dem Spaltungspinakoid, d. h. die Cohäsion nimmt, von ihrem Minimum in der Richtung einer Axe ausgehend, zu, nach verschiedenen Seiten verschieden, alsdann wieder ab, und erreicht zwei neue Minima in der senkrecht zu jener Axe stehenden Symmetrieebene.

Da die Mehrzahl der Substanzen den einfachsten Fall realisiren, in welchem nämlich die geringste Cohäsion einer Symmetrieaxe parallel ist, eine weit kleinere Zahl denjenigen, in welchem neben jenem Minimum noch solche einer Axenebene parallele merklich hervortreten, endlich kaum einige existiren, wo nur die letztere Art von Minimis vorhanden ist, so hat der letzte mögliche Fall, dass die Cohäsionsminima auch nicht den Axenebenen parallel sind, äusserst geringe Wahrscheinlichkeit. Ein solches mit keiner

Symmetrieebene zusammenfallendes Minimum würde noch ein gleiches nach den drei anderen dazu symmetrischen Richtungen (den Normalen zu den übrigen Pyramidenflächen) erfordern. In der That wird eine einigermassen vollkommene Theilbarkeit nach einer rhombischen Pyramide nur sehr selten (s. Baryt) beobachtet.

Wie aus den Herleitungen des §. 89 hervorgeht, ist die optische Axenebene entweder die Basis, oder das Makropinakoid, oder endlich das Brachypinakoid, die erste Mittellinie eine der drei Axen. Daraus folgt, dass man zur Aufsuchung der Ebene der optischen Axen nur nöthig hat, Platten nach den drei Pinakoiden (wie eine solche sehr häufig schon durch die natürliche Ausbildung der Krystalle gegeben ist, ebenso oft durch Spaltbarkeit erhalten werden kann) im convergenten Licht zu untersuchen; eine derselben muss*) beide optischen Axen, symmetrisch im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes, zeigen, und zwar so, dass ihre Verbindungslinie einer Symmetrieaxe parallel geht. Nur wenn die Brechbarkeit der Substanz eine geringe und der spitze und stumpfe Axenwinkel wenig verschieden sind, kann man sowohl durch die Platte, welche normal zur ersten, als durch die, welche normal zur zweiten Mittellinie ist, beide Axen erblicken, vorausgesetzt, dass das Gesichtsfeld des Instrumentes sehr gross ist. Diejenige von beiden Platten, bei welcher der scheinbare Axenwinkel der kleinere ist, oder, was das Gewöhnlichere ist, diejenige, durch welche allein die Axen sichtbar sind, steht senkrecht zur ersten Mittellinie. Bestimmt man nun mit dieser, nach der in §. 27 angegebenen Methode, durch Einfügung eines Viertelundulationsglimmerblattes das Zeichen der Doppelbrechung, so kann man nunmehr angeben, welche der drei Symmetrieaxen des Krystalls die Axe der grössten, welche die der kleinsten, welche die der mittleren optischen Elasticität ist. Sind so grosse und durchsichtige Krystalle zur Verfügung, dass man sich bei der optischen Untersuchung nicht mit der Bestimmung des Axenwinkels (wozu jene Pinakoidplatte dient) begnügt, sondern auch die Brechungsexponenten bestimmen will, so können hierzu sehr oft natürliche Prismen dienen. Ist z. B. ein verticales Prisma, dessen scharfe Kanten einen Winkel von 40—60° haben, vorherrschend an den Krystallen, so können zwei seiner in einer solchen Kante zusammenstossenden Flächen unmittelbar als Prisma zur Bestimmung zweier Brechungsexponenten dienen (s. S. 100), denn ein solches erfüllt die a. a. O. gestellten Bedingungen vollständig. Ist nun noch ein Makro- oder Brachydoma vorhanden, welches in ähnlicher Weise benutzt werden kann, so ist man im Stande, ohne Herstellung künstlicher Prismen, alle drei Hauptbrechungsexponenten, d. h. die Gesammtheit der optischen Constanten des Krystalls, festzustellen. Statt der

*) Die einzige Ausnahme bildet der Fall, dass der Axenwinkel fast 90° und der mittlere Brechungsexponent so gross ist, dass die den Axen parallelen Strahlen aus einer solchen Platte nicht mehr in Luft austreten können; alsdann muss die Aufsuchung der Axen in Oel vorgenommen werden.

beiden Flächen eines Prismas kann, wie S. 101 gezeigt worden ist, auch eine derselben und eine Pinakoidfläche zur Bestimmung zweier Brechungsexponenten dienen; diese Methode ist vortheilhaft, wenn z. B. eine Fläche eines verticalen Prismas sehr gross ausgedehnt ist, an der Rückseite des Krystalls dagegen das Makropinakoid vorherrscht, und wenn je zwei Prismenflächen einen zu stumpfen Winkel einschliessen, um die Strahlen im Minimum der Ablenkung hindurchzulassen.

Wenn an einem Krystall nur ein Pinakoid entwickelt, diesem aber die Axenebene parallel ist, so dass man durch dasselbe keine Axen erblickt, oder wenn gar keines auftritt, dagegen ein Prisma vorhanden ist, dessen Flächen normal zur optischen Axenebene stehen, so wird, wenn die Richtung einer optischen Axe nicht einen allzugrossen Winkel mit der Normalen zu einer Prismenfläche*) einschliesst, durch jedes der beiden prismatischen Flächenpaare eine optische Axe sichtbar sein, aber im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes verschoben, von der Mitte aus in einer Richtung, normal zur Prismenkante. In diesem Falle kann man somit auch feststellen, welcher der drei Hauptschnitte die optischen Axen enthält, und durch Messung des Winkels der sichtbaren Axe zur Normale der Prismenfläche den Winkel derselben herleiten.

Durch ein Paar paralleler Pyramidenflächen blickend, wird man nur ausnahmsweise eine optische Axe, natürlich nie in der Mitte des Gesichtsfeldes, beobachten, da meist der Winkel jener gegen die Axenebene so gross ist, dass die einer Axe parallelen Strahlen sie in bedeutender Schiefe treffen, also dieselbe unter einem fast rechten Brechungswinkel verlassen oder gar nicht austreten können.

In allen derartigen Fällen, wo durch directe Beobachtung mittelst natürlicher Krystallflächen die Lage der optischen Axenebene nicht erkannt werden kann, hat man die Pinakoide künstlich durch Schleifen (oder durch Spaltbarkeit, wenn eine solche vorhanden ist) herzustellen, und alsdann ebenso, wie oben angegeben, zu verfahren.

Besonders wichtig für die krystallographische Praxis ist das Verhalten der rhombischen Krystalle im parallelen polarisirten Licht. Wenn eine doppeltbrechende Krystallplatte zwischen gekreuzten Nicols um 360° in ihrer Ebene gedreht wird, so erscheint sie bekanntlich (s. S. 105) in vier Stellungen dunkel, dazwischen hell (oder farbig, wenn sie sehr dünn ist); in jenen sind ihre Schwingungsrichtungen, d. h. die der beiden Strahlen, welche aus einem normal in sie eindringenden Lichtstrahl entstehen, denen der beiden Nicols parallel. So vermag man annähernd (genauer nach einer in der III. Abth. beschriebenen Methode) die Lage der Schwingungsrichtungen für eine bestimmte Krystallfläche gegen die sie begrenzenden Kanten

*) Die beiden Normalen der Prismenflächen und die beiden optischen Axen liegen alsdann in einer Ebene.

zu bestimmen. Um einen Krystall als einen zum rhombischen System gehörigen zu erkennen, ist es oft nöthig, zu untersuchen, ob die Schwingungsrichtungen des Lichtes beim Durchgang durch diejenigen Flächen, nach welchen er vorherrschend ausgedehnt ist, so gelegen sind, wie es die rhombische Symmetrie erfordert. Es ist daher diese Lage für die drei verschiedenen Arten von Flächen des rhombischen Systems hier festzustellen. Sie ergiebt sich aus der Gestalt, welche der Querschnitt der optischen Elasticitätsfläche (S. 91) parallel der betreffenden Krystallfläche besitzt, und welche im Allgemeinen die einer Ellipse ist. Nur zwei Ebenen giebt es, deren Durchschnitte mit jenem dreiaxigen Ellipsoid die Form von Kreisen haben, dies sind diejenigen beiden prismatischen Ebenen, deren Normalen die optischen Axen sind. Da die natürlichen Prismenflächen gegen diese stets mehr oder weniger geneigt sind, so kommen sie praktisch kaum in Betracht; sollte aber einmal zufällig ein Prisma auftreten, dessen Flächen genau senkrecht zu den beiden optischen Axen wären, so müsste ein derartiger Krystall, durch eines dieser Flächenpaare betrachtet, beim Drehen keinen Wechsel zwischen Hell und Dunkel zeigen, da die vertical hindurchgehenden Lichtstrahlen keine Doppelbrechung erleiden. Abgesehen von diesem Falle ist also der Durchschnitt der Elasticitätsfläche durch die betreffende Krystallfläche stets eine Ellipse, und deren grosse und kleine Axe sind die Schwingungsrichtungen der normal zu jener Krystallfläche hindurchgehenden Strahlen. Kennt man also die Gestalt der Elasticitätsfläche, d. h. das Verhältniss ihrer drei Axen, so kann man für jede beliebige Ebene des Krystalls, also z. B. für eine Pyramidenfläche, die Schwingungsrichtungen berechnen. Für gewisse Krystallflächen jedoch, nämlich für die prismatischen und die Pinakoide, ist die Orientirung der Schwingungsrichtungen gegen die geometrische Form bei allen rhombischen Krystallen die gleiche; diese können also allein in Betracht kommen, wenn es auf die praktische Anwendung zur Erkennung des rhombischen Charakters bei einem Krystall ankommt.

Den einfachsten Fall stellen die drei Flächenpaare {001}, {010} und {100} dar; denn wenn senkrecht zu einem solchen paralleles Licht in den Krystall eindringt, so bewegt sich dieses parallel einer Elasticitätsaxe; es geht folglich aus den Darlegungen des §. 22 unmittelbar hervor, dass die beiden hierbei entstehenden Strahlen parallel den beiden anderen Elasticitätsaxen schwingen. Bringt man also eine basische Krystallplatte in das Instrument, so sind deren Schwingungsrichtungen die Krystallaxen a und b, d. h. die Platte erscheint jedesmal dunkel, wenn die Brachydiagonale und die Makrodiagonale der Schwingungsrichtung je eines der beiden gekreuzten Nicols genau parallel sind; ebenso sind die Schwingungsrichtungen einer Platte, parallel {100}, die Krystallaxen b und c; endlich die einer Platte, parallel {010}, die Brachydiagonale und die Verticale. Darum nennt man diese drei Richtungen, d. h. die drei Elasticitätsaxen, auch die Hauptschwingungsrichtungen, welcher Name bereits in §. 24 und 25 Verwendung fand.

Nicht viel verwickelter liegt die Sache bei den prismatischen Formen. Lassen wir das parallele polarisirte Licht senkrecht durch ein Paar paralleler Flächen fallen, welche entweder einem rhombischen Prisma, oder einem Makrodoma, oder einem Brachydoma angehören, so ist klar, dass die Lichtstrahlen sich im Krystall einem optischen Hauptschnitt parallel bewegen. Dieser Fall ist aber bereits in §. 23 vollständig behandelt worden. Jeder Strahl zerfällt hierbei in einen, welcher in dem betreffenden Hauptschnitt schwingt, und einen dazu senkrecht, also parallel einer Elasticitätsaxe, vibrirenden. Diese letztere ist aber die Axe, der die Flächen des Prismas, also auch die Kanten desselben, parallel sind; die Schwingungsrichtungen einer derartigen Platte sind also die Parallele und die Normale zur Längsaxe des Prismas. Betrachtet man also irgend einen prismatisch ausgebildeten rhombischen Krystall im parallelen polarisirten Licht, so dass man dasselbe durch zwei gegenüberliegende Prismen- (oder Domen-) Flächen fallen lässt, so erscheint der Krystall jedesmal dann dunkel, wenn seine Prismenkante der Schwingungsrichtung des einen der beiden (gekreuzten) Nicols genau parallel ist.

Die Schwingungsrichtungen auf einer Pyramidenfläche findet man nach der S. 105 gegebenen Regel, aus welcher hervorgeht, dass dieselben den Kanten der Pyramide nicht parallel gehen; auf zwei benachbarten Flächen derselben sind sie symmetrisch orientirt, daher auch ihre entsprechenden Winkel mit den Kanten die gleichen, nur umgekehrt gelegen sind.

Was die Absorption des Lichtes betrifft, so beweisen die Verhältnisse des Pleochroïsmus rhombischer Krystalle, dass für jede einzelne Farbe die Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Absorption mit den drei Symmetrieaxen zusammenfallen, für die verschiedenen Farben die Werthe derselben ungleiche sind, und zwar bei den sehr stark pleochroïtischen Krystallen derart, dass die grösste Absorption gewisser Farben mit der kleinsten anderer zusammenfällt. Es zeigt sich nämlich, dass unter den, einem Hauptschnitt parallelen Richtungen stets die beiden Symmetrieaxen den grössten Unterschied der Körperfarbe des Krystalls zeigen, und dass die letztere, wenn man von einer Symmetrieebene ausgeht, nach beiden Seiten sich gleichartig ändert mit der Richtung.

Gehen wir von den optischen Eigenschaften zu den thermischen über, so wäre zunächst, da über die Doppelbrechung der Wärme nur wenig Versuche vorliegen, als praktisch wichtig die Wärmeleitung zu erwähnen. Entsprechend dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie ist eine der drei Symmetrieaxen die Richtung der grössten, eine andere die der mittleren, die dritte die der kleinsten Leitungsfähigkeit. Daraus folgt, dass der Sénarmont'sche Versuch (s. S. 159) folgende Resultate liefern muss: auf jedem Pinakoid ist die isotherme Curve eine Ellipse, deren grosse Axe der einen, deren kleine der anderen in der Plattenebene liegenden Krystallaxe parallel ist; aus der Gestalt der Ellipsen auf allen drei Pinakoiden ist abzuleiten, welche Axe die der grössten, mittleren und kleinsten Leitungs-

fähigkeit der Wärme ist; auf allen prismatischen Flächen ist die Schmelzfigur des Wachses ebenfalls eine Ellipse, deren eine Axe stets der Kante des Prismas parallel ist.

Von der Ausdehnung durch die Wärme ist bereits §. 89 angeführt, dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten ebenfalls mit den drei Symmetrieaxen zusammenfallen. Betrachten wir also die Combination der drei rhombischen Pinakoide, so haben wir vollkommen den im I. Abschnitt S. 168 betrachteten Fall, von welchem wir sahen, dass die drei Flächenpaare einander bei allen Temperaturen unter rechten Winkeln schneiden müssen.

Der a. a. O. weiterhin in Fig. 109 dargestellte Fall betrifft offenbar eine Fläche einer prismatischen Gestalt; denken wir uns die dortige Betrachtung durchgeführt auch noch für das andere Flächenpaar, welches zu dem ersten symmetrisch zugehört, so ergiebt dieselbe folgendes Resultat: eine prismatische Form des rhombischen Systems bleibt bei allen Temperaturen der einen Symmetrieaxe parallel, der Winkel ihrer Kanten wird aber beim Erwärmen spitzer oder stumpfer, je nach dem Verhältniss der Ausdehnung der beiden anderen Krystallaxen; dabei bleiben die gegenüberliegenden Flächen aber parallel, und die benachbarten ändern ihre Richtung um gleich viel, folglich bleibt das Prisma bei allen Temperaturen symmetrisch zu den drei Pinakoiden. Aus der Winkeländerung eines Prismas (oder Domas) beim Erwärmen können wir direct den relativen Ausdehnungscoëfficienten je zweier Krystallaxen berechnen. Den letzten Fall endlich, den der Ausdehnung einer rhombischen Pyramide, enthält die Betrachtung S. 170, s. Fig. 110. Denken wir uns dort zu der Fläche *MNO* die sieben anderen, durch die Symmetrie erforderten Flächen, so ergeben sich durch deren ganz gleiche Betrachtung mit Leichtigkeit folgende Schlüsse: Jede Pyramidenfläche ändert ihre Neigung gegen die drei Pinakoide, folglich ihr Axenverhältniss (aus der Vergleichung dieses für zwei verschiedene Temperaturen folgen die relativen Werthe der drei Ausdehnungscoëfficienten), d. h. es ändert sich sowohl der Winkel der Basiskanten beim Erwärmen, als derjenige der schärferen und derjenige der stumpferen Polkanten, aber diese drei in verschiedenem Grade; die Aenderung der Neigung aller acht Pyramidenflächen gegen eine und dieselbe Pinakoidfläche ist genau die gleiche, weil alle die gleichen Parameter auf den thermischen Axen haben; folglich sind auch bei veränderter Temperatur alle vier Basiskanten an Winkelgrösse einander gleich, ebenso die vier schärferen und die vier stumpferen Polkanten, d. h. die Pyramide bleibt stets symmetrisch zu den drei Pinakoiden. Da somit die drei Symmetrieebenen der rhombischen Krystalle bei allen Temperaturen rechte Winkel mit einander bilden, und die prismatischen Formen, wie die Pyramiden, stets symmetrisch zu jenen bleiben, so ist damit der in §. 89 bereits ausgesprochene Satz bewiesen, dass die Symmetrie eines rhombischen Krystalls unabhängig von der Temperatur sei.

Von dieser Symmetrie hängt aber nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie diejenige der physikalischen Eigenschaften ab, also können die optischen Eigenschaften z. B. durch keine Temperaturänderung so sich verändern, dass sie nicht mehr der allgemeinen Symmetrie rhombischer Krystalle entsprächen. Wenn also auch der Winkel der optischen Axen sich beim Erwärmen ändert, so muss diese Bewegung doch bei beiden die gleiche sein, da die Mittellinie stets dieselbe Richtung, parallel einer krystallographischen Axe, beibehält. Nimmt der Axenwinkel bei steigender Temperatur ab, so wird er bei einer bestimmten für eine Farbe Null sein, und bei noch höherer werden die beiden Axen sich wieder von einander entfernen, nunmehr aber in der senkrecht dazu stehenden Ebene gelegen sein. Dass die neue optische Axenebene ebenfalls eine Symmetrieebene des Krystalls sein muss, geht daraus hervor, dass die Hauptschwingungsrichtungen dieselben geblieben sind, wenn auch durch die ungleiche Aenderung der Dichte nach den drei Axen die der mittleren Lichtgeschwindigkeit entsprechende nunmehr die der kleinsten geworden ist, u. s. f. Wie die optischen, so bewahren auch alle übrigen physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle ihre Symmetrie bei allen Temperaturen.

§. 95. **Beispiele holoëdrisch-rhombisch krystallisirender Substanzen:**

Schwefel = S. $a : b : c = 0{,}8130 : 1 : 1{,}9039$ Schrauf. Entweder nur die spitze Pyramide {111} Fig. 447, oder die Combination Fig. 456: $o = \{111\}$, $o' = \{113\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$; von diesen Formen liegt o' in der Zone oc, kann sich also nur durch die Verticalaxe von o unterscheiden; q ist gerade Abstumpfung der längeren Polkanten von {111}, also primäres Brachydoma. — Spaltbarkeit {001} und {110} unvollkommen. Optische Axenebene ist {010}, Axe c ist erste Mittellinie, Doppelbrechung positiv; die Brechungsexponenten für Natriumlicht

$$\alpha = 1{,}958,\ \beta = 2{,}038,\ \gamma = 2{,}240,$$

der wahre Axenwinkel

$$2V = 69^0\ 40';$$

für Roth ist $\beta = 2{,}029$, für Blau 2,082 (Cornu, Annales de chimie et phys. (4). XI, 28, 3f.; Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 93.). Diëlektricitätsconstanten s. Boltzmann, Sitz.-Ber. d. Akad. Wien 67. Bd.

Fig. 456.

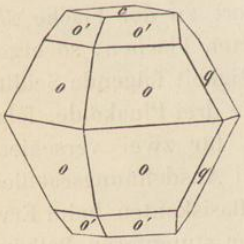
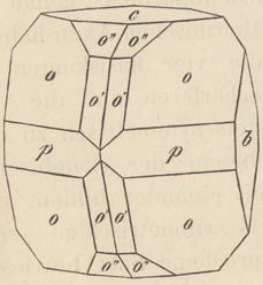


Fig. 457.



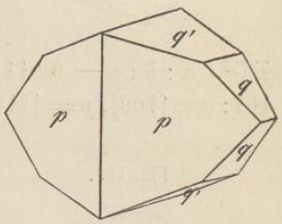
Jod = J. $a : b : c = 0{,}6644 : 1 : 1{,}3653$ Marignac. Combination Fig. 457; $o = \{111\}$, $o' = \{313\}$ (die kürzeren Polkanten von o zuschärfend, also dasselbe $a : c$), $c = \{001\}$, $o'' = \{316\}$ (in der Zone $o'c$, also mit demselben $a : b$, wie ersteres), $p = \{110\}$ (gerade Abstumpfung der Basiskanten von o), $b = \{010\}$.

Arsensulfid (nat. Auripigment) = As^2S^3. $a:b:c = 0{,}9044 : 1 : 1{,}0113$ Mohs. Natürl. selten deutliche Krystalle: {110}, {120}, {101}, {010}. Spaltbarkeit {010} vollkommen.

Antimonsulfid (natürl. Antimonglanz) = Sb^2S^3. $a:b:c = 0{,}9844 : 1 : 1{,}0110$ Krenner. Einfachste Combination {110} (fast rechtwinkelig), am Ende {111} (dem regulären Oktaëder sehr ähnlich). Spaltbarkeit {010} vollkommen.

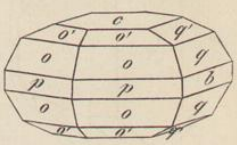
Eisenbisulfid*) (nat. Markasit) = FeS^2. $a:b:c = 0{,}7519 : 1 : 1{,}1845$ Miller. Combination Fig. 458: $p = \{110\}$, $q' = \{013\}$, $q = \{011\}$ (Zone $qq'q'q$).

Fig. 458.



Kupfersulfür (nat. Kupferglanz) = Cu^2S. $a:b:c = 0{,}5797 : 1 : 0{,}9743$ Miller. Combination Fig. 459: $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{113\}$, $q = \{021\}$, $q' = \{023\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$. Diese Combination stellt einen ausgezeichneten Fall hexagonaler Pseudosymmetrie dar, da das Prisma p wenig von 60° verschieden ist, also p und b einander fast unter gleichen Winkeln schneiden; wie diese einem hexagonalen Prisma, so gleichen o und q einer hexagonalen Pyramide**), und o' und q' einer solchen von kleinerer Hauptaxe. Zwillinge und Drillinge nach {110}, wie beim schwefelsauren Kalium (s. S. 457).

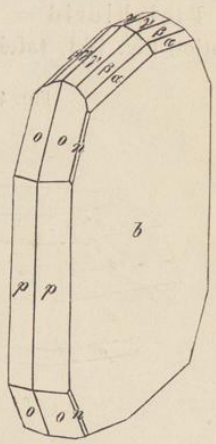
Fig. 459.



Bleioxyd = PbO. $a:b:c = 0{,}666 : 1 : 0{,}971$ Nordenskiöld. Dünne Tafeln nach {100} ausgedehnt, von schmalen Flächen von {012}, {111} und mehrerer abgeleiteter Pyramiden begrenzt. Spaltbarkeit {100}. Optische Axenebene {100}.

Arsenige Säure***) = As^2O^3. $a:b:c = 0{,}3758 : 1 : 0{,}3500$ Groth. Combination Fig. 460: tafelförmig nach $b = \{010\}$, an den Seiten $p = \{110\}$, ferner $o = \{111\}$, schmal $n = \{171\}$ (Zone onb), und am Ende drei abgeleitete Pyramiden: $\gamma = \{1.12.12\}$, $\beta = \{1.12.24\}$, $\alpha = \{1.12.48\}$ (Zone $b\alpha\beta\gamma\gamma\beta\alpha b$). Spaltbarkeit {010} vollkommen. Optische Axenebene dieselbe Fläche.

Fig. 460.



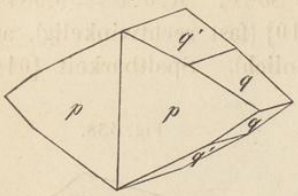
*) Dimorph, vergl. S. 289.

**) Wäre der Winkel des rhombischen Prismas genau = 60°, so wäre die Neigung einer Pyramide gegen die Basis genau dieselbe, wie die eines Brachydomas von doppelt so grosser Verticalaxe, so dass die Combination beider geometrisch absolut zusammenfiele mit einer hexagonalen Pyramide.

***) Dimorph, vergl. S. 272.

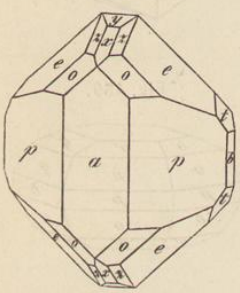
Antimonige Säure (Antimonoxyd, nat. Weissspiessglanzerz) = Sb^2O^3. $a : b : c = 0{,}3914 : 1 : 0{,}3367$ Laspeyres. Combination Fig. 461: $p = \{110\}$, $q = \{021\}$, $q' = \{032\}$; oder tafelförmig nach $\{010\}$, ganz ähnlich Fig. 460, doch kommen Pyramiden mit noch längerer Brachydiagonale, z. B. $\{1.20.15\}$, vor. Spaltbarkeit $\{010\}$ vollkommen. Optische Axenebene für Roth $\{001\}$, für den brechbareren Theil des Spectrums $\{010\}$; Axenwinkel sehr klein.

Fig. 461.



Titansäureanhydrit (nat. Brookit) = TiO^2. $a : b : c = 0{,}9444 : 1 : 0{,}8416$ von Kokscharow. Combination Fig. 462: $a = \{100\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{111\}$, $e = \{122\}$ (Zone $oeeo$; da e häufiger und meist grösser als o, so wird es von manchen Autoren zur primären Pyramide genommen; alsdann wird a, nach welchem die Krystalle meist tafelartig, Brachypinakoid), $x = \{102\}$ (Zone ee), $y = \{104\}$, $z = \{112\}$ (bestimmt durch die beiden Zonen poz und $ezxze$), $t = \{021\}$. Spaltbarkeit $\{010\}$. Optische Axenebene für Roth und Gelb $\{001\}$, $2E = 55^0$ roth, 30^0 gelb; für Grün $\{010\}$, $2E = 33^0$ von Zepharovich; erste Mittellinie ist für alle Farben die Axe a; man erblickt daher im convergenten weissen Licht die in Fig. 5 der Tafel abgebildete Interferenzerscheinung (vergl. S. 112). Doppelbrechung +.

Fig. 462.



Bleichlorid = $PbCl^2$. $a : b : c = 0{,}5943 : 1 : 1{,}1898$ Schabus. Combination Fig. 463, tafelartig nach $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{112\}$ (Zone oc),

Fig. 463.

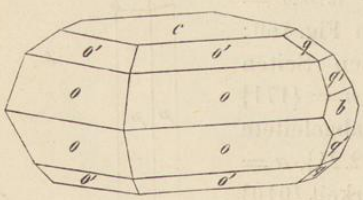
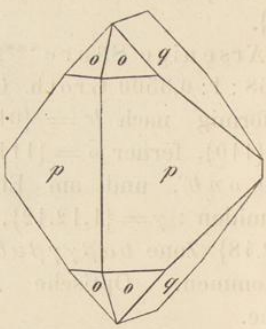


Fig. 464.



$q = \{012\}$ (Zone $o'o'$), $q' = \{021\}$ (Zone qq), $b = \{010\}$. Oft auch nur c, o' und b.

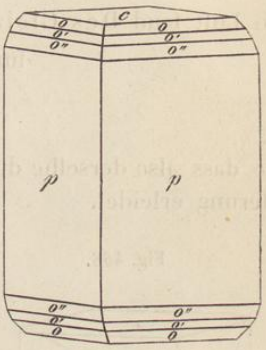
Quecksilberchlorid = $HgCl^2$. $a : b : c = 0{,}7254 : 1 : 1{,}0688$ Mitscherlich. Kurz prismatische Combination Fig. 464: $p = \{110\}$, $o = \{111\}$,

$q = \{011\}$. Spaltbarkeit q vollkommen. Optische Axenebene $\{100\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung negativ.

Quecksilberjodid $= HgJ^2$ (dimorph, s. S. 407). $a : b : c = 0{,}6494 : 1 : ?$ Mitscherlich. Die Krystalle sind nur gebildet von $\{110\}$ und $\{001\}$, daher die Verticalaxe unbekannt.

Quecksilberbromid $= HgBr^2$. $a : b : c = 0{,}6796 : 1 : ?$ Handl. Combination wie bei dem vorigen. Spaltbarkeit $\{001\}$. Optische Axenebene $\{001\}$.

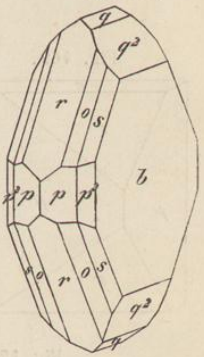
Fig. 465.



Jodbromquecksilber $= HgJBr$. $a : b : c = 0{,}6443 : 1 : 0{,}9194$ Groth. Kurze Prismen Fig. 465: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$; in der Zone beider $o = \{111\}$, $o' = \{221\}$, $o'' = \{441\}$. Spaltbar $\{001\}$. Optische Axenebene $\{001\}$, b ist erste Mittellinie.

Chlorbaryum $= BaCl^2 + 2H^2O$. $a : b : c = 0{,}6068 : 1 : 0{,}6338$ von Kobell. Combination (Fig. 466): $b = \{010\}$, $q^2 = \{021\}$, $q = \{011\}$, $r = \{101\}$, $o = \{111\}$, $s = \{131\}$, $p = \{110\}$, $p^2 = \{120\}$. Spaltbarkeit nach $\{010\}$, $\{100\}$, $\{001\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung positiv. Brechungsexponenten:

Fig. 466.



	α	β	γ
für Roth:	1,628	1,641	1,657
» Gelb:	1,635	1,646	1,660

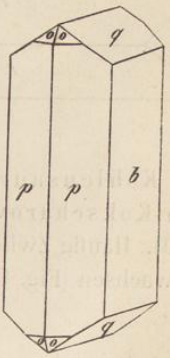
Axenwinkel $2V$

	berechnet:	beobachtet:
für Roth:	84°50′	84°23′—85°18′
» Gelb:	83 46	84 4 —85 0

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 49).

Salpetersaures Kalium (Kalisalpeter) $= KNO^3$. $a : b : c = 0{,}5910 : 1 : 0{,}7011$ Miller. Combination Fig. 467: $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$ (oft ohne die letzte Form, zuweilen auch nach q langprismatisch). Spaltbarkeit nach p und b unvollkommen. Optische Axenebene $\{100\}$, c ist erste Mittellinie. Doppelbrechung —; die Hauptbrechungsindices für die Fraunhofer'schen Linien:

Fig. 467.



	α	β	γ
für B:	1,3328	1,4988	1,4994
„ D:	1,3346	1,5056	1,5064
„ E:	1,3365	1,5124	1,5135
„ H:	1,3436	1,5385	1,5404

Daraus berechnen sich die wahren Axenwinkel:

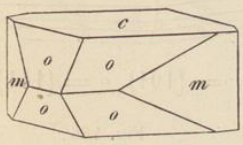
für B: $2V = 6^0\,11'$
„ D: 7 12
„ E: 8 5
„ H: 10 22

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 41, 788.) Den scheinbaren Winkel in Luft fand Des Cloizeaux (Nouv. Recherches, 42):

für Roth $2E = 7^0\,55'$ bei 17° C.
6 42 „ 71,5 „
6 6 „ 121 „

so dass also derselbe durch die Temperatur eine nicht unbeträchtliche Aenderung erleidet.

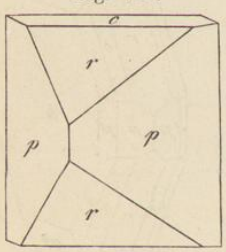
Fig. 468.



Salpetersaures Silber $= AgNO^3$. $a : b : c = 0{,}5302 : 1 : 0{,}7263$ Brooke. Combination Fig. 468: $c = \{001\}$, $o = \{122\}$, $m = \{140\}$ (die Pyramide o ist nicht zur primären gewählt worden, um die Aehnlichkeit des Axenverhältnisses mit dem des Salpeters zu zeigen). Optische Axenebene $\{100\}$, c erste Mittellinie. Scheinbare Winkel der Axen:

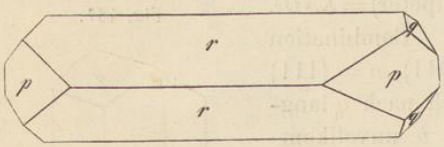
$2E = 126^0\,37'$ roth
133 50 blau.

Fig. 469.



Ueberchlorsaures Kalium $= KClO^4$. $a : b : c = 0{,}7819 : 1 : 0{,}6396$ Groth. Combination Fig. 469: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{101\}$. Spaltbarkeit nach c und p vollkommen. Optische Axenebene $\{001\}$, b erste Mittellinie, Doppelbrechung +.

Fig. 470.



Uebermangansaures Kalium $= KMnO^4$. $a : b : c = 0{,}7974 : 1 : 0{,}6492$ Groth. Combination Fig. 470, prismatisch durch Vorherrschen von $r = \{101\}$, ferner $p = \{110\}$, $q' = \{021\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$ und $\{110\}$ vollkommen.

Kohlensaurer Kalk*) (Aragonit) $= CaCO^3$. $a : b : c = 0{,}6224 : 1 : 0{,}7206$ von Kokscharow. Combination = Fig. 467: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q = \{010\}$. Häufig Zwillinge nach einer Fläche von $\{110\}$ und mit derselben Fläche verwachsen (Fig. 471); sehr oft ist der einspringende Winkel der Flächen b

*) Dimorph, s. S. 359.

durch Vorherrschen von p verdeckt, und es erscheint nur derjenige von q. Nicht selten ist an den zweiten Krystall noch ein dritter nach demselben Gesetz angewachsen; hierbei sind aber zwei Fälle möglich; entweder ist die Zwillingsfläche des zweiten und dritten Krystalls parallel derjenigen des ersten und zweiten, oder sie ist dem anderen Prismenflächenpaar parallel.

Fig. 471.

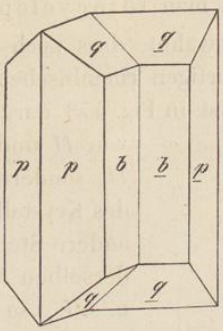
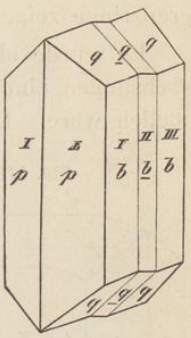


Fig. 472.

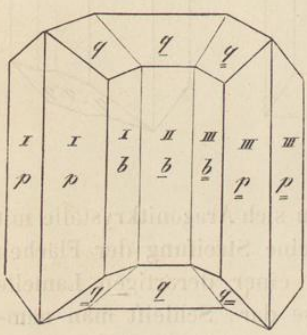


Betrachten wir zunächst den ersten, in Fig. 472 wiedergegebenen Fall, so ist klar, dass Krystall *I* und *III* parallel sind, die Verwachsung also erscheint als ein Krystall, in welchem eine in Zwillingsstellung befindliche Lamelle eingewachsen ist. Nicht selten finden sich Aragonitkrystalle mit einer Anzahl solcher Zwillingslamellen, welche eine Streifung der Flächen q und b verursachen. Ein Aragonitkrystall mit einer derartigen Lamelle bietet in optischer Beziehung besonderes Interesse dar: Schleift man nämlich an denselben oben und unten die Basis an und blickt etwas schräg durch diese Flächen nach einem hellen Licht (oder einer hellen Oeffnung in einem dunkeln Schirm), so sieht man die Interferenzcurven des einen der beiden Axenbilder ohne Polarisationsapparat. Die Ursache dieser Erscheinung ist die eingelagerte Zwillingslamelle. Da nämlich (s. folg. S.) die erste Mittellinie parallel der Verticalaxe, und der Axenwinkel des Aragonit klein ist, so bilden die einer optischen Axe der Zwillingslamelle entsprechenden Strahlen einen sehr spitzen Winkel mit deren, einer verticalen Prismenfläche parallelen, Begrenzungsfläche: fällt nun in einer geeigneten Richtung Licht auf die eine Endfläche des Krystalls auf, so wird dies doppelt gebrochen; die beiden Strahlenbündel treffen unter verschiedenen, aber bei beiden sehr spitzen Winkeln auf die eingelagerte Lamelle, werden also hier sehr verschieden abgelenkt, resp. der eine total reflectirt. In der Richtung der optischen Axe des Krystalls *II* tritt also nur ein linear polarisirtes Strahlenbündel in denselben ein, der Krystall *I* wirkt gerade so, wie der polarisirende Nicol des Polarisationsinstrumentes. Die in jener Richtung durch *II* hindurchgegangenen Strahlen werden in *III* wieder doppelt gebrochen, weil in diesem ihre Richtung wegen der Zwillingsstellung nicht die einer optischen Axe ist, sie verlassen die obere Endfläche also in verschiedenen Richtungen; bringt man nun das Auge in diejenige, welche den Strahlen entspricht, deren Vibrationsrichtung senkrecht zu derjenigen der aus *I* in *II* eintretenden ist, so erhält man die auf eine Schwingungsebene zurückgeführten Componenten der in *III* eintretenden Strahlen, d. h. *III*

wirkt ebenso wie der mit dem Polarisator gekreuzte Analysator eines Polarisationsinstrumentes, und man erblickt, in dieser Richtung nach einer hellen Oeffnung hinsehend, indem man den Krystall dem Auge nähert, auf jener die dunkle Hyperbel mit den innersten Farbenringen des optischen Axenbildes. Solche Krystalle, welche ohne Polarisationsapparat die Interferenzringe zeigen, hat man idiocyclophanische genannt.

Es wurde oben erwähnt, dass noch eine zweite Art von Drillingsverwachsungen eines derartigen rhombischen Krystalls nach demselben Gesetz möglich wäre. Diese ist in Fig. 473 dargestellt; hier ist die Zwillingsfläche von *II* und *III* nicht parallel der von *I* und *II*, sondern es ist die zweite Prismenfläche des Krystalls *II*; in Folge dessen hat *III* eine andere Stellung als *I*. Würde sich an *III* in derselben Weise ein vierter Krystall anlegen u. s. f., so könnten, da der Prismenwinkel nahe 60°, deren sechs einen Ring schliessen. Sehr häufig sind Krystalle von der relativen Stellung *I*, *II*, *III* auch ganz durcheinandergewachsen; sind sie nach *b* tafelförmig, so erscheint der Drilling, von oben gesehen, wie ein sechsstrahliger Stern, dessen Strahlen nahe 60° mit einander bilden. Die Krystallgruppe zeigt sodann eine hexagonale Pseudosymmetrie, eine bei zahlreichen Substanzen, deren Prismenwinkel nahe gleich 60°, wiederkehrende Erscheinung (s. u. a. schwefels. Kalium Fig. 476).

Fig. 473.



Spaltbarkeit {010} unvollkommen. Optische Axenebene {100}, *c* erste Mittellinie. Doppelbrechung —; Brechungsexponenten:

		α	β	γ
für die Linie	*C*:	1,5282	1,6778	1,6820
	D:	1,5301	1,6816	1,6859
	E:	1,5326	1,6863	1,6908.

Daraus folgen die Axenwinkel:

für	*C*:	$2V = 17^0\ 48'$	$2E = 30^0\ 5'$
	D:	17 50	30 14
	E:	18 3	30 41

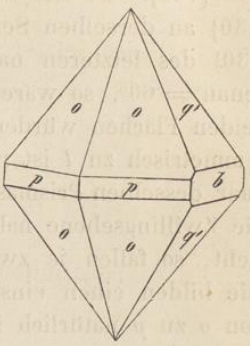
(Rudberg, Poggendorff's Ann. 17. B.). Durch directe Messung fand Kirchhoff (Poggendorff's Ann. 108, 567):

für	*C*:	$2V = 18^0\ 7'$	$2E = 30^0\ 40'$
	D:	18 11	30 52
	E:	18 17	31 7.

