

www.e-rara.ch

Ausführliches Lehrbuch der Analysis

Lübsen, Heinrich B.

Hamburg, 1853

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-134615>

Viertes Buch.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Viertes Buch.

Von den figurirten Zahlen.

52.

Bildet man aus der Reihe der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3... n die Summenreihe, nämlich:

$$\begin{array}{cccccc}
 1, & 3, & 6, & 10, & 15, \dots & \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} \\
 0 & \overset{0}{00} & \overset{00}{000} & \overset{000}{0000} & \dots &
 \end{array}$$

so entstehen die sogenannten dreieckigen Zahlen, weil, wenn man sich Kugeln von gleichem Durchmesser denkt, die Anzahl, welche jedes Glied der Reihe darstellt, sich in einer Ebene so aneinander legen lassen, dass immer ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus der Reihe 1, 2, 3.... An n Kugeln kann man $n-1$ legen, an diese wieder $n-2$ &c.

Aus demselben Grunde nennt man die Quadratzahlen auch wohl viereckige Zahlen*).

$$\begin{array}{cccc}
 1, & 4, & 9, & 16, \dots, n^2 \\
 0 & \overset{00}{00} & \overset{000}{0000} & \dots
 \end{array}$$

Beiderlei vieleckigen Zahlen sind offenbar arithmetische Reihen 2ten Ranges.

*) Es giebt übrigens noch viele andere Zahlenreihen, welche, jedoch unpassend, figurirte Zahlen (Polygonalzahlen) heissen, aber keinen praktischen Nutzen haben.

53.

Bildet man aus den Reihen der dreieckigen und viereckigen Zahlen die Summenreihen, welche also vom dritten Range sein müssen und deren allgemeine Glieder, nach § 50, leicht zu finden sind, so erhält man die sogenannten dreieckigen und viereckigen Pyramidalzahlen, nämlich:

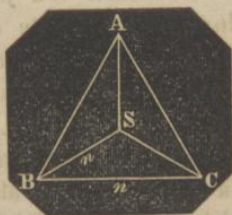
$$1, 4, 10, 20, 35, \dots \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$1, 5, 14, 30, 55, \dots \frac{n \cdot n+1 \cdot 2n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

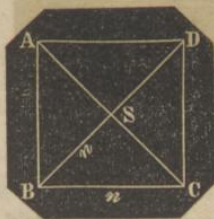
Der Name rührt daher, weil sich aus Kugeln von gleichem Caliber wirklich regelmässige Pyramiden bilden lassen. In der Reihe der dreieckigen Zahlen z. B. findet die erste Kugel Platz und kommt fest zu liegen auf den folgenden drei. Die hierdurch erhaltene dreieckige Pyramide von vier Kugeln kann man auf die folgende Schicht von sechs Kugeln gesetzt denken &c. Ebenso lassen sich offenbar die Kugeln, welche die viereckigen Zahlen darstellen, zu einer viereckigen Pyramide aufschichten, wie es auch in den Zeughäusern wirklich geschieht.

54.

Es ist also leicht die Anzahl Kugeln in einer dreieckigen und viereckigen Pyramide zu berechnen.



$$s = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$



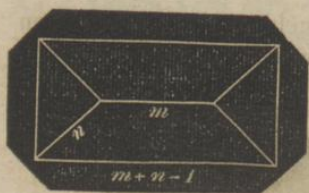
$$s = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

So viele Kugeln nämlich in der untersten Reihe BC liegen, eben so viel liegen auch in der schräg aufsteigenden Reihe BS und eben so viel Schichten liegen folglich aufeinander. Liegen also in der untersten Reihe n Kugeln, so hat man nur die Summe von n Gliedern der dreieckigen und viereckigen Zahlen zu nehmen. Diese ist, wie schon angegeben, für die dreieckige Pyramide $= \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, und für die viereckige $= \frac{n \cdot n + 1 \cdot 2n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Sind die Pyramiden nicht voll, jedoch parallel zur untersten Schicht abgekürzt, und liegen in der untersten Reihe n , in der obersten Reihe m Kugeln, so ist die Zahl der Kugeln in der abgekürzten dreis. Pyramide $= \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m \cdot m + 1 \cdot m + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und in der abgekürzten viers. Pyramide $= \frac{n \cdot n + 1 \cdot 2n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m \cdot m + 1 \cdot 2m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Lagen z. B. in der untersten Reihe der vollen dreieckigen Pyramide 20 Kugeln, so ist die Zahl aller $= \frac{20 \cdot 21 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1540$.

55.

Ausser in dreieckigen und viereckigen Pyramiden werden die Kugeln auch in länglichen Haufen aufgeschichtet, und es ist auch hier leicht, die Anzahl derselben zu berechnen. Liegen



$$s = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (3m+2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

nämlich in der obersten Reihe (Rücken) m Kugeln, so liegt diese offenbar auf einer