Der scheinbare Axenwinkel ändert sich nur wenig mit der Temperatur (bei einer Erhöhung der letzteren um 160° verringert er sich um circa 40').

Kohlensaurer Baryt (nat. Witherit) = $BaCO^3$. $a : b : c =$ 0,5949 : 1 : 0,7413 Miller. Combination Fig. 474: $o = \{111\}$, $q' = \{021\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$: die ersteren sehr nahe eine hexagonale Pyramide, die beiden letzteren ein dergl. Prisma bildend. Spaltbarkeit $\{110\}$ unvollkommen. Die Mehrzahl der Krystalle sind Durchwachsungsdrillinge nach $\{110\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Axenwinkel $2E = 26^0\ 30'$ für Roth und Blau, d. h. die Dispersion der optischen Axen ist so gering, dass sie durch die Messung nicht zu bestimmen; die Farbensäume der Hyperbeln deuten an, dass $\varrho > v$. $\alpha = 1{,}740$ (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 106).

Fig. 474.



Kohlensaures Blei (natürl. Cerussit) = $PbCO^3$. $a : b : c = 0{,}6102 : 1 : 0{,}7232$ von Kokscharow. Combination = Fig. 474, doch $b = \{010\}$ gewöhnlich grösser ausgebildet, die Krystalle darnach oft tafelartig. Meist Zwillinge oder Drillinge nach dem Gesetze des Aragonit. Spaltbarkeit $\{110\}$ unvollkommen. Optische Axenebene $\{010\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Brechungsexponenten und daraus berechnete Axenwinkel:

Linie B:	$\alpha = 1{,}7915$	$\beta = 2{,}0595$	$\gamma = 2{,}0613$	$2V = 8^0\ 22'$	$2E = 17\ 17^0$
- D	1,8037	2,0763	2,0780	8 14	17 8′
- E	1,8164	2,0919	2,0934	7 35	15 55

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie 42, 120). Durch die Wärme nicht unbeträchtliche Aenderung:

$2E = 18^0\ 22'$ bei 12^0 C.
$= 22^0\ 2'$ - $95{,}5^0$ C.

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 48).

Schwefelsaures Kalium = K^2SO^4. $a : b : c =$ 0,5727 : 1 : 0,7464 Mitscherlich. Combination entweder genau = Fig. 474, oder nach der Brachydiagonale prismatisch Fig. 475: $o = \{111\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$.

Fig. 475.

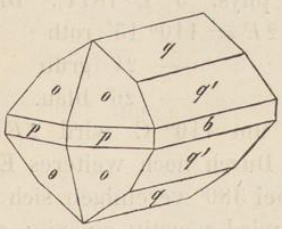
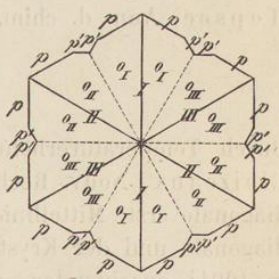


Fig. 476.


p
p
p

und zu beiden Seiten vervollständigt, so bildet er eine rhombische Pyramide $o_I\, o_I\, o_I\, o_I$, deren Basiskanten durch die vier, in der Figur nur als Linien erscheinenden Flächen p des Prismas $\{110\}$ gerade abgestumpft sind; endlich erscheinen noch die vier Flächen des ebenfalls verticalen Prismas $p' = \{130\}$. Da der Winkel $(110):(1\bar{1}0)$ sehr nahe 60°, so ist derjenige von $\{130\}$ an derselben Seite nicht viel verschieden von 120°, und die Fläche $(1\bar{3}0)$ des letzteren nahezu normal zu (110) (wäre der Winkel von $\{110\}$ genau = 60°, so wäre der von $\{130\}$ genau = 120°, und die erwähnten beiden Flächen würden sich unter 90° schneiden). Nach der Fläche $(1\bar{3}0)$ symmetrisch zu *I* ist nun der Krystall *II*, und nach dem anderen Flächenpaar desselben Prismas der Krystall *III* mit *I* verbunden. Da nach Obigem die Zwillingsebene nahe senkrecht zu einer p-Fläche eines jeden Krystalls steht, so fallen je zwei derartig gelegene Flächen nahezu in eine Ebene (sie bilden einen einspringenden Winkel von 1° 16′), und da die Neigung von o zu p natürlich in allen drei Krystallen dieselbe ist, so müssen auch die aneinanderstossenden pyramidalen Flächentheile von *I* und *II* und von *I* und *III* fast zusammenfallen. Verschwinden nun die einspringenden Winkel der p'-Flächen durch vorherrschende Ausbildung der Pyramide o, so entsteht eine Form, welche nur bei genauer Betrachtung von einer hexagonalen Pyramide mit abgestumpften Basiskanten unterschieden werden kann, indem nämlich jede ihrer Flächen nicht aus einer Ebene besteht, sondern nach vertical herablaufenden Grenzen geknickt erscheint. Um dies zu erkennen, braucht man nur das Licht einer einigermaassen entfernten Flamme von den Pyramiden- oder Prismenflächen reflectiren zu lassen, wobei immer die Hälfte derselben beleuchtet erscheint.

Spaltbarkeit $\{010\}$ und $\{001\}$ unvollkommen. Optische Axenebene $\{100\}$, c Mittellinie. Doppelbrechung +; $\varrho < v$. Brechungsexponenten:

	α	β	γ
C	1,4911	1,4928	1,4959
D	1,4932	1,4946	1,4980
E	1,4976	1,4992	1,5029

(Topsøe, Ann. d. chim. et phys. [5] I, 1874). Direct beobachtet:

$2E = 110°\,15'$ roth
— 24 grün
— 26 blau.

Durch Temperaturerhöhung um 140° C. wird $2E$ etwa 10° grösser (Des Cloizeaux, Nouv. Rech.). Durch noch weiteres Erhitzen wird die Makrodiagonale erste Mittellinie; bei 380° vereinigen sich die Axen in der Makrodiagonale und der Krystall wird negativ einaxig; alsdann gehen die Axen in $\{001\}$ auseinander, und wenn dies so weit erfolgt ist, dass a erste Mittellinie geworden ist, so wird der Krystall wieder positiv doppeltbrechend, bis er bei 490° in einen einaxigen übergeht, dessen optische Axe parallel a; jenseits dieser Temperatur wird er wieder zweiaxig mit $\{010\}$ als Axenebene. Zwischen 600° und 650° C. findet eine plötzliche Umwandlung des

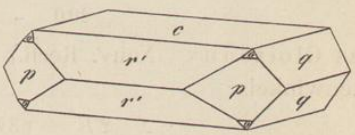
pseudohexagonalen Krystalls in einen wirklich hexagonalen statt, d. h. in die Form einer zweiten dimorphen Modification (Mallard, s. Zeitschr. f. Kryst. 9, 402).

Schwefelsaures Ammonium $= (NH^4)^2SO^4$. $a : b : c = 0{,}5643 : 1 : 0{,}7310$ Mitscherlich. Combination = vorigem (Fig. 475). Spaltbarkeit a {100} vollkommen. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +; $2E = 87^0\,44'$ roth, $88^0\,47'$ blau. Der Winkel steigt merklich mit der Temperatur (Des Cloizeaux, Nouv. Rech.).

Chromsaures Kalium $= K^2CrO^4$. $a : b : c = 0{,}5695 : 1 : 0{,}7297$ Mitscherlich. Combination $= K^2SO^4$ Fig. 475. Optische Axenebene {100}, b erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Der mittlere Brechungsexponent $\beta = 1{,}713$ für die Linie C, 1,725 für D, 1,770 für F.

$2E = 100^0\,32'$ roth
$= 95\ 40$ grün
$= 93\ 10$ blau.

Fig. 477.



Schwefelsaures Baryum (nat. Schwerspath) $= BaSO^4$. $a : b : c = 0{,}7622 : 1 : 1{,}2446$ Helmhacker. Combination Fig. 477: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r' = \{102\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$. Spaltbarkeit {001} vollkommen, {110} ziemlich vollkommen, {010} und {111} deutlich. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

	α	β	γ	$2E$
C	1,6336	1,6348	1,6452	$62^0\,34'$
D	1,6363	1,6375	1,6480	$63\ 12$
E	1,6397	1,6409	1,6517	$64\ 10$

Heusser, Poggendorff's Ann. 87, 454). Ueber die Aenderung der Brechungsexponenten durch die Wärme liegen ausführliche Untersuchungen von Arzruni (Zeitschr. f. Kryst. 1, 165) vor, welcher fand:

	Temp. Cels.	α	β	γ
C	20^0	1,63351	1,63457	1,64531
	50	1,63326	1,63407	1,64462
	75	1,63281	1,63378	1,64426
	100	1,63246	1,63338	1,64360
	150	1,63177	1,63280	1,64264
	200	1,63082	1,63209	1,64157
D	20^0	1,63609	1,63712	1,64795
	50	1,63575	1,63678	1,64726
	75	1,63546	1,63640	1,64683
	100	1,63512	1,63612	1,64643
	150	1,63431	1,63545	1,64533
	200	1,63344	1,63474	1,64426

	Temp. Cels.	α	β	γ
F	20°	1,64254	1,64357	1,65469
	50	1,64215	1,64312	1,65388
	75	1,64174	1,64288	1,65356
	100	1,64148	1,64252	1,65295
	150	1,64071	1,64188	1,65200
	200	1,63994	1,64124	1,65096

Für den wahren Axenwinkel ergab sich bei denselben Temperaturen für die D-Linie (Na-Licht):

20° C.	$2V = 37° 28'$
50 -	38 43
75 -	39 28
100 -	40 15
150 -	42 6
200 -	44 18

Des Cloizeaux (Nouv. Rech.) fand für die Aenderung des scheinbaren Axenwinkels:

$2E = 63° 5'$ roth, bei 12° C.
70 10 - - 121 -
74 42 - - 196 -

Schwefelsaures Strontium (nat. Cölestin) = $SrSO^4$. $a : b : c = 0{,}7696 : 1 : 1{,}2551$ Arzruni. Combination und Spaltbarkeit = vorigem. Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +.

Brechungsexponenten bei 20° C.:

	α	β	γ
C	1,61954	1,62120	1,62843
D	1,62198	1,62367	1,63092
F	1,62790	1,62960	1,63697

bei 200° C.:

C	1,61719	1,61925	1,62547
D	1,61958	1,62168	1,62790
F	1,62542	1,62768	1,63399

Bei 16° C. ist der scheinbare Axenwinkel:

für Li-Licht: $2E = 87° 2'$
- Na - 88 38
- Tl - 89 55½

Derselbe zeigt in höherer Temperatur eine beträchtliche Zunahme (Arzruni, Zeitschr. f. Kryst. 1,177).

Schwefelsaures Blei (natürl. Anglesit) = $PbSO^4$. $a : b : c = 0{,}7852 : 1 : 1{,}2894$ von Lang. Combination wie $BaSO^4$. Spaltbarkeit ebenso, aber weniger vollkommen. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie.

Brechungsexponenten bei 20° C. nach Arzruni (Zeitschr. f. Kryst. 1, 182):

	α	β	γ
C	1,86981	1,87502	1,88630
D	1,87709	1,88226	1,89365
F	1,89549	1,90097	1,91263

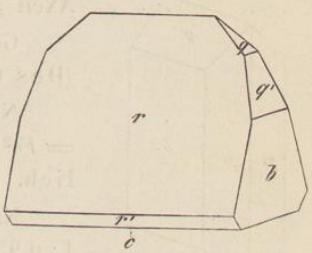
bei 200° C.:

C	1,86527	1,87088	1,88008
D	1,87260	1,87833	1,88754
F	1,89124	1,89716	1,90658

Der wahre Axenwinkel $2V$ ist bei gewöhnlicher Temperatur 75° 24′ (D-Linie), bei 200° = 89° 17′; der scheinbare $2E$ kann nicht direct gemessen werden, da wegen des hohen Brechungsexponenten die Axen aus einer zur ersten Mittellinie senkrechten Platte nicht mehr austreten.

Phosphorsaures Ammonium-Magnesium (natürl. Struvit) $= NH^4 Mg PO^4 + 6 H^2O$. $a : b : c = 0{,}5667 : 1 : 0{,}9121$ Sadebeck. Hemimorph. Combination Fig. 478: $b = \{010\}$; am oberen (antilogen) Pol: $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{041\}$; am unteren (analogen) Pol: $c = \{001\}$, $r' = \{103\}$. Spaltbarkeit {001} und {010} ziemlich vollkommen. Optische Axenebene {001}, a erste Mittellinie, Doppelbrechung +.

Fig. 478.



$2E = 46° 32'$ roth,
47 30 gelb,
48 46 violett,
$\beta = 1{,}497$ roth, 1,502 gelb.

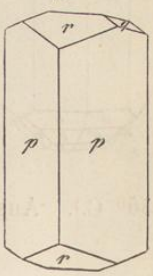
Starke Aenderung durch die Wärme:

Für Roth: $2E = 41° 49'$ bei 7° C.
46 4 - 47 -
51 50 - 95 -

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 95). Polare Pyroëlektricität s. Hausmann, Götting. Nachr. 1846, 121.

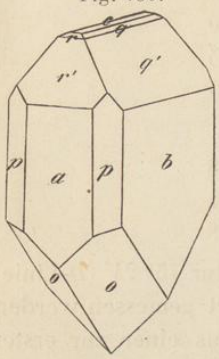
Nitroprussidnatrium $= Na^{12} Fe^6 N^5 O^5 Cy^{30} + 6 H^2 O$. $a : b : c = 0{,}7650 : 1 : 0{,}4115$ Rammelsberg. Combination Fig. 479: $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$ (je ein Paar paralleler Flächen jeder der drei Formen liegt mit einem solchen der beiden anderen in einer Zone, und dies gilt für jede Combination der drei zugehörigen prismatischen Formen). Optische Axenebene {100}, c erste Mittellinie. Doppelbrechung +. $2E = 61°$ roth.

Fig. 479.



Kieselzinkerz $= Zn^2(OH)^2 SiO^3$. $a : b : c = 0{,}7835 : 1 : 0{,}4778$ Schrauf. Hemimorph; Combination Fig. 480: $b = \{010\}$, $a = \{100\}$, $p = \{110\}$; am oberen (analogen) Pol: $r' = \{301\}$, $r = \{101\}$, $q' = \{031\}$, $q = \{011\}$, $c = \{001\}$; am unteren (antilogen) Pol nur $o = \{121\}$. Mit letzterem Ende sind zuweilen zwei Krystalle symmetrisch nach $\{001\}$ verwachsen. Spaltbarkeit $\{110\}$ vollkommen. Optische Axenebene $\{100\}$, c erste Mittellinie, Doppelbrechung +; optische Constanten:

Fig. 480.

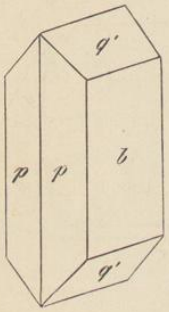


	α	β	γ	$2V$	$2E$
für Roth:	1,6107	1,6142	1,6324	47° 30′	81° 7′
- Gelb:	1,6136	1,6170	1,6360	46 9	78 39
- Grün:	1,6176	1,6202	1,6392	44 42	76 3

(von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 37, 379).

Olivin $= (Mg, Fe)^2 SiO^4$. $a : b : c = 0{,}4660 : 1 : 0{,}5867$ von Kokscharow. Combination Fig. 481: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q' = \{021\}$. Spaltbarkeit $\{010\}$ deutlich. Optische Axenebene $\{001\}$, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Dispersion der Axen gering, $\varrho < v$.

Fig. 481.

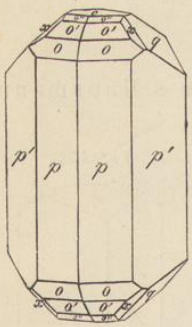


Gelb: $\alpha = 1{,}661$, $\beta = 1{,}678$, $\gamma = 1{,}697$, $2V = 87° 46'$ (Des Cloizeaux).

Normales Eisensilicat (Frischschlacke) $= Fe^2 SiO^4$. $a : b : c = 0{,}4623 : 1 : 0{,}5813$ Mitscherlich. Combination = vorigem.

Nat. Topas $= Al[Al(F^2, O)]\, SiO^4$. $a : b : c = 0{,}5285 : 1 : 0{,}9539$ von Kokscharow. Combination Fig. 482: $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{112\}$, $o'' = \{113\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $x = \{123\}$ (in den Zonen qo' und $p'c$, vergl. die Projection Fig. 455). Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen. Axenebene $\{010\}$, c erste Mittellinie (daher durch eine Spaltungsplatte beide Axen sichtbar); Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

Fig. 482.



	α	β	γ	$2V$	$2E$
C	1,6094	1,6114	1,6188	56° 19′	99° 0′
D	1,6116	1,6138	1,6211	56 39	100 40
E	1,6145	1,6167	1,6241	58 58	100 54

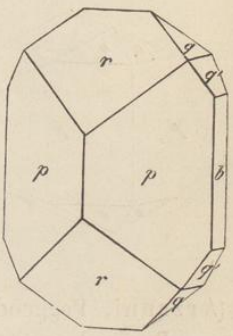
In verschiedenen Varietäten ist der scheinbare Axenwinkel grösser (bis 125°). Mit der Temperatur ändert er sich merklich (z. B. $2E = 119°$ bei 20° C., $= 123°$ bei 250° C.). Ausdehnung durch die Wärme nach Fizeau:

parallel der Axe $a = 0{,}00000484$
- - $b = 0{,}00000414$
- - $c = 0{,}00000592$

Chlorkohlenstoff = C^2Cl^6. $a : b : c = 0{,}5543 : 1 : 1{,}7556$ Brooke. Combination tafelförmig nach {001}, ferner $p = \{110\}$, $q = \{011\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$.

Ameisensaures Baryum = $BaC^2H^2O^4$. $a : b : c = 0{,}7650 : 1 : 0{,}8638$ Heusser. Combination Fig. 483: $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$. Spaltbarkeit {011} deutlich. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

Fig. 483.



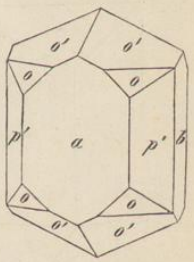
	α	β	γ	$2V$
B	1,5679	1,5918	1,6310	77° 40′
D	1,5729	1,5970	1,6361	77 53
E	1,5777	1,6024	1,6412	78 53

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. 42, 125). Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 59) berechnete den scheinbaren Winkel in Luft aus demjenigen in Oel und dem Brechungsexponenten des letzteren (vergl. S. 118 Anmerk.) und fand:

$2E = 161° 18'$ roth
164 — gelb
176 34 blau

Ameisensaures Calcium = $CaC^2H^2O^4$. $a : b : c = 0{,}7599 : 1 : 0{,}9342$ Heusser. Combination Fig. 484. $a = \{100\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{112\}$, $p' = \{120\}$, $b = \{010\}$. Optische Axenebene {010}, a Mittellinie. Doppelbrechung +.

Fig. 484.



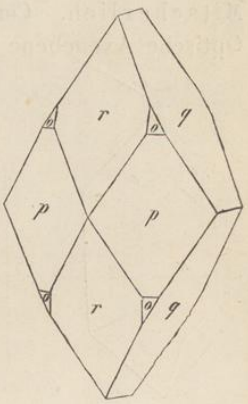
	α	β	γ	$2V$	$2E$
B	1,5067	1,5100	1,5731	26° 29′	40° 28′
D	1,5101	1,5135	1,5775	— 49	41 5
E	1,5132	1,5167	1,5819	— 59	41 27

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. 42, 128). Starke Aenderung des Axenwinkels mit der Temperatur:

$2E = 37° 44'$ bei 15° C.
$= 41\ 36$ - 47 -
$= 42\ 40$ - 56 -

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 60).

Fig. 485.



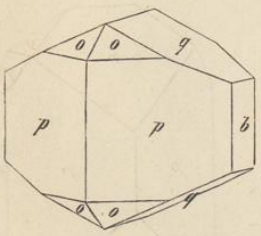
Citronensäure = $C^6H^8O^7 + H^2O$. $a : b : c = 0{,}6740 : 1 : 1{,}6621$ Heusser. Combination Fig. 485: $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$. Spaltbarkeit {001} vollkommen. Optische Axenebene {100}, b Mittellinie. Doppelbrechung +.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
B	1,4896	1,4943	1,5054	66° 31′	110° 3′
D	1,4932	1,4977	1,5089	66 9	107 28
E	1,4967	1,5011	1,5122	64 47	107 4

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 41,790). Der scheinbare Axenwinkel in verschiedenen Platten oft ziemlich variirend.

Terpin (Terpentinölhydrat) $= C^{10}H^{20}O^2 + 2H^2O$. $a : b : c = 0{,}8072 : 1 : 0{,}4764$ Arzruni. Combination Fig. 486: $p = \{110\}$, $o = \{111\}$, $q = \{011\}$, $b = \{010\}$. Axenebene $\{010\}$, a Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

Fig. 486.



	α	β	γ
Li-Linie	1,5024	1,5093	1,5211
Na -	1,5049	1,5124	1,5243
Tl -	1,5073	1,5148	1,5272

Der wahre Axenwinkel direct bestimmt (durch Messung des scheinbaren spitzen und stumpfen in Oel, s. S. 120):

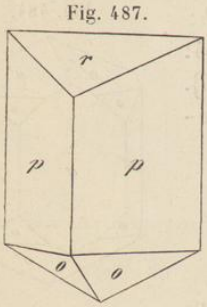
Li-Linie	$2V = 77^0\ 37'$
Na -	— 27
Tl -	— 18

(Arzruni, Poggendorff's Ann. 152, 282).

Benzol $= C^6H^6$. $a : b : c = 0{,}891 : 1 : 0{,}799$ Groth. Nur die primäre Pyramide $\{111\}$.

Resorcin $= C^6H^6O^2$. $a : b : c = 0{,}9123 : 1 : 0{,}5876$ Calderon. Hemimorph. Combination Fig. 487: $p = \{110\}$, oben $r = \{101\}$, unten $\{111\}$; doch kommt $\{101\}$ auch vollständig vor an Krystallen, welche $\{110\}$ und $\{101\}$ gleich gross zeigen und regulären Oktaëdern ähnlich erscheinen. Optische Axenebene $\{001\}$, a erste Mittellinie, Doppelbrechung —; für die *Na*-Linie ist $2V = 46^0 14'$, $\beta = 1{,}555$;

Fig. 487.



$2E = 76^0\ 40'$ roth,
76 6 gelb,
74 35 blau (Groth).

Trinitrophenol (Pikrinsäure) $= C^6H^3N^3O^7$. $a : b : c = 0{,}9741 : 1 : 0{,}9374$ Mitscherlich. Combination Fig. 488: $o = \{111\}$, $p' = \{120\}$, $a = \{100\}$. Optische Axenebene $\{010\}$.

Fig. 488.

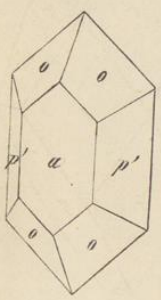
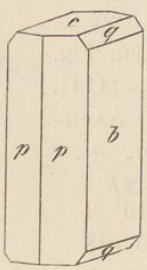


Fig. 489.



Phtalsäure $= C^6H^4(HCO^2)^2$. $a : b : c = 0{,}355 : 1 : 1{,}363$ Marignac. Combination Fig. 489: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$.

Mellithsaures Ammon $= C^6(NH^4CO^2)^6 + 9H^2O$. $a : b : c = 0{,}6461 : 1 : 0{,}3561$ G. Rose. Gewöhnlich sind die Krystalle nur sechsseitige Prismen, gebildet von $\{110\}$ und $\{010\}$, mit der Basis; dazu treten zuweilen kleine Flächen von $\{101\}$ und

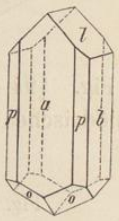
{011}. Optisch interessant durch seine grosse Dispersion der Axen; die Verticalaxe ist erste Mittellinie und Axe der grössten Elasticität für alle Farben, die optische Axenebene dagegen ist für Roth {010}, für Violett {100}; die Krystalle sind also für eine Farbe, und zwar für Grün, welches näher an Gelb als an Blau liegt, einaxig, und zeigen daher die in Fig. 5 der Tafel dargestellte Interferenzfigur (vergl. S. 113). Brechungsexponenten für Strahlen, deren Schwingungsrichtung

	$\parallel a$	$\parallel b$
roth	1,550 (β)	1,552 (γ)
grün	1,564 (γ)	1,563 (β)
blau	1,572 (γ)	1,570 (β)

$2V = 11^0\ 0'$, $2E = 17^0$ roth
$12\ 40$ 20 blau.

Demnach ist die Dispersion der wahren Axen $23^0\ 40'$, die der scheinbaren 37^0 (Grailich und v. Lang, Sitz.-Ber. der Wien. Akad. 27, 49).

Fig. 490.



Triphenylmethan $= (C^6H^5)^3CH$. $a : b : c = 0{,}5716 : 1 : 0{,}5867$ Hintze. Hemimorph. Combination Fig. 490: $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $l = \{021\}$, $o = \{122\}$. Spaltbar nach {011} unvollkommen. Ebene der optischen Axen {001}, b erste Mittellinie, $2H_0 = 139\frac{1}{2}^0$ *Na*.

Triphenylbenzol $= C^6H^3(C^6H^5)^3$. $a : b : c = 0{,}5662 : 1 : 0{,}7666$ Arzruni. Combinationen Fig. 491, 492: $a = \{100\}$, $l = \{310\}$, $m = \{110\}$, $b = \{010\}$ $d = \{011\}$, $p = \{112\}$, $k = \{012\}$. Axenebene {010}, c Mittellinie. Ausserordentlich starke negative Doppelbrechung:

Fig. 491.

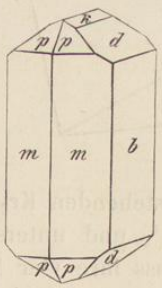
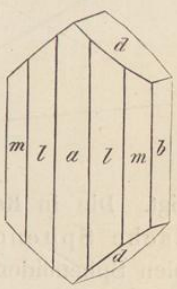


Fig. 492.



	α	β	γ
Na:	1,5241	1,8670	1,8725
Tl:	1,5291	1,8848	1,8897

$2E$ für *Li*: $17^0\ 48'$
Na: 18 25
Tl: 19 27

(A. Arzruni, Zeitschr. f. Kryst. 1, 445.)

§. 96. **Die Hemiëdrie des rhombischen Systems.** 1) Der allgemeine Repräsentant aller rhombischer Formen ist die rhombische Pyramide, von der die Prismen und die Pinakoide nur specielle Fälle darstellen. Jede Hälfte einer Symmetrieaxe wird von vier Flächen der holoëdrischen Pyramide in einem Punkte geschnitten; wir werden also eine hemiëdrische Form derselben erhalten, wenn wir in denselben Punkten nur je zwei Flächen schneiden lassen, welche so ausgewählt sind, dass die von ihnen gebildeten Kanten an den beiden zu einer Symmetrieaxe gehörigen Seiten

jedesmal gleichen Winkel haben. Dieser Bedingung genügt nun offenbar die Form, welche entsteht, wenn alle abwechselnden Flächen der rhombischen Pyramide allein vorhanden gedacht werden. Dieselbe erhalten wir, wenn wir uns die holoëdrische Form durch die drei Symmetrieebenen in acht Oktanten zerlegt denken und die Hälfte derselben so auswählen, dass die zu jeder Fläche symmetrische jedesmal der anderen Hälfte angehört. Behalten wir die Numerirung der Fig. 446 bei und lassen z. B. die Flächen 2, 4, 5, 7 ausfallen, wie es in Fig. 493 dargestellt ist, so ist offenbar die von 1 und 8 gebildete Kante gleich der von 3 und 6 gebildeten; die zwischen 1 und 3 gleich der zwischen 6 und 8; endlich Kante 1 : 6 = Kante 3 : 8; folglich die von den Flächen 1, 3, 6, 8 umschlossene Form eine den Bedingungen der Hemiëdrie vollkommen genügende. Dieselbe ist in Fig. 494 *a* dargestellt, während Fig. 494 *b* die entgegengesetzte hemiëdrische Gestalt, aus den schraffirten Flächen der Fig. 493 bestehend,

Fig. 493.

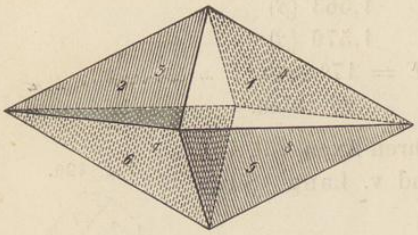


Fig. 494 *a*.

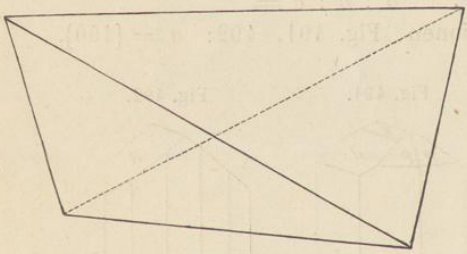
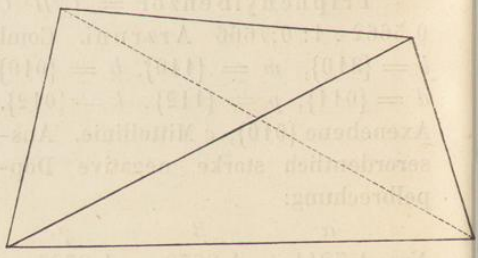


Fig. 494 *b*.



zeigt. Die in Rede stehenden Krystallformen führen den Namen rhombische Sphenoide*) und unterscheiden sich dadurch von den tetragonalen Sphenoiden, dass ihre vier Mittelkanten nicht gleich sind, sondern, wie aus Obigem hervorgeht, immer nur je zwei gegenüberliegende. Sie haben also dreierlei Kanten, zwei Polkanten, zwei stumpfere und zwei schärfere Mittelkanten; die Polkanten können sich demnach nicht, wie bei den tetragonalen Sphenoiden, rechtwinkelig kreuzen, sondern müssen dies unter schiefen Winkeln thun. Daraus sowie aus der dieser Hemiëdrie zu Grunde liegenden Zerlegung der holoëdrischen Form geht hervor, dass ein

*) Darnach heisst diese Hemiëdrie, die einzige des rhombischen Systems, die sphenoidische.

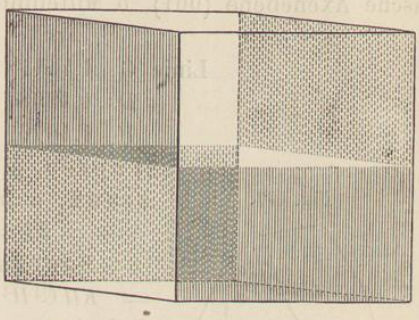
rhombisches Sphenoid keine Symmetrieebene besitzt, und dass die beiden entgegengesetzten Hälften einer rhombischen Pyramide, zu bezeichnen mit

$$\varkappa\{hkl\} \text{ und } \varkappa\{h\bar{k}l\} = +\frac{mP}{2} \text{ und } -\frac{mP}{2},$$

enantiomorphe Gestalten sind. Wären diese Krystalle nicht optisch zweiaxig, bei welcher Klasse eine Circularpolarisation nicht nachzuweisen ist, so würden sie nach Analogie der übrigen enantiomorphen Krystalle eine solche besitzen können. Es steht nun jedenfalls mit dieser Eigenschaft der sphenoidischen Hemiëdrie in gesetzmässigem Zusammenhange, dass fast alle in derselben krystallisirenden Substanzen in Lösung die Polarisationsebene des Lichtes drehen.

2) Wenden wir dieselbe Hemiëdrie nun auch auf die prismatischen Formen an, so muss das Resultat das Gleiche sein bei den Makro- und Brachydomen, wie bei den verticalen Prismen, da diese drei Arten von Formen ja beliebig vertauscht werden können. Sei z. B. Fig. 495 diejenige rhombische Pyramide, deren $m = \infty$, d. h. ein rhombisches Prisma, so wird bei Anwendung dieser Hemiëdrie auf dasselbe je eine Fläche des einen Hemiëders mit einer des entgegengesetzten zusammenfallen, die Prismen bleiben also scheinbar holoëdrisch; dasselbe gilt von denjenigen Pyramiden, deren Brachydiagonale $= \infty$, den Brachydomen, endlich auch von den Makrodomen. Das primäre Prisma ist nun aber aufzufassen als ein rhombisches Sphenoid, dessen $m = \infty$, als die Grenzgestalt der verticalen Reihe der Sphenoide, welche um so spitzer werden, d. h. um so schärfere Polkanten erhalten, je grösser m ist. Wäre also eine hemiëdrisch krystallisirende Substanz zugleich der Hemimorphie unterworfen, so würden die der Axe der Hemimorphie parallelen prismatischen Formen in zwei im Auftreten von einander unabhängige Paare paralleler Flächen zerfallen.

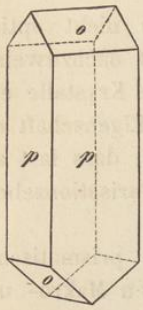
Fig. 495.



3) Für den Werth $m = 0$ fallen sowohl die beiden oberen, wie die beiden unteren Flächen der Sphenoide zu einer zusammen; diese ist die Basis, welche sich demnach nicht von der holoëdrischen unterscheiden kann. Wie in diesem Falle die Polkanten verschwinden, weil ihr Winkel $= 0^0$ wird, so ist das Gleiche der Fall mit den stumpferen Mittelkanten, sobald der Coëfficient der Makrodiagonalen und der Verticalen gleichzeitig $= \infty$ werden, endlich mit den schärferen Mittelkanten, wenn die Axen a und c den Factor ∞ erhalten, d. h. das Makro- und das Brachypinakoid werden durch diese Hemiëdrie ebenso wenig, wie die Basis und die prismatischen Formen alterirt.

Beispiele. Schwefelsaures Magnesium (Bittersalz) $= MgSO^4 + 7H^2O$. $a : b : c = 0{,}9901 : 1 : 0{,}5709$ Brooke. Combination Fig. 496: $p = \{110\}$, $o = \varkappa\{111\}$. Doch findet sich auch oft $\varkappa\{1\bar{1}1\}$, so dass die Krystalle einer tetragonalen Combination von Prisma und Pyramide gleichen. Spaltbarkeit $\{010\}$ vollkommen. Optische Axenebene $\{001\}$, b Mittellinie, Doppelbrechung —.

Fig. 496.



	α	β	γ
Linie C	1,4305	1,4530	1,4583
D	1,4325	1,4554	1,4608
F	1,4374	1,4607	1,4657

(Topsøe, Ann. d. chim. phys. [5] Vol. I). Dispersion der Axen sehr schwach; direct beobachtet (Des Cloizeaux, Ann. d. mines [5] XIV):

$2E = 77^0\,59'$ roth, $77^0\,43'$ violett.

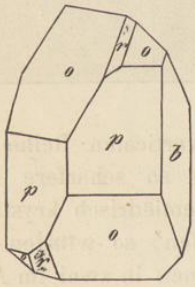
Schwefelsaures Zink (Zinkvitriol) $= ZnSO^4 + 7H^2O$. $a : b : c = 0{,}9804 : 1 : 0{,}5631$ Brooke. Combination gleich der vorigen; nur tritt $\{111\}$ weit häufiger mit allen acht Flächen auf. Spaltbarkeit $\{010\}$. Optische Axenebene $\{001\}$, b Mittellinie, Doppelbrechung —.

	α	β	γ
Linie C	1,4544	1,4776	1,4812
D	1,4568	1,4801	1,4836
F	1,4620	1,4860	1,4897

(Topsøe, a. a. O.). Direct beobachtet (Des Cloizeaux, a. a. O.):

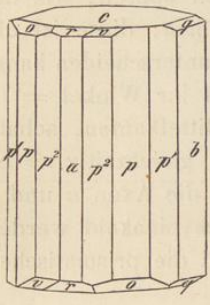
$2E = 70^0\,23'$ roth, $70^0\,6'$ violett.

Fig. 497.



Saures weinsaures Kalium (Weinstein) $= KHC^4H^4O^6$. $a : b : c = 0{,}7115 : 1 : 0{,}7372$ Schabus. Combination Fig. 497: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$ vorherrschend, $\varkappa\{111\}$, $r = \{101\}$. Doch kommt auch gleich grosse Ausbildung beider Sphenoide vor. Spaltbarkeit $\{001\}$. Optische Axen in derselben Ebene, b erste Mittellinie, Doppelbrechung negativ. $2H_a = 84^0$, $2E = 162^0$, $\varrho > v$ (V. von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 31, 109).

Fig. 498.



Rechtsweinsaures Natronkali (Seignettesalz) $= KNaH^4C^4O^6 + 4H^2O$. $a : b : c = 0{,}8317 : 1 : 0{,}4296$ Rammelsberg. Combination Fig. 498: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $p^2 = \{210\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, dazu weniger häufig $o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, $v = \varkappa\{211\}$, $q = \{011\}$, $r = \{101\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, a Mittellinie, Doppelbrechung +.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Roth:	1,490	1,491	1,493	$71^0\,6'$	$120^0\,11'$
Gelb:	1,492	1,493	1,496	69 40	117 2

(Des Cloizeaux, Ann. d. mines [5] XIV, 366). Aenderung der optischen Constanten durch die Temperatur sehr beträchtlich; Müttrich (Poggend. Ann. d. Phys. 121, 193) fand:

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Für Roth bei 16° C.	1,4912	1,4930	1,4964	72° 29′	123° 38′
„ „ „ 45° „	1,4869	1,4889	1,4920	76 46	135 11*).

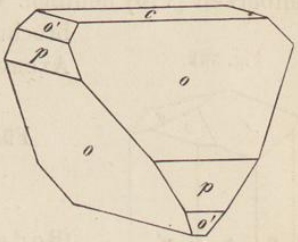
Rechtsweinsaures Natronammoniak (Ammoniumseignettesalz) $= (NH^4)NaH^4C^4O^6 + 4H^2O$. $a : b : c = 0{,}8233 : 1 : 0{,}4200$ Rammelsberg. Dieselbe Combination, wie die des vorigen Salzes. Optische Axenebene {100}, c Mittellinie. Doppelbrechung —; $\beta = 1{,}495$.

$2V = 62°$, $2E = 100°$ (Roth),
$46°$, $70°$ (Violett).

Rechtsweinsaures Antimonylkalium (Brechweinstein) $= K(SbO)C^4H^4O^6$. $a : b : c = 0{,}9556 : 1 : 1{,}1054$ Brooke. Combination Fig. 499: $o = \varkappa\{111\}$, $o' = \varkappa\{1\bar{1}1\}$, $p = \{110\}$, $c = \{001\}$. Spaltbarkeit {001}, {010} und {100}. Optische Axenebene {001}, b Mittellinie, Doppelbrechung —;

$2E = 85°\ 20'$ roth, $83°\ 10'$ blau
(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 56).

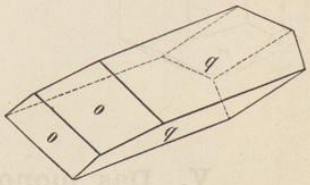
Fig. 499.



Linksweinsaures Antimonoxydkalium hat dieselbe Zusammensetzung und dieselbe Form, wie das vorige, aber $\varkappa\{1\bar{1}1\}$ erscheint vorherrschend, $\varkappa\{111\}$ klein.

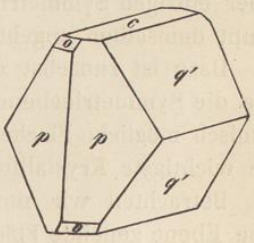
Glycerin $= C^3H^8O^3$. $a : b : c = 0{,}70 : 1 : 0{,}66$ (nur approximativ zu bestimmen) von Lang. Combination Fig. 500: $q = \{011\}$, $o = \varkappa\{111\}$. Spaltbarkeit {100} unvollkommen. Axenebene {001}, erste Mittellinie wahrscheinlich a, zugleich grösste Elasticitätsaxe; Dispersion $\varrho < v$ (v. Lang, Poggendorff's Ann. 152, 637).

Fig. 500.



Asparagin $= C^4H^8N^2O^3 + H^2O$. $a : b : c = 0{,}4737 : 1 : 0{,}8327$ Miller. Combination Fig. 501: $p = \{110\}$, $q' = \{021\}$, $c = \{001\}$, $o = \varkappa\{1\bar{1}1\}$. Optische Axenebene {010}, c Mittellinie, Doppelbrechung +;

Fig. 501.



	α	β	γ	$2V$
Roth:	1,5458	1,5778	1,6185	85° 5′
Gelb:	1,5489	1,5829	1,6246	86 15
Blau:	1,5542	1,5943	1,6378	89 51

Demnach ist für eine bestimmte Wellenlänge des

*) Dieses und das folgende Salz haben so starke Dispersion, dass die hyperbolischen Büschel des Axenbildes nirgends dunkel, sondern lebhaft gefärbt und von grosser Breite sind.

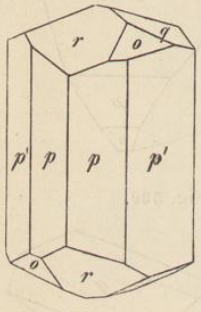
äussersten Blau der wahre Axenwinkel genau = 90°. (Groth, Poggendorff's Ann. 135, 651.)

Fig. 502.

Milchzucker = $C^{12}H^{22}O^{11}$. $a : b : c = 0{,}3529 : 1 : 1{,}6092$ Schabus. Hemimorph. Combination Fig. 502: $c = \{001\}$, $b = \{010\}$, $q' = \{021\}$, zuweilen am oberen Pol so vorherrschend, dass (001) nur als schmale Abstumpfung erscheint, $o = \varkappa\{11\bar{1}\}$ nur mit den beiden unteren Flächen ausgebildet. Spaltbarkeit {100} deutlich. Optische Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung negativ. Axenwinkel $2E = 40^0$ circa, $\varrho > v$ (Grailich und von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 27,66).

Mycose (= Trehalose) = $C^{12}H^{22}O^{11} + 2H^2O$. $a : b : c = 0{,}6814 : 1 : 0{,}4171$ Bodewig. Combination Fig. 503: $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $o = \varkappa\{111\}$. Spaltbarkeit {110} deutlich. Optische Axenebene {010}, c Mittellinie, Doppelbrechung +. Durch Messung des spitzen und stumpfen Axenwinkels in Oel wurde gefunden:

Fig. 503.



	$2V$	$2E$	β
Für die *Li*-Linie:	48° 2′		
„ „ *Na* „	50 16	78° 56′	1,478
„ „ *Tl* „	51 26	83 24	1,533

(Bodewig und Lehmann, unveröffentlichte Beob.) Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 103) fand:

$2E = 73^0\ 8'$ roth,
$82\ 39$ blau.

V. Das monosymmetrische Krystallsystem.

§. 97. **Die Symmetrie der monosymmetrischen Krystalle.** Aus der Definition dieses Krystallsystems, als der Gesammtheit aller Formen mit einer einzigen Symmetrieebene, geht sofort hervor, was für Gestalten überhaupt demselben angehören können.

Dazu ist zunächst zu rechnen die Symmetrieebene selbst, welche hier, wie die Symmetrieebenen aller anderen Systeme, ebenfalls eine krystallonomisch mögliche Fläche ist; das derselben parallele Flächenpaar stellt somit die wichtigste Krystallform des monosymmetrischen Systems dar.

Betrachten wir nun eine andere, unter irgend einem Winkel gegen jene Ebene geneigte Fläche eines monosymmetrischen Krystalls, so erfordert die Symmetrie desselben das Vorhandensein einer zweiten, in Bezug auf die Symmetrieebene zu ihr symmetrisch liegenden; die beiden Flächen schnei-

den einander somit in einer Kante, welche in der Symmetrieebene liegt, d. h. derselben parallel ist. Die vollständige Form, welche hierbei resultirt, wird demnach von diesen beiden und ihren parallelen Gegenflächen gebildet; es ist also eine prismatische Form, deren vier Kanten (je zwei gegenüberliegende gleichwinkelig) der Symmetrieebene parallel sind, und welche von dieser symmetrisch der Länge nach halbirt wird. Solcher prismatischer Formen von verschiedenstem Winkelmaass können nun beliebig viele an einem monosymmetrischen Krystall auftreten, und ihre Längsaxen können einander in der Symmetrieebene (welcher sie sämmtlich parallel sind) unter den mannigfachsten Winkeln durchschneiden, wenn sie nur alle durch rationale Indices auf einander zurückzuführen sind.

Eine andere Art von Gestalten resultirt aus dem besonderen Falle, dass der Winkel, unter welchem eine Krystallfläche die Symmetrieebene schneidet, $= 90^0$ ist; alsdann fällt die zweite, zu ihr symmetrische, mit der ersten zusammen, und diese bildet mit ihrer parallelen Gegenfläche allein schon die vollständige einfache Krystallform. Solcher normal zur Symmetrieebene stehender Flächenpaare sind nun wieder beliebig viele krystallonomisch möglich, deren Durchschnittsrichtungen mit der Symmetrieebene in dieser die mannigfaltigsten Richtungen haben können, nur beschränkt durch das Gesetz der Rationalität der Indices.

Da andere Fälle nicht möglich sind, als dass eine Krystallfläche der Symmetrieebene parallel, oder zu ihr normal ist, oder sie unter schiefem Winkel schneidet, so sind mit diesen dreien alle möglichen erschöpft, und es giebt somit im monosymmetrischen System nur drei Arten von einfachen Krystallformen:

1) die Symmetrieebene selbst;

2) Flächenpaare, welche normal zu ihr stehen;

3) prismatische Formen, welche sie unter schiefen Winkeln durchschneiden.

Aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie folgen nun auch die allgemeinen physikalischen Eigenschaften der monosymmetrischen Krystalle:

Ueber die Elasticität liegen zwar nur sehr wenige directe Messungen vor, doch ist aus der Uebereinstimmung, in welcher die Bestimmungen der Cohäsion und der Härte mit dem oben erwähnten Gesetze stehen, auch auf eine solche für die Elasticität zu schliessen. Darnach könnte dieselbe entweder ein Minimum oder ein Maximum haben in der Normale zur Symmetrieebene, der einzig vorhandenen Symmetrieaxe. Andere Minima und Maxima müssten stets solche von genau gleichem Werthe in den Richtungen bedingen, welche zu jenen symmetrisch liegen in Bezug auf die geometrische Symmetrieebene. Hiermit stimmen die vorhandenen Messungen überein.

Die Cohäsion kann in der Richtung der Symmetrieaxe entweder ein Minimum haben, oder ein Maximum; im ersteren Falle ist der Krystall

spaltbar nach der Symmetrieebene, im letzteren nach anderen Richtungen; da diese die verschiedensten sein können (Formen der zweiten und dritten Art, s. vor. S.), so muss eine Spaltbarkeit nach der Symmetrieebene am häufigsten vorkommen, und dies ist in der That der Fall. Die Härte ist ebenfalls symmetrisch zur Symmetrieebene; bestimmt man dieselbe auf einer Fläche, welche zu jener normal ist, nach verschiedenen Richtungen, so erhält man eine in Bezug auf jene Ebene symmetrische Härtecurve, eine gänzlich unsymmetrische auf anderen Flächen.

Da die optischen Eigenschaften dieselbe Symmetrie befolgen müssen, so ergiebt sich, dass die geometrische Symmetrieebene die optischen Elasticitätsflächen für sämmtliche Farben symmetrisch halbirt, d. h. einer der drei Hauptschnitte dieser Elasticitätsflächen zusammenfallen muss mit der Symmetrieebene der Krystalle. Daraus folgt, dass der Symmetrieaxe eine der drei optischen Elasticitätsaxen für jede Farbe des Lichtes parallel ist, und dass die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen. Sind diese letzteren die der grössten und kleinsten Elasticität, so fällt die Ebene der optischen Axen mit der Symmetrieebene zusammen; ist dagegen die Symmetrieaxe die Axe der grössten oder der kleinsten Elasticität, so steht die optische Axenebene normal zur Symmetrieebene; ein dritter Fall ist nicht möglich, oder die geometrische Symmetrieebene würde aufhören, eine solche auch in physikalischer Hinsicht zu sein. Durch die Symmetrie ist somit nur eine Elasticitätsaxe in ihrer Lage (|| der Symmetrieaxe) fixirt, für die beiden anderen folgt daraus nur, dass sie in der Symmetrieebene liegen, nicht, dass sie in derselben eine bestimmte, krystallographisch gegebene Richtung haben müssten. Es ist somit weder dafür, dass dieselben in irgend einer Beziehung zu den Richtungen der jener Ebene parallelen Kanten stehen, noch dafür, dass sie selbst für die verschiedenen Farben die gleiche Richtung besitzen, irgend eine theoretische Ursache vorhanden. In der That ist auch keines von beiden der Fall; die beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen haben bei jeder Substanz natürlich eine ganz bestimmte Richtung, welche aber in keiner Beziehung zu der der Krystallkanten steht; sie sind ferner verschieden für die verschiedenen Farben, sie sind innerhalb der Symmetrieebene dispergirt. Ihre Lage ist ferner abhängig von der Temperatur des Krystalles, sie ändert sich, wenn derselbe erwärmt wird, aber natürlich nur innerhalb der Symmetrieebene.

Was die Ausdehnung der monosymmetrischen Krystalle durch die Wärme betrifft, so muss, wenn dieselbe symmetrisch zu jener Ebene stattfinden soll, die Normale derselben, die Symmetrieaxe, entweder die Richtung der grössten, der mittleren oder der kleinsten Ausdehnung sein; es müssen also die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen. Nun ist aber theoretisch gar kein Grund vorhanden, dass sie etwa mit den optischen Hauptschwingungsrichtungen zusammenfallen müssten, ja dass ihre Lage selbst eine constante, von der Temperatur unabhängige sei. Dies ist denn auch

in Wirklichkeit keineswegs der Fall; jene beiden der Symmetrieebene parallelen Richtungen stehen zwar auf einander stets normal, wie die beiden Hauptschwingungsrichtungen für dieselbe Farbe, aber ihre Lage gegen die Krystallkanten ist bei jedem Körper eine andere, ohne dass hierbei eine allgemeine Gesetzmässigkeit hervorträte.

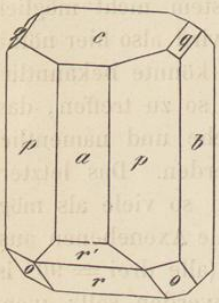
Wie die bisher erwähnten, welche allein eine praktische Wichtigkeit beanspruchen können, bewahren auch alle übrigen physikalischen Eigenschaften nur in Bezug auf eine Ebene, die geometrische Symmetrieebene, ihre Symmetrie; eine weitere ist bei keiner derselben zu erkennen.

§. 98. **Wahl der Axen und der Grundform.** Bisher wurde es immer als das Geeignetste befunden, zu Axenebenen drei Symmetrieebenen zu wählen. Dies ist aber im monosymmetrischen System nicht möglich, weil nur eine einzige solche Ebene vorhanden ist; es wird also hier nöthig sein, wenigstens noch zwei andere Krystallflächen (man könnte bekanntlich alle drei beliebig nehmen) zu wählen, und diese Wahl so zu treffen, dass die Ableitung der übrigen Formen die möglichst einfache und namentlich die Berechnungen in thunlichster Weise erleichtert werden. Das letztere geschieht bekanntlich, wenn von den drei Axenwinkeln so viele als möglich $= 90^0$ sind. Nun giebt es in der That eine Art, die Axenebenen auszuwählen, bei welcher zwei jener Winkel rechte sind (alle drei $= 90^0$ ist im Allgemeinen nicht möglich, wie weiterhin gezeigt werden soll); wenn nämlich als solche genommen werden die Symmetrieebene und zwei jener im vor. § erwähnten zweiten Art von Formen: Flächen, welche normal zu der ersteren stehen. Diese schneiden einander offenbar in der Normale zur Symmetrieebene, d. i. in der Symmetrieaxe, welche also die eine Axe darstellt; die beiden anderen müssen mit dieser rechte Winkel bilden, da sie als Durchschnittslinien jener beiden Flächen mit der Symmetrieebene in letzterer liegen. Diese Art der Wahl der Axen ist nun die allgemein adoptirte, und werden die monosymmetrischen Krystalle gewöhnlich so gestellt, dass die Symmetrieebene vertical ist und auf den Beobachter zuläuft, und dass eine der beiden anderen Axenebenen ebenfalls vertical steht; alsdann ist die dritte Axenebene, da sie nicht normal zu der zweiten ist, nicht horizontal, sondern mehr oder weniger geneigt; es ist ferner allgemein üblich, die Krystalle so zu orientiren, dass diese letzte Fläche nach vorn (auf den Beobachter zu) geneigt ist. Bei dieser Stellung läuft offenbar die Symmetrieaxe quer und horizontal, es ist die bisher stets mit *b* bezeichnete Axe, und wird hier die Orthodiagonale oder schlechtweg die Symmetrieaxe genannt; die Durchschnittsrichtung der beiden verticalen Axenebenen, deren eine die der Symmetrie ist, steht senkrecht, es ist die Verticalaxe *c*; endlich die Durchschnittsrichtung der dritten Ebene mit derjenigen der Symmetrie ist nach vorn geneigt, auf den Beobachter zulaufend; sie wird deshalb die Klinodiagonale genannt und mit *a* bezeichnet. Man sieht nun leicht, dass bei einer solchen Wahl und Stellung der Axen dieselben sich in ihrer Richtung nur dadurch von dem

Axensystem eines rhombischen Krystalls unterscheiden, dass eine derselben aus der horizontalen Lage nach vorn geneigt erscheint; hierauf bezieht sich der von Naumann gebrauchte Name »monoklines System«, welcher deshalb unpassend ist, weil man mit demselben Rechte alle drei Axen schief geneigt auswählen könnte. Es bedarf kaum der Bemerkung, wie verfehlt der noch zuweilen gebrauchte Name »Hauptaxe« für die Verticalaxe ist, wenn man sich erinnert, dass diese eine ganz beliebige Krystallkante ist.

Betrachten wir nun ein ganz bestimmtes Beispiel, etwa den in Fig. 504 dargestellten monosymmetrischen Krystall*), so ist leicht zu sehen, dass derselbe nach keiner anderen Ebene in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt werden kann, als parallel der Fläche b; diese Krystallfläche heisst also die Symmetrieebene. Zu dieser sind normal die Flächen c, a, r' und r mit ihren parallelen Gegenflächen; wählen wir nun von diesen zwei zu Axenebenen, z. B. a, welches wir vertical stellen, und c, welches schräg nach vorn läuft, so hat der Krystall in der Figur diejenige Stellung, von welcher oben ausgesagt wurde, dass sie die allgemein adoptirte eines monosymmetrischen Krystalls sei.

Fig. 504.



Die Klinodiagonale a ist nun die Durchschnittsrichtung von b und c, oder, da diese Kante durch q abgestumpft ist, die Kante $c : q$; die Orthodiagonale b ist die Normale zur Fläche b oder, was dasselbe ist, die Kante $a : c$; die Verticalaxe c endlich ist die Durchschnittsrichtung der Flächen a und b, oder, da diese Kante durch p abgestumpft ist, die Kantenrichtung $a : p$ oder $b : p$.

Nachdem nunmehr drei bestimmte Kantenrichtungen des Krystalls als »Axen« fixirt sind, können wir alle Flächen desselben durch ihre Parameter, wie bisher, bestimmen, und haben daher zunächst zur Wahl einer Grundform zu schreiten. Diese muss irgend eine Form sein, deren Flächen die drei Axen in endlichen Abständen schneiden; solcher ist aber an dem als Beispiel gewählten Krystall Fig. 504 nur eine einzige vorhanden, nämlich die prismatische Gestalt $o\,o$ nebst ihren beiden oben hinten gelegenen Gegenflächen. Jede Fläche dieser Form liegt in einem Oktanten des Raumes, gebildet von den drei Axenebenen a, b, c, in welchem der Winkel der ersteren mit der letzten spitz ist; ihre Lage ist bekannt, d. h. wir können das Verhältniss, in welchem die drei Axen von der Fläche geschnitten werden, berechnen, wenn wir den Winkel der Axen a und c (gleich dem-

*) Für den Anfänger ist es hier wohl unumgänglich nöthig, sich die Anschauung durch ein Modell, wie solche käuflich sind, zu erleichtern; die Figur stellt einen Feldspathkrystall dar.

jenigen der Flächen a und c), d. h. den sogenannten Axenwinkel, welcher mit β bezeichnet wird, kennen, und ferner die Neigung der Fläche gegen zwei jener Axenebenen.

Berechnet man aus diesen Grössen das Verhältniss der drei Parameter $OA : OB : OC = a : b : c$ der Grundform, so sind, da ausserdem die drei Axenwinkel, $\alpha = 90^0$, $\beta =$ dem gemessenen Winkel der Flächen a und c, $\gamma = 90^0$, bekannt sind, nunmehr die Elemente des Krystalls und, vermöge des Gesetzes der Rationalität der Indices, die Gesammtheit aller seiner möglichen Formen, seine Krystallreihe, gegeben.

Aus den Entwickelungen des vorhergehenden § über die Ausdehnung der Krystalle geht unmittelbar hervor, dass zwar die Axenwinkel α und γ unverändert rechte bleiben, wenn der Krystall erwärmt wird, dass aber β sich dabei ändern muss, da innerhalb der Symmetrieebene nach verschiedenen Richtungen die Ausdehnungscoëfficienten verschieden sind, also die darin gelegenen Krystallkanten bei anderer Temperatur einander auch unter (wenn auch nur sehr wenig) verschiedenen Winkeln schneiden müssen. Ferner geht daraus hervor, dass parallel den drei Axen a, b und c die Ausdehnung keine gleiche ist, also auch das Verhältniss $a : b : c$ sich stetig mit der Temperatur des Krystalls ändert, d. h. ein irrationales ist. Genau genommen gelten demnach von den Elementen eines monosymmetrischen Krystalls β und das Parameterverhältniss der Grundform nur für eine bestimmte Temperatur.

Im folgenden § sollen nunmehr alle übrigen möglichen Formen auf die so gewählten Axen und Grundform bezogen und entsprechend bezeichnet werden.

§. 99. **Ableitung und Bezeichnung der monosymmetrischen Formen.** Zu der von uns zur Grundform gewählten Fläche o (Fig. 504) und ihrer parallelen Gegenfläche erfordert die Symmetrie noch ein zweites Flächenpaar auf der entgegengesetzten Seite der Symmetrieebene, also ist die vollständige Grundform eine prismatische Gestalt. Dieselbe wird, da sie, in Bezug auf ihre Lage zu den Axen, der primären Pyramide des rhombischen Systems entspricht, Hemipyramide*) genannt. Ausser dieser Form kann an demselben Krystall eine zweite prismatische Form auftreten, deren Flächen dieselben Parameter haben, aber über dem stumpfen Axenwinkel, d. h. vorn oben rechts und links, sowie hinten unten rechts und links, gelegen sind. Diese Form nennt man ebenfalls »Hemipyramide« und unterscheidet sie von der ersteren, der primären hinteren (nach Naumann

*) Dieser Name ist nicht glücklich gewählt, da die betreffende Form keine Hemiëdrie einer rhombischen Pyramide, sondern eine vollständige Form darstellt, deren geometrischer Charakter und physikalische Eigenschaften vollkommen verschieden sind von denen der rhombischen Formen. Ebenso wenig vortheilhaft ist es, dass in der Naumann'schen Bezeichnung die hintere Hemipyramide, welche die negative Seite der a-Axe schneidet, als positive bezeichnet wird.

positiven) als primäre vordere (Naumann's negative) Hemipyramide. Die Zeichen dieser Formen sind:

$$\{\bar{1}11\} = +P \text{ (oder } P\text{) und } \{111\} = -P$$

Zur ersteren Form gehören die Flächen:

$$(\bar{1}11)\ (\bar{1}\bar{1}1)\ (11\bar{1})\ (1\bar{1}\bar{1})$$

zur zweiten die folgenden:

$$(111)\ (1\bar{1}1)\ (\bar{1}1\bar{1})\ (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$$

Es ist hierbei aber wohl zu beachten, dass jede dieser beiden Hemipyramiden für sich die Gesammtheit aller, durch die Symmetrie einander bedingender Flächen, d. h. eine vollständige einfache Krystallform ist, dass die eine also zur andern in keiner weiteren Beziehung steht, als dass bei dieser Wahl der Axen zufällig diese mit jener gleiche Parameter erhält (bei einer andern Wahl derselben würde es eine andere sein). Es führt daher leicht zu einer falschen Vorstellung, wenn man, wie es häufig geschieht, die Combination dieser beiden einfachen Formen als die »vollständige monosymmetrische Pyramide« bezeichnet.

Ausser der primären vorderen und der primären hinteren Hemipyramide können nun aber an einem Krystall noch die mannigfaltigsten abgeleiteten Hemipyramiden, vordere wie hintere, vorkommen, deren Parameterverhältnisse rationale Vielfache desjenigen der primären sind. Man kann dieselben genau ebenso wie im rhombischen System in drei Ableitungsreihen ordnen:

1) Hemipyramiden der verticalen Reihe, welche dasselbe Verhältniss der Klino- und Orthodiagonale wie die primäre, aber andere Verticalaxe besitzen; sie sind theils flacher als jene:

$$\{hhl\} \text{ und } \{\bar{h}hl\}_{(h<l)} = \mp \frac{1}{m} P$$

oder spitzer:

$$\{hhl\} \text{ und } \{\bar{h}hl\}_{(h>l)} = \mp mP$$

2) Hemipyramiden der klinodiagonalen Reihen: Eine solche Reihe bilden diejenigen Hemipyramiden, welche gleiches Verhältniss der Orthodiagonale zur Verticale, wie $\{111\}$, aber $n$fache Klinodiagonale haben:

$$\{hkk\} \text{ und } \{\bar{h}kk\}_{(h<k)} = \mp \breve{P}n$$

Eine gleiche Reihe leitet sich aber von jeder Pyramide der verticalen Reihe ab, also allgemein:

$$\{hkl\} \text{ und } \{\bar{h}kl\} = \mp m\breve{P}n$$

3) Hemipyramiden der orthodiagonalen Reihen: Durch rationale Vervielfältigung der Symmetrieaxe bei primär bleibendem Verhältniss $a : c$ folgt die Reihe:

$$\{hkh\} \text{ und } \{\bar{h}kh\}_{(h>k)} = \mp \breve{P}n\,.$$

Ausgehend von einer beliebigen Hemipyramide $\mp mP$, die allgemeine Reihe:

$$\{hkl\} \text{ und } \{\bar{h}kl\} = \mp m\breve{P}n.$$

Alle diese Reihen führen nun auf gewisse Grenzformen, welche entstehen, wenn einer oder zwei der Indices den Werth 0 annehmen.

Wenn in der verticalen Reihe der Hemipyramiden h sehr viel grösser als l, also der Coëfficient m einen sehr grossen Zahlenwerth besitzt, so hat die betreffende prismatische Form eine nahe verticale Stellung; ist $l = 0$, d. h. $m = \infty$, so bildet sie ein wirkliches verticales Prisma, und zwar das primäre (in Fig. 504 die mit p bezeichnete Form). Dieses wird, da es zugleich die Grenzform der verticalen Reihe der positiven Hemipyramiden wie derjenigen der negativen ist, einfach mit $\infty P = \{110\}$ bezeichnet. Denken wir uns die oben erwähnte Combination von $+P$ und $-P$, so besitzt diese vier Combinationskanten, welche in der die Axen a und b enthaltenden Ebene liegen; diese vier Kanten werden durch das primäre Prisma vertical, d. h. nicht gerade, abgestumpft, da $+P$ und $-P$ ja verschiedene Neigung gegen die Verticalaxe haben.

Da sich von jeder Hemipyramide der verticalen Reihe durch Vervielfältigung der Klinodiagonale um die Zahl n eine neue herleiten lässt, so bilden alle klinodiagonalen Hemipyramiden, sowohl die positiven als die negativen, deren n das gleiche ist, wiederum je eine verticale Ableitungsreihe; das gemeinschaftliche Grenzglied dieser beiden Reihen für den Fall $m = \infty$ ist wieder ein verticales Prisma, welches aber vorn einen schärferen Winkel hat als das primäre, und zwar um so mehr, je grösser n ist. Dieses Prisma wird bezeichnet

$$\{hk0\}_{(h<k)} = \infty \breve{P} n$$

Solcher giebt es natürlich eine ganze Reihe mit verschiedenen n ($n = \frac{k}{h}$, d. h. zwischen 1 und ∞), welche sämmtlich die seitlich gelegenen Kanten des primären Prismas zuschärfen.

In genau derselben Weise bilden alle abgeleiteten orthodiagonalen Hemipyramiden mit demselben n eine positive und eine negative verticale Ableitungsreihe, deren gemeinschaftliches Grenzglied, wenn $m = \infty$, ein abgeleitetes orthodiagonales Prisma von verticaler Stellung ist; von dieser Art giebt es verschiedene mit verschiedenen Werthen von n, deren vordere und hintere Kante um so stumpfer sind, je grösser $n = \frac{h}{k}$. Sie schärfen sämmtlich die vordere und die hintere Kante des primären Prismas zu und haben das Zeichen:

$$\{hk0\}_{(h>k)} = \infty \breve{P} n$$

Wie die verticalen Reihen stets zu den Prismen als Grenzformen führen, wenn $m = \infty$ wird, so müssen auch Endglieder der orthodiagonalen und klinodiagonalen Ableitungsreihen existiren, deren $n = \infty$ ist.

Betrachten wir zuerst eine klinodiagonale Reihe von Hemipyramiden, z. B. die primäre, so bilden die Flächen derselben offenbar um so spitzere Winkel mit der Klinodiagonale, je grösser der Coëfficient n ist. Erreicht dieser den Werth ∞, so sind die vier Flächen dieser Hemipyramide der Klinodiagonale parallel, und zwar entsteht genau dieselbe Grenzform, sei es,

dass man von der positiven oder von der negativen Reihe ausgeht. Die entstehende prismatische Form entspricht den Domen des rhombischen Systems und wird daher Klinodoma genannt (eine solche Form ist die in Fig. 504 mit q bezeichnete). Das Endglied der von der primären (positiven oder negativen) Hemipyramide abgeleiteten klinodiagonalen Reihe ist das primäre Klinodoma:

$$\{011\} = P\infty,$$

dasjenige einer Reihe von Hemipyramiden, deren m kleiner als 1 ist, ein flacheres Klinodoma, allgemein:

$$\{0kl\}_{(k<l)} = \frac{1}{m} P\infty,$$

welches die obere und die untere Kante des primären zuschärft. Endlich hat jede klinodiagonale Reihe, welche sich von einer spitzeren Hemipyramide ableitet, als letztes Glied ein schärferes Klinodoma:

$$\{0kl\}_{(k>l)} = mP\infty,$$

welches die seitlichen Kanten des primären zuschärft.

Gehen wir über zur Betrachtung der Grenzformen der makrodiagonalen Ableitungsreihen, so ist klar, dass wir uns denselben um so mehr nähern, je grösser der Coëfficient n, d. h. je grösser der Winkel ist, welchen die Flächen der Hemipyramiden mit der Symmetrieebene einschliessen. Ist $n = \infty$, so wird dieser Winkel $= 90^0$ (da die Flächen alsdann der Symmetrieaxe parallel, müssen sie zur Symmetrieebene normal sein); je zwei zu einander symmetrisch liegende Flächen fallen alsdann in eine Ebene, ebenso das Paar der beiden Gegenflächen, und aus der Hemipyramide wird ein Paar paralleler Flächen, welche zugleich der Symmetrieaxe parallel sind. Da das Verhältniss der Axen a und c in einer solchen Ableitungsreihe constant bleibt, so muss jene Grenzgestalt, deren $b = \infty$ ist, die vordere und hintere Kante der derselben Reihe angehörigen Hemipyramiden gerade abstumpfen. Eine derartige Ableitungsreihe hinterer Hemipyramiden besitzt als Endglied, für den Fall $n = \infty$, ein Flächenpaar, dessen Lage am Krystall oben hinten und unten vorn ist; eine Reihe vorderer Hemipyramiden ein solches, dessen Lage vorn oben und hinten unten ist. In Fig. 504 sind zwei solcher Flächenpaare, welche Hemidomen genannt werden, r und r', dargestellt, und zwar ist r dasjenige, welches die Kante der primären hinteren Hemipyramide gerade abstumpft, also das primäre hintere (nach Naumann positive) Hemidoma:

$$\{\bar{1}01\} = +P\infty.$$

Das andere, r', ist ebenfalls ein hinteres, aber sein Verhältniss $a : c$ ist offenbar ein anderes, seine Verticalaxe grösser $(= 2c)$; ein derartiges spitzeres Hemidoma ist allgemein zu bezeichnen mit

$$\{h0l\}_{(h>l)} = +mP\infty.$$

Andererseits sind auch Hemidomen möglich, welche die Grenzglieder je einer Reihe von Hemipyramiden sind, deren Anfangsglied eine flachere Hemi-

pyramide der Verticalreihe; deren Zeichen ist, wenn sie zu den hinteren gehören:

$$\{\bar{h}0l\}_{(h<l)} = +\frac{1}{m}P\infty.$$

Hiernach verstehen sich die Zeichen der vorderen (nach Naumann negativen) Hemidomen, der Grenzformen der Reihen vorderer Hemipyramiden, ganz von selbst; sie sind:

$$\{h0l\}_{(h<l)} = -\frac{1}{m}P\infty,$$
$$\{101\} = -P\infty,$$
$$\{h0l\}_{(h>l)} = -mP\infty.$$

Schliesslich bleibt es noch übrig, die drei möglichen Formen zu besprechen, welche je zweien Axen parallel sind, d. h. die drei Axenebenen selbst. Die wichtigste derselben, die Symmetrieebene, ist den Axen a und c parallel; wir können sie demnach auffassen als das Endglied der Reihe der abgeleiteten klinodiagonalen Prismen ∞Pn, dessen $n = \infty$ geworden, welches sich daher in ein Flächenpaar verwandelt hat, und können sie bezeichnen:

$$\infty P\infty = \{010\}.$$

Zu derselben Bezeichnung gelangen wir auch, wenn wir sie auffassen als Endglied der Reihe der Klinodomen $mP\infty$, welche sich derselben um so mehr nähern, je grösser m wird. Dieses Flächenpaar wird nach Analogie des rhombischen Systems, wo die beiden verticalen Axenebenen nach der zweiten ihnen parallelen Axe benannt werden, auch als Klinopinakoid bezeichnet.

Dem entsprechend nennt man das der Orthodiagonale parallele Flächenpaar,

$$\infty P\infty = \{100\},$$

das Orthopinakoid. Es ist dies die Grenzform der orthodiagonalen Ableitungsreihe der verticalen Prismen ∞Pn, deren Flächen normal zur Symmetrieebene, also zu je zwei zusammenfallen, wenn $n = \infty$ wird. Ebenso ist es das letzte Glied sowohl der positiven, als der negativen Reihe von Hemidomen, welche demselben sich um so mehr nähern, je grösser m wird.

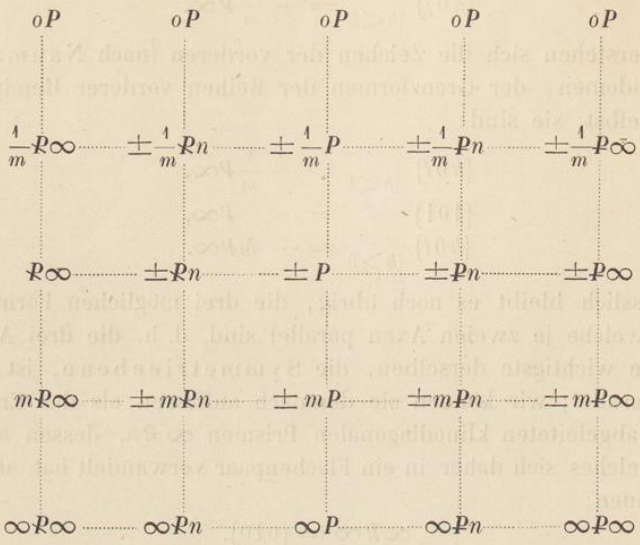
Das dritte den Axen a und b parallele Flächenpaar nennt man, wie im rhombischen System, die Basis und bezeichnet sie

$$oP = \{001\}.$$

Sie ist die untere Grenzform der verticalen Reihe der Hemipyramiden $\pm mP$, wenn $m = 0$ wird, ebenso diejenige der Klinodomen und der Hemidomen für denselben Werth von m.

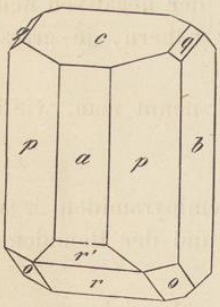
Den Zusammenhang aller dieser Ableitungsreihen übersieht man am leichtesten durch ein Schema, welches genau dem des rhombischen Systems entspricht, indem alle durch punktirte Linien verbundene Reihen bei glei-

chem Vorzeichen zugleich krystallographische Zonen darstellen, und welches nunmehr keiner weiteren Erläuterung bedarf:



Alle diese Formen reduciren sich jedoch auf die in §. 97 als allein möglich erkannten drei Arten: 1) die Symmetrieebene {010}; 2) die dazu normalen Flächenpaare, d. i. die Basis, das Orthopinakoid und die vorderen wie die hinteren Hemidomen; diese Formen, welche wir unter dem Namen Querflächen zusammenfassen wollen, unterscheiden sich in keiner Weise von einander, denn es steht ganz im Belieben des Beobachters, irgend welche dieser Flächenpaare zur Basis und zum Orthopinakoid zu wählen; 3) die prismatischen Formen, d. h. die Hemipyramiden, die verticalen Prismen und die Klinodomen, für welche das Gleiche gilt. Hätten wir z. B. den in Fig. 504 dargestellten Krystall so orientirt, dass c das Orthopinakoid, a die Basis geworden wäre, so würde das Prisma p zum Klinodoma, das Klinodoma q zum verticalen Prisma werden. Hätten wir dagegen etwa r zum Orthopinakoid, a zur Basis gewählt, so würde die bisherige Hemipyramide o zum verticalen Prisma, p zum Klinodoma, r' zum vorderen, c zum hinteren Hemidoma, q zur Hemipyramide werden. Von diesen verschiedenen Arten, den Krystall zu stellen, welche sich natürlich noch weiter vermehren liessen, hat keine in theoretischer Beziehung irgend einen Vorzug, und es sind lediglich praktische Fragen, welche für die eine oder andere den Ausschlag geben, so namentlich die möglichste Einfachheit der resultirenden Indices. Ferner empfiehlt es sich, nicht zwei

Fig. 504.



Flächen zu {001} und {100} zu wählen, welche einander unter einem sehr stumpfen Winkel schneiden; bei dem hierdurch resultirenden sehr spitzen Axenwinkel β kommen nämlich ebene Dreiecke zur Berechnung, deren einer Winkel so spitz sein kann, dass das Verhältniss zweier Seiten mit geringerer Genauigkeit berechnet werden kann, da einer kleinen Winkeldifferenz alsdann eine grosse Längendifferenz in der gegenüberliegenden Seite entspricht.

Anmerk. Unter den verschiedenen Stellungen, welche man einem monosymmetrischen Krystalle geben kann, sind auch solche möglich, bei denen die Orthodiagonale auf den Beobachter zuläuft und demnach zur a-Axe genommen ist (wobei der Axenwinkel α schief), und eine derartige Stellung kann unter Umständen nothwendig werden, um eine Vergleichung mit der Form eines chemisch verwandten Körpers, welcher in einem andern Systeme krystallisirt, zu ermöglichen. Sollen alsdann auch die Indices mit der gewählten Stellung im Einklang stehen, so würde natürlich das primäre Klinodoma das Zeichen {101}, die beiden Hemidomen die Zeichen {011} und $\{0\bar{1}1\}$ u. s. f. erhalten. Die im Vorhergehenden und weiterhin benutzten Symbole haben nur dann die angegebene Beziehung zu den Naumann'schen Zeichen, wenn die übliche Stellung, a = Klinodiagonale, b = Symmetrieaxe, c = Verticale, beibehalten wird.

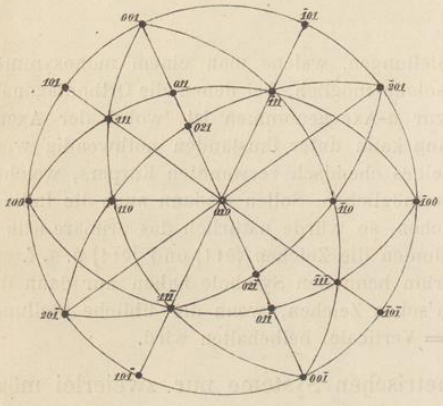
Zwillinge sind im monosymmetrischen Systeme nur zweierlei möglich, solche nach einer Querfläche (ob dieselbe als Basis, Orthopinakoid oder Hemidoma betrachtet wird, ist bekanntlich beliebig) oder nach einer Fläche einer prismatischen Form. Im ersteren Falle ist die wichtigste Richtung der beiden Krystalle, die Symmetrieaxe, parallel, daher auch die Symmetrieebenen beider zusammenfallen. Nach den Erörterungen S. 231 besitzt dieser einfachere Fall offenbar eine viel grössere Wahrscheinlichkeit, als der zweite, und in der That sind auch fast alle an monosymmetrischen Krystallen beobachtete Zwillingsbildungen hierher gehörig, während nach einer prismatischen Form nur bei wenigen Substanzen (s. z. B. Feldspath) regelmässige Verwachsungen beobachtet werden.

Denkt man sich durch die einzig vorhandene Symmetrieebene eine monosymmetrische Form in zwei Hälften zerlegt und betrachtet letztere als zwei von einander unabhängige Formen, so erhält man keine Hemiëdrie, sondern Hemimorphie, da alsdann die beiden entgegengesetzten Seiten der Symmetrieaxe ungleichwerthig in Bezug auf die an ihnen erscheinenden Flächen sind. Da nur eine Symmetrieaxe vorhanden, so ist auch nur dieser eine Fall der Hemimorphie möglich, welcher, wie an verschiedenen Beispielen gezeigt werden soll, zugleich mit polarer Pyroëlektricität der beiden Seiten des Krystalls verbunden ist. Da an einem hemimorphen Krystalle dieses Systems {010} nicht mehr Symmetrieebene ist, so kann nach dieser Fläche auch Zwillingsbildung eintreten.

§. 100. **Projection und Berechnung der monosymmetrischen Formen.** Die monosymmetrischen Formen können entweder auf die Symmetrieebene projicirt werden, oder auf eine zur Symmetrieebene senkrechte

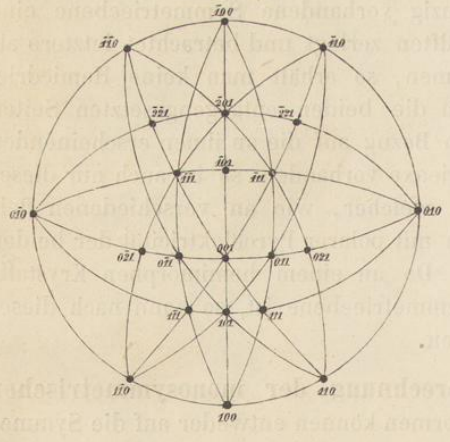
Fläche. Den ersteren Fall stellt Fig. 505 dar und zwar die Projection des Feldspathkrystalls Fig. 504 mit Hinzufügung der an demselben nicht gezeichneten Formen {111}, {101}, {011}. Bei dieser Darstellungsart fallen die Pole aller Querflächen in den Grundkreis, können also unmittelbar durch ihre Winkel eingetragen werden. Jeder durch den Pol einer Querfläche und den der Symmetrieebene gehende Zonenkreis erscheint als Durchmesser, daher der Pol einer beliebigen Fläche $(h\,k\,l)$ am einfachsten gefunden wird mittelst seines Winkels zu (010) und seiner Lage auf dem Durchmesser, welcher durch die zugehörige Querfläche $(h\,0\,l)$ bestimmt ist, z. B. 111 auf dem Zonenkreise [010, 101] u. s. f. Die Symmetrie zeigt sich bei dieser Darstellungsart dadurch, dass zu jedem Pol ein zweiter vorhanden ist, welcher auf demselben Durchmesser jenseits 010 in gleichem Abstande sich befindet.

Fig. 505.



Will man die Formen eines monosymmetrischen Krystalls auf eine zu {010} senkrechte Fläche projiciren, wobei die Symmetrieverhältnisse noch übersichtlicher hervortreten, so eignet sich hierzu am meisten die auf der Verticalaxe senkrechte Ebene, in welche also die Normalen aller Prismenflächen fallen, daher deren Pole im Grundkreis gelegen und direct durch ihre Winkel zu (100) oder (010) zu finden sind (s. Fig. 506). Da der Durchmesser $100 : \bar{1}00$ den Zonenkreis der Querflächen darstellt, deren Pole sämmtlich 90^0 Abstand von 010 haben, so sind dieselben nach bekannter Construction leicht zu finden; man kann hierzu die Figur selbst benutzen, indem man die Winkel der Querflächen zu (100) von letzterem Pole aus nach links auf dem Grundkreise abträgt und die Endpunkte der entsprechenden Bögen mit dem Pole 010 verbindet. Der Zonenkreis 010, 101, $0\bar{1}0$ enthält die Pole aller vordern Hemipyramiden, deren erster und dritter Index gleich gross sind, also auch 111, welches ausserdem auf dem Zonenkreise 110, 001, $\bar{1}\bar{1}0$ liegt, wodurch sein Ort in der Projection

Fig. 506.

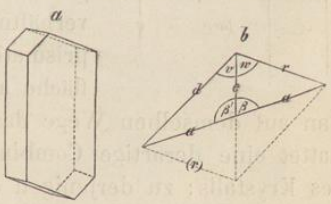


gegeben ist. Ebenso folgt die Lage von $\bar{1}11$ aus den Zonen [010, $\bar{1}01$, $0\bar{1}0$] und [$1\bar{1}0$, 001, $\bar{1}10$], diejenige von $\bar{2}21$ aus den Kreisbögen [$\bar{2}01$, 010] und [001, $\bar{1}10$] u. s. f. Dem Zonenkreise 010 : 001 : $0\bar{1}0$ gehören alle Klinodomen an; unter diesen ist 011 gegeben durch die Zone [100 : 111 : $\bar{1}00$], 021 (= q in Fig. 504) durch die Zone [110, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}0$]. Durch Construction des Zonenkreises 100, 021, $\bar{1}00$ würde man ferner die Pole der Hemipyramiden {121} und {$\bar{1}21$} als Durchschnittspunkte mit den Zonenkreisen [101, 010] und [$\bar{1}01$, 010] finden u. s. f.

An der Hand der eben beschriebenen zweiten Art der Projection sollen nun die wichtigsten Berechnungsmethoden der monosymmetrischen Formen erläutert werden.

Zeigt ein monosymmetrischer Krystall keine anderen Flächen, als die Symmetrieebene und zwei Querflächen, so gestattet diese Combination nur die Bestimmung einer einzigen Grösse unter seinen Elementen, nämlich des Winkels β, wenn man die beiden beobachteten Querflächen als {100} und {001} nimmt, indem alsdann der gemessene Winkel zwischen beiden direct den Werth β darstellt. Tritt hierzu eine dritte Querfläche (s. Fig. 507a, in welcher die vorherrschende Fläche die Symmetrieebene darstellt), so ist die Berechnung des Axenverhältnisses $a : c$ ermöglicht, indem man dieselbe, je nachdem sie den stumpfen oder den spitzen Winkel der beiden andern Querflächen abstumpft, als {101} oder {$\bar{1}01$} betrachtet. Die Berechnung ist alsdann eine einfache Aufgabe der ebenen Trigonometrie: Seien a, c, r in Fig. 507b die Durchschnitte der drei Querflächen {001}, {100} und {$\bar{1}01$} mit der Symmetrieebene, so können die Winkel $\beta = (100) : (001)$ und $w = (\bar{1}01) : (\bar{1}00)$ gemessen und daraus das Längenverhältniss $c : a$ berechnet werden; liegt eine Abstumpfung der vorderen (stumpfen) Kante (100) : (001) vor, so handelt es sich um die Berechnung des Dreiecks $a\ c\ d$. Will man, z. B. wegen der Vergleichung mit der Krystallform eines anderen Körpers, die drei beobachteten Querflächen als {100}, {101} und {$\bar{1}01$} auffassen, so muss der Winkel β berechnet werden. In Fig. 507b sind alsdann die Richtungen der drei Geraden d, c und r durch die gemessenen Winkel zwischen denselben, v und w, gegeben und die Richtung a gesucht, welche so liegt, dass r und d gleiche Strecken, vom Schnittpunkte der Axen a und c aus, auf derselben abschneiden. Setzt man

Fig. 507.



$$v' = 180^0 - v, \qquad w' = 180^0 - w, \qquad \beta' = 180^0 - \beta$$

so ist

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(w' - \beta)}{\sin w} = \frac{\sin(v' - \beta')}{\sin v}$$

Die Entwickelung dieser Gleichung nach β giebt

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{2 \sin w \sin v}{\sin(w - v)}$$

Genau ebenso verfährt man, wenn die drei Querflächen als {101}, {001} und {$\bar{1}$01} genommen werden sollen, also die Richtungen d, a, (r) in Fig. 507 b bekannt sind und die Richtung c gesucht wird.

In allen bisher betrachteten Fällen bleibt das Verhältniss der Symmetrieaxe b zu den beiden andern Axen unbekannt. Die Bestimmung dieser Grösse erfordert das Auftreten einer prismatischen Gestalt. Werde dieselbe als verticales Prisma {110} betrachtet und sei sie combinirt mit einer Querfläche, welche als Basis {001} genommen werden soll, so ist der halbe vordere Prismenwinkel gleich dem Bogen 100 : 110 (s. Fig. 506, auf folg. S. wiederholt); wurde nun ausserdem der Winkel (110) : (001) gemessen, so findet man in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke 100, 110, 001 den Bogen 100 : 001, d. i. β*), nach der Formel:

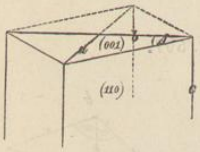
$$\cos \beta = \frac{\cos (001 : 110)}{\cos (100 : 110)}.$$

In demselben rechtwinkeligen Dreiecke berechne man nun den Winkel A, welchen die beiden Bögen 100 : 001 und 110 : 001 einschliessen, mittelst der Gleichung:

$$\text{tang } A = \frac{\text{tang } (100 : 110)}{\sin \beta}.$$

Denkt man sich die von den Flächen ($\bar{1}$00), (110) und (001) gebildete spitze Ecke des Krystalls (s. Fig. 508), so sieht man sofort ein, dass der der mit c bezeichneten Kante (110) : ($\bar{1}$00) gegenüberliegende ebene Winkel auf (001), d. h. der Winkel zwischen den Kanten 110 : 001 und 001 : $\bar{1}$00, gleich A (vergl. auch S. 211) und dass das Axenverhältniss $a : b = \text{tang } A$. Hätte man die gemessene prismatische Form als Klinodoma {011} und die Querfläche als Orthopinakoid {100} genommen, so erhielte man auf demselben Wege das Axenverhältniss $c : b$. In jedem Falle gestattet eine derartige Combination nur die Berechnung zweier Parameter des Krystalls; zu derjenigen des dritten muss mindestens noch eine zweite gegen die Kanten der prismatischen Form geneigte Querfläche vorhanden sein. Stumpft diese die vordere Ecke der Figur 508 ab, so hat man dieselbe als {101} zu nehmen, erscheint sie an der hinteren Ecke (wie z. B. in der Figur 537 des essigsauren Blei), als {$\bar{1}$01}, und findet dann mittelst der oben angegebenen Methode aus dem Winkel derselben zur Basis das

Fig. 508.

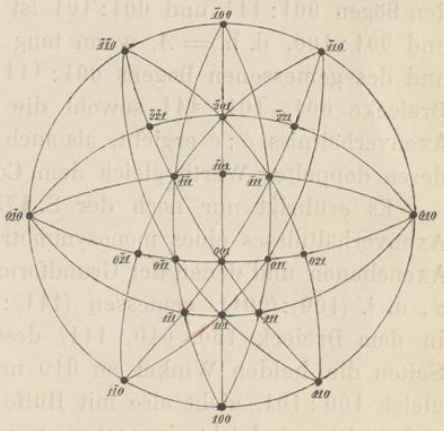


*) Ist die vordere Prismenkante durch (100) abgestumpft, und gestattet diese Fläche eine ebenso gute Messung wie (110), so messe man direct (100) : (001) = β, weil ein Beobachtungsfehler in dem Winkel (110) : (001) einem grösseren Fehler in dem daraus berechneten β entspricht, und zwar um so mehr, je grösser der Winkel (100) : (110). Man kann dann nach obiger Gleichung (001) : (110) aus den beiden andern Winkeln berechnen und als Controlwinkel benutzen, indem man den so gefundenen Werth mit dem beobachteten vergleicht und dadurch einen Maassstab für die Genauigkeit der Fundamentalwerthe erhält.

Parameterverhältniss $a : c$. Will man die Combination als {110}, {101}, {$\bar{1}$01} ansehen, so berechnet man aus den gemessenen Winkeln 100 : 110 und 110 : 101 den Winkel 100 : 101 (falls dieser nicht mit Hülfe einer gut ausgebildeten Fläche (100) direct gemessen werden kann) und findet aus diesem und dem beobachteten Werthe 101 : $\bar{1}$01 durch Subtraction der Summe beider von 180° den Winkel $\bar{1}$01 : $\bar{1}$00. Hiermit sind nunmehr die in Figur 507*b* mit v und w bezeichneten Winkel gegeben, so dass die Berechnung von β und die des Axenverhältnisses $a : c$, wie früher angegeben, erfolgen kann, während sich $a : b$ aus dem Prismenwinkel in der oben erwähnten Weise ergiebt. Analog wäre das Verfahren, wenn die Combination {001}, {110}, {101}, {$\bar{1}$01} (s. z. B. die Figur 538 der Oxalsäure) vorläge.

Besteht eine monosymmetrische Combination aus zwei prismatischen Formen — wie die des Gypses Fig. 522, an welcher noch die Symmetrieebene erscheint —, so ist die Berechnung am einfachsten, wenn man die eine derselben als {110}, die andere als {011} nimmt. Seien die gemessenen Winkel: (011) : (010) (= dem halben Winkel des Klinodoma), (110) : (010) (= dem halben Prismenwinkel) und (110) : (011), so sind damit in dem sphärischen Dreieck 010, 011, 110 die drei Seiten bekannt; der an 010 anliegende Winkel dieses Dreiecks ist gleich dem Bogen 001 : 100, d. h. = β; hat man letzteres berechnet, so ist man nach Obigem mit Hülfe der bekannten Bögen 100 : 110 und 001 : 011 im Stande, die Parameterverhältnisse $a : b$, resp. $c : b$ abzuleiten. Den vierten, an einer solchen Combination vorhandenen Winkel (011) : ($\bar{1}$10) findet man nunmehr mittelst des Dreiecks 010, 011, $\bar{1}$10, dessen Seiten 010 : 011 und 010 : $\bar{1}$10 nebst dem dazwischen liegenden Winkel (= 180° — β) bekannt sind; derselbe dient als Controlwinkel (ebenso hätte man ihn natürlich auch statt 011 : 110 zur Rechnung und letzteren Winkel zur Controle benutzen können).

Fig. 506.



Will man die eben betrachtete Combination als {110}, {111} auffassen, wie es bei der Fig. 522 des Gypses geschehen ist, so kennt man in dem sphärischen Dreiecke 010, 111, 110 die drei Seiten, kann also den Winkel zwischen den Zonenkreisen [010 : 111] und [010 : 110], sowie denjenigen zwischen [110 : 111] und [110 : 010] berechnen. Das Supplement des letzteren ist der Winkel, unter dem die Bögen 110 : 111 und 110 : 100 einander schneiden, d. h. ein Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks 110,

100, 001, in welchem ausserdem die Seite 110 : 100 bekannt ist; hieraus findet man 100 : 001 = β. Der vorher ebenfalls berechnete Winkel zwischen den Zonenkreisen 010 : 111 und 010 : 110 ist gleich dem Winkel (101) : (100), welcher, da nunmehr β bekannt ist, das Parameterverhältniss $a : c$ ergiebt, während $a : b$ aus dem Prismenwinkel und der Axenschiefe in bekannter Weise hergeleitet werden kann.

Eine Vereinfachung der Messung und Berechnung eines Krystalls, welcher die Combination eines Prismas mit einer Hemipyramide zeigt, tritt dann ein, wenn die mit beiden in eine Zone fallende Querfläche (d. i. die Basis, wenn erstere Formen als {110} und {111} oder {$\bar{1}$11} betrachtet werden), ausgebildet ist. Einen derartigen Fall stellt die Fig. 533 der Hornblende dar. Alsdann genügt nämlich die Messung zweier Zonen: der prismatischen und derjenigen zwischen Prisma und Basis. In dem in Fig. 533 dargestellten Beispiele sind alsdann folgende Winkel durch Messung gegeben: (110):(010), (110):(001), (001):($\bar{1}$11). Aus den beiden ersteren werden nach der S. 484 angegebenen Methode $a : b$ und β berechnet; der Winkel zwischen den Bögen 001 : $\bar{1}$11 und 001 : $\bar{1}$01 ist gleich demjenigen zwischen 001 : 110 und 001 : 100, d. h. = A, wenn tang $A = a : b$; mit Hülfe dieses Winkels und des gemessenen Bogens 001 : $\bar{1}$11 können also in dem rechtwinkeligen Dreiecke 001, $\bar{1}$01, $\bar{1}$11 sowohl die Seite 001 : $\bar{1}$01, aus welcher sich das Axenverhältniss $a : c$ ergiebt, als auch die Seite $\bar{1}$01 : $\bar{1}$11 berechnet werden, deren doppelter Werth gleich dem Controlwinkel $\bar{1}$11 : $\bar{1}\bar{1}$1 ist.

Es erübrigt nur noch der S. 475 erwähnte Fall der Berechnung des Axenverhältnisses eines monosymmetrischen Krystalls aus den Winkeln der Axenebenen und denen der Grundform gegen zwei derselben. Es sei ausser β, d. i. (100):(001), gemessen (111):(100) und (111):(010); alsdann sind in dem Dreieck 100, 010, 111, dessen eine Seite = 90°, aus den drei Seiten die beiden Winkel an 010 und 100 zu berechnen; der erstere ist gleich 100 : 101, giebt also mit Hülfe von β das Axenverhältniss $a : c$; der andere ist, wie leicht einzusehen (vergl. S. 211), das Supplement des ebenen Winkels zwischen den Kanten 100 : 010 und 100 : 111, d. h. seine cotang ist = $c : b$.

§. 101. **Die physikalischen Eigenschaften der monosymmetrischen Krystalle.** Die directen Messungen des Elasticitätscoëfficienten nach verschiedenen Richtungen, welche bisher an Krystallen dieses Systems angestellt worden sind (s. Gyps und Glimmer unter den Beispielen), zeigen, dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie entsprechend, Symmetrie dieser Verhältnisse nach dem Klinopinakoid und nach keiner andern Ebene. Das Gleiche ist der Fall in Bezug auf Cohäsion und Härte. Was die erstere betrifft, so hat dieselbe am häufigsten, wie schon §. 97 bemerkt, ein Minimum in der Richtung der Symmetrieaxe, es sind also zahlreiche monosymmetrische Krystalle spaltbar nach der Symmetrieebene, und zwar gehören hierher viele Fälle der vollkommensten Spaltbarkeit (Gyps). Ziemlich häufig ist eine solche nach einer Querfläche; alsdann liegt das

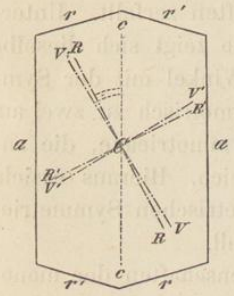
Minimum der Cohäsion in der Symmetrieebene; giebt es in dieser noch eine zweite Minimalrichtung, so findet nach einer zweiten, krystallonomisch möglichen Querfläche Spaltbarkeit statt: da aber in der Symmetrieebene keine gleichwerthigen Richtungen existiren, so sind jene beiden Minimalrichtungen auch keine solchen, d. h. die Spaltbarkeit nach den beiden dazu normalen Ebenen ist nicht gleich vollkommen. Existirt endlich ein Minimum der Cohäsion nach einer Richtung, welche einen schiefen Winkel mit der Symmetrieebene bildet, so fordert das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie ein genau gleichwerthiges Minimum in der zu jener symmetrischen Richtung; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach einer prismatischen Form, und zwar nach beiden Flächenpaaren derselben in gleicher Vollkommenheit. Dieser Symmetrie entsprechen nun vollkommen die Verschiedenheiten der Härte nach verschiedenen Richtungen, für welche genauere Bestimmungen namentlich in dem bereits mehrfach citirten Werke von Exner enthalten sind; sie betreffen folgende Körper: Gyps, rothes Blutlaugensalz, das analog zusammengesetzte Cobaltidcyankalium und Rohrzucker. Bei allen diesen hat sich ergeben, dass in der Symmetrieebene gleichwerthige Richtungen nicht existiren, so dass die auf {010} erhaltene Härtecurve nach keiner Richtung in symmetrische Hälften zerfällt. Untersucht man dagegen die Härte auf einer Querfläche, so zeigt sich dieselbe gleich jedesmal in zwei Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Symmetrieebene einschliessen, d. h. die Härtecurve ist symmetrisch zu zwei auf einander normalen Richtungen, die eine parallel der Symmetrieaxe, die andere der Symmetrieebene, in diesen beiden aber ungleich. Hieraus ersieht man also, dass die Cohäsion sich nur nach der geometrischen Symmetrieebene symmetrisch ändert mit der Richtung im Krystall.

Gehen wir nunmehr über zu den optischen Eigenschaften der monosymmetrischen Krystalle, so folgen dieselben unmittelbar aus dem in §. 97 bewiesenen Umstande, dass eine Hauptschwingungsrichtung für alle Farben zusammenfällt mit der Symmetrieaxe, die beiden anderen, dispergirt für die verschiedenen Farben, in der Symmetrieebene liegen. Da die Lage der letzteren jedoch im Uebrigen eine gesetzmässige Beziehung zu der Krystallform nicht besitzt*), so ist zur Bestimmung der optischen Constanten für eine gewisse Farbe die Messung des Winkels nöthig, welchen eine optische Elasti-

*) Eine gewisse Abhängigkeit ihrer Lage von der Cohäsion scheint zu existiren, da unter den Krystallen, welche eine vollkommene Spaltbarkeit nach einer Querfläche besitzen, auffallend viele vorkommen, deren optische Elasticitätsaxen nahe parallel und senkrecht zur Spaltungsebene liegen; namentlich ist es sehr häufig, dass die erste Mittellinie der optischen Axen fast genau senkrecht auf der Spaltungsfläche steht (das auffälligste Beispiel dieses Verhaltens ist der Glimmer, das unter allen Substanzen am vollkommensten spaltbare Mineral, dessen Mittellinie so wenig von der Normalen zur Spaltungsfläche verschieden ist, dass die Abweichung lange unbemerkt geblieben und der Glimmer, trotz seiner monosymmetrischen Form, zu den rhombischen Substanzen gezählt worden ist).

citätsaxe oder Hauptschwingungsrichtung für dieselbe Farbe bildet mit irgend einer ebenfalls in der Symmetrieebene liegenden Kante. Hierzu nimmt man gewöhnlich die zur Verticalaxe c gewählte Kante. Kennt man den Winkel einer Hauptschwingungsrichtung mit dieser, so ist auch die Richtung der zweiten in der Symmetrieebene liegenden Elasticitätsaxe gegeben, denn sie ist normal zur ersten; die dritte aber ist zu beiden senkrecht und parallel der Symmetrieaxe; durch die Bestimmung jenes Winkels ist somit die Richtung aller drei optischen Elasticitätsaxen für die betreffende Farbe krystallographisch bestimmt. Betrachten wir einen nach der Symmetrieebene tafelförmigen Krystall im parallelen polarisirten Lichte, so durchsetzen ihn die Strahlen in der Symmetrieaxe, also sind ihre Schwingungsrichtungen beim Austritt genau die beiden der Ebene {010} parallelen Hauptschwingungsrichtungen; beim Drehen wird die Platte also jedesmal dunkel werden (vier mal bei einer ganzen Drehung), wenn diese beiden Richtungen den Polarisationsebenen der gekreuzten Nicols parallel sind. Denken wir uns z. B. einen solchen Krystall (in Fig. 509 auf die Symmetrieebene projicirt dargestellt), welcher ausser von {010} noch von drei Querflächen a, r, r' begrenzt ist, wobei, wie es zuweilen vorkommt, r und r' nahe symmetrisch zu a liegen (Winkel $a : r$ nahe gleich $a : r'$), so steht dieser Krystall einem rhombischen in geometrischer Beziehung sehr nahe, ja er kann sogar durch eine Temperaturänderung vorübergehend genau die Gestalt eines solchen annehmen, da die Winkel $a : r$ und $a : r'$ eine ungleiche Aenderung durch die Wärme erfahren. Von einem wirklichen rhombischen Krystall können wir einen solchen nun sofort dadurch unterscheiden*), dass bei jenem die beiden der Tafelebene parallelen Hauptschwingungsrichtungen genau parallel und normal zur Fläche a, und zwar identisch für alle Farben, bei einem in Wahrheit monosymmetrischen Krystall dagegen schief gegen die Fläche a liegen und für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen (RR in Fig. 509 sei z. B. die eine Hauptschwingungsrichtung für Roth, $R'R'$ die andere; VV und $V'V'$ die entsprechenden für Violett). Meist ist der Winkel der Dispersion (zwischen RR und VV) nur klein, selten über 2^0.

Fig. 509.



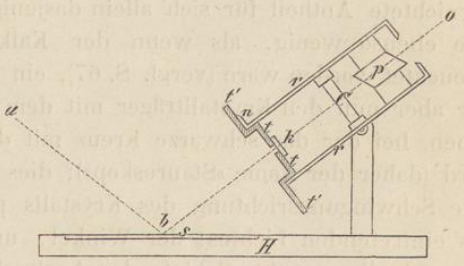
Stellt man einen rhombischen Krystall so auf dem Polarisationsinstrument (für paralleles Licht) ein, dass die Verticalaxe cc Fig. 509 genau einem der gekreuzten Nicols parallel ist, so erscheint er sowohl im weissen, wie im monochromatischen Lichte vollkommen dunkel. Nicht so der monosym-

*) Falls dies nicht etwa schon durch eine Spaltbarkeit, entweder nach r oder nach r' allein, möglich ist, welche natürlich eine Ungleichwerthigkeit dieser beiden Querflächen beweisen würde.

metrische Krystall, welchen die genannte Figur eigentlich darstellt; bei diesem bedarf es einer Drehung um den Winkel RCc bei Beleuchtung mit rothem Licht, einer solchen um den Winkel VCc bei Beleuchtung mit violettem einfarbigen Lichte, um ihn dunkel erscheinen zu lassen. Ist der drehbare Krystallträger des Instrumentes mit einer Kreistheilung versehen, so kann man jene Drehung messen und kennt dadurch den Winkel, welcher nach Obigem genügt, um die Lage aller drei Elasticitätsaxen, einmal für Roth, das andere Mal für Violett, zu bestimmen. Da jedoch das Eintreten der Dunkelheit bei einem doppeltbrechenden Krystall während des Drehens allmählig geschieht, so ist die Einstellung auf das Maximum derselben nur angenähert, im günstigsten Falle auf 2—3° genau, möglich; man wird auf diese Weise allerdings in allen Fällen, wo nicht etwa zufällig der Winkel RCc kleiner als 2—3° ist, den monosymmetrischen Krystall durch das Vorhandensein der Schiefe der Auslöschungsrichtung gegen die Verticalaxe von einem rhombischen unterscheiden können, aber doch nur eine sehr ungenaue Bestimmung der Richtung der Elasticitätsaxen erhalten, meistens auch nicht bestimmen können, in welcher Weise dieselben für die verschiedenen Farben dispergirt sind, da deren Differenzen gewöhnlich weniger betragen, als der mögliche Fehler der Messung.

Um nun den Winkel, welchen eine Auslöschungsrichtung mit einer Krystallkante bildet, genauer zu bestimmen, bedient man sich eines besonderen, von v. Kobell erfundenen Instrumentes, des Stauroskops. Dasselbe ist ein Polarisationsapparat für paralleles Licht, wie er Fig. 50 S. 68 abgebildet ist, dessen Krystallträger durch eine undurchsichtige drehbare Metallplatte ersetzt ist, welche in der Mitte eine kleine kreisrunde Oeffnung hat. Auf dieser Platte ist eine Anzahl paralleler Geraden so eingeritzt, dass ihre Richtung genau parallel ist der Polarisationsrichtung des unteren Nicols, wenn die Kreistheilung am Rande dieser Metallscheibe auf 0° steht. An dem ursprünglichen Kobell'schen Instrument, Fig. 510 im Durchschnitt dargestellt, ist der Polarisator durch einen horizontalen Spiegel s von schwarzem Glase ersetzt, welcher das vom Himmel in der Richtung ab auffallende Licht, ziemlich vollkommen polarisirt, nach o hin reflectirt. Auf der Holzplatte H, in welche dieser Spiegel eingelassen ist, steht auf einem Fusse drehbar das Rohr r, welches vorn einen kleinen Nonius n trägt; in das vordere Ende dieses Rohres kann der Krystallträger t, welcher am Rande t' an der dem Auge (o) zugekehrten Seite eine Kreistheilung besitzt, eingesteckt und darin gedreht werden. Der mit t

Fig. 510.



bezeichnete vorspringende Theil desselben ist die oben bezeichnete, in der Mitte durchbohrte Metallplatte mit den eingerissenen Linien. Vor dem Einstecken wird nun der zu untersuchende Krystall *k* auf derselben so aufgeklebt, dass er mit seiner Symmetrieebene die Oeffnung ganz bedeckt und dass seine Verticalaxe (in Fig. 509 also die Kante der Querfläche *a* mit {010}, d. h. *cc*) den eingeritzten Linien so genau als möglich parallel ist. Im Innern des Rohres ist ferner eine senkrecht zur Axe geschnittene Kalkspathplatte *C* befestigt, und am Ende der analysirende Nicol *p*. Stellt man nun den drehbaren Krystallträger *t* so, dass der Nonius *n* auf demselben 0° anzeigt, so ist die Verticalaxe *cc* des Krystalls parallel der Schwingungsrichtung des oberen Nicols, also normal zu der des eintretenden Lichtes. Wäre nun *cc* zugleich eine Hauptschwingungsrichtung des Krystalls, also auch deren Normale eine solche, d. h. wäre der Krystall rhombisch, so könnten die eintretenden Strahlen eine weitere Zerlegung nicht erleiden, sondern würden nach dem Durchgang durch den Krystall noch dieselbe Polarisation besitzen, wie beim Eintritt; sie gehen dann durch den Kalkspath und endlich durch den Analysator; da nicht nur parallele, sondern auch etwas geneigte Strahlen durch das Instrument gelangen, so würde man von der Interferenzfigur des Kalkspathes den mittleren Theil, das schwarze Kreuz und die innersten Farbenringe, erblicken, ebenso, als wenn gar kein Krystall auf dem Träger *t* befestigt wäre. Nun ist aber der Krystall monosymmetrisch, d. h. die Schwingungsrichtungen desselben bilden einen mehr oder weniger grossen Winkel mit der Richtung *cc*; folglich erleidet das eintretende Licht eine Zerlegung im Krystall. Von den beiden entstehenden, senkrecht zu einander polarisirten Strahlen geht jedesmal nur ein Antheil durch den oberen Nicol; dieser Antheil würde, wenn er allein im eintretenden Lichte vorhanden wäre, im Kalkspath das complementäre Interferenzbild mit hellem Kreuz erzeugen; der im oberen Nicol vernichtete Antheil für sich allein dasjenige mit schwarzem Kreuz; es kann also ebenso wenig, als wenn der Kalkspath durch gewöhnliches Licht erleuchtet worden wäre (vergl. S. 67), ein Interferenzbild entstehen. Drehen wir aber nun den Krystallträger mit dem Krystall, so wird es eine Stellung geben, bei der das schwarze Kreuz mit den Farbenringen wieder sichtbar wird (daher der Name »Stauroskop«); dies ist offenbar diejenige, in welcher eine Schwingungsrichtung des Krystalls parallel der Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes; der Winkel, um welchen man gedreht hat, ist demnach die gesuchte Schiefe der Auslöschungsrichtung gegen die Verticalaxe *cc*, falls man nach rechts gedreht hatte, im entgegengesetzten Falle das Complement des zu bestimmenden Winkels. Die Einstellung auf den Punkt, an welchem das Interferenzbild der Kalkspathplatte am deutlichsten erscheint, ist genauer auszuführen, als diejenige auf die grösste Dunkelheit des Krystalls, namentlich, wenn man das Instrument mit monochromatischem Lichte beleuchtet, und man wird, wenn die Dispersion eine ziemlich grosse ist, hierdurch auch constatiren können, dass die Hauptschwingungs-

richtungen für die verschiedenen Farben divergiren. Eine grössere Genauigkeit, als etwa bis auf 1°, ist indess auch hierbei nicht zu erzielen, und es ist daher von Březina (s. Schrauf, Physikal. Mineralogie, II, S. 220) statt der einfachen Kalkspathplatte eine Doppelplatte angewendet worden, welche aus zwei ein wenig schief gegen die Basis geschliffenen Kalkspathlamellen besteht, welche so auf einander gelegt werden, dass die optischen Axen beider in einer Ebene, aber nach entgegengesetzter Seite geneigt sind. Diese Combination zeigt zwischen gekreuzten Nicols das Interferenzbild Fig. 511, sobald die Ebene, in welcher die optischen Axen der beiden Kalkspathe liegen, der Schwingungsebene eines Nicols parallel ist; wird nun die Polarisation des eintretenden Lichtes nur wenig geändert, wird z. B. ein eingefügter stauroskopisch zu untersuchender Krystall, welcher diejenige Stellung hat, dass eine Schwingungsrichtung desselben parallel der eines Nicols, um einen sehr kleinen Winkel gedreht, so bewegt sich der Mittelbalken aus seiner verticalen Stellung, und das Bild erscheint wie Fig. 512. Die Stellung des drehbaren Krystalls, in welcher seine Schwingungsrichtung die erforderliche Orientirung hat, in welcher also der Mittelbalken genau so erscheint, wie in Fig. 511, lässt sich namentlich dann mit grosser Schärfe ermitteln, wenn man zweimal die Kreistheilung des Krystallträgers abliest, einmal, wenn der dunkle Mittelbalken ein wenig links, einmal wenn er ebenso viel nach rechts gedreht erscheint, und das Mittel beider Ablesungen als Normalstellung annimmt.

Fig. 511.

Fig. 512.

Mit Hülfe dieser Doppelplatte*) kann man mit dem Stauroskop die Lage der Hauptschwingungsrichtung bis auf wenige Minuten genau bestimmen, wobei man sich selbstverständlich des einfarbigen Lichtes bedienen muss. Dabei hat man jedoch noch einen Fehler in Rücksicht zu ziehen, welcher dadurch hervorgebracht wird, dass man die als Ausgangsrichtung dienende Kante des Krystalls nach dem Augenmaass nicht genau parallel den auf dem Krystallträger eingeritzten Linien machen kann, wenn man den Krystall auf diesen aufklebt. Aber nur, wenn dieser Parallelismus vollkommen erreicht ist, wird die Drehung von der Nullstellung bis zu der, bei welcher das Interferenzbild in der richtigen Weise auftritt, genau gleich dem Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der Verticalaxe des Krystalls sein. Wir werden in der III. Abth. eine Methode kennen lernen, durch

*) Andere Vorrichtungen zur genauen Einstellung der Schwingungsrichtungen werden in der III. Abth. Erwähnung finden.

welche auch dieser Fehler vermieden wird, und es demnach möglich ist, die Lage der optischen Elasticitätsaxen in einem Krystall mit grosser Genauigkeit zu bestimmen.

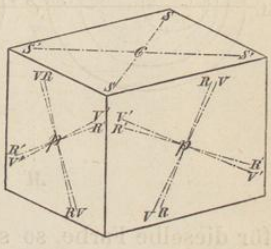
Während nach dem Bisherigen die monosymmetrischen Krystalle, im parallelen Lichte durch die Symmetrieebene betrachtet, Auslöschungsrichtungen zeigen, welche in keiner gesetzmässigen Beziehung zu den Krystallkanten stehen, verhalten sie sich anders, wenn wir sie durch eine Querfläche betrachten. Alsdann pflanzen sich die parallelen Strahlen in denselben in einer Richtung fort, welche der krystallographischen Symmetrieebene, also einem optischen Hauptschnitte, parallel ist; von den beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen muss somit der eine in dem Hauptschnitte, der andere senkrecht dazu schwingen, und dies gilt für alle Farben; der Krystall wird folglich jedesmal dunkel erscheinen, wenn seine Symmetrieaxe parallel der Schwingungsrichtung des einen der beiden gekreuzten Nicols ist. Werde z. B. der in Fig. 504 abgebildete Krystall so auf den Träger des Polarisationsinstrumentes mit parallelem Licht gebracht, dass die Strahlen durch die Flächen a hindurchgehen, so sind die Schwingungsrichtungen (welche nicht dispergirt sind, sondern für alle Farben zusammenfallen) für diese Flächen parallel den Kanten $a:p$ und $a:c$, die des Flächenpaares c parallel $c:q$ und $c:a$ u. s. w. auf allen Querflächen.

Betrachten wir endlich ein Flächenpaar, welches einer prismatischen Form angehört, z. B. p (110) mit seiner hinteren Gegenfläche ($\bar{1}\bar{1}0$) desselben Krystalls, so haben wir es beim Durchgange des Lichtes durch eine solche Platte mit Strahlen zu thun, welche schräg gegen die optischen Hauptschnitte gerichtet sind und deren Schwingungsrichtung daher nach der S. 105 gegebenen Regel bestimmt werden kann. Die Schiefe der Schwingungsrichtung einer solchen Fläche, z. B. p, gegen die Kanten derselben, wird somit verschieden sein je nach dem Winkel, welchen die Fläche mit der Symmetrieebene bildet, und es lässt sich für jede prismatische Zone eines Krystalles, dessen optischer Axenwinkel bekannt ist, herleiten, in welcher Weise die Auslöschungsschiefe sich ändert, wenn man sich die prismatische Fläche gedreht denkt aus der Lage der Symmetrieebene, in welcher die Auslöschungsschiefe den durch das Stauroskop bestimmten Werth besitzt, bis zu der 90° gegen letztere geneigten, zugehörigen Querfläche, wo die Auslöschungsschiefe Null wird. Je nach Lage der Zone zu den optischen Axen und je nach der Orientirung der letzteren ist die Auslöschungschiefe ein Maximum in der Symmetrieebene und nimmt stetig ab, je mehr man sich der Querfläche nähert, oder sie nimmt anfangs zu bis zu einem Maximum, dann erst ab und erreicht endlich den Werth Null in der Querfläche. Für die wichtigsten Zonen der am häufigsten in Gesteinen vorkommenden Mineralien hat Michel-Lévy diese Aenderungen berechnet und durch Curven dargestellt (s. Zeitschr. für Kryst. 3,217).

Da die optischen Axen für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen, so sind die Schwingungsrichtungen für eine Platte, welche von einem

Paare paralleler prismatischer Flächen gebildet wird, für die verschiedenen Farben ebenfalls dispergirt, aber um so weniger, je mehr sich ihre Schwingungsrichtung dem Parallelismus mit der Zonenaxe nähert. Da ferner die optischen Axen stets symmetrisch zum Klinopinakoid liegen, so ergiebt sich die Auslöschungsschiefe und die Dispersion derselben für zwei einer prismatischen Form angehörige Flächenpaare wegen deren symmetrischer Lage nothwendigerweise genau gleich und entgegengesetzt. Liege z. B. die Combination Fig. 513 vor, welche einem Rhomboëder gleicht (unter Umständen kann die Differenz der Winkel $c:p$ und $p:p$ einmal so gering sein, dass sie durch Messung nicht zu constatiren), und wollen wir die Querfläche c zur Basis, p zum verticalen Prisma nehmen, so ist die Deutung des Krystalls nur dann richtig, wenn auf jener Querfläche die Schwingungsrichtungen, SS und $S'S'$, keine Dispersion zeigen und genau den Diagonalen parallel sind, wenn sie dagegen auf jeder der Prismenflächen unsymmetrisch liegen und verschieden für Roth (RR und $R'R'$) und Violett (VV und $V'V'$), wobei aber ihre Lage und Dispersion auf beiden genau gleich und entgegengesetzt ist, wie es aus Fig. 513 ersichtlich. Zeigt ein derartiger Krystall dieses Verhalten, wenn man ihn nach allen drei Paaren paralleler Flächen im Stauroskop untersucht, so ist damit sein monosymmetrischer Charakter, sowie die Lage seiner geometrischen Symmetrieebene ohne Krystallmessung ganz unzweifelhaft dargethan. Dieses Verhalten lässt auch ein monosymmetrisches Prisma ohne Endflächen als solches erkennen und zugleich bestimmen, welche der Halbirungsebenen desselben der Symmetrieebene entspricht.

Fig. 513.

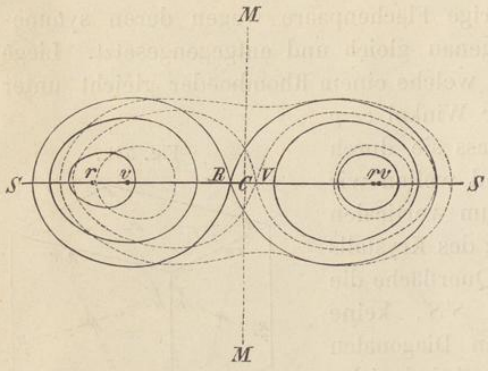


Nachdem so das Verhalten der monosymmetrischen Krystalle im parallelen polarisirten Licht für alle Fälle allgemein erkannt ist, können wir zu demjenigen in convergentem Licht übergehen, wobei es sich wesentlich nur um die Erscheinungen handelt, welche eine senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittene Platte zeigt. Diese sind nun verschieden, je nach der Lage der optischen Axenebene, welche nach §. 97 entweder parallel der geometrischen Symmetrieebene, oder senkrecht dazu sein kann.

Sind die beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen die Axen der grössten und kleinsten Elasticität, d. h. ist {010} die optische Axenebene, so hat man nach Ermittelung jener Richtungen durch das Stauroskop senkrecht zu beiden (zugleich normal zur Symmetrieebene) Querflächen anzuschleifen; diejenige der beiden Platten, welche senkrecht zur Halbirenden des spitzen Axenwinkels geschliffen ist, wird alsdann im Polarisationsapparat beide Axen in der Symmetrieebene liegend zeigen. Da aber die Mittellinien für die verschiedenen Farben dispergirt sind, fällt die Normale der Platte mit der Mittellinie nur für eine bestimmte Farbe

des Lichtes zusammen. Sei der Punkt im Gesichtsfelde des Polarisationsinstrumentes, wo die normal die Platte durchsetzenden Strahlen sich vereinigen, also der Mittelpunkt desselben, C Fig. 514, und mag deren Richtung der ersten Mittellinie für eine mittlere Farbe entsprechen, so ist die der Mittellinie für Roth nach der einen Seite, der für Violett nach der anderen geneigt, alle aber liegen in der Symmetrieebene, welche durch die Gerade SS angedeutet ist. Sei nun R der Punkt im Gesichtsfelde, wo sich alle Strahlen vereinigen, welche parallel der ersten Mittellinie für Roth durch die Krystallplatte gingen, und rr die beiden Axenpunkte für dieselbe Farbe, so stellen die ausgezogenen Lemniscaten diejenigen vor, welche auftreten, wenn das Instrument mit Licht von dieser Farbe erleuchtet wird. Ist V der Vereinigungspunkt der Strahlen, welche parallel der ersten Mittellinie für Violett durch den Krystall gingen, sind vv die Axenpunkte derselben Farbe, deren Axenwinkel natürlich ein anderer (in der Figur ist $\varrho > v$ angenommen), so sind die punktirten Lemniscaten diejenigen, welche im homogenen violetten Lichte erscheinen. Beobachtet man nun das Interferenzbild im weissen Licht, so geht aus Fig. 514 unmittelbar hervor, dass dasselbe zwar symmetrisch nach der Geraden SS, also oben und unten gleich sein muss, in keinem Falle aber nach der Geraden MM. Während das Axenbild einer rhombischen Krystallplatte (vergl. Fig. 78, S. 111) auch rechts und links symmetrisch ist, hört durch die Dispersion der Mittellinien hier die letztere Gleichheit auf, die Curven sind rechts und links in verschiedener Weise übereinander geschoben, es kann also die Farbenvertheilung in den Ringen rechts und links nicht gleich sein; in Folge dessen werden die Ringe beider Systeme verschieden gross und verschieden lebhaft gefärbt erscheinen, und die Reihenfolge der Farben in beiden eine andere sein; alles dies um so mehr abweichend, je grösser die Dispersion der Mittellinien ist. Wird der Krystall so gedreht, dass seine Symmetrieebene der Schwingungsrichtung eines der beiden Nicol'schen Prismen parallel ist, so erscheint der schwarze, der optischen Axenebene parallele Balken ($\parallel SS$), wie bei einem rhombischen Krystall, ohne Farbensäume, da die optischen Axenebenen für alle Farben untereinander und mit der Symmetrieebene zusammenfallen. Die Interferenzerscheinung, welche eine Platte von Gyps bei dieser Stellung darbietet, ist in Fig. 6 der Tafel abgebildet, und ist hier der, namentlich für die innersten Farbenringe hervortretende Unterschied der beiden Systeme deutlich zu erkennen. Dreht man

Fig. 514.



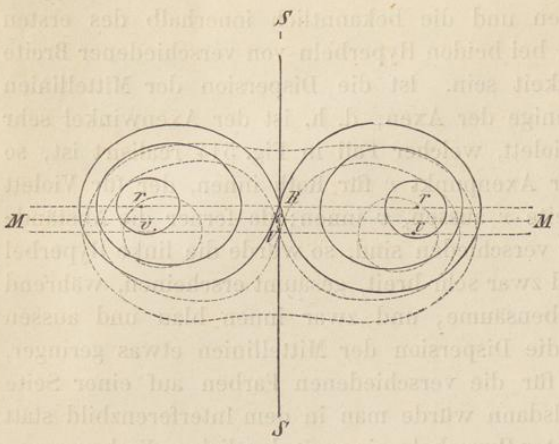
die Platte um 45°, so dass die dunklen Hyperbeln erscheinen, so tritt die Verschiedenheit noch mehr hervor; denn da wegen der Dispersion der Mittellinien die Punkte r und v (Fig. 514) rechts und links verschiedenen Abstand besitzen, so müssen die Farbensäume, welche die dunklen Hyperbeln zu beiden Seiten zeigen und die bekanntlich innerhalb des ersten Ringes am deutlichsten sind, bei beiden Hyperbeln von verschiedener Breite und verschiedener Lebhaftigkeit sein. Ist die Dispersion der Mittellinien gross und ebenso auch diejenige der Axen, d. h. ist der Axenwinkel sehr verschieden für Roth und Violett, welcher Fall in Fig. 514 realisirt ist, so liegt auf der einen Seite der Axenpunkt r für Roth innen, der für Violett v aussen, auf der andern Seite r aussen, v innen; da ferner die Abstände beider rechts und links sehr verschieden sind, so würde die linke Hyperbel innen roth, aussen blau, und zwar sehr breit, gesäumt erscheinen, während die rechte nur schmale Farbensäume, und zwar innen blau und aussen roth, zeigen würde. Wäre die Dispersion der Mittellinien etwas geringer, so würden die Axenpunkte für die verschiedenen Farben auf einer Seite fast ganz zusammenfallen; alsdann würde man in dem Interferenzbild statt zweier entgegengesetzt gefärbter Hyperbeln eine mit deutlichem Farbensaume und die andere ohne solchen erblicken. Bei einer kleineren Dispersion jedoch, wie sie häufiger vorkommt, ist zwar der Abstand von r und v rechts und links verschieden, diese liegen aber nicht umgekehrt, sondern entweder beide v aussen, oder beide nach innen. Alsdann erscheinen beide Hyperbeln nach aussen roth, nach innen blau gesäumt, oder umgekehrt, — aber mit verschiedener Farbennuance und verschiedener Lebhaftigkeit der Färbung. Diesen letzteren Fall stellt Fig. 7 der Tafel dar, welche sich auf dieselbe Gypsplatte wie Fig. 6 bezieht, nach einer Drehung von 45°. Man achte hierbei ausser auf die Verschiedenheit der beiden Hyperbelsäume, namentlich auf diejenige der inneren Seite des ersten Ringes rechts und links. Diese Art der Dispersion der Farben des Axenbildes wird, weil sie durch eine ungleiche Neigung der Hauptschwingungsrichtungen innerhalb der Symmetrieebene erzeugt wird, die geneigte Dispersion (»dispersion inclinée« Des Cloizeaux's) genannt.

Ist dagegen die optische Axenebene senkrecht zur geometrischen Symmetrieebene, so sind die Interferenzerscheinungen einer senkrecht zur Mittellinie geschliffenen Platte verschieden, je nachdem diese Mittellinie in der Symmetrieebene liegt oder zu derselben normal ist.

Im ersteren Falle, wo eine der beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen den spitzen Winkel der Axen halbirt, ist die zu jener normale Fläche, nach welcher die Krystallplatte geschliffen werden muss, demnach wiederum eine Querfläche, senkrecht zur Symmetrieebene, also parallel der Symmetrieaxe, d. i. der zweiten Mittellinie. Da die Hauptschwingungsrichtungen in {010} dispergirt sind, so ist die Platte senkrecht zu einer solchen für mittlere Farben zu schleifen. Sei nun

Fig. 515 C wieder Mittelpunkt des Gesichtsfeldes im Apparat, d. h. der Vereinigungspunkt aller Strahlen, welche senkrecht durch die Krystallplatte hindurchgehen, so ist deren Richtung gleich der Mittellinie nur für eine mittlere Wellenlänge; diejenigen für andere Farben liegen anders geneigt in der Symmetrieebene, welche durch die Gerade SS gehen soll. Sei nun R der Punkt, in welchem sich alle Strahlen vereinigen, die im Krystall parallel der Mittellinie für Roth laufen, und $r\,r$ die Axenpunkte für dieselbe Farbe, so muss die Verbindungslinie $r\,r$ normal zu $S\,S$ und von dieser halbirt sein, da $M\,M$ als Symmetrieaxe die Richtung der zweiten Mittellinie vorstellt. Für Violett muss der Punkt, in welchem sich die der Mittellinie parallelen Strahlen kreuzen, jenseits C, also etwa in V liegen, und die Axenpunkte $v\,v$ ebenfalls rechts und links symmetrisch zu $S\,S$, aber in anderem Abstande, da der Axenwinkel für diese Farbe ein anderer als für Roth. Die optischen Axen für Roth und Violett liegen also in zwei verschiedenen Ebenen, die der übrigen Farben in zwischenliegenden; alle diese Ebenen schneiden sich jedoch in der Symmetrieaxe, der allen gemeinschaftlichen zweiten Mittellinie. Es ist nun leicht aus Fig. 515 zu ersehen, wie die Interferenzfigur im weissen Licht aussehen muss; dieselbe wird vollkommen symmetrisch sein in Bezug auf die Gerade $S\,S$, indem die rechte und linke Seite ganz gleiche und entgegengesetzte Farbenvertheilung besitzen wird. Nicht so die obere und untere Hälfte, da die Ringe für die verschiedenen Farben nicht gleichmässig zu beiden Seiten von MM liegen; die Farbenringe werden somit an ihrer oberen und unteren Seite verschiedene Farben zeigen. Sind die optischen Axenebenen des Krystalls parallel einem der beiden gekreuzten Nicols des Apparates, so wird sich die Verschiedenheit derselben für die verschiedenen Farben am deutlichsten documentiren an dem dunklen Mittelbalken, welcher die Lage der Axenebene angiebt und nun, da diese nicht dieselbe ist für alle Farben, oben und unten einen farbigen Saum zeigt, entweder, wie in dem in Fig. 515 dargestellten Falle, oben blau (weil daselbst der schwarze Balken für rothes Licht gelegen ist) und unten roth, oder umgekehrt. Dieser farbige Saum bei der erwähnten Stellung des Krystalls ist das empfindlichste Mittel, um diese Dispersion zu erkennen, welche man, weil bei derselben die Farbenvertheilung auf den verschiedenen

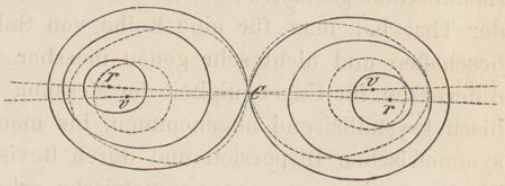
Fig. 515.



Horizontallinien eine abweichende ist, die horizontale (»dispersion horizontale« Des Cloizeaux's) genannt hat. Fig. 8 der Tafel stellt das Interferenzbild eines Feldspathkrystalles in der Stellung dar, in welcher seine Axenebenen einem Nicolhauptschnitt parallel sind, in welcher also die farbigen Säume zu sehen sind, Fig. 9 das Interferenzbild derselben Platte, wenn ihre Axenebene 45° mit den Nicols bildet.

Der zweite Fall, der möglich ist, wenn die optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene steht, ist der, dass die eine in letzterer Ebene liegende Hauptschwingungsrichtung die zweite Mittellinie und die Normale derselben, die Orthodiagonale, die erste ist. Da letztere als Symmetrieaxe allen Farben als Mittellinie gemeinsam, die erstere aber dispergirt sein muss, so sind die Axenebenen für verschiedene Farben zwar verschieden, schneiden einander jedoch alle in der Halbirenden des spitzen Axenwinkels; die zu dieser normale Fläche, das Klinopinakoid, ist also senkrecht auf der ersten Mittellinie für alle Farben. Wenn an einem derartigen Krystall die Symmetrieebene vorherrschend ausgebildet ist, so bietet er unmittelbar die gewünschte Platte dar, andernfalls ist jene Ebene anzuschleifen. Werde der Krystall nun auf den Objectträger des Polarisationsinstrumentes mit jener Fläche aufgelegt, so sei in Fig. 516 wieder C der Mittelpunkt des Gesichtsfeldes; dieser entspricht der ersten Mittellinie für alle Farben. Seien rr ferner die Axenpunkte für Roth, die ausgezogenen Curven die Lemniscaten für diese Farbe, so bezeichnet die Gerade rr die Lage der Axenebene für Roth. Für eine andere Farbe, z. B. Violett, ist zwar die erste Mittellinie dieselbe, aber die zweite nimmt in der Symmetrieebene eine andere Lage ein, also ist die optische Axenebene für diese eine andere, um einen gewissen Winkel um C gedrehte; ihre Lage sei durch die Gerade vv repräsentirt, die beiden Punkte vv seien die Axenpunkte und die punktirten Curven die Lemniscaten für Violett. Die Axenebenen für die mittleren Farben liegen natürlich zwischen rr und vv. Hieraus geht hervor, dass das Axenbild nur in monochromatischem Lichte eine Symmetrie zeigen kann, in weissem Lichte dagegen nach keiner Richtung; vielmehr ist rechts und links die Farbenvertheilung verschieden, ebenso oben und unten; sie muss aber gleich sein rechts unten mit links oben, sowie rechts oben mit links unten. Da die Axenebenen alle um C gedreht sind, so muss der schwarze Mittelbalken bei paralleler Stellung mit einem Nicol auch hier farbig gesäumt erscheinen, aber rechts und links verschieden, also entweder rechts oben und links unten roth und links oben und rechts unten blau, oder umgekehrt. Diese kreuzweise übereinstimmende Färbung des Mittelbalkens lässt diese Dispersion, welche man die gekreuzte (»dispersion croisée ou

Fig. 516.



tournante« Des Cloizeaux's) nennt, am leichtesten erkennen Die in dieser Stellung von einer Boraxplatte hervorgebrachte Interferenzerscheinung zeigt Fig. 10 der Tafel, während Fig. 11 diejenige nach einer Drehung der Platte um 45° darstellt.

Wenn der optische Axenwinkel eines Krystalls so wenig von 90° verschieden und seine Brechungsindices so klein wären, dass man die Axen sowohl durch eine Platte senkrecht zur ersten, als durch eine senkrecht zur zweiten Mittellinie, noch sehen könnte, so ist es klar, dass die eine dieser Platten die Erscheinung der horizontalen, die andere die der gekreuzten Dispersion zeigen würde, wenn die Axenebenen derselben senkrecht zur Symmetrieebene stehen. Eigentlich sind also die beiden letzterwähnten Arten der Dispersion an solchen Krystallen stets vereinigt, nur dass man meist wegen des zu grossen stumpfen Axenwinkels nur die eine derselben beobachten kann.

Diese Dispersionserscheinungen sind nun deshalb von besonderer praktischer Bedeutung, weil sie ein sehr empfindliches Mittel zur Erkennung der Dispersion der Mittellinien darbieten. Da eine solche im rhombischen System nicht existirt, so leuchtet ein, dass die so einfache Beobachtung derselben dazu dienen kann, einen Krystall als einen zur monosymmetrischen Abtheilung gehörigen zu erkennen, wenn etwa seine Krystallform derjenigen eines rhombischen geometrisch sehr nahe steht, wie dies zuweilen vorkommt. In der That hat man für eine Reihe von Substanzen, deren Krystalle derart beschaffen und nicht sehr genau messbar waren, die vorhandenen Winkeldifferenzen für Ungenauigkeit der Messung gehalten und dieselben als rhombisch krystallisirend angenommen, bis man das Vorhandensein einer monosymmetrischen Dispersion und durch Revision der Messungen alsdann auch die Form als eine monosymmetrische erkannte. Um die Beseitigung derartiger Irrthümer bei verschiedenen Mineralien hat sich namentlich A. Des Cloizeaux verdient gemacht.

Die Absorptionsverhältnisse gestalten sich im monosymmetrischen System wegen des Nichtzusammenfallens der optischen Hauptschnitte für verschiedene Farben sehr complicirt. Nehmen wir an, dass für eine bestimmte Farbe die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Absorption mit den Hauptschwingungsrichtungen zusammenfallen, und betrachten wir eine Platte, senkrecht zu einer der beiden in der Symmetrieebene gelegenen Schwingungsrichtungen geschliffen, im weissen Lichte, so wird, weil für die andern Farben die betreffenden Hauptschwingungs- und Absorptionsrichtungen geneigt zur Platte liegen, die Färbung der letzteren sich verschieden ändern, wenn wir sie um die Symmetrieaxe einmal nach rechts, das andere Mal nach links drehen. Eine solche Verschiedenheit, welche natürlich nur an sehr stark pleochroïtischen Krystallen bemerkbar werden kann, wies Laspeyres (Zeitschr. f. Kryst. 4,456) am Manganepidot nach, bei welchem die erwähnte Ungleichheit so gross ist, dass eine senkrecht zur Axe der kleinsten Elasticität geschnittene, dunkel gelbroth durchsichtige Platte beim Drehen

um 20° nach der einen Seite immer gelber, beim Drehen nach der andern Seite immer röther wird; die Richtungen der grössten Farbendifferenz (»Absorptionsaxen« Laspeyres') in der Symmetrieebene liegen anscheinend senkrecht zu einander und circa 20° gegen die Hauptschwingungsrichtungen geneigt. Diese Abweichung ist, verglichen mit der Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen selbst, eine so grosse, dass die obige Annahme des Zusammenfallens der Hauptabsorptionsrichtungen mit den Hauptschwingungsrichtungen für das Licht derselben Farbe jedenfalls noch einer Prüfung durch genaue Messungen bedarf. Bei dem Manganepidot zeigen auch die Interferenzbilder im convergenten Lichte eine unsymmetrische Färbung des Gesichtsfeldes zwischen den Farbenringen.

Unter den thermischen Eigenschaften sind es zunächst diejenigen der Wärmeleitung, welche unter Umständen eine praktische Bedeutung erlangen können, namentlich zur Unterscheidung monosymmetrischer Krystalle von rhombischen, wenn dieselben undurchsichtig sind, daher die optischen Methoden keine Anwendung finden können. Es handelt sich hierbei hauptsächlich um die Ermittelung der Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Leitungsfähigkeit des Krystalls für die Wärme; aus dem Grundgesetz S. 217 folgt, dass eine dieser drei Richtungen stets mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, die beiden andern, auf einander und zu jener senkrecht stehend, müssen demnach irgend eine Lage in der Symmetrieebene einnehmen, welche jedoch keine gesetzmässige Beziehung weder zu den Krystallkanten, noch etwa zu den optischen Hauptschwingungsrichtungen darbietet. Ihre Lage wird ermittelt durch das Sénarmont'sche Experiment (S. 159), indem man dieses auf dem Klinopinakoid in Anwendung bringt; es zeigt sich als Schmelzfigur eine schief gegen die Kante der Platte stehende Ellipse, deren grosse und kleine Axe die gesuchten Richtungen sind. Auch auf den prismatischen Flächen stehen die Axen der isothermen Curven schief gegen die Kanten, dagegen auf den Querflächen ist die eine horizontal, die andere vertical, d. h. die erstere parallel der Symmetrieaxe, die letztere parallel der Symmetrieebene. Die Lage der grossen und kleinen Axe der bei diesem Versuch entstehenden Ellipse auf den verschiedenen Flächen ist folglich das vollkommene Analogon der Schwingungsrichtungen des Lichtes.

Von noch grösserer Wichtigkeit ist das Verhalten der monosymmetrischen Krystalle in Bezug auf die Ausdehnung durch die Wärme. Es wurde bereits in §. 97 dargethan, dass von den auf einander senkrechten Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung stets eine mit der Symmetrieaxe zusammenfallen, folglich die beiden andern der Symmetrieebene parallel sein müssten. Da die letzteren, in der Symmetrieebene gelegenen, thermischen Axen keine durch ein allgemeines Gesetz bestimmte Lage in Bezug auf den Krystall besitzen, so ist keine Ursache für die Constanz ihrer Lage innerhalb verschiedener Temperaturintervalle vorhanden, ebensowenig wie für die Coincidenz der Hauptschwingungsrichtungen ver-

schiedener Farben. Wie die Lage der optischen Elasticitätsaxen eine Function der Wellenlänge, so hat man anzunehmen, dass auch die Orientirung der Hauptausdehnungsrichtungen in der Symmetrieebene von der Temperatur abhänge. Die Drehung dieser Richtung bei steigender Erwärmung des Krystalls scheint allerdings bei den bisher untersuchten Substanzen (Gyps, Adular) so gering zu sein, dass sie innerhalb der Fehlergrenze fällt, ihr Vorhandensein ist aber deshalb nicht zu bezweifeln, weil dieselbe bei einem asymmetrischen Körper sicher nachgewiesen worden ist (s. Beckenkamp, über die Ausdehnung monosymmetrischer und asymmetrischer Krystalle durch die Wärme; Zeitschr. f. Kryst. 5,436; ferner L. Fletcher, über die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme, ebenda 4,337, 8,455).

Die Art und Weise, wie sich die verschiedenen Kantenwinkel eines monosymmetrischen Krystalls mit seiner Temperatur ändern, ergiebt sich nun unmittelbar aus den Sätzen über die Winkeländerung zweiaxiger Krystalle S. 169 f. Das Klinopinakoid ist ein thermischer Hauptschnitt; alle Querflächen stehen dazu normal, sie sind einer thermischen Axe parallel; folglich bleiben sie nach S. 169 bei allen Temperaturen normal zur Symmetrieebene; es ändert sich jedoch ihre gegenseitige Neigung, da keine derselben einem thermischen Hauptschnitt parallel ist. Eine beliebige der Querflächen wählt man bekanntlich zum Orthopinakoid, eine andere zur Basis, und da der Winkel, unter welchem diese einander schneiden, mit der Temperatur variabel ist, so folgt hieraus, dass von den drei Axenwinkeln α, β, γ eines Krystalls zwar α und γ ($= 90^0$) Constante, β aber eine Function der Temperatur ist.

Die prismatischen Formen sind keiner thermischen Axe parallel, ihre Neigungen müssen sich somit nach S. 170 ändern, sowohl gegen die Symmetrieebene, als auch gegen sämmtliche Querflächen. Da aber zwei zu einander symmetrisch liegende Flächen, z. B. die rechte und die linke Fläche eines vertical gestellten Prismas, gleichgeneigt sind gegen die drei thermischen Axen, so müssen die entsprechenden Winkel beider mit jenen Axen gleichartig variiren. Man denke sich zu der Fläche MNO Fig. 110, S. 170, diejenige hinzu, welche in Bezug auf einen thermischen Hauptschnitt zu ihr symmetrisch liegt, so hat man den in Rede stehenden Fall; denn zwei Flächen einer prismatischen Form sind zu einander symmetrisch in Bezug auf {010}, d. i. auf einen thermischen Hauptschnitt. Die Parameter der Fläche MNO, aufgetragen auf die thermischen Axen, waren m, n, o, diejenigen der symmetrischen Fläche müssen die gleichen sein und, da ihre Richtungen dieselben sind, sich mit der Temperatur um gleich viel ändern. Es sind somit $m(1+\beta)$, $n(1+\gamma)$, $o(1+\alpha)$ die Parameter sowohl der ersten, als der zweiten Fläche nach einer Temperaturerhöhung um 100^0, d. h. die beiden Flächen sind auch dann noch symmetrisch zu einander in Bezug auf den thermischen Hauptschnitt, in Bezug auf welchen sie es vorher waren. Da dies für eine beliebige prismatische Form gilt, so folgt allgemein: alle prismatischen Formen ändern ihre Neigung gegen

die Symmetrieebene und gegen die Querflächen, bleiben aber stets symmetrisch gegen das Klinopinakoid, welche Temperatur auch der Krystall habe. Der Winkel derselben wird demnach stets von {010} halbirt, und da alle Querflächen normal zu dieser bleiben, wenn der Krystall gleichmässig erwärmt oder abgekühlt wird, so geht daraus hervor, dass die Symmetrie eines monosymmetrischen Krystalles in Bezug auf jene ausgezeichnete Ebene, welche wir Klinopinakoid nannten, von seiner Temperatur völlig unabhängig ist.

Wir haben S. 488, Fig. 509, einen Krystall betrachtet, dessen Querflächen r und r' sehr nahe symmetrisch zu a lagen und daher fast ein rhombisches Prisma bildeten. Nach dem Vorhergehenden müssen die beiden sehr ähnlichen Winkel $a:r$ und $a:r'$ sich in verschiedener Weise beim Erwärmen ändern, ihre Differenz wird also entweder grösser oder kleiner werden. In letzterem Falle wird es also eine Temperatur geben, bei der sie genau gleich sind; dadurch ist nun zwar a in geometrischer Beziehung eine Symmetrieebene geworden, aber nicht in physikalischer, denn die Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes sind derselben keineswegs nunmehr parallel, auch verliert sich der Charakter der geometrischen Symmetrieebene, sobald die Temperatur variirt. Demnach ist der Krystall durch jene Winkeländerung kein rhombischer geworden, denn zu dessen Wesen gehört, wie wir sahen, die physikalische Symmetrie nach drei auf einander senkrechten Ebenen und die Bewahrung dieser Symmetrie für alle Wärmegrade des Krystalls.

Da eine gleichmässige Temperaturerhöhung des Krystalls niemals seine Symmetrie aufhebt, so müssen auch alle durch dieselbe hervorgebrachten Aenderungen der optischen Eigenschaften innerhalb der Grenzen bleiben, welche durch jene Symmetrie gezogen sind. Die eine der drei Hauptschwingungsrichtungen muss stets der Axe b parallel sein, die beiden andern dem Klinopinakoid; aber der Winkel, welchen diese beiden mit irgend einer prismatischen Kante bilden, wird variiren mit der Temperatur. Diese Variation ist indess stets so klein, dass sie erst bei erheblichen Temperaturunterschieden messbar wird. Weit grösser ist gewöhnlich diejenige des Winkels der optischen Axen, hervorgebracht durch eine ungleiche Aenderung der drei Hauptbrechungsindices. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden: Ist die Symmetrieaxe die erste Mittellinie, so bleibt sie es nach Obigem auch beim Erwärmen; die optischen Axen mögen sich also dabei von ihr entfernen oder sich ihr nähern, jedenfalls müssen dies beide um gleich viel thun, ihre Bewegung eine genau gleiche und entgegengesetzte sein. Da aber zugleich die zweite Mittellinie ihre Richtung ändert, so wird dies eine Drehung der Axenebene um die erste Mittellinie zur Folge haben. Ist dagegen eine der beiden, der Symmetrieebene parallelen Hauptschwingungsrichtungen die Halbirende des spitzen Axenwinkels, und ist die Ebene der optischen Axen normal zum Klinopinakoid, so müssen zwar auch, wenn der

Axenwinkel beim Erwärmen kleiner wird, beide Axen sich um gleich viel der Symmetrieebene nähern, es wird sich jedoch die Ebene derselben um die Orthodiagonale drehen, indem die erste Mittellinie innerhalb der Symmetrieebene ihre Richtung ändert; dies giebt im Gesichtsfelde des Polarisationsapparates eine Parallelverschiebung der Axenebene. Ist endlich die Ebene der optischen Axen die Symmetrieebene selbst, so variirt die Lage der Mittellinie mit der Temperatur innerhalb der Axenebene. Wird z. B. der Axenwinkel beim Erwärmen kleiner und bewegt sich dabei die Mittellinie nach rechts, so muss offenbar die links gelegene Axe sich schneller nach der Normalen zur Platte hin bewegen, als die rechte, um stets gleich weit von der Mittellinie entfernt zu bleiben. Am besten kann man diese Erscheinung beobachten am Gyps, dessen Axenwinkel derart mit der Temperatur variirt, dass er für blaues Licht schon etwa bei 100° Null ist und bei weiterer Temperaturerhöhung die Axen in der zur Symmetrieebene normalen Ebene auseinandergehen. Erwärmt man eine senkrecht zur ersten Mittellinie für mittlere Farben geschnittene Gypsplatte in einem mit dem Polarisationsinstrument verbundenen Apparate, welcher in der III. Abtheilung beschrieben werden soll, bis auf 100°, so beobachtet man deutlich, dass die eine Axe sich der Mitte des Gesichtsfeldes weit schneller nähert, als die andere, so dass sie schliesslich an einem Punkte zusammenkommen, der von der Mitte nicht unbeträchtlich abweicht (s. u. Gyps im folgenden §). Schon bei verhältnissmässig niedrigen, aber wegen der starken Dispersion für die verschiedenen Farben merklich verschiedenen Temperaturen tritt die Einaxigkeit ein beim Glauberit; s. Laspeyres, Zeitschr. f. Kryst. 1,529.

§. 102. **Beispiele monosymmetrisch krystallisirender Substanzen:***)

Fig. 517.

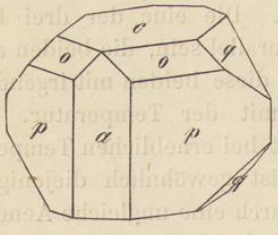
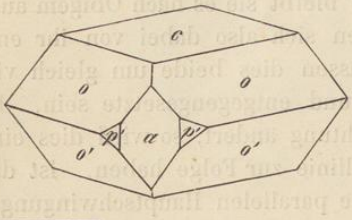


Fig. 518.



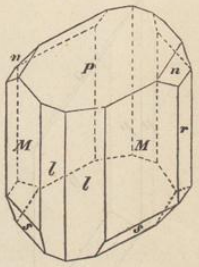
Schwefel = *S* (dimorph, vergl. S. 450), aus dem geschmolzenen Zustande erstarrt. $a : b : c = 0{,}9958 : 1 : 0{,}9998$, $\beta = 84^0\,14'$ Mitscherlich. Combination Fig. 517: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $q = \{011\}$ (das Zeichen ergiebt sich aus den Zonen qcq und aoq).

Selen = *Se*. $a : b : c = 1{,}6208 : 1 : 1{,}6003$, $\beta = 75^0\,54'$ Mitscherlich. Combination Fig. 518: $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{\bar{1}11\}$ (dass die vordere und hintere Hemipyramide die gleichen Indices haben, geht aus den Zonen oao' und coo' hervor), $p' = \{210\}$.

*) Bei den folgenden Beispielen sind die Resultate der optischen Untersuchung, soweit solche bis jetzt vorliegen, aufgenommen; sehr oft ist nun von dem Beobachter

Arsensulfür (nat. Realgar) $= AsS$. $a : b : c = 1{,}4403 : 1 : 0{,}9729$, $\beta = 66^0\,5'$ Marignac. Combination Fig. 519: $M = \{110\}$, $l = \{210\}$, $P = \{001\}$, $n = \{011\}$, $r = \{010\}$, $s = \{\bar{1}11\}$. Spaltbar nach $\{010\}$. Optische Axenebene = Symmetrieebene, die erste Mittellinie liegt im stumpfen Winkel der Krystallaxen a und c und bildet mit ersterer 103^0, mit letzterer 11^0; Doppelbrechung —, stark; $2H = 96^0\,20'$ roth, $= 92^0\,58'$ gelb, also starke Dispersion; die der Mittellinien (geneigte) ebenfalls stark (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 166).

Fig. 519.



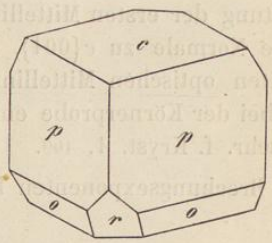
Ferrocyankalium (gelbes Blutlaugensalz) $= K^4Fe(CN)^6 + 3H^2O$. $a : b : c = 0{,}3962 : 1 : 0{,}4008$, $\beta = 89^0\,27'$ Wyrouboff. Dicke Tafeln nach $\{010\}$, begrenzt von $\{110\}$ und $\{011\}$; da die Kanten dieser beiden Formen einander fast rechtwinkelig schneiden und ihre Neigung zu $\{010\}$ fast gleich ist, so erscheint die Combination wie die einer spitzen tetragonalen Pyramide mit vorherrschender Basis. Spaltbar $\{010\}$ vollkommen. Die gewöhnlichen Krystalle bestehen aus zahlreichen Lamellen nach $\{010\}$ mit gekreuzten Axenebenen, zeigen daher die in Fig. 96 S. 130 abgebildete Erscheinung oder das Interferenzbild einaxiger Krystalle. Aus warmer Lösung von chromsaurem Kalium erhält man homogene Krystalle (Wyrouboff, Ann. chim. phys. [4] 6).

Ferricyankalium (rothes Blutlaugensalz) $= K^3Fe(CN)^6$. $a : b : c = 1{,}2876 : 1 : 0{,}8011$, $\beta = 89^0\,54'$ Marignac. Combination $\{110\}$ vorherrschend, am Ende $\{111\}$ oder $\{111\}$, $\{\bar{1}11\}$. Meist Zwillinge nach $\{100\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, 1. Mittellinie 4^0 gegen die Verticalaxe geneigt.

$2E = 71^0\,20'$ Roth
$75\ 52$ Gelb (Des Cloizeaux).

Chlorsaures Kalium $= KClO^3$. $a : b : c = 0{,}8256 : 1 : 1{,}2236$, $\beta = 70^0\,4'$ Rammelsberg. Combination Fig. 520: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r = \{\bar{1}01\}$ (gerade Abstumpfung der Kante der Hemipyramide). Häufig Zwillinge nach $\{001\}$ und mit derselben Fläche verwachsen. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Optische Axenebene $\perp \{010\}$; $2E = 28^0$ ungefähr.

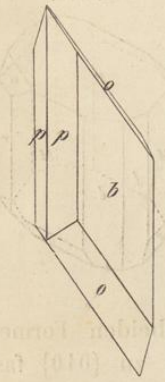
Fig. 520.



die Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen nicht bestimmt, sondern nur ihre Lage für mittlere Farben gemessen worden; alsdann ist im Folgenden nur eine Zahl hierfür angegeben.

Kohlensaures Natrium (Soda) $= Na^2CO^3 + 10H^2O$. $a : b : c =$ 1,4186 : 1 : 1,4828, $\beta = 57^0\ 40'$ Mohs. Combination Fig. 521 : $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, tafelartig nach der Symmetrieebene. Spaltbarkeit nach $\{100\}$. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, liegt im stumpfen Winkel der Axen und bildet mit a 22°, mit c 100°; Axe b ist erste Mittellinie, Doppelbrechung —; $2E = 69^0$ ungefähr; schwache gekreuzte Dispersion.

Fig. 521.



Schwefelsaures Natrium (Glaubersalz): $Na^2SO^4 + 10H^2O$. $a : b : c = 1{,}1161 : 1 : 1{,}2382$, $\beta = 72^0 15'$ Haidinger. Combination: $\{100\}, \{001\} \{\bar{1}01\}, \{011\}, \{111\}$, $\{\bar{1}11\}$ u. a. Oft sehr flächenreiche Krystalle. Spaltbar $\{100\}$ vollkommen. Optische Axenebene senkr. zu $\{010\}$, Axe b 1. Mittellinie;, 2. Mittellinie bildet mit Axe c 31° f. Roth, $26\frac{1}{2}^0$ f. Blau; $2E = 122^0\ 48'$ roth, $122^0\ 42'$ blau (Des Cloizeaux).

Fig. 522.

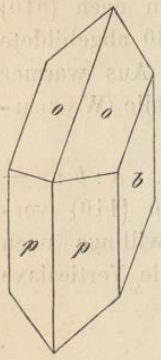


Fig. 523.

Schwefelsaures Calcium (Gyps) $= CaSO^4 + 2H^2O$. $a : b : c = 0{,}6895 : 1 : 0{,}4132$, $\beta = 81^0\ 2'$ Beckenkamp. Combination Fig. 522: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{\bar{1}11\}$. Nicht selten Zwillinge nach $\{100\}$, s. Fig. 523. Spaltbarkeit $\{010\}$ sehr vollkommen, $\{\bar{1}11\}$ deutlich, $\{100\}$ unvollkommen. Sehr grosse Verschiedenheit der Elasticität innerhalb der Symmetrieebene, wie aus Fig. 524 hervorgeht, in welcher die Curve dargestellt ist, deren Radien proportional der Biegung eines entsprechenden Stabes; es bedeutet: 1 $\parallel t$ die Richtung $\{\bar{1}01\}$, d. h. die des sogen. Faserbruches, gebildet von den beiden Spaltungsflächen $(\bar{1}11)$ und $(\bar{1}\bar{1}1)$; 2 die Richtung der ersten Mittellinie der optischen Axen, 3 die Normale zu $d\{101\}$, 7 die Normale zu $c\{001\}$, 10 die Normale zu $t\{\bar{1}01\}$, 11 die Richtung der zweiten optischen Mittellinie, 17 die Normale zu $a\{100\}$, 18 die Richtung der bei der Körnerprobe entstehenden Gleitfläche $\beta\ \{\bar{5}09\}$. S. Coromilas, Zeitschr. f. Kryst. 1, 409.

Brechungsexponenten bei 16,8° C. nach V. von Lang:

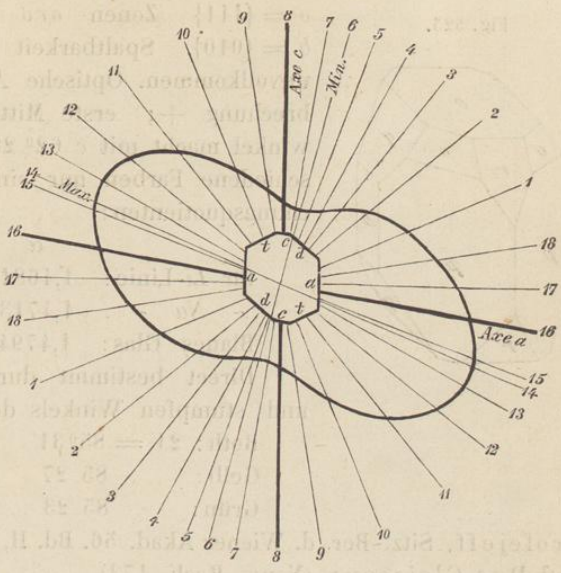
		α	β	γ
Linie	C	1,5183	1,5204	1,5281
-	D	1,5207	1,5228	1,5305
-	E	1,5237	1,5258	1,5335
-	F	1,5263	1,5284	1,5361

Der optische Axenwinkel hat für D ein Maximum und auch die Dispersion

der optischen Elasticitätsaxen ist anormal (s. V. v. Lang, Sitz. Ber. d. Akad. Wien. Dec. 1877, Zeitschr. f. Kryst. 2, 499).

Optische Axenebene bei gewöhnlicher Temperatur parallel der Symmetrieebene, mit starker geneigter Dispersion (s. Fig. 6 und 7 der Tafel); bei 9° C. liegt die erste Mittellinie im stumpfen Winkel der Axen und macht mit a 23° 43′, dabei ist $2V = 61°\,24'$. Beim Erwärmen nähert sich diejenige Axe, welche weitere Ringe und an der Hyperbel aussen Violett, innen Blau hat, weit schneller der Mitte des Gesichtsfeldes, als die andere, deren Hyperbelsäume aussen roth, innen blaugrün sind. Des Cloizeaux fand für rothes Licht

Fig. 524.



$2E = 75°\,58'$ bei 47° Cels.
59 19 - 71,5 -
39 1 - 95,5 -
0 116 -

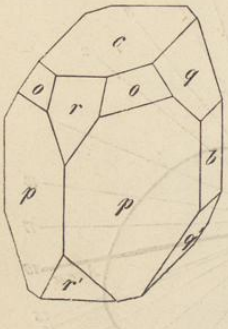
Bei letzterer Temperatur waren die Axen für Blau schon merklich getrennt in der zu {010} normalen Ebene; bei etwas höherer Erwärmung liegen alle Axen in Ebenen, senkrecht zur Symmetrieebene, ihre horizontale Dispersion ist jedoch gering. Zwischen 20° und 95° dreht sich eine Axe (für Roth), nach der Mitte zu um 33° 55′, die andere um 22° 38′, folglich ändert die Mittellinie ihre Lage um 5° 38′. Doppelbrechung —. Die thermische Ausdehnung des Gypses ist mit der Richtung beträchtlich verschieden, daher die Winkeländerungen beim Erwärmen nicht unbedeutend; nach Beckenkamp's neuesten Messungen (Zeitschr. f. Kryst. 6, 450) sind die Elemente:

bei 0° C. $a : b : c = 0{,}689724 : 1 : 0{,}413411$, $\beta = 81°\ 3'\ 42''$
50 - - - - 0,689301 : 1 : 0,413072, 81 0 1
100 - - - - 0,688596 : 1 : 0,412661, 80 56 34

Darnach ist die Symmetrieaxe Richtung der grössten thermischen Ausdehnung, die der kleinsten liegt im stumpfen Axenwinkel β und bildet mit der Verticalaxe 45—46°.

Schwefelsaures Eisen (Eisenvitriol) $= FeSO^4 + 7H^2O$. $a : b : c = 1{,}1828 : 1 : 1{,}5427$, $\beta = 75^0\ 44\frac{1}{2}'$ von Zepharovich. Combination Fig. 525: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$ (manchmal nur diese beiden, eine rhomboëderähnliche Form bildend), $r = \{101\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $o = \{111\}$ (Zonen *oro* und *cop*), $q = \{011\}$, $b = \{010\}$. Spaltbarkeit {001} vollkommen, {110} unvollkommen. Optische Axenebene {010}, Doppelbrechung +; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel macht mit c $62^0\ 28'$ und divergirt für verschiedene Farben nur einige Minuten. Hauptbrechungsquotienten:

Fig. 525.



	α	β	γ
für *Li*-Linie:	1,4681	1,4748	1,4824
- *Na* - :	1,4713	1,4782	1,4856
Blaues Glas:	1,4794	1,4861	1,4928

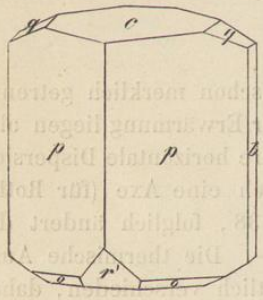
Direct bestimmt durch Messung des spitzen und stumpfen Winkels der optischen Axen in Oel:

Roth: $2V = 85^0\ 31'$
Gelb: 85 27
Grün: 85 23

(Erofejeff, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 56. Bd. II, 63). Sehr ähnliche Werthe fand Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 173).

Schwefelsaures Kalium-Magnesium $= K^2Mg(SO^4)^2 + 6H^2O$. $a : b : c = 0{,}7420 : 1 : 0{,}5003$, $\beta = 75^0\ 5'$ Murmann. Combination Fig. 526: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$, $b = \{010\}$. Optische Axenebene {010}, Doppelbrechung +, schwach; die erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, von a nur circa 1^0 abweichend (für Roth weniger als für Blau). Mittlerer Brechungsexponent:

Fig. 526.



$\beta = 1{,}468$ roth
1,470 gelb
1,476 blau.

$2V = 48^0\ 21'$, Dispersion $\varrho > v$. (Murmann und Rotter, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 34, 144).

Schwefelsaures Ammonium-Magnesium $= (NH^4)^2Mg(SO^4)^2 + 6H^2O$. $a : b : c = 0{,}7376 : 1 : 0{,}4891$, $\beta = 72^0\ 54'$ Murmann. Combination gleich der vorigen. Optische Axenebene {010}, Doppelbrechung +, schwach; erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, bildet mit a 5^0.

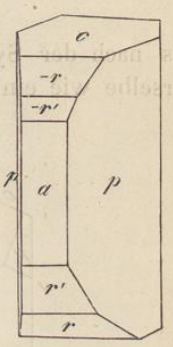
$\beta = 1{,}4677$	$2V = 50^0\ 27'$	roth
1,4737	50 14	gelb
1,4787	49 47	grün
1,4846	48 54	violett

(Heusser, Poggend. Ann. d. Physik, 91. Bd. Murmann und Rotter, l. c.). Ueber die analog zusammengesetzten Salze:

$(NH^4)^2 Mn(SO^4)^2 + 6H^2O$
$K^2 Fe(SO^4)^2 + 6H^2O$
$(NH^4)^2 Fe(SO^4)^2 + 6H^2O$
$K^2 Ni(SO^4)^2 + 6H^2O$
$(NH^4)^2 Ni(SO^4)^2 + 6H^2O$
$K^2 Co(SO^4)^2 + 6H^2O$
$(NH^4)^2 Co(SO^4)^2 + 6H^2O$
$K^2 Zn(SO^4)^2 + 6H^2O$
$(NH^4)^2 Zn(SO^4)^2 + 6H^2O$
$K^2 Cu(SO^4)^2 + 6H^2O$
$(NH^4)^2 Cu(SO^4)^2 + 6H^2O$,

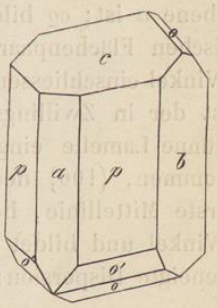
welche sämmtlich gleiche Krystallform und sehr ähnliche optische Eigenschaften haben, s. Murmann und Rotter, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 34, 148—172.

Fig. 527.



Phosphorsaures Ammonium-Natrium (Phosphorsalz = $(NH^4)NaHPO^4 + 4H^2O$. $a : b : c = 2{,}8828 : 1 : 1{,}8616$, $\beta = 80^0 42'$ Mitscherlich. Combination Fig. 527: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $-r = \{101\}$, $-r' = \{201\}$, $r = \{\bar{1}01\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$.

Fig. 528.



Borax = $Na^2B^4O^7 + 10H^2O$. $a : b : c = 1{,}0997 : 1 : 0{,}5394$, $\beta = 73^0 25'$ Rammelsberg. Combination Fig. 528: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $o' = \{\bar{2}21\}$. Optische Axenebene normal zu $\{010\}$, Doppelbrechung —; Symmetrieaxe ist erste Mittellinie, die zweite liegt im spitzen Winkel der Axen und bildet mit c $55^0 33'$ für Roth, $54^0 45'$ für Grün, daher die sehr deutliche gekreuzte Dispersion, welche in Fig. 10 und 11 der Tafel dargestellt ist; die zweite Mittellinie und somit die Axenebene für jede Farbe dreht sich beim Erwärmen von 21° auf 86° Celsius um $3\frac{1}{2}^0$. Optische Constanten:

	α	β	γ	$2V$	$2E$*)
Für *Li*-Linie:	1,4442	1,4657	1,4686	$39^0 52'$	$59^0 53'$
- *Na* - :	1,4468	1,4686	1,4715	— 36	— 23
- blaues Glas:	1,4535	1,4756	1,4785	— 22	

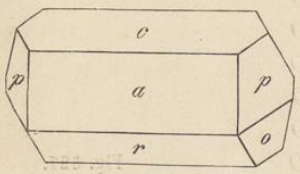
(Tschermak, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 57.Bd. II, 641).

Epidot = $H^2Ca^4Al^6Si^6O^{26}$. $a : b : c = 1{,}5807 : 1 : 1{,}8057$, $\beta = 64^0 36'$ von Kokscharow. Combination Fig. 529: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$,

*) Direct bestimmt.

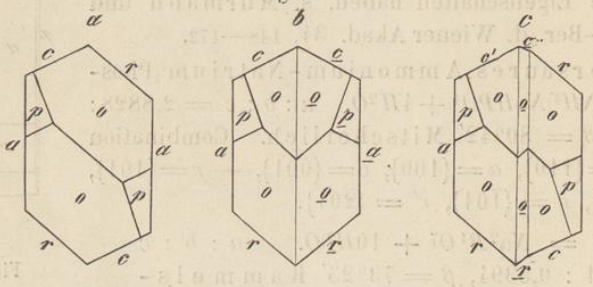
$r = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$, $o = \{\bar{1}11\}$; stets nach der Symmetrieaxe prismatisch verlängert und gewöhnlich nur an einem Ende ausgebildet.

Fig. 529.



Häufig Zwillinge nach a {100}, s. Fig. 530 a—c (gerade Projectionen auf die Symmetrieebene); Fig. 530 a stellt einen einfachen Krystall dar, an dessen Ende $o\{\bar{1}11\}$ vorherrscht; in dem symmetrischen Zwilling Fig. 530 b bilden die beiden oberen Flächen $o\underline{o}$ einen einspringenden, die unteren $o\underline{o}$ einen ausspringenden Winkel; sind die letzteren so gross, dass sie allein die Endigung des nach der Symmetrieaxe prismatischen Zwillings bilden, so erscheint derselbe wie ein einfacher monosymmetrischer Krystall, dessen Symmetrie-

Fig. 530.



ebene a ist; $o\underline{o}$ bildet eine Hemipyramide, aber zu dem vorderen prismatischen Flächenpaar $r\underline{r}$ fehlen hinten die parallelen (da $c\underline{c}$ einen andern Winkel einschliessen), wodurch der Zwilling sogleich erkannt ist. Sehr häufig ist der in Zwillingsstellung befindliche zweite Krystall dem ersten nur als dünne Lamelle eingelagert, wie Fig. 530 c zeigt. Spaltbarkeit {001} vollkommen, {100} deutlich. Optische Axenebene {010}, Doppelbrechung —; erste Mittellinie, bei der gewählten Stellung fast vertical, liegt im spitzen Winkel und bildet mit c 2° 56′ für Roth, 2° 26′ für Grün, daher deutliche geneigte Dispersion;

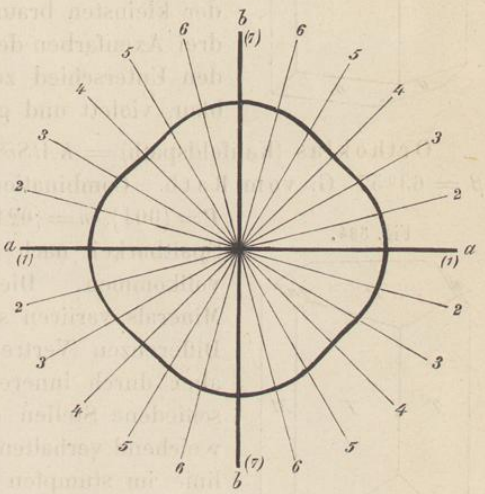
$2V = 73°\,36'$	$\beta = 1{,}7541$	Roth
— 26	1,7570	Gelb
— 13	1,7621	Grün
$\alpha = 1{,}7305$,	$\gamma = 1{,}7677$	Roth.

(Klein, N. Jahrb. f. Mineralogie, 1874). Der optische Axenwinkel ändert sich wenig mit der Temperatur.

Glimmer $= KH^2Al^3(SiO^4)^3$. $a : b : c = 0{,}578 : 1 : 3{,}276$, $\beta = 90° 0'$ G. vom Rath. Sechsseitige Tafeln nach {001}, selten mit gut ausgebildeten Randflächen. Zwillinge nach {110}, deren Verwachsungsfläche aber stets {001} ist (s. Tschermak, Zeitschr. f. Kryst. 2, 14). Höchst vollkommene Spaltbarkeit nach {001} (über die Verwendung dünner Glimmerplatten zu optischen Zwecken s. S. 125 f.); durch Eintreiben einer scharfen Spitze

in eine Spaltungslamelle erhält man als Schlagfigur einen sechsstrahligen Stern, bestehend aus Sprüngen nach {010} und {$\bar{1}$11}, durch Druck mit einer stumpfen Spitze Knickungen nach drei Richtungen, welche die Winkel der Schlagfigur halbiren (Reusch, Poggendorff's Ann. d. Phys. 136, 130, Bauer, Zeitschr. d. d. geol. Ges. 26, 137, Tschermak l. c.). Die Elasticität für Richtungen innerhalb der Spaltungsfläche wird nach den Messungen von Coromilas (Zeitschr. f. Kryst. 1, 411) dargestellt durch die Curve Fig. 531, deren Radien vect. proportional sind der elastischen Biegung; 1 ist die Richtung der Symmetrieaxe (Maximum der Biegung, daher Minimum der Elasticität); 3, 3, 7 sind den Radien der Schlagfigur, 1, 5, 5 denen der Druckfigur parallel. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, 1. Mittellinie $^1/_2{}^0$ —2^0 gegen Axe c nach hinten geneigt (da in Folge dieser Orientirung eine Spaltungsplatte die optischen Axen fast genau symmetrisch zur Normale der Platte zeigt, so wurde der Glimmer lange Zeit für rhombisch gehalten, bis Hintze und Tschermak die erwähnte Abweichung nachwiesen). $2E = 60^0$—70^0, $\varrho > v$. Doppelbrechung —. Brechungsexponenten nach Bauer:

Fig. 531.

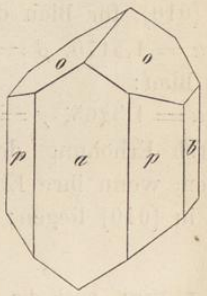


$\alpha = 1{,}537$ für rothes Glas
$\beta = 1{,}541$ - - -
$\gamma = 1{,}574$ - - -

Die angegebenen Werthe gelten für den Kaliglimmer oder Muscovit, während die anderen Glimmerarten (isomorphe Mischungen) grosse Verschiedenheiten in der Lage der optischen Axen zeigen (s. auch S. 151).

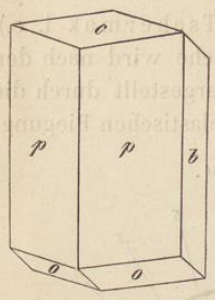
Augit = Mischung von $(MgFe)CaSi^2O^6$ und $MgAl^2SiO^6$. $a : b : c = 1{,}058 : 1 : 0{,}594$, $\beta = 90^0 22'$ von Koksscharow. Combination Fig. 532: $a = \{100\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{122\}$. Optische Axen in der Symmetrieebene, Doppelbrechung +, stark. Bei den verschiedenen Mischungen, welche die Varietäten dieses Minerals bilden, macht die erste Mittellinie (im stumpfen Axenwinkel) mit c Winkel von 39^0 bis 54^0, der wahre Axenwinkel $2V = 61^0$ —68^0; $\beta = 1{,}70$ ungefähr. Meist dunkelbraun durchsichtig mit mässigem Pleochroismus.

Fig. 532.



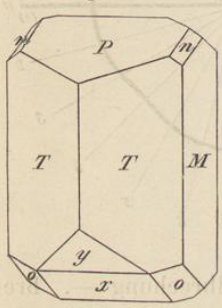
Hornblende, (chemische Zusammensetzung gleich Augit). $a : b : c = 0{,}5318 : 1 : 0{,}2936$, $\beta = 75^0\,2'$ Des Cloizeaux. Combination Fig. 533: $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{\bar{1}11\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung —; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel macht mit c 4^0—18^0; $2V = 80^0$ — 85^0; $\beta = 1{,}64$ ungefähr. Starker Pleochroismus; meist ist die Körperfarbe für die Schwingungsrichtung parallel der Axe der grössten Elasticität grün, die parallel der kleinsten braun; doch giebt es Varietäten, deren drei Axenfarben den grössten überhaupt vorkommenden Unterschied zeigen, sie sind nämlich: dunkelblau, violett und gelbgrün.

Fig. 533.



Orthoklas (Kalifeldspath) $= KAlSi^3O^8$. $a : b : c = 0{,}6585 : 1 : 0{,}5554$, $\beta = 63^0\,57'$ G. vom Rath. Combination Fig. 534: $T = \{110\}$, $M = \{010\}$, $P = \{001\}$, $n = \{021\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $x = \{\bar{1}01\}$, $y = \{\bar{2}01\}$*. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen, $\{010\}$ ziemlich vollkommen. Die optischen Eigenschaften dieses Minerals variiren sehr, zum Theil in Folge chemischer Differenzen (Vertretung von K durch Na), besonders aber durch innere Spannungen, da sich meist verschiedene Stellen eines und desselben Krystalls abweichend verhalten. Doppelbrechung —; erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, schliesst mit c 111^0—112^0 ein; optische Axenebene meist normal zu $\{010\}$, alsdann stets deutliche horizontale Dispersion (in Fig. 8 und 9 der Tafel dargestellt); Axenwinkel sehr verschieden, zuweilen so klein, dass für eine Farbe die Axen zusammenfallen und für einen Theil der Farben in $\{010\}$ aus einander gehen; für einzelne Varietäten liegen die Axen aller Farben in der Symmetrieebene. Beispiele:

Fig. 534.



Feldspath vom St. Gotthard, dessen optische Axenebene senkrecht zu $\{010\}$, mit grossem Axenwinkel, für Gelb:

$\alpha = 1{,}5190$, $\beta = 1{,}5237$, $\gamma = 1{,}5260$. $2V = 69^0\,43'$, $2E = 121^0\,6'$.

Feldspath (natronreich) von Wehr, dessen Axenebene für Roth normal zu $\{010\}$, für Blau diesem parallel; für Roth:

$\alpha = 1{,}5170$, $\beta = 1{,}5239$, $\gamma = 1{,}5240$. $2V = 13^0\,34'$, $2E = 20^0\,45'$,

für Blau:

$\alpha = 1{,}5265$, $\gamma = 1{,}5356$, $\beta = 1{,}5355$. $2V = 11^0\,51'$, $2E = 18^0\,14'$.

Durch Erhöhung der Temperatur findet eine Abnahme des Winkels der Axen, wenn ihre Ebene normal zu $\{010\}$, und eine Zunahme statt, wenn sie in $\{010\}$ liegen; wird die Platte über 500^0 erhitzt, so kehren die Axen

*) Vergl. auch die Projectionen Fig. 505 und 506 S. 482.

nach dem Erkalten nicht ganz in ihre frühere Lage zurück (Des Cloizeaux, Man. d. Min. I, 330—335).

Essigsaures Natrium $= NaC^2H^3O^2 + 3H^2O$. $a : b : c = 1{,}1852 : 1 : 0{,}9964$, $\beta = 68^0 16'$ Brooke. Combination Fig. 535: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$ und $\{001\}$. Optische Axenebene senkrecht zu $\{010\}$, erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel, mit c 55^0; $2E = 99^0 11'$ roth, $101^0 50'$ violett; horizontale Dispersion kaum bemerkbar (Des Cloizeaux.).

Fig. 535.

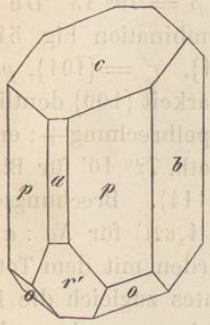


Fig. 536.

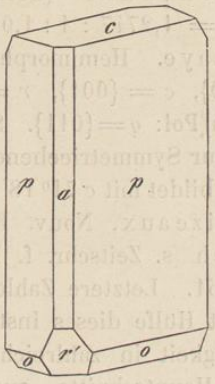
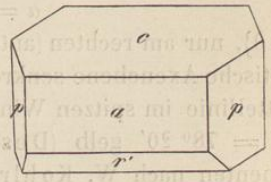


Fig. 537.



Essigsaures Kupfer (Grünspan) $= Cu(C^2H^3O^2)^2 + H^2O$. $a : b : c = 1{,}5320 : 1 : 0{,}8108$, $\beta = 63^0 34'$ Schabus. Combination Fig. 536: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r' = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ und $\{110\}$. Starker Pleochroismus (spangrün bis dunkelblau).

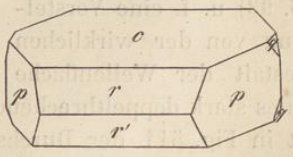
Essigsaures Blei (Bleizucker) $= Pb(C^2H^3O^2)^2 + 3H^2O$. $a : b : c = 2{,}1791 : 1 : 2{,}4790$, $\beta = 70^0 12'$ Rammelsberg. Combination Fig. 537: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$; häufig dünn tafelförmig nach $\{001\}$. Spaltbarkeit nach $\{100\}$ und $\{001\}$. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung $+$; erste Mittellinie (für die verschiedenen Farben nur wenige Min. abweichend), im stumpfen Winkel, bildet mit c $55^0 18'$.

$2V = 83^0 27'$	$\beta = 1{,}570$	roth
83 55	1,576	gelb
87 24	1,584	blau

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 111).

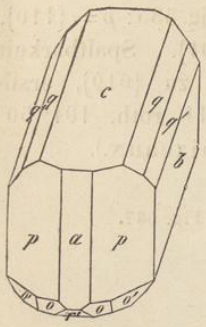
Oxalsäure $= H^2C^2O^4 + 2H^2O$. $a : b : c = 1{,}6949 : 1 : 3{,}3360$, $\beta = 73^0 48'$ De la Provostaye. Combination Fig. 538: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $q = \{011\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Optische Axenebene normal zu $\{010\}$ und fast genau senkrecht

Fig. 538.



zu {001}; erste Mittellinie ∥ b, zweite Mittellinie im stumpfen Winkel gegen c 14° 43′ (roth), 14° 56′ (blau) geneigt;

Fig. 539.



$2E = 117° 16'$ roth, $118° 33'$ blau (Des Cloizeaux).

Saures oxalsaures Kalium (Kleesalz) = $KHC^2O^4 + H^2O$. $a : b : c = 0{,}3360 : 1 : 0{,}8011$, $\beta = 46° 31'$ Marignac. Combination Fig. 539: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$, $r' = \{\bar{1}02\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $o' = \{\bar{1}21\}$ (Zone $o'ooo'$). Spaltbarkeit nach {100} vollkommen, {010} deutlich.

Weinsäure (Rechtsweinsäure) = $C^4H^6O^6$. $a : b : c = 1{,}2747 : 1 : 1{,}0266$, $\beta = 79° 43'$ De la Provostaye. Hemimorph. Combination Fig. 540: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{101\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$, nur am rechten (antilogen) Pol: $q = \{011\}$. Spaltbarkeit {100} deutlich. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, Doppelbrechung +; erste Mittellinie im spitzen Winkel β bildet mit c 71° 18′ für Roth, 72° 10′ für Blau; $2V = 78° 20'$ gelb (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 114). Brechungsexponenten nach W. Kohlrausch (s. Zeitschr. f. Kryst. 4, 621) für Na : $\alpha = 1{,}4948$, $\beta = 1{,}5345$, $\gamma = 1{,}6051$. Letztere Zahlen wurden mit dem Totalreflectometer gefunden und mit Hülfe dieses Instrumentes zugleich die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit in zahlreichen Richtungen, besonders innerhalb der drei optischen Hauptschnitte, ausgeführt, wobei sich eine

Fig. 540.

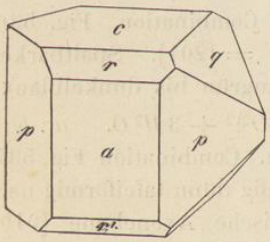
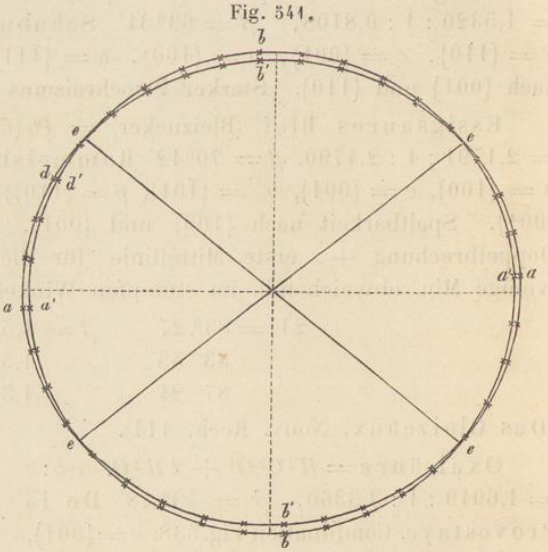


Fig. 541.

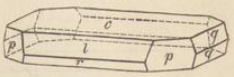


vollkommene Uebereinstimmung mit der Fresnel'schen Theorie herausstellte (vergl. S. 103). Um gegenüber den stark übertriebenen Figuren 63 (S. 93) u. f. eine Vorstellung von der wirklichen Gestalt der Wellenfläche eines stark doppeltbrechenden Krystalles, wie der Weinsäure, zu verschaffen, ist in Fig. 541 der Durchschnitt derselben durch die optische Axenebene

gegeben. Ueber die polare Pyroëlektricität der Weinsäure s. Hankel, Poggendorff's Ann. d. Phys. 49,500.

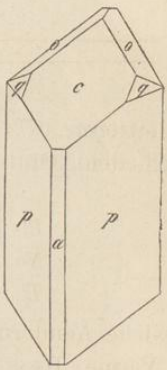
Benzoësäure $= C^6H^5.COOH$. $a:b:c = 1{,}0508:1:4{,}2084$, $\beta = 82^0\,55'$ Bodewig. Combination Fig. 542: $c = \{001\}$, $l = \{101\}$, $r = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$, $q = \{011\}$. Optische Axenebene $\{010\}$; eine optische Axe steht ungefähr senkrecht zu $c\,\{001\}$.

Fig. 542.



Salicylsäure: $C^7H^6O^3$. $a:b:c = 1{,}0298:1:0{,}4344$, $\beta = 88^0\,38'$ Marignac (vergl. Zeitschr. f. Kryst. 5,640). Combination Fig. 543: $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{201\}$, $q = \{211\}$, $o = \{111\}$.

Fig. 543.



Chinon $= C^6H^4O^2$. $a:b:c = 1{,}0325:1:1{,}7100$, $\beta = 79^0\,0'$ Hintze. Combination Fig. 544: $c = \{001\}$, $m = \{110\}$, $r = \{\bar{1}01\}$; zuweilen noch $o = \{\bar{1}12\}$ (Fig. 545) und Zwillinge nach r (Fig. 546). Spaltbar nach $r\,\{\bar{1}01\}$ sehr vollkommen. Optische Axenebene $\{010\}$, die erste Mittellinie nahe senkrecht zu $r\{\bar{1}01\}$. Axenwinkel in Oel, beob. durch eine Spaltungsplatte:

Fig. 544.

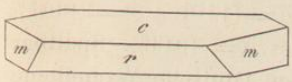


Fig. 545.

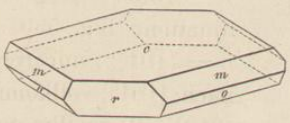
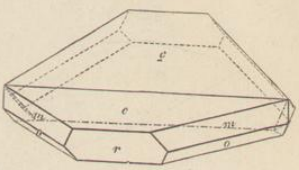


Fig. 546.

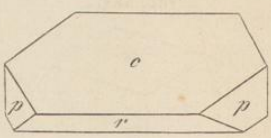


$2H_a = 73^0\,28'$ für *Li*
$74\;\;1$ - *Na*
$74\;38$ - *Tl*

Doppelbrechung stark, negativ (Henniges, Zeitschr. f. Kryst. 7,527).

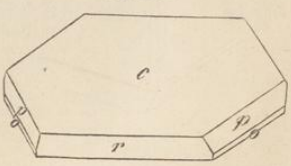
Naphtalin $= C^{10}H^8$. $a:b:c = 1{,}3951:1:1{,}4278$, $\beta = 56^0\,31'$ Groth. Combination Fig. 547: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen. Optische Axenebene $\parallel \{010\}$, durch die Spaltungsblättchen eine Axe sichtbar (Groth, unveröff. Beob.).

Fig. 547.



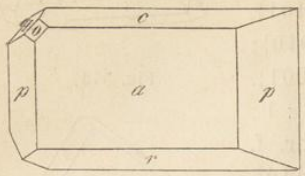
Anthracen $= C^{14}H^{10}$. $a:b:c = 1{,}422:1:1{,}878$, $\beta = 55^0\,36'$ Groth. Combination Fig. 548: $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $o = \{\bar{1}11\}$, $r = \{\bar{2}01\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$. Optische Axenebene $\parallel \{010\}$, durch $\{001\}$ eine Axe sichtbar (Groth, unveröff. Beob.).

Fig. 548.



Rohrzucker = $C^{12}H^{22}O^{11}$. $a : b : c = 1{,}2595 : 1 : 0{,}8782$, $\beta = 76^0\ 30'$ Wolff. Hemimorph. Combination Fig. 549: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{\bar{1}01\}$, $p = \{110\}$; gewöhnlich nur am linken antilogen) Pol der Symmetrieaxe ausgebildet: $q = \{011\}$ und $o = \{111\}$; die Hemimorphie documentirt sich auch darin, dass die linken und die rechten Flächen von $\{110\}$ verschiedene Aetzfiguren zeigen. Spaltbarkeit nach $\{100\}$ deutlich. Optische Axenebene $\{010\}$; Doppelbrechung —; erste Mittellinie, im stumpfen Winkel der Axen a und c, bildet mit letzterer $67^0\ 48'$ nach Miller (für verschiedene Farben sehr wenig verschieden). Optische Constanten nach Calderon (Zeitschr. f. Kryst. 1, 73):

Fig. 549.

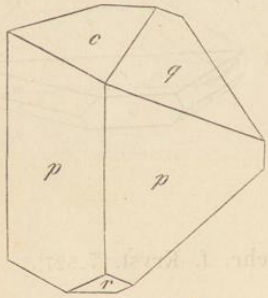


	α	β	γ	$2V$
Li:	1,5379	1,5638	1,5693	$47^0\ 56'$
Na:	1,5397	1,5667	1,5716	$48\ \ 0$
Tl:	1,5422	1,5685	1,5734	$48\ \ 8$

Merkliche Aenderung des Axenwinkels und der Lage der Mittellinie durch die Wärme (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 170). Elektrische Eigenschaften s. Hankel, Poggendorffs Ann. 49, 495).

Quercit = $C^6H^{12}O^5$. $a : b : c = 0{,}7935 : 1 : 0{,}7533$, $\beta = 69^0\ 50'$ Bodewig. Combination Fig. 550: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $r = \{\bar{1}01\}$; nur rechts: $q = \{011\}$. Spaltbar nach $\{\bar{1}01\}$ vollkommen. Optische Axenebene $\{010\}$, Doppelbrechung +; erste Mittellinie bildet mit c im spitzen Winkel für *Li*: $11^0\ 49'$, für *Na*: $11^0\ 46'$, für *Tl*: $11^0\ 22'$. Der scheinbare Axenwinkel beträgt:

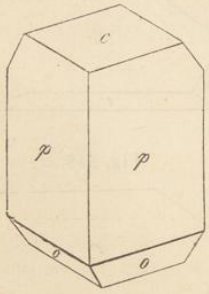
Fig. 550.



für die *Li*-Linie $57^0\ 35'$
- - *Na* - 58 1
- - *Tl* - 58 34

(Bodewig).

Fig. 551.



Dulcit = $C^{12}H^{14}O^{12}$. $a : b : c = 0{,}7369 : 1 : 0{,}7737$, $\beta = 66^0\ 15'$ Laurent. Combination Fig. 551: $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $o = \{\bar{1}11\}$. Optische Axenebene normal zur Symmetrieebene, b erste Mittellinie; zweite Mittellinie, im stumpfen Winkel, bildet mit c $10^0\ 53'$ roth, $10^0\ 35'$ blau;

$2E = 151^0\ 10'$ roth, $150^0\ 0'$ blau.

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 131).

VI. Das asymmetrische Krystallsystem.

§. 103. **Einleitung. Wahl der Axen und der Grundform.** Das letzte Krystallsystem umfasst nach Früherem alle Krystalle, welche keine Symmetrieebene besitzen. Betrachten wir also irgend eine Fläche mit ihrer parallelen Gegenfläche, so wird zu derselben durch die Symmetrie keine weitere gefordert, um sie zu einer vollständigen einfachen Form zu ergänzen; jedes Paar paralleler Flächen ist also für sich eine einfache Krystallform. Es gehören aber wenigstens drei solcher Flächenpaare dazu, einen Raum abzuschliessen, ein asymmetrischer Krystall muss also mindestens eine dreizählige Combination sein, während im vorigen Systeme zwei Formen zur vollständigen Begrenzung eines Krystalls genügten. Im asymmetrischen System giebt es demnach nur eine einzige Art von Formen, nämlich Paare paralleler Flächen.

Da keine dieser Ebenen des Krystalls durch die Symmetrie irgendwie ausgezeichnet ist, so liegt keine Ursache dazu vor, dass irgend eine Richtung vorhanden sei, welche dadurch an Bedeutung hervorrage, dass sie für verschiedene physikalische Erscheinungen gleichzeitig von Wichtigkeit sei. Da nach dem S. 217 aufgestellten Grundgesetze die physikalischen Hauptrichtungen nur von der Symmetrie des Krystalls abhängen, eine solche aber hier nach keiner Ebene vorhanden ist, so sind jene Richtungen für die verschiedenen physikalischen Erscheinungen nicht nothwendig die gleichen. In der That ist dies auch nicht der Fall. Die drei auf einander senkrechten Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Lichtgeschwindigkeit für eine bestimmte Farbe stehen in keiner gesetzmässigen Beziehung zu denen des Minimum oder Maximum der Cohäsion, oder den Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Ausdehnung durch die Wärme u. s. w. Keine jener drei Richtungen fällt ferner zusammen für die verschiedenen Farben, alle drei Hauptschwingungsrichtungen sind dispergirt, und zwar ohne alle Regelmässigkeit.

Bei dem Mangel jeder geometrischen Symmetrieebene liegt bei den in Rede stehenden Krystallen im Allgemeinen gar kein Grund dafür vor, irgend eine bestimmte Wahl der Axenebenen für besonders empfehlenswerth zu halten, d. h. wir stehen hier vor dem allgemeinen Fall der Bestimmung eines Krystalls, welchen wir bereits S. 193 f. behandelt haben*). Betrachten

*) Selbstverständlich wird es sich empfehlen, die Axenebenen so auszuwählen, dass, auf sie bezogen, die Indices der übrigen Flächen möglichst einfache werden; dies ist besonders häufig der Fall bei den Spaltungsflächen, daher es üblich ist, solche durch die Molecularstructur ausgezeichnete Flächen zu Axenebenen zu nehmen. Handelt es sich aber darum, die Krystallform eines asymmetrischen Körpers mit derjenigen einer chemisch verwandten Substanz zu vergleichen, so hat man derselben diejenige Stellung zu ertheilen, in welcher die Beziehungen zu dem zweiten Körper auch in den Elementen ersichtlich werden.

wir nunmehr ein bestimmtes Beispiel, den in Fig. 552 dargestellten asymmetrischen Krystall, so ist demnach das Verfahren das folgende: Wir wählen drei beliebige Flächen des Krystalls, z. B. a, b und c, zu Axenebenen, eine beliebige vierte, z. B. o, welche nicht in der Zone zweier von jenen liegt, zur Grundform, und berechnen auf die in S. 197 angegebene Art die Elemente des Krystalls, so erhalten wir drei schiefe Axenwinkel (daher der gewöhnlich gebrauchte Name »triklinisches System«) und ein selbstverständlich irrationales Parameterverhältniss. Von den Kanten der drei zu Axenebenen gewählten Flächen, d. h. den drei Axen, stellen wir eine ($a : b$ Fig. 552), mit c bezeichnet, vertical und nennen sie Verticalaxe, von den beiden anderen lassen wir diejenige, welcher der kürzere Parameter der Grundform entspricht ($b : c$), nach vorn abwärts geneigt, auf den Beobachter zulaufen und nennen sie Brachydiagonale (a); endlich wird die dritte querlaufende Axe b (= der Kante $a : c$) die Makrodiagonale genannt. Bei der Aufzählung der Elemente eines Krystalls sollen die Axenwinkel α, β, γ stets im rechten oberen vorderen Oktanten angeführt werden.

Nach der so getroffenen Wahl der Axen und einer Grundform sind wir im Stande, alle übrigen Flächen des Krystalls einfach durch ihre Indices, oder durch Zeichen, deren Ableitung eine ganz analoge ist, wie in den beiden vorhergehenden Systemen, zu bezeichnen, wie es im folgenden § geschehen soll.

§. 104. **Ableitung und Bezeichnung der asymmetrischen Formen.** Die zur Grundform gewählte, alle drei Axen in endlichem Abstand schneidende Fläche o ist offenbar das Analogon einer Pyramidenfläche des rhombischen Systems mit ihrer parallelen Gegenfläche, also eines Viertels einer rhombischen Pyramide; man nennt daher diese, sowie jede die drei Axen in endlichem Abstand schneidende Form eine Tetartopyramide. Die in Rede stehende primäre Tetartopyramide wird bezeichnet, wenn sie vorn oben rechts liegt, mit $P' = \{111\}$, wenn sie vorn oben links: $'P = (1\bar{1}1)$, vorn unten rechts (dies ist in Fig. 552 der Fall): $P_, = \{11\bar{1}\}$, vorn unten links (also hinten oben rechts ihre Gegenfläche): $,P = (1\bar{1}\bar{1})$. Man kann nun an einem flächenreichen asymmetrischen Krystall leicht die Wahl der Axen so treffen, dass alle vier Tetartopyramiden mit denselben Parametern daran auftreten; es würde aber hier, wie im vorigen System betreffs der zusammengehörigen Hemipyramiden, eine völlig falsche Vorstellung erwecken, wollte man von dieser Combination als von der »vollständigen asymmetrischen Pyramide« sprechen; eine solche existirt nicht, sondern jene vier Formen stehen unter einander in keiner anderen Beziehung, als zu den übrigen Krystallflächen; gleiche Indices erhielten sie nur durch eine ganz willkürliche Stellung des Krystalls; bei jeder anderen, die ebenso berechtigt ist, erweisen sie sich als verschieden, so dass man z. B. ebenso gut drei davon zu Axenebenen und eine zur Grundform nehmen kann.

Alle anderen, etwa noch vorkommenden Tetartopyramiden lassen sich nun ganz ebenso, wie im rhombischen System, von einer primären ableiten und dem entsprechend bezeichnen. Es wird also solche geben, welche eine verticale Ableitungsreihe bilden und, wenn sie vorn oben rechts liegen, folgendes allgemeine Zeichen haben:

$$mP' = \{hhl\}_{(h>l)}$$

oder:

$$\frac{1}{m}P' = \{hhl\}_{(h<l)},$$

wenn sie dagegen vorn oben links gelegen sind:

$$m'P = \{hhl\}_{(h>l)}$$

oder:

$$\frac{1}{m}'P = \{hhl\}_{(h<l)}.$$

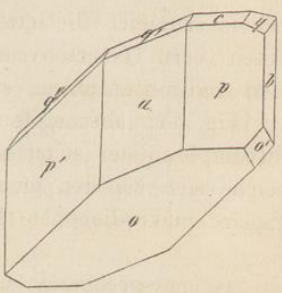
u. s. f.

Von jedem Gliede einer solchen Reihe wird eine makrodiagonale Reihe von Tetartopyramiden abzuleiten sein, deren allgemeines Zeichen:

$$m\breve{P}'n = \{hkl\}_{(h>k)}$$

u. s. f.

Fig. 552.



Ebenso eine brachydiagonale Ableitungsreihe*) mit der Bezeichnung

$$m\breve{P}'n = \{hkl\}_{(h<k)}$$

u. s. f.

Die Endglieder dieser drei Arten von Reihen sind, wie im rhombischen System, Formen, welche einer Axe parallel laufen, da sie aber nur aus einseitig vorhandenen Flächen, je mit ihrer Gegenfläche, bestehen, können sie nicht »Prismen« und »Domen« benannt werden, sondern müssen die Namen »Hemiprismen« und »Hemidomen« erhalten.

Die primären Verticalreihen der Tetartopyramiden führen zum primären rechten Hemiprisma (p Fig. 552):

$$\infty P_{,}' = \{1\,1\,0\}$$

als gemeinschaftliches Grenzglied der rechten oberen und unteren Tetartopyramiden, deren gegenseitige Combinationskante von jenem abgestumpft wird, sowie zum linken primären Hemiprisma (p' Fig. 552):

$$\infty\,'P = \{1\bar{1}0\}$$

als gemeinsames Grenzglied der beiden Reihen der linken oberen und unteren Tetartopyramiden.

*) Einer solchen gehört z. B. die Fläche $o' = \{13\bar{1}\}$ Fig. 552 an.

Abgeleitete verticale Hemiprismen entstehen durch rationale Vervielfältigung der Makrodiagonale:

$$\infty \bar{P}'_{,} n, \ \infty '_{,} \bar{P} n = \{h k 0\}, \ \{h \bar{k} 0\} \quad {}_{(h>k)}$$

oder durch eine solche der Brachydiagonale:

$$\infty \breve{P}'_{,} n, \ \infty '_{,} \breve{P} n = \{h k 0\}, \ \{h \bar{k} 0\} \quad {}_{(h<k)}.$$

Die ersteren sind die Endglieder der Verticalreihen abgeleiteter Tetartopyramiden, welche $n$fache Makrodiagonale von derjenigen der Grundform besitzen, sich jedoch durch den Coëfficienten der Verticalaxe unterscheiden; die letzteren die Endglieder ähnlicher Reihen, deren einzelne Formen eine $n$fache Brachydiagonale im Vergleich mit den primären haben und sich durch die Verticalaxe unterscheiden. Es versteht sich von selbst, dass alle Prismen in der Zone der beiden verticalen Axenebenen a, b Fig. 552 liegen.

Eine makrodiagonale Ableitungsreihe von Tetartopyramiden führt bei wachsendem n endlich, wenn $n = \infty$ wird, auf ein vorderes makrodiagonales Hemidoma, allgemein:

$$m' \bar{P}' \infty = \{h 0 l\}$$

als gemeinschaftliche Grenzform der oberen rechten und oberen linken Flächen, oder zu einem hinteren makrodiagonalen Hemidoma

$$m_{,} \bar{P}_{,} \infty = \{\bar{h} 0 l\},$$

welches zugleich die letzte Form der Reihe der unteren rechten und unteren linken (vorn) Tetartopyramiden bildet. Das erstere liegt am Krystall vorn oben und hinten unten, es würde die stumpfe Kante der beiden Axenebenen a, c Fig. 552 abstumpfen; das letztere vorn unten und hinten oben, als Abstumpfung der scharfen Kante $a : c$. Die Endglieder derjenigen Reihen, welche sich von den primären Tetartopyramiden herleiten, sind das vordere primäre makrodiagonale Hemidoma

$$'\bar{P}' \infty = \{1 0 1\}$$

und das entsprechende hintere:

$$,\bar{P},\infty = \{\bar{1} 0 1\}.$$

In ganz derselben Weise liefern die brachydiagonalen Ableitungsreihen brachydiagonale Hemidomen; diese sind entweder rechte (rechts oben und links unten die Kante der Axenebenen b und c abstumpfend), deren Zeichen

$$m_{,} \breve{P}' \infty = \{0 k l\},$$

die gemeinschaftlichen Grenzformen der Reihen der rechten oberen und linken unteren Tetartopyramiden; oder es sind linke (links oben und rechts unten in der Zone $b\ c$ liegend),

$$m' \breve{P}_{,} \infty = \{0 \bar{k} l\},$$

die Grenzformen, sowohl der Reihen der linken oberen, als auch derjenigen der rechten unteren Tetartopyramiden.

Schliesslich können die drei Axenebenen selbst, als Grenzglieder von Ableitungsreihen aufgefasst, bezeichnet werden, und zwar die der Brachy-

diagonale und Verticale parallele b Fig. 552, das Brachypinakoid, als ein solches der brachydiagonalen Hemidomen, für den Fall $m = \infty$, also

$$\infty \breve{P} \infty = \{010\};$$

ferner die der Makrodiagonale und Verticale parallele Axenebene a Fig. 552, das Makropinakoid, als das entsprechende Grenzglied der Reihe der makrodiagonalen Hemidomen:

$$\infty \bar{P} \infty = \{100\}$$

und endlich die dritte, nach vorn und seitlich geneigte Ebene, welche den Axen a und b parallel ist, die Basis c Fig. 552, als untere Grenze der verticalen Reihe aller Tetartopyramiden ($m = 0$):

$$oP = \{001\}.$$

Das Schema, welches alle diese Ableitungsreihen versinnlichen würde, ist vollkommen identisch mit dem S. 437 gegebenen des rhombischen Systems, wenn die Accente hinzugefügt werden, welche angeben, in welchem Oktanten die Tetartopyramiden etc. liegen. Es gelten für die darin zusammengestellten Formen auch die gleichen Zonenverhältnisse, wie leicht zu übersehen; es liegen also z. B. alle verticalen Hemiprismen in der Zone des Makro- und des Brachypinakoids, alle makrodiagonalen Hemidomen in derjenigen des Makropinakoids und der Basis, endlich liegen alle brachydiagonalen Hemidomen mit parallelen Kanten zwischen $\{001\}$ und $\{010\}$. Diese drei Zonen entsprechen also ganz den drei prismatischen Zonen des rhombischen Systems, nur mit dem Unterschiede, dass die Zonenaxen sich schiefwinkelig, bei letzterem rechtwinkelig durchschneiden.

Dagegen hat hier der Zusammenhang der Ableitungsreihen und die darauf gegründete Bezeichnung der Formen eine weit geringere Bedeutung, als in den vorhergehenden Systemen, weil dieselbe ja nur von der willkürlich gewählten Stellung des Krystalles abhängt und man daher jede Fläche nach Belieben zur Tetartopyramide oder zum Hemiprisma, zum Hemidoma, zur Basis u. s. f. machen kann, indem man eine andere Aufstellung wählt.

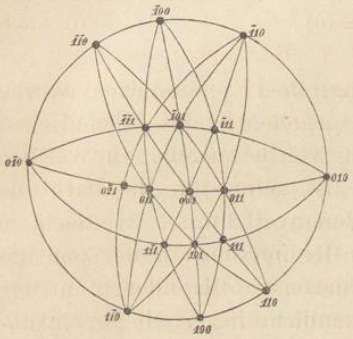
Endlich muss noch bemerkt werden, dass die Naumann'schen und Miller'schen Zeichen in der oben angegebenen Weise nur dann einander entsprechen, wenn die Brachydiagonale, d. h. die kürzere der beiden nicht verticalen Axen, als a-Axe gewählt wurde, wie es gewöhnlich geschieht. Erfordert jedoch die Vergleichung eines Körpers mit einem andern, chemisch verwandten, eine andere Orientirung, bei welcher die Makrodiagonale nach vorn gerichtet ist, so erhalten selbstverständlich die makrodiagonalen Hemidomen die Zeichen $m,\bar{P}'\infty = \{0kl\}$ u. s. f. (vergl. auch S. 481).

§. 105. **Projection und Berechnung der asymmetrischen Formen.** Die Projection eines asymmetrischen Krystalls stellt den allgemeinsten Fall einer solchen dar, welcher bereits S. 209 f. seine eingehende Behandlung erfahren hat. Es ist üblich, wie es bei dem l. c. gewählten Beispiele geschah, als Ebene des Grundkreises die zur Verticalaxe senkrechte Ebene

zu wählen, in welcher sich somit die Pole von {100}, {010} und die sämmtlicher Hemiprismen befinden. Nachdem diese mit Hülfe ihrer Winkel in den Grundkreis eingetragen sind, verfährt man weiter in der S. 210 angegebenen Weise.

Die Berechnung asymmetrischer Formen soll nun an der Hand der Projection Fig. 553, welche einem ähnlichen, aber noch flächenreicheren Krystall als Fig. 552 entspricht, erläutert werden.

Fig. 553.



Sind zur Herleitung der Elemente gemessen die drei Winkel zwischen den Axenebenen und diejenigen der Grundform zu zweien derselben, so gestaltet sich die bereits S. 197 angegebene Rechnung auf Grund der Projection folgendermaassen: gegeben die drei Bögen 100 : 010, 100 : 001, 010 : 001; in dem von diesen gebildeten sphärischen Dreiecke werden die drei Winkel berechnet; der an 100 anliegende ist der ebene Winkel auf dem Makropinakoid {100}, unter welchen die Kanten (100) : (001) und (100) : (010) einander schneiden, d. h. der Axenwinkel α, der an 010 anliegende ist $= \beta$, der an 001 anliegende $= \gamma$. Ferner sind gegeben die Bögen 111 : 100 und 111 : 010, welche mit 100 : 010 ein Dreieck einschliessen, dessen Seiten bekannt sind. Der an 100 anliegende Winkel desselben ist der ebene Winkel in {100}, unter welchem die Kanten (100) : (111) und (010) : (100) einander schneiden; letzterer gehört aber dem ebenen Dreieck an, welches von der ersteren dieser beiden Kanten und den Axenlängen b und c gebildet wird; da der Winkel zwischen den letzteren $= \alpha$ bekannt ist, so erfolgt die Berechnung des Axenverhältnisses $b : c$ nach der ebenen Trigonometrie. Aus dem Winkel zwischen den Bögen 010 : 100 und 010 : 111, d. i. dem ebenen Winkel der Kanten der gleichnamigen Flächen auf dem Brachypinakoid {010}, welchen man in demselben sphärischen Dreiecke wie vorher berechnet, ergiebt sich in der gleichen Weise das Axenverhältniss $a : c$. Es leuchtet ein, dass man bei der Berechnung ganz analog zu verfahren hat, wenn statt {111} eine andere Tetartopyramide, z. B. {$\bar{1}$11}, gemessen worden ist, indem man statt des Dreiecks 100, 010, 001 alsdann das von den Bögen $\bar{1}$00 : 010, $\bar{1}$00 : 001, 010 : 001 gebildete zu benutzen hat.

Je nach den an einem Krystall ausgebildeten Flächen ist jedoch oft zur Berechnung der Elemente ein anderer Weg einzuschlagen, und sollen im Folgenden die wichtigsten hierbei vorkommenden Fälle betrachtet werden.

Sind die drei zu Axenebenen gewählten Flächen ausgebildet und ihre Winkel gemessen, so dass die Berechnung von α, β, γ in der bereits angegebenen Weise erfolgen kann, ist aber keine Fläche vorhanden, welche gegen alle drei Axen geneigt ist, d. h. keine Tetartopyramide, so ist die

vollständige Bestimmung der Elemente nur möglich, wenn wenigstens noch zwei Flächen auftreten, welche verschiedenen Axen parallel gehen. Seien z. B. die Formen {110} und {011} ausgebildet und die Winkel (100) : (110) und (010) : (011) gemessen. Im Dreieck 100, 110, 001 sind alsdann bekannt die Seiten 100 : 110, 100 : 001 und der zwischenliegende Winkel $= 180^0 - \alpha$; man berechne den Winkel an 001, d. i. den ebenen Winkel der Kanten 001 : 100 und 001 : 110 auf der Fläche (001); damit sind nunmehr in dem ebenen Dreieck, welches von den Axenlängen a und b und der Kante (001) : (110) gebildet wird, die drei Winkel bekannt, so dass das Axenverhältniss $a : b$ berechnet werden kann. Dasselbe Dreieck 100, 110, 001 dient auch zur Berechnung des Bogens 001 : 110, welcher als Controlwinkel zu benutzen ist. Ganz ebenso hat man in dem Dreieck 100, 010, 011 aus den Seiten 010 : 011 und 010 : 100 nebst dem zwischenliegenden Winkel den der Seite 010 : 011 gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, welcher das Axenverhältniss $b : c$ liefert, während der Bogen 100 : 011 einen Controlwinkel bildet.

Es seien in einer Zone, deren gemeinsame Kantenrichtung man als diejenige einer Krystallaxe zu nehmen beabsichtigt, drei Flächen ausgebildet, von denen nur eine als Axenebene betrachtet werden soll, z. B. in der Zone der verticalen Formen nur {010}, {110} und {1$\bar{1}$0}. Alsdann ist zunächst die Lage der nicht ausgebildeten Fläche (100), d. h. die Richtung der Makrodiagonale aufzusuchen, welche dadurch bestimmt ist, dass (110) und (1$\bar{1}$0) auf ihr rechts und links gleiche Strecken abschneiden. Dazu ist nöthig die Kenntniss der Bögen 010 : 001, 110 : 001 und 1$\bar{1}$0 : 001, von denen aber nur zwei gemessen zu sein brauchen, da der dritte sich aus ihnen durch Rechnung ergiebt; mit Hülfe dieser und der ebenfalls bekannten Bögen 1$\bar{1}$0 : 110 und 110 : 010 ist man im Stande, in den beiden Dreiecken 1$\bar{1}$0, 001, 110 und 110, 001, 010 die beiden jedesmal an 001 anliegenden Winkel zu berechnen, von denen der des ersten Dreiecks gleich dem Supplement des ebenen Winkels, unter welchem die Kanten 001 : 1$\bar{1}$0 und 001 : 110 auf der Basis einander schneiden, der des zweiten Dreiecks gleich dem ebenen Winkel zwischen den Kanten 001 : 110 und 001 : 010. Diese beiden ebenen Winkel entsprechen aber den in Fig. 507 S. 483 mit $v + w$ und mit w bezeichneten, wenn wir Axe a statt c und b statt a einsetzen; die a. a. O. gegebene Formel liefert also den zwischen den beiden Axen liegenden Winkel, im vorliegenden Falle γ, da es sich um die Axenebene ab handelt. Der Axenwinkel γ entspricht aber im Dreieck 100, 001, 010 dem an 001 anliegenden Winkel, und da in diesem Dreieck noch der Bogen 001 : 010 und der an 010 anliegende Winkel bekannt sind, so ist nunmehr die Berechnung aller drei Axenwinkel α, β, γ möglich. Damit und mit dem Axenverhältniss $a : b$ kennt man folglich vier von den fünf Elementen des Krystalls und zwar auf Grund von vier Fundamentalwinkeln, nämlich zwei Winkeln zwischen den Flächen der prismatischen Zone und der Neigung zweier derselben zu {001} (diejenige der dritten kann zwar auch zur Con-

trole gemessen worden sein, da sie aber von den beiden andern abhängig ist, so muss der aus letzteren berechnete Werth benutzt werden, weil man sonst einen, wenn auch bei gut messbaren Krystallen nicht bedeutenden Widerspruch in die Rechnung einführen würde). Zur Bestimmung der fünften Unbekannten unter den Elementen des Krystalls bedarf es nur noch einer Messung, sobald in einer der Zonen, welche durch die bisher benutzten Flächen bestimmt sind, eine weitere Fläche auftritt, z. B. (111) oder (011): durch die Lage des Pols derselben sind, wie aus der Projection unmittelbar zu ersehen, stets sphärische Dreiecke bestimmt, welche nach einer der vorher angegebenen Methoden die Berechnung des Axenverhältnisses $c : b$ gestatten.

Liegt eine Form vor, wie die des unterschwefligsauren Calcium Fig. 556, in welcher $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $q = \{011\}$, so kann die Vergleichung mit einem andern Körper es erfordern, dass c nicht als $\{001\}$, wie es S. 529 geschehen, sondern als $\{0\bar{1}1\}$ aufgefasst werde. Zur vollständigen Bestimmung des Krystalls bedarf es ausser der Messung der beiden Zonen $[010, 110, 1\bar{1}0]$ und $[010, 011, 0\bar{1}1]$ (vergl. Fig. 553), welche je zwei von einander unabhängige Winkelwerthe liefern, noch der Kenntniss der Neigung irgend einer Fläche der einen Zone zu irgend einer der andern, z. B. $(011) : (110)$. Legt man diese der Rechnung zu Grunde, so sind die Seiten des Dreiecks 010, 011, 110 bekannt, daher dessen Winkel an 010 berechnet werden kann (derselbe ist zugleich der Axenwinkel β); mit Hülfe dieses Winkels kann man in dem Dreieck 010, 011, $1\bar{1}0$ den an 011 anliegenden Winkel, sowie in dem Dreieck 010, $0\bar{1}1$, 110 den an $0\bar{1}1$ anliegenden herleiten und kennt nun, da die gemeinschaftliche Fläche der Zonen $[011, 1\bar{1}0]$ und $[0\bar{1}1, 110]$ das Zeichen (101) hat, in dem sphärischen Dreiecke 011, $0\bar{1}1$, 101 die Seite $011 : 0\bar{1}1$ und die beiden anliegenden Winkel, ist also im Stande, den Bogen $011 : 101$ zu berechnen. Genau ebenso verfährt man bei der Berechnung des Bogens $011 : \bar{1}01$, indem man von den Dreiecken 010, 011, $\bar{1}\bar{1}0$ und 010, $0\bar{1}1$, $\bar{1}10$ ausgeht. Sind diese beiden Rechnungen ausgeführt, so kennt man in dem Dreieck 101, 011, $\bar{1}01$ die beiden Seiten $101 : 011$ und $011 : \bar{1}01$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, kann also den an 101 anliegenden spitzen Winkel berechnen, welcher zugleich dem Dreieck 001, 101, 011 angehört; in dem letzteren sind demnach nun die Seite $101 : 011$ und die beiden anliegenden Winkel bekannt, folglich auch der Winkel an 001, d. h. der Axenwinkel γ, überhaupt die Lage des Poles 001, aus welcher sich alle weiter nöthigen Stücke leicht ergeben.

Anmerk. Die im letzten Abschnitte auseinandergesetzte Methode der Berechnung liefert zwar zugleich eine Reihe von Winkeln am Krystall, deren Berechnung oft wünschenswerth, ist aber eine ziemlich umständliche. Weit kürzer erfolgt die Bestimmung der Lage der Basis $\{001\}$ an der Combination $\{010\}$ $\{110\}$ $\{1\bar{1}0\}$ $\{011\}$ $\{0\bar{1}1\}$ mittelst der S. 213 angedeuteten, auf der Rationalität des anharmonischen Verhältnisses beruhenden Methode, daher die betreffende Formel hier mitgetheilt werden möge:

Seien $P(hkl)$, $P'(h'k'l')$, $R(uvw)$, $Q(efg)$ vier in der angegebenen Reihenfolge in einer Zone liegende Flächen, und seien die Winkel PP' und PQ bekannt, so ist der Winkel PR gegeben durch die Formel:

$$\text{tang}\ (PR - \tfrac{1}{2}PP') = \text{tang}\ \tfrac{1}{2}PP'\ \text{tang}\ (45^\circ + \vartheta)$$

worin

$$\text{tang}\ \vartheta = m\,\frac{\sin P'Q}{\sin PQ}$$

und m gleich dem Product von:

$$\frac{fl - gk}{fl' - gk'} = \frac{gh - el}{gh' - el'} = \frac{ek - fh}{ek' - fh'}$$

mit:

$$\frac{vl' - wk'}{vl - wk} = \frac{wh' - ul'}{wh - ul} = \frac{uk' - vh'}{uk - vh}.$$

Für die beiden Glieder des Productes m sind hier jedesmal drei identische Verhältnisse angegeben, weil häufig eines derselben gleich Null wird. In dem vorstehend betrachteten Falle z. B., in welchem $P = (010)$, $P' = (011)$, $Q = (0\bar{1}1)$ und R, dessen Position gesucht wird, $= (001)$, giebt jedesmal nur der erste der drei Ausdrücke einen von Null verschiedenen Werth, und zwar wird hier $m = \frac{1}{2}$. Für diesen speciellen Werth von m nimmt aber die allgemeine Formel folgende einfache Form an, in welcher $P\overline{Q} = 180^\circ - PQ$:

$$\text{tang}\ PR = \frac{2 \sin P\overline{Q} \sin PP'}{\sin (P\overline{Q} - PP')}$$

d. h. in dem vorliegenden Falle:

$$\text{tang}\ (010 : 001) = \frac{2 \sin (0\bar{1}0 : 0\bar{1}1) \sin (010 : 011)}{\sin (0\bar{1}0 : 0\bar{1}1 - 010 : 011)}.$$

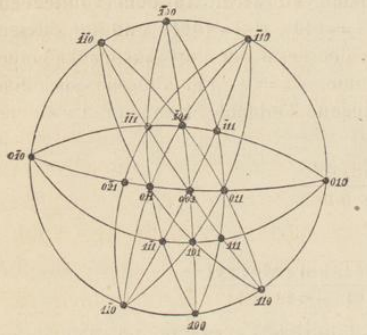
Diese Formel zur Bestimmung von PR, welche mit der S. 483 für den Fall eines monosymmetrischen Krystalls entwickelten identisch ist, kann statt des S. 521 angegebenen Weges dazu dienen, in der Combination der verticalen Flächen (010) (110) $(1\bar{1}0)$ aus den Winkeln zwischen letzteren (010) : (100), d. i. die Lage des Makropinakoids, zu berechnen, und ist wegen der weit grösseren Kürze der Berechnung vorzuziehen, wenn eine Berechnung der Bögen 110 : 001 und $1\bar{1}0$: 001 nicht nöthig ist; wird diese aber zur Vergleichung mit den beobachteten Werthen doch ausgeführt, so sind beide Methoden offenbar gleichbedeutend, da sie aus denselben Rechnungsoperationen, nur in anderer Reihenfolge, bestehen.

Verhältnissmässig einfacher, als oben auseinandergesetzt, gestaltet sich die Berechnung der Elemente des in Fig. 556 dargestellten Krystalls, wenn q und c als $\{111\}$ resp. $\{1\bar{1}1\}$ betrachtet werden. Man kann alsdann folgende Winkel der Rechnung zu Grunde legen (vergl. Fig. 553): 010 : 110, 110 : $1\bar{1}0$, 010 : 111, 111 : $1\bar{1}1$, 111 : 110, und daraus zunächst den Bogen $1\bar{1}1$: $1\bar{1}0$ in dem Dreieck $1\bar{1}1$, $1\bar{1}0$, 010, in welchem zwei Seiten bekannt und der eingeschlossene Winkel leicht mittelst des Dreiecks 111, 110, 010 herzuleiten ist, berechnen, — oder den Winkel $(1\bar{1}1) : (1\bar{1}0)$ an Stelle von $(111) : (1\bar{1}1)$ zum Fundamentalwerth nehmen und den letzteren aus den übrigen ableiten, indem man $1\bar{1}1$: 010 im Dreieck $1\bar{1}1$, $1\bar{1}0$, 010 berechnet. Jedenfalls ist man im Stande, auf einem dieser Wege die Winkel zu bestimmen, welche die Zonenkreise 110 : 111 und $1\bar{1}0$: $1\bar{1}1$ mit dem Grundkreise bilden; diese schneiden aber einander im Pole der am Krystall nicht ausgebildeten Basis, also ist durch das Dreieck 110, $1\bar{1}0$, 001, in welchem

die Seite $110 : 1\bar{1}0$ und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind, die Lage von 001 bestimmt und dadurch die vorliegende Aufgabe auf die früher behandelten zurückgeführt.

Ist endlich eine Combination von vier Formen gegeben, welche als $\{111\}$, $\{1\bar{1}1\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{1}\bar{1}1\}$ betrachtet werden sollen, ein Fall, wie ihn Fig. 561 unter Weglassung von c darstellen würde, so ist klar, dass die Ebenen, welche durch je zwei Kanten dieser Combination bestimmt sind, den Axenebenen entsprechen, z. B. die Ebene durch $o' : 'o$ und $o, : ,o$ dem Brachypinakoid u. s. w. Der Gang der Rechnung erläutert sich an der Projection Fig. 553 folgendermaassen: Gemessen sind die vier Seiten des sphärischen Vierecks 111, $1\bar{1}1$, $\bar{1}\bar{1}1$, $\bar{1}11$ und eine der Diagonalen desselben z. B. $111 : \bar{1}\bar{1}1$; mittelst der beiden Dreiecke 111, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}1$ und 111, $1\bar{1}1$, $\bar{1}\bar{1}1$ ist es nun leicht, alle Winkel des sphärischen Vierecks und aus $111 : 1\bar{1}1$, $111 : \bar{1}11$ und dem zwischenliegenden Winkel auch die andere Diagonale $1\bar{1}1 : \bar{1}11$, welche als Controlwinkel dient, zu berechnen. Denkt man sich die Bögen $\bar{1}11 : 111$ und $\bar{1}\bar{1}1 : 1\bar{1}1$ nach vorn und die Bögen $1\bar{1}1 : 111$ und $\bar{1}\bar{1}1 : \bar{1}11$ nach rechts verlängert, so schneiden dieselben einander in 100, resp. 010; es können also die Dreiecke 100, 111, $1\bar{1}1$ und 010, 111, $\bar{1}11$ vollständig berechnet werden, da je zwei ihrer Winkel die Supplemente von Winkeln des vorerwähnten sphärischen Vierecks und die zwischenliegenden Seiten solche des letzteren sind. Aus den Bögen $111 : 100$ und $111 : 010$ nebst dem eingeschlossenen Winkel folgt aber $100 : 010$, und da die Lage von 001 auf dem Zonenkreise $111 : \bar{1}\bar{1}1$ leicht zu berechnen ist (z. B. durch Dreieck 111, $1\bar{1}1$, 001, in welchem die Seite $111 : 1\bar{1}1$ und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind), so kann man ferner aus $001 : 111$, $111 : 100$ und dem zwischenliegenden Winkel den Bogen $100 : 001$ und aus diesem, aus $100 : 010$ und dem eingeschlossenen Winkel endlich den Bogen $010 : 001$ ableiten, wodurch die Winkel der drei Axenebenen bestimmt sind und nunmehr mittelst zweier der drei Bögen $111 : 001$, $111 : 010$ und $111 : 100$ das Axenverhältniss nach der S. 520 angegebenen Methode berechnet werden kann.

Fig. 553.



Bei der Rückberechnung der Winkel aus dem Parameterverhältniss ist für jeden einzelnen Fall der umgekehrte Weg einzuschlagen. Die den Fundamentalwinkeln entsprechenden Werthe der Controlwinkel ergeben sich zwar der Mehrzahl nach, wie aus den bisher angeführten Fällen hervorgeht, bereits bei der Berechnung der Elemente, aber es ist wünschenswerth, einige derselben direct aus den Elementen neu herzuleiten, um nicht nur die Genauigkeit der Winkelmessungen, sondern auch die Richtigkeit der

Berechnung der Elemente selbst einer vollständigen Controle zu unterziehen. Handelt es sich um die Berechnung des Winkels zwischen zwei beliebigen abgeleiteten Tetartopyramiden x und y, welcher Fall oben noch nicht betrachtet wurde, so berechnet man (analog dem S. 443 auseinandergesetzten Verfahren) die Winkel beider zu zwei Axenebenen, z. B. die Bögen $x : 100$, $x : 010$, $y : 100$, $y : 010$ und aus diesen und dem Bogen $100 : 010$ jedesmal den an 100 anliegenden Winkel der beiden Dreiecke 100, 010, x und 100, 010, y; die Differenz dieser beiden Winkel gehört als Winkel dem Dreieck 100, x, y an, in welchem die beiden anliegenden Seiten bekannt sind, daher der gegenüberliegende Bogen $x\,y$, d. i. die gesuchte Grösse, berechnet werden kann.

§. 106. **Die physikalischen Eigenschaften der asymmetrischen Krystalle.** Für die Elasticität asymmetrischer Krystalle liegen bisher noch keine Bestimmungen vor; nach Analogie der übrigen Eigenschaften muss die Elasticitätsfläche eines hierher gehörigen Krystalls eine höchst complicirte und gänzlich unsymmetrische Gestalt haben. Von der Cohäsion erfahren wir durch die Spaltbarkeit, in welchen Richtungen dieselbe ein Minimum hat; es ist nun wegen des Mangels einer Symmetrieebene a priori anzunehmen, dass niemals nach zwei Richtungen eine gleichartige Spaltbarkeit existirt, weil zu keinem Minimum der Cohäsion ein zweites gleichwerthiges durch die Symmetrie gefordert wird. Dies ist nun auch nicht der Fall; die asymmetrischen Krystalle sind nach einer oder mehreren Richtungen spaltbar, welche natürlich stets krystallonomisch möglichen Flächen entsprechen, aber in letzterem Falle ist die Vollkommenheit derselben eine verschiedene. Welche Art von Flächen die Spaltungsebenen sind, ob Axenebenen, Hemiprismen o. a., ist natürlich hier ohne alle theoretische Bedeutung, da dies von der willkürlichen Wahl der Axen abhängt. Genaue Härtebestimmungen, durch welche man das Gesetz der Aenderung der Cohäsion mit der Richtung innerhalb einer Krystallfläche erkennen würde, sind bisher nicht angestellt worden, während gerade in dieses System ein Mineral, der Cyanit oder Disthen (s. S. 529), gehört, dessen Härte auf einer und derselben Fläche, derjenigen der deutlichsten Spaltbarkeit, den grössten Unterschied zeigt, welchen man kennt.

Gehen wir über zu den optischen Eigenschaften, so ist bereits bemerkt worden, dass die Richtungen der Hauptschwingungsaxen weder für die verschiedenen Wellenlängen des Lichtes zusammenfallen, noch in irgend einer Beziehung zu denjenigen der Krystallkanten stehen*). Im Allgemeinen ist also keine Krystallfläche einem optischen Hauptschnitt für eine bestimmte Farbe parallel, und in Folge dessen sind die Schwingungsrichtungen auf einer Platte, sie möge, von welchem Paar paralleler Flächen es auch sei, gebildet werden, schief gegen die Kanten gelegen und bilden mit diesen verschiedene Winkel, wenn die Farbe des einfallenden Lichtes eine andere ist. Es ist

*) S. S. 487 Anmerk.

klar, dass man die Lage der Hauptschwingungsrichtungen für eine bestimmte Wellenlänge finden kann, wenn man für eine Anzahl paralleler Flächenpaare jene Winkel mittelst des Stauroskopes bestimmt, denn die so gefundenen Schwingungsrichtungen für eine Krystallfläche sind parallel der grossen und kleinen Axe derjenigen Ellipse, welche der Durchschnitt der optischen Elasticitätsfläche mit jener Krystallfläche bildet. Grailich hat in seinem Werke: »Krystallographisch-optische Untersuchungen, Wien und Olmütz, 1858« S. 26 f. die Formeln hergeleitet, durch welche man aus den Schwingungsrichtungen der einzelnen Krystallflächenpaare die Lage der Axen der optischen Elasticitätsfläche in Bezug auf die krystallographischen Axen berechnen kann; es stellt sich hierbei heraus, dass es nöthig ist, die Schwingungsrichtungen für wenigstens vier Paare paralleler Krystallflächen festzustellen. Da dieser Weg ein sehr umständlicher ist und eine grössere Zahl sehr vollkommener Krystallplatten erfordert, ist er bisher bei den wenigen optisch untersuchten asymmetrischen Krystallen nicht eingeschlagen worden; man hat sich mit der Bestimmung der Schwingungsrichtungen für ein oder zwei vorherrschend ausgebildete Flächenpaare begnügt und hat die Lage der Elasticitätsaxen indirect, durch Aufsuchung der Lage der optischen Axen, bestimmt, bei manchen nur das letztere. Dies kann in der Weise geschehen, dass man den Krystall durch verschiedene Flächenpaare hindurch im convergenten Lichte betrachtet; ist er einigermaassen flächenreich, so wird man leicht zwei Flächenpaare finden, durch welche hindurch das Bild je einer Axe (bei sehr kleinem Axenwinkel auch beide durch ein einziges) noch innerhalb des Gesichtsfeldes gelangt. Berücksichtigt man nun die dabei stattgefundene Brechung, so kann man aus der bekannten Lage der Flächen (am besten durch eine sphärische Projection) ungefähr diejenige der ersten Mittellinie bestimmen; alsdann schleift man senkrecht zu dieser eine Platte, welche natürlich noch nicht genau richtig ist, daher sie das Interferenzbild nicht centrisch im Gesichtsfelde zeigt, bestimmt die Grösse und Richtung der Abweichung und corrigirt danach den Schliff der Platte, bis die Axenbilder genau gleich weit von der Mitte des Gesichtsfeldes abstehen und ihre Verbindungslinie durch diese geht; da nunmehr die Platte senkrecht zur ersten Mittellinie ist, so giebt die Messung der Winkel, welche sie mit den übrig gebliebenen natürlichen Krystallflächen bildet, die Lage jener, und da sie einem optischen Hauptschnitt parallel ist, so sind ihre beiden Schwingungsrichtungen zugleich die zweite und die dritte Hauptschwingungsrichtung; sie liefert also die Richtung der drei optischen Elasticitätsaxen und die Grösse des Axenwinkels. Da die richtige Lage der Schlifffläche indess doch nur angenähert erreicht wird, so ist die hierdurch zu erzielende Genauigkeit keine sehr grosse. Ebenso genau, wie durch vollständige stauroskopische Untersuchung, lässt sich die Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen auf folgende Art feststellen, wie sie z. B. beim Kupfervitriol (s. S. 528 im folgenden §) angewendet worden ist: Wenn man durch zwei oder mehr natürliche oder künstliche Flächen, welche ziemlich kleine Winkel mit

einander bilden, dieselbe optische Axe im Gesichtsfelde des Polarisationsapparates erblickt, so kann man den scheinbaren Winkel, welchen sie mit der Normalen jeder dieser Flächen bildet, nach einer in der III. Abtheilung zu erläuternden Methode messen; da aber die einer optischen Axe parallelen Strahlen den mittleren Brechungsexponenten β besitzen (vergl. S. 117), so kann man aus jenen scheinbaren die wahren Winkel berechnen, wenn man β kennt. Ein Prisma, welches zu der Bestimmung dieser Constante genügt, ist nun aber bei nur ungefährer Kenntniss der Lage der optischen Axenebene leicht anzufertigen; seine brechende Kante muss normal zur Ebene der optischen Axen sein, was man mit genügender Genauigkeit dadurch controliren kann, dass dasselbe, wenn es auf den Träger des Polarisationsinstrumentes so (mit Wachs) befestigt wird, dass einmal eine, einmal die andere Fläche oben horizontal, und die brechende Kante dem im Gesichtsfelde befindlichen Verticalstrich des Mikrometers parallel ist, jedesmal eine optische Axe nach rechts oder links abgelenkt, aber im Horizontalstrich liegend, zeigt. Hat man nun auf diese Art die wahren Winkel bestimmt, welche die Richtung der einen optischen Axe mit mehreren Krystallflächen einschliesst, so ist dadurch ihre Lage gegen die Krystallaxen gegeben. Bestimmt man nun in genau derselben Weise diejenige der anderen optischen Axe, so folgt daraus durch Rechnung die Lage der Axenebene und der ersten Mittellinie, d. h. der drei Hauptschwingungsrichtungen. Selbstverständlich ist bei dieser, wie bei der stauroskopischen Untersuchung, die Bestimmung derselben für homogene Farben getrennt vorzunehmen, da sie alle drei dispergirt sind.

Aus dieser Dispersion der drei Hauptschwingungsrichtungen folgt nun die Beschaffenheit des Interferenzbildes, welches eine senkrecht zur ersten Mittellinie (für mittlere Farben) geschnittene Platte im weissen Lichte zeigt, und welches in Fig. 12 und 13 der Tafel dargestellt ist. Dieses Bild, von einer Platte von doppeltchromsaurem Kalium (s. Beispiele), deren Körperfarbe gelbroth ist, hervorgerufen, zeigt Verschiedenheit der Farbenvertheilung in den Ringen nach allen Richtungen, so dass es nach keiner Seite hin Symmetrie aufweist.

Was die thermischen Verhältnisse betrifft, so ist namentlich die Ausdehnung durch die Wärme von Interesse. Nach Analogie mit allen andern physikalischen Eigenschaften ist von vorn herein anzunehmen, dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung in keiner gesetzmässigen Beziehung mit krystallographischen Richtungen stehen, ja dass ihre Lage für verschiedene Intervalle der Temperatur sogar von der letzteren abhängig und daher variabel sein könne. Da demnach von den natürlichen Flächen eines Krystalls keine einzige genau einer thermischen Axe parallel ist, so muss jede derselben ihre Lage gegen die drei thermischen Axen ändern; d. h. alle Winkel eines asymmetrischen Krystalls sind veränderlich mit der Temperatur desselben. Dies ist in der That bestätigt worden durch die Untersuchung des Axinit und

Anorthit (Beckenkamp, Zeitschr. f. Kryst. 5, 436), welche zugleich gelehrt hat, dass die thermischen Axen des letzteren mit der Temperatur eine sehr beträchtliche Aenderung ihrer Lage erfahren können.

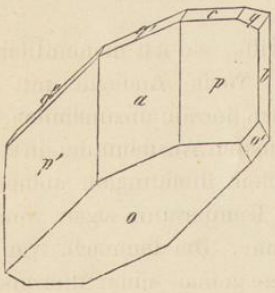
Dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Wärmeleitungsfähigkeit unsymmetrisch in den Krystallen gelegen sind, beweist der Umstand, dass die grosse und kleine Axe der isothermen Fläche, welche durch das Sénarmont'sche Experiment erhalten wird, stets schief gegen die Kanten der untersuchten Fläche stehen, wobei es natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass der Winkel dieser Schiefe auch einen sehr kleinen Werth annehmen kann. Dies ist z. B. beim Kupfervitriol der Fall, indem nach Pape's Untersuchung (s. Zeitschr. f. Kryst. 1, 507) dessen grösste Wärmeleitungsfähigkeit nahe parallel der Verticalaxe der Krystalle ist.

So zeigen uns die asymmetrischen Krystalle den höchsten Grad von geometrischer und physikalischer Unregelmässigkeit, welchen ein homogener krystallisirter Körper überhaupt haben kann. Während zwar für eine einzelne physikalische Eigenschaft, z. B. das Verhalten gegen Licht von einer bestimmten Farbe, vollkommene Symmetrie herrscht, indem die Lichtgeschwindigkeit nach drei auf einander senkrechten Richtungen ihren resp. grössten, mittleren und kleinsten Werth erreicht und sich dazwischen symmetrisch ändert, so sind doch diese drei physikalischen Hauptrichtungen verschiedene für jede einzelne physikalische Eigenschaft, und die Lage derselben für die eine steht in keiner nachweisbaren Beziehung zu derjenigen jener drei Richtungen für eine andere Eigenschaft.

§. 107. **Beispiele asymmetrisch krystallisirender Substanzen.**

Schwefelsaures Kupfer (Kupfervitriol) $= CuSO^4 + 5H^2O$. $a:b:c = 0{,}5656 : 1 : 0{,}5499$; $\alpha = 97^\circ 39'$, $\beta = 106^\circ 49'$, $\gamma = 77^\circ 37'$ Kupffer. Combination Fig. 554: $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{0\bar{1}1\}$, $q'' = \{0\bar{2}1\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $o' = \{13\bar{1}\}$. Durch Bestimmung des Winkels der optischen Axen mit mehreren Krystallflächen ergiebt sich, dass die erste Mittellinie im rechten hinteren Oktanten oben liegt und die zu derselben (für mittlere Farben) normale Ebene mit $\{111\}$ $72^\circ 53'$, mit $\{100\}$ $81^\circ 31'$, mit $\{120\}$ (Abstumpfung der Kante $p : b$) $43^\circ 41'$ einschliesst; $2V = 56^\circ 2'$; Dispersion $\varrho < v$, deutlich; Doppelbrechung —. Hauptbrechungsquotienten für die D-Linie:

Fig. 554.

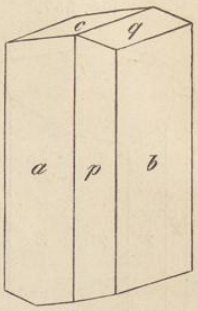


$$\alpha = 1{,}5156,\ \beta = 1{,}5394,\ \gamma = 1{,}5464..$$

(Pape, Poggend. Ann. Ergänzungsbd. VI, 35).

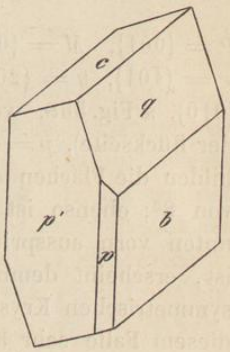
Schwefelsaures Mangan (Manganvitriol) = $MnSO^4 + 5H^2O$, hat dieselbe Krystallform wie das vorige Salz und ganz ähnliche Winkel.

Fig. 555.



Dichromsaures Kalium = $K^2Cr^2O^7$. $a:b:c = 0{,}5575 : 1 : 0{,}5511$; $\alpha = 82^0\,0'$, $\beta = 90^0\,51'$, $\gamma = 83^0\,47'$ Schabus. Combination Fig. 555: $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $p = \{110\}$. Spaltbarkeit {010} sehr vollkommen, {100} und {001} deutlich. Optische Axenebene ungefähr senkrecht zur Brachydiagonale, durch die Spaltungsflächen {010} ist eine Axe fast in der Mitte des Gesichtsfeldes sichtbar (über die optischen Eigenschaften solcher Platten s. E. Kalkowsky, Zeitschr. f. Kryst. 9, 488). Doppelbrechung +.

Fig. 556.



Unterschwefligsaures Calcium = $CaS^2O^3 + 6H^2O$. $a:b:c = 0{,}7828 : 1 : 1{,}5170$; $\alpha = 72^0\,30'$, $\beta = 98^0\,34'$, $\gamma = 92^0\,46'$. Combination Fig. 556: $c = \{001\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $q = \{011\}$. Spaltbarkeit nach {001} vollkommen. (V. von Zepharovich, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 45, 499.) Nach v. Kobell stehen die Schwingungsrichtungen auf allen Flächen schief gegen die Kanten; weitere optische Untersuchung fehlt.

Disthen (Cyanit) = Al^2SiO^5. $a:b:c = 0{,}8994 : 1 : 0{,}7090$; $\alpha = 90^0\,5^1/_2'$, $\beta = 101^0\,2'$, $\gamma = 105^0\,44^1/_2'$ G. vom Rath. Prismatische Krystalle der Combination: {100}, {010}, {110}, {210}, {1$\bar{1}$0}, am Ende gewöhnlich nur {001} matt. Interessant durch seine mannigfaltigen Zwillingsbildungen: ausser symmetrischen Verwachsungen nach {100} finden sich, nach derselben Fläche verwachsen, unsymmetrische Zwillinge, deren Zwillingsaxe entweder die Verticale oder die Makrodiagonale ist. Spaltbarkeit nach {100} vollkommen (auf dieser Fläche Minimum der Härte parallel der Verticalaxe, Maximum senkrecht dazu), nach {010} weniger vollkommen; Gleitfläche {001} (s. M. Bauer, Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. 1878, 30, 283). Optische Axenebene c. 30° zur Verticalaxe geneigt; 1. Mittellinie nahe senkrecht zu {100}; Doppelbrechung —.

Mikroklin (asymmetrischer Kalifeldspath) = $KAlSi^3O^8$. $a:b:c = 0{,}65 : 1 : 0{,}55$; $\alpha = 90^1/_3{}^0$, $\beta = 116^0$, $\gamma = 90^0$ circa Des Cloizeaux. Form gleich der des Orthoklas (Fig. 534, S. 510), zu welchem das Mineral im Verhältniss der Dimorphie steht, nur mit dem Unterschiede, dass die Winkel der rechten und linken Seite um kleine Grössen verschieden sind. Grösser sind diese Differenzen von der monosymmetrischen Form bei dem mit dem Mikroklin isomorphen folgenden Körper.

Albit (Natronfeldspath) $= NaAlSi^3O^8$. $a:b:c = 0{,}6333 : 1 : 0{,}5575$; $\alpha = 85^0 56'$, $\beta = 116^0 28'$, $\gamma = 88^0 8'$ Des Cloizeaux. Combination Fig. 557:

Fig. 557.

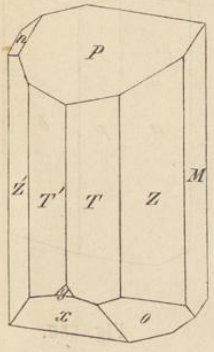


Fig. 558.

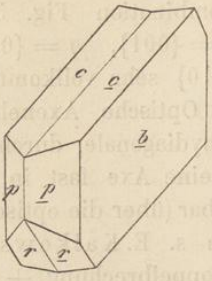
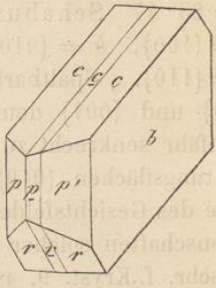


Fig. 559.



$P = \{001\}$, $M = \{010\}$, $T = \{110\}$, $T' = \{1\bar{1}0\}$, $z = \{130\}$, $z' \{1\bar{3}0\}$, $x = \{\bar{1}01\}$, $y = \{\bar{2}01\}$, $n = \{0\bar{2}1\}$, $o = \{11\bar{1}\}$. Gewöhnlich Zwillinge nach $\{010\}$, s. Fig. 558, worin $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $p' = \{110\}$ (in der Figur auf der Rückseite), $p = \{1\bar{1}0\}$, $r = \{10\bar{1}\}$; da der Winkel bc ungefähr $= 86^0$, so bilden die Flächen $c\underline{c}$ oben einen ein-, unten einen ausspringenden Winkel von 8^0; ebenso ist der Winkel $r\underline{r}$ oben an der Rückseite einspringend, unten vorn ausspringend. Die untere Hälfte, wenn sie allein ausgebildet ist, erscheint demnach vollständig, wie diejenige eines einfachen monosymmetrischen Krystalls, bestehend aus dem Prisma $p'\underline{p'}$, dessen Winkel in diesem Falle sehr ähnlich demjenigen $p\underline{p}$, den beiden stumpfen Hemipyramiden $c\underline{c}$ und $r\underline{r}$, mit der Symmetrieebene b. Nur durch die optische Untersuchung kann ein solcher Krystall mit Sicherheit als ein Zwilling erkannt werden, indem man nämlich, etwa durch eine senkrecht zu b geschliffene Platte, constatirt, dass seine beiden Hälften ungleich liegende Schwingungsrichtungen besitzen. Häufig kommt an solchen Krystallen eine Wiederholung der Zwillingsbildung vor, indem sich, wie in Fig. 559, an den zweiten Krystall ein dritter in Zwillingsstellung anlegt, oder, da dieser dem ersten parallel sein muss, indem eine Zwillingslamelle eingelagert erscheint. Folgt auf den dritten ein vierter, parallel dem zweiten, auf diesen ein fünfter Krystall, parallel dem ersten und dritten u. s. f., so entsteht eine polysynthetische Verwachsung (Viellingskrystall), welche man aber auch betrachten kann als einen Krystall, in welchen eine grosse Zahl unter einander paralleler, also demselben Krystall angehöriger Lamellen in Zwillingsstellung eingewachsen sind. Eine Spaltungsfläche von Natronfeldspath nach $c = \{001\}$ zeigt alsdann eine Streifung, parallel der Kante $c:b$, hervorgebracht durch das Alterniren der nach der einen und der anderen Seite geneigten Flächen c und $\underline{c}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen, $\{010\}$ deutlich. Die optische Axenebene schneidet $\{010\}$ in

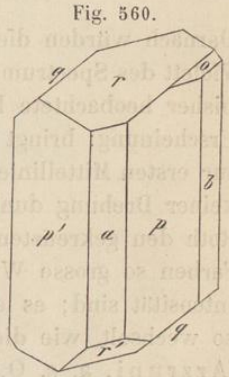
einer Geraden, welche 20^0 mit der Brachydiagonalen, $96\frac{1}{2}^0$ mit der Verticalen macht; eine Fläche, normal zur ersten Mittellinie, ist auf die schärfere Kante $(001):(010)$ aufgesetzt und bildet mit $\{001\}$ $78\frac{1}{2}^0$, mit $\{010\}$ 15^0, mit $\{110\}$ 55^0. Axenwinkel in Oel:

$$2H = 80^0\ 39'\ \text{roth},$$
$$81\ 35\ \text{grün},$$
$$81\ 59\ \text{blau}.$$

Starke geneigte Dispersion, eine andere nicht deutlich erkennbar. (Des Cloizeaux, Ann. d. chim. phys. 1875.)

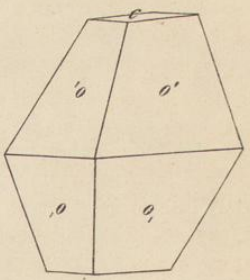
Traubensäure $= C^4H^6O^6 + 2H^2O$. $a:b:c = 0{,}8017:1:0{,}4911$; $\alpha = 75^0\ 16'$, $\beta = 97^0\ 59'$, $\gamma = 120^0\ 22'$ De la Provostaye. Combination Fig. 560: $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $r = \{101\}$, $o = \{111\}$, $r' = \{10\bar{1}\}$, $q = \{0\bar{1}1\}$. Optische Axenebene fast genau parallel p; die erste Mittellinie also nahe in dieser Ebene, bildet (für mittlere Farben) mit der Verticalen 47^0 im unteren linken Oktanten vorn. Für mittlere Farben ist: $2V = 67^0\ 10'$, $2E = 115^0\ 10'$, $\beta = 1{,}526$; geringe Dispersion der Axen $\varrho > v$; von derjenigen der Mittellinien die geneigte zu erkennen (Groth, Poggend. Ann. 135, 648).

Fig. 560.



Bibromparanitrophenol $= C^6H^2.OH.NO^2.Br^2$. $a:b:c = 0{,}6114:1:1{,}8241$. $\alpha = 82^0\ 36'$, $\beta = 90^0\ 45'$, $\gamma = 89^0\ 21'$ Arzruni. Combination Fig. 561: $c = \{001\}$, $'o = \{1\bar{1}1\}$, $o' = \{111\}$, $,o = \{\bar{1}11\}$, $o, = \{11\bar{1}\}$, d. h. alle vier Tetartopyramiden, deren Parameter die gleichen sind; die Combination ähnelt geometrisch ausserordentlich einer monosymmetrischen, in welcher das Makropinakoid Symmetrieebene wäre, und auch in optischer Beziehung ist dieselbe Aehnlichkeit vorhanden; die optische Axenebene steht nämlich fast genau senkrecht zu $\{100\}$ und die erste Mittellinie fällt nahe in dieselbe Ebene; letztere ist fast normal auf dem Hemidoma $\{0\bar{2}1\}$, nach welchem die Krystalle sehr vollkommen spalten.

Fig. 561.



$$2E = 46^0\ 40'\ Li\text{-Linie}$$
$$50\ 57\ Na\text{- -}$$
$$55\ 0\ Tl\text{- -}$$

Ausser dieser starken Dispersion der Axen ist noch eine gekreuzte Dispersion der Mittellinien deutlich wahrzunehmen (Arzruni, Poggend. Ann. 152, 286).

Bijodparanitrophenol = $C^6H^2.OH.NO^2.J^2$. $a : b : c = 0{,}6155 : 1 : 1{,}6825$; $\alpha = 86^0\,43'$, $\beta = 90^0\,29'$, $\gamma = 92^0\,47'$ Arzruni. Combination = dem vorigen, nur statt ‚o und o' häufiger flachere Tetartopyramiden, z. B. {112}, {113}. Spaltbarkeit {010} vollkommen. Die erste Mittellinie, für die verschiedenen Farben bis $1\frac{1}{2}^0$ verschieden, steht nahe senkrecht zu jener Spaltungsfläche; dagegen divergiren die zweiten Mittellinien für die verschiedenen Wellenlängen ausserordentlich; die Axenebene bildet nämlich mit der Brachydiagonale

$45\frac{1}{2}^0$	für die	*Li*-Linie	$(2E = 59\frac{1}{2}^0)$
37	-	-	*Na*- -	(- $= 55\frac{1}{2}$)
23	-	-	*Tl*- -	(- $= 52$)

Darnach würden die Axenebenen für das äusserste Roth und das äusserste Violett des Spectrums um etwa 70° gegen einander gedreht sein, die stärkste bisher beobachtete Dispersion der Axenebenen. Dieselbe bewirkt folgende Erscheinung: bringt man eine Spaltungsplatte, welche also nahe senkrecht zur ersten Mittellinie ist, in paralleles polarisirtes Licht, so erscheint sie bei keiner Drehung dunkel; denn wenn ihre Hauptschwingungsrichtungen für Roth den gekreuzten Nicols parallel sind, so bilden diejenigen der andern Farben so grosse Winkel mit jenen, dass sie zum Theil im Maximum ihrer Intensität sind; es erscheint also stets eine Interferenzfarbe, welche gerade so wechselt, wie die Farbe einer Quarzplatte beim Drehen des Analysators (Arzruni, a. a. O.).

Anhang.

§. 108. **Unvollkommenheiten in der Ausbildung der Krystalle.** Es ist bereits in der Einleitung dieser Abtheilung, S. 190, als Ursache für die unvollständige Ausbildung eines Krystalles die mechanische Hinderung seines Weiterwachsens durch einen festen fremden Körper, z. B. einen anderen Krystall derselben Substanz, angeführt worden. Indess können auch ringsum ausgebildete Krystalle eine unvollständige Ausbildung zeigen, indem nämlich von den Flächen einer einfachen Form ein Theil fehlt, und somit solche zu Kanten zusammentreffen, welche andernfalls nicht benachbart wären. Ist eine derartige Unvollzähligkeit der Flächen eine regelmässige, d. h. tritt sie an allen Krystallen der Substanz nach demselben Gesetze auf, so fällt sie unter die Begriffe der Hemiëdrie oder der Hemimorphie. Diese beiden Erscheinungen können nicht als Unvollkommenheiten der Ausbildung betrachtet werden, da sie ganz bestimmten Gesetzen gehorchen und gewissen Körpern eigen sind, daher sie nicht von äussern Umständen bei der Bildung des Krystalls, sondern von seiner chemischen Natur selbst abhängen. Eine Unvollkommenheit bildet die Unvollzähligkeit der Flächen einer einfachen Form vielmehr nur dann, wenn sie eine unregelmässige ist; diese ist eine einfache Folge des ungleichen Abstandes der Flächen von einander; denn ebenso gut, wie von den acht Flächen eines regulären Oktaëders sieben so gross ausgebildet sein können, dass die achte die dreikantige Ecke ihrer drei Nachbarflächen als äusserst kleines Dreieck abstumpft, ebenso gut können die letzteren einander direct schneiden, und die achte Fläche einmal gänzlich fehlen; es kommt daher sehr häufig vor, dass an Krystallen einzelne Flächen ihrer Formen nicht ausgebildet sind, ohne dass hierbei irgend eine Gesetzmässigkeit obwaltet, wie man sogleich erkennt, wenn man mehrere Krystalle mit einander vergleicht. Dieser Art von Unvollkommenheit, welche offenbar nur durch äussere Verhältnisse bedingt wird, reihen sich noch folgende an:

Unterbrochene Raumerfüllung: Die Krystalle, welche sich z. B. aus einer Lösung absetzen, vergrössern sich je nach den äusseren Umständen in sehr verschiedener Weise; nur wenn diese so beschaffen sind, dass eine sehr allmähliche und ungestörte Volumvermehrung stattfindet,

wachsen die Krystalle gleichartig auf allen Flächen und zeigen eine vollkommene Erfüllung desjenigen Raumes, welcher durch ihre Kanten und Ecken gegeben ist. Bei schneller Ausscheidung dagegen, z. B. bei der Abkühlung einer heiss gesättigten Lösung, vergrössern sich die zuerst entstandenen kleinen und meist sehr einfachen Kryställchen häufig in der Weise, dass sich nach gewissen, krystallographisch bestimmten Richtungen (Wachsthumsrichtungen) reihenförmig kleine Krystalle derselben Form in paralleler Stellung anlagern, und so sternförmige Aggregate (Wachsthumsformen, Krystallgerippe) entstehen, welche bei fortgesetztem Wachsthum durch Ausfüllung der Zwischenräume zwischen den Strahlen die Form eines grösseren Krystalls nachahmen, von welchem jedoch nur Ecken und Kanten angedeutet, statt der Flächen treppenförmige Vertiefungen vorhanden sind. Als Beispiel eines solchen Krystallskeletts möge das in Fig. 562 dargestellte des regulären Chlorkaliums dienen, wie es sich beim Erkalten einer in höherer Temperatur gesättigten Lösung des Salzes bildet. Das Wachsthum der zuerst ausgeschiedenen kleinen Hexaëder findet vorwiegend statt an den Würfelecken, indem sich an diese neue kleine Hexaëder anlagern und so Balken bilden, welche den trigonalen Axen, d. i. den Normalen der Oktaëderflächen parallel gehen. Von den Würfelecken der diese Balken zusammensetzenden Kryställchen gehen dann von Neuem Ansätze nach denselben vier Richtungen aus, von denen jedesmal eine dem betreffenden Balken selbst entspricht, die drei anderen Anlass zur Bildung eines Balkensystems 2. Ordnung geben, wie es für das gleiche Beispiel in Fig. 563 schematisch dargestellt ist. Bestehen die einzelnen Kryställchen jedoch aus Oktaëdern, wie es beim Chlorammonium der Fall ist, so findet das Wachsthum besonders nach den Hauptaxen statt und es entstehen rechtwinkelig einander kreuzende, aus kleinen an einander gereihten Oktaëdern bestehende Stäbchen (hierher gehören auch die sogenannten »gestrickten« Formen der Metalle). Aendern sich während des schnellen Wachsthums die Verhältnisse der

Fig. 562.

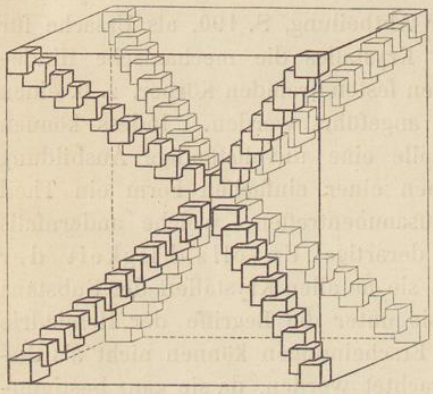
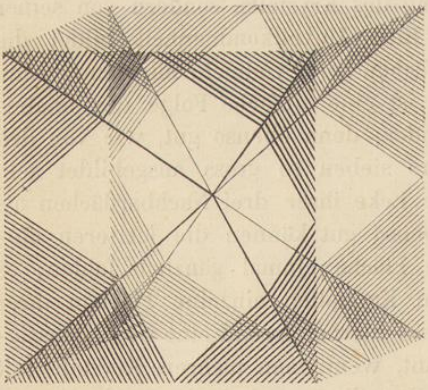


Fig. 563.



Lösung derart, dass die sich ausscheidenden Krystalle eine andere Form annehmen, so ändern sich auch die Wachsthumsrichtungen. Diese Erscheinungen wurden an den erwähnten regulär krystallisirenden Salzen zuerst eingehend beobachtet und beschrieben von A. Knop, Molekularconstitution und Wachsthum der Krystalle, Leipzig 1867.

Eine Erklärung für die Entstehung der Krystallskelette wurde geliefert durch O. Lehmann in seiner Arbeit »über das Wachsthum der Krystalle« Zeitschr. f. Kryst. 1, 453. Durch Untersuchung zahlreicher Substanzen mit Hülfe des »Krystallisationsmikroskop's« (s. III. Abth.) wurde nachgewiesen, dass die Formen um so unregelmässiger werden nicht nur, je schneller das Wachsthum vor sich geht, sondern auch je zäher die Lösung und je schwieriger die Substanz löslich ist, dass ferner die Richtung intensivsten Wachsthums stets den Stellen stärkster Zuspitzung des Krystalls entspricht, also von der speciellen Ausbildung desselben abhängt. Dieses Verhalten ist lediglich Folge der Concentrationsverhältnisse in der den Krystall umgebenden Lösung; in derselben entsteht nämlich, wie Lehmann nachgewiesen hat, durch das Wachsthum eine Verdünnung, welche durch Diffusion wieder ausgeglichen werden muss. Findet das Wachsthum nun sehr schnell statt, oder wird die Diffusion durch Zähigkeit der Lösung verringert, so muss die Abscheidung der Substanz vorwiegend da erfolgen, wo der Diffusionsstrom am stärksten, d. h. die Unterschiede der Concentration auf kleine Abstände am grössten sind. Dies ist aber der Fall an den Krystallecken, denn die um den Krystall gedachten Flächen, auf denen gleiche Concentration herrscht, drängen sich an den Spitzen des Krystalls am dichtesten zusammen, da sie in grösserer Entfernung von demselben die Gestalt einer Kugel annehmen (auf einer solchen ist nämlich die Concentration nicht mehr merklich verschieden von derjenigen, welche noch weiter vom Krystalle entfernt herrscht).

Wenn ein auf die beschriebene Weise entstandenes Krystallgerippe durch Mangel an Stoff am Weiterwachsen gehindert wird, so resultirt demnach ein den Raum nur unvollkommen ausfüllender Krystall; findet aber in den späteren Stadien ein allmählicher weiterer Stoffabsatz statt, so füllt sich nach und nach der Raum zwischen den zuerst gebildeten Krystallreihen durch parallele Schichten aus, so dass schliesslich, wenn die Bildung ohne Störung lange genug dauert, ein vollkommen geschlossen ausgebildeter Krystall zu Stande kommen kann. Sehr häufig bleiben jedoch noch Theile der Flächen nicht ausgefüllt: andererseits setzen sich oft die ausfüllenden Schichten nicht unmittelbar auf einander, so dass Hohlräume der mannigfaltigsten Gestalt, oft erfüllt mit der Lösung, aus welcher sich der Krystall ausschied, entstehen. Diese Unvollkommenheiten der Raumerfüllung eines Krystalls, zu welchen auch der Einschluss eines festen fremden Körpers gehört, um welchen derselbe herumgewachsen ist, bilden namentlich Hindernisse der Untersuchung seiner physikalischen Eigenschaften. So muss man sich zur Bestimmung der optischen Erscheinungen nur solcher Krystalle

bedienen, welche möglichst frei von Poren und Einschlüssen sind, da an diesen eine Reflexion des Lichtes stattfindet und daher der Krystall, wenn er deren sehr viele enthält, vollkommen trübe wird. Ferner kommt es vor, dass Substanzen zahlreiche Einschlüsse eines fremden Körpers in paralleler Stellung enthalten, welche in ihrer Gesammtheit optische Erscheinungen hervorbringen, welche man leicht fälschlicherweise als solche des umschliessenden Krystalls auffassen kann. Endlich kann die Zusammensetzung eines Krystalls aus parallelen Schichten, welche einander nicht vollkommen berühren, zu der irrthümlichen Annahme einer Spaltbarkeit nach jenen Flächen verleiten, welche man dadurch prüfen muss, dass man untersucht, ob die Trennung parallel jenen Ebenen zu Stande kommt, an welcher Stelle des Krystalls dieselbe auch versucht werde, während sie bei einer schaligen Zusammensetzung natürlich nur in den Ebenen zu erhalten ist, in welchen bereits durch den Bildungsprocess eine Trennung vorhanden war.

Eine andere nicht minder erwähnenswerthe Unvollkommenheit der Ausbildung der Krystalle, als die unvollständige Raumerfüllung, beruht ebenfalls auf der Art ihres Wachsthums. Wenn ein solches stattfindet, so sind es offenbar die von den Oberflächentheilchen des bereits gebildeten Krystalls ausgehenden Kräfte, welche bewirken, dass sich nur Theilchen in paralleler Stellung anlagern. Würden diese Molekularkräfte ganz allein hierbei in Betracht kommen, so würden alle folgenden Theilchen in strengster Genauigkeit parallele Anordnung haben mit den zuerst abgesetzten und das Ganze, gleichviel ob es ein geschlossener Krystall oder ein Aggregat solcher, ein Krystallgerippe, ist, physikalisch als ein einziger Krystall zu betrachten sein. Dem ist aber nicht so; vielmehr wirken stets, wenn auch in geringem Grade, andere Kräfte mit auf die sich absetzenden Theilchen ein und beeinflussen ihre Lagerung, es entstehen Anomalien der Structur des Krystalls. Dieselben Ursachen, welche zur Bildung der Krystallskelette führen, bedingen auch diese Anomalien, indem sie mehr oder weniger die parallele Anlagerung der Theilchen hindern. Viscosität der Flüssigkeit und Schwerlöslichkeit der Substanz erschweren die Vereinigung der Moleküle, begünstigen also die Uebersättigung der Lösung und erweitern dadurch die Wirkungssphäre des Krystalls; aus je grösserer Entfernung aber die Krystallmoleküle auf die Krystalloberfläche auftreffen, mit um so grösserer Geschwindigkeit gelangen sie an, um so weniger werden sie vorher sich parallel richten können. Da die Richtungen der grössten Zuschärfung zugleich die des stärksten Wachsthums sind, so kann hier die Anomalie bis zu pinselartiger Verzweigung gehen, verbunden mit einseitiger Krümmung, wenn die Attraction durch unsymmetrische Endflächen einseitig vermehrt ist, wobei im Falle einer viscosen Lösung auch der Widerstand in Betracht kommt, welchen diese dem Wachsthum des Krystalls entgegensetzt. O. Lehmann (Zeitschr. f. Kryst. 1, 479) hat diese Erklärung durch zahlreiche Beobachtungen bei mikroskopischer Krystallbildung gestützt und die

mannigfachsten Fälle der Krümmung, Verzweigung und Sphärolithenbildung (s. S. 131) der Krystalle, namentlich durch Zähigkeit der angewandten Lösung, hervorgebracht.

Wirken, wie es fast niemals ganz ausgeschlossen ist, noch andere Kräfte, als die Anziehung der bereits abgelagerten Theilchen, bei dem Wachsthum eines Krystalls, so kann die Molekularanordnung einer später sich ausscheidenden Schicht des Krystalls nicht absolut parallel derjenigen der zuerst gebildeten sein, die einer dritten nicht parallel der zweiten u. s. f.; je länger demnach der Krystall zu seiner Bildung gebraucht hat, d. h. je grösser er ist, desto geringere Gewähr ist dafür geboten, dass er aus genau parallelen Theilen zusammengesetzt sei. Ausserdem ist jedoch die Fähigkeit, derartigen störenden Einflüssen zu folgen, bei den verschiedenen Substanzen eine sehr verschiedene, so dass es solche giebt, von denen kein Krystall von einiger Grösse gefunden werden kann, der nicht in seinen Theilen deutliche Abweichungen vom Parallelismus zeigte. Die Folgen einer solchen Zusammensetzung aus nicht genau parallelen Theilen sind z. B. Unregelmässigkeiten der optischen Erscheinungen, deren Erklärung nach Obigem ohne Schwierigkeit ist; einaxige Krystalle zeigen eine Trennung der Kreuzesarme des Interferenzbildes, als ob sie zweiaxig, mit sehr kleinem Axenwinkel, wären (Beryll, Zirkon u. A.); zweiaxige zeigen Differenzen des Winkels der optischen Axen, gemessen an verschiedenen Stellen einer Platte. Selbstverständlich werden durch die in Rede stehende Unvollkommenheit auch die Krystallwinkel beeinflusst. Dies geschieht in zweierlei Art: Entweder endigen mehrere nicht parallele Theile des Krystalls an einer Fläche; dann gehören deren einzelne Theile verschiedenen derselben an, haben also nicht dieselbe Richtung, die Krystallfläche erscheint gebrochen und liefert somit mehrere Einstellungen bei der Messung mit dem Reflexionsgoniometer, welche nicht selten um mehr als 1° differiren; man würde nun im Allgemeinen den Winkel zwischen zwei Flächen erheblich falsch finden, wenn man für beide die mittlere jener Einstellungen als richtig annähme, mit grösster Wahrscheinlichkeit dagegen den wahren Werth, wenn man diejenigen Flächentheile benutzt, welche unmittelbar in der Kante an einander grenzen. Die Zusammensetzung kann aber auch in der Weise stattfinden, dass der zuletzt gebildete Theil des Krystalls den ganzen Raum einer Fläche einnimmt, so dass diese vollkommen eben erscheint, aber in ihrer Richtung jener einzelnen Schicht, nicht dem übrigen Krystall, entspricht. Hierdurch entstehen zuweilen bei scheinbar vorzüglich ausgebildeten Krystallen Differenzen derjenigen Kantenwinkel, welche gleich gross sein sollen, von ziemlich beträchtlicher Grösse. Da diese Abweichungen durch zufällige äussere Störungen veranlasst sind, welche mit dem Wesen des Krystalls in keinem gesetzmässigen Zusammenhange stehen, so muss durch solche ein bestimmter Krystallwinkel einmal zu gross, ein anderes Mal zu klein ausfallen, d. h. man wird sehr nahe den wahren Winkel, welchen die betreffende Kante

haben würde, wenn der Krystall in allen seinen Theilen parallel wäre, erhalten, wenn man dieselbe an einer genügend grossen Zahl von Krystallen derselben Substanz der Messung unterzieht und alsdann das arithmetische Mittel aus den Resultaten nimmt. Dies ist in der That um so mehr der Fall, je grösser die Zahl der gemessenen Krystalle ist, wie durch folgende Erfahrung bewiesen wird: wählt man zur Untersuchung nur möglichst kleine Krystalle, welche nach S. 537 am meisten Gewähr für sehr nahe parallele Zusammensetzung darbieten, so wird man oft einen oder den anderen finden, der innerhalb der Beobachtungsfehler wirklich so zusammengesetzt ist, dessen Flächen also sehr genau die richtige Lage haben; die Winkel dieses Krystalls findet man alsdann um so genauer mit dem Mittel der übrigen übereinstimmend, je mehr der letzteren gemessen wurden.

Es wurde ebenfalls bereits in der Einleitung S. 190 erwähnt, dass sehr gewöhnlich die Krystalle dadurch unvollkommen ausgebildet erscheinen, dass ein fremder Körper, meist ein Krystall derselben Substanz, aber in anderer Lage, ihr Wachsthum nach gewissen Seiten verhindert hat, nach denen alsdann die Krystallflächen fehlen. Gewöhnlich beginnt eine Krystallisation an vielen Stellen ungefähr zu gleicher Zeit und unabhängig von einander, daher die einzelnen zuerst entstehenden kleinen Krystalle nicht einander parallel, sondern in den mannigfachsten Lagen sich befinden. Ist nun Material genug vorhanden, um ihr Wachsthum bis zur gegenseitigen Berührung zu ermöglichen, so verwachsen schliesslich dieselben mit einander, aber meist nach ganz unregelmässigen Flächen, da natürlich die zuletzt sich absetzenden und den Zwischenraum ausfüllenden Moleküle von denen beider Krystalle angezogen werden, also eine regelmässige Lage nicht mehr einnehmen können, es sei denn, dass nur noch der eine Krystall fortwachse, in welchem Falle seine Begrenzung gegen den andern gleichsam einen Abdruck von dessen Form darstellt. So entstehen Aggregate unregelmässig mit einander verwachsener Krystalle, in welchen sich nur an den Stellen, wo es an Stoff zur Krystallbildung fehlte, Hohlräume befinden, deren Wände aus theilweise frei hereinragenden Krystallen bestehen (Drusenräume). Von manchen Substanzen, namentlich in der Natur gefundenen, hat man nur solche, nicht ringsum ausgebildete Krystalle zur Verfügung, und hat also aus diesen, gleichsam Fragmenten, auf die vollständige Form zu schliessen. Dies ist eine leichte Aufgabe, wenn dieselben so frei ausgebildet sind, dass sie nur mit einem Ende festgewachsen erscheinen; sie kann aber sehr schwierig werden, wenn an jedem Krystall nur zwei oder drei von vielen daran auftretenden Flächen entwickelt sind, und daher, wegen der verschiedenen Lage der andern Krystalle, diese andere Flächen aufweisen, so dass die Zurückführung der einen auf die anderen oft ohne Zuhülfenahme der optischen Eigenschaften eine Unmöglichkeit wird.

Oft sind Krystalle zwar ringsum ausgebildet und gestatten doch nur eine unvollständige Bestimmung ihrer Form; wenn sie nämlich nach

gewissen Richtungen so geringe Dimensionen besitzen, dass ein Theil der Flächen zu klein ist, um eine Messung durch Reflexion des Lichtes zu gestatten; wenn dieser Mangel an räumlicher Ausdehnung nur nach einer Richtung hin stattfindet, so bilden die Krystalle sehr dünne Tafeln oder Blättchen, deren Randflächen zur Messung zu schmal sind; wenn sie dagegen nur nach einer Richtung eine merkliche Dimension besitzen, so erscheinen sie nadel- oder haarförmig, und dann sind die Endflächen ihrer geringen Grösse wegen nicht bestimmbar. Dass ein Krystall, wenn er überhaupt von äusserster Kleinheit ist, nicht mehr mit dem Reflexionsgoniometer gemessen werden kann, versteht sich von selbst; es kann ein solcher zwar noch mit dem Mikroskop untersucht werden, indem man die ebenen Winkel, welche die Kanten mit einander bilden, bestimmt, doch ist diese Messung (vergl. darüber §. 110 der III. Abth.) nicht derjenigen Genauigkeit fähig, welche mit dem Reflexionsgoniometer erreicht werden kann.

§. 109. **Beschaffenheit der Krystallflächen.** Es ist bisher angenommen worden, dass die Krystallflächen vollkommene Ebenen sind; und dies ist in gewissem Sinne auch wirklich der Fall. Wenn wir jedoch die Flächen eines natürlichen Krystalls betrachten, so werden wir sehr zahlreiche Ausnahmen von jenem Gesetze zu sehen glauben, Ausnahmen, welche indess nur scheinbare sind, indem bei oberflächlicher Beobachtung als eine einzige Fläche erscheint, was genau genommen mehreren angehört. Die in Rede stehenden Unvollkommenheiten der Flächen sind die folgenden:

Streifung der Flächen. Diese entsteht durch alternirende Ausbildung zweier, gewöhnlich gegen einander sehr stumpfwinkelig geneigter Flächen und heisst deshalb auch Combinationsstreifung. Die scheinbare Fläche, welche gestreift ist, besteht demnach aus treppenförmig absetzenden Streifen zweier verschiedener, mit einander abwechselnd, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man das Licht von den Flächentheilen der einen Art reflectiren lässt und alsdann eine Drehung ausführt, bis die zwischenliegenden, vorher dunkel bleibenden Streifen das Licht zurückwerfen. Man hat demnach bei der Messung zwei verschiedene Einstellungen auszuführen und gelangt dadurch zur Bestimmung zweier Krystallflächen*); da jedoch an stark gestreiften Krystallen gewöhnlich die Theile nicht vollkommen parallel sind, so gelingt es nur selten, von solchen genaue Messungen der Winkel zu erhalten. Aus dem Wesen der Streifung ist ersichtlich, dass dieselbe stets der Axe einer krystallographischen Zone parallel sein muss. Sie kann aber auch auf einer Fläche eine mehrfache sein, z. B. auf der eines Rhomboëders, wenn sie durch Flächen eines Skalenoëders hervorgebracht wird, welches dessen Polkanten zuschärft; alsdann resultirt eine zweifache federförmige Streifung parallel den beiden

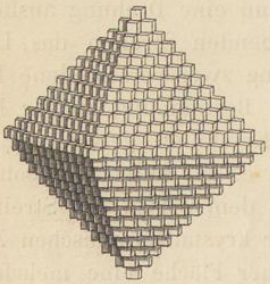
*) Bei sehr fein gestreiften Flächen ist dies jedoch nicht mehr möglich, wie in der III. Abth. gezeigt werden soll.

Polkanten, welche längs der Diagonale der Fläche zusammenstösst. Die Streifung kann zuweilen zur Erkennung der Hemiëdrie dienen: wenn ein Hexaëder durch die Flächen eines Pyramidenwürfels gestreift erscheint, so müssen vier in den Diagonalen rechtwinkelig an einander stossende, den Kanten parallele Streifensysteme auf jeder Fläche erscheinen; ist der Krystall aber pentagonal hemiëdrisch, so entsteht statt dessen auf jeder Würfelfläche nur ein Streifensystem, parallel den beiden gegenüberliegenden Kanten, und diese Streifen, gebildet von den Flächen eines Pentagondodekaëders, stehen auf je zwei benachbarten Flächen zu einander senkrecht.

Wenn nun auch die Streifung zu den Erscheinungen gehört, welche, wie das Auftreten gewisser Formen einer Krystallreihe, von den zufälligen äusseren Bedingungen bei der Bildung des Krystalls abhängen, so ist sie doch, wie das letztere, in verschiedenem Grade von jenen abhängig bei verschiedenen Substanzen, und es giebt deren solche, bei denen bestimmte Krystallflächen fast immer eine ganz bestimmte Streifung zeigen, welche man ihre »charakteristische Streifung« nennen kann, weil durch dieselbe die Flächen und ihre Stellung leicht erkannt werden können. So zeigen z. B. die natürlichen Quarzkrystalle (s. S. 382) auf ihren Prismenflächen $\{10\bar{1}0\}$ nie eine andere Streifung, als eine horizontale, gebildet von den Flächen steiler Rhomboëder, die Krystalle von Topas (s. S. 462) in der ganzen Prismenzone nur verticale Streifung u. s. f.

Drusige Beschaffenheit der Flächen. Diese ist ebenfalls nur eine scheinbare Ausnahme von dem Gesetz, dass die Krystallflächen Ebenen sind, denn die drusigen oder rauhen Flächen sind gar nicht eigentliche Krystallflächen, sondern bestehen aus zahlreichen Ecken kleiner paralleler Krystalle, welche so angeordnet sind, dass jene in einer Ebene liegen. So beobachtet man von Chlornatrium, Flussspath u. a. regulären Substanzen oft Uebergänge von Krystallskeletten zu regelmässigen Krystallen (vergl. S. 535), z. B. scheinbare Oktaëder, aufgebaut aus kleinen Würfeln, bei denen die drusigen Oktaëderflächen von den Ecken dieser Würfel gebildet werden, also als eigentliche Flächen nicht am Krystall auftreten (s. Fig. 564). Sind diese in je einer Ebene liegenden Ecken weit kleiner und zahlreicher, so erscheint die Krystallfläche zwar eben, aber matt, und zwischen diesen und vollkommen glänzenden Flächen sind alle möglichen Uebergänge vorhanden. Je matter eine solche nun ist, d. h. je weniger Licht sie reflectirt, desto schwieriger ist ihre Lage durch das Reflexionsgoniometer zu bestimmen, und ganz matte Flächen können hierzu natürlich gar nicht verwendet werden.

Fig. 564.



Es ist eine ganz allgemeine Erscheinung, dass an einem und demselben Krystall die Oberflächenbeschaffenheit aller Flächen einer einfachen Form

die gleiche ist, z. B. an der regulären Combination {111}, {100} alle Oktaëderflächen matt, alle Würfelflächen glänzend erscheinen; ebenso kommen aber von derselben Substanz Krystalle der nämlichen Combination vor, an denen alle Oktaëderflächen glänzend, alle Würfelflächen matt sind. Diese Gleichheit der Oberflächenbeschaffenheit gilt alsdann bei den hemiëdrischen Substanzen nur für die Hälfte der Flächen der holoëdrischen Gestalt, z. B. erscheinen die vier Flächen des einen Tetraëders glatt, die des andern sämmtlich matt oder gestreift, oder beide Tetraëder zeigen verschieden gerichtete Streifung u. s. f.

Krümmung der Flächen. Diese kann von verschiedenen Ursachen herrühren. Entweder können viele sehr schmale Flächen, welche sehr stumpfe Winkel mit einander bilden, in ihrer Gesammtheit den Eindruck einer einzigen krummen Fläche machen; hierher dürften z. B. die oft sehr gerundeten Flächen des Diamants gehören. Oder, und dies ist besonders häufig der Fall, eine und dieselbe Fläche erscheint in zahlreiche kleine Facetten zerlegt, deren Richtung von einer zur andern sich nur wenig ändert, weil die zugehörigen inneren Theile des Krystalls einander nicht vollkommen parallel sind (s. vorigen §, S. 537); wenn z. B. prismatisch ausgebildete Krystalle fächerförmig zu einem scheinbar einheitlichen Krystall verwachsen, so muss die Basis, wenn sie am Ende desselben auftritt, eine Krümmung zeigen. Endlich können auch dadurch Flächen gekrümmt erscheinen, dass die Krystalle solcher Substanzen, welche einen geringen Grad von Sprödigkeit besitzen, durch mechanische Kräfte verbogen wurden; es kann auch hier nicht mehr von eigentlichen Krystallflächen die Rede sein, da eine solche gebogene Fläche niemals ohne Entstehung von Rissen und Spalten zu Stande kommt und daher aus mehreren gegen einander gedrehten Ebenen zusammengesetzt ist. Es bedarf kaum noch der Erwähnung, dass die Neigung einer, durch irgend eine dieser Ursachen gekrümmten, Krystallfläche gegen andere um so weniger genau gemessen werden kann, je grösser der Grad ihrer Krümmung ist.

Bei leicht löslichen Substanzen, wie sie für chemisch-krystallographische Untersuchungen meist vorliegen, kommt es sehr häufig vor, dass durch Temperaturänderung der Lösung, ehe die Krystalle aus ihr entfernt wurden, wieder eine theilweise Auflösung stattgefunden hat, erkennbar durch die erfolgte Anätzung der Flächen oder Krümmung derselben durch Abrundung der Kanten und Ecken. Hierdurch sind oft die Flächen für die Messung mit dem Reflexionsgoniometer ganz unbrauchbar geworden, daher bei solchen Substanzen stets darauf zu achten ist, dass nicht vor dem Herausnehmen der Krystalle aus der Lösung die Temperatur der letzteren (durch Verbringen aus einem kalten in einen wärmeren Raum) gesteigert wird, sowie darauf, dass die auf den herausgenommenen Krystallen zurückbleibende Lösung sehr rasch mit weichstem Fliesspapier entfernt wird.

Vicinale Flächen. Nicht selten, namentlich bei Mineralien, kommt es vor, dass statt einer einfachen Ebene des Krystalls ein Complex anderer,

von ihr in der Lage nur sehr wenig abweichender Flächen vorhanden ist. So erscheint z. B. das primäre Rhomboëder r an Eisenglanzkrystallen von Elba, Fig. 321 (S. 358), fast immer ersetzt durch eine Reihe sehr wenig stumpferer Rhomboëder und durch ein Paar mit r fast zusammenfallender Skalenoëderflächen; bei dem Diacetylphenolphtaleïn S. 421 wurde bereits das Auftreten einer sehr flachen Pyramide an Stelle der Basis erwähnt; bei der »Adular« genannten Varietät des Orthoklas, z. B. vom St. Gotthard (s. S. 510), findet sich häufig eine Reihe von Flächen in der Prismenzone, sowie sehr spitze, fast der Verticalaxe parallele, Hemipyramiden, deren Messung auf sehr complicirte Indices führt. Nach dem Vorgange von Websky nennt man solche Flächen vicinale, wenn man anzunehmen hat, dass dieselben nicht durch Störungen der inneren Structur (s. S. 537) aus ihrer normalen Lage gerückte Flächen von einfachem Zeichen sind, sondern als wirkliche, mit der theoretischen Beschaffenheit der Substanz im Zusammenhang stehende Krystallflächen mit complicirten Indices betrachtet werden müssen, welche gewissen einfachen Formen sehr nahe liegen. Für die letztere Auffassung spricht besonders die an einigen Substanzen nachgewiesene Erscheinung, dass die Indices einer Anzahl solcher vicinaler Flächen die Glieder einer arithmetischen Reihe bilden (s. M. Websky, Zeitschr. d. d. geolog. Ges. 1863, 15, 677).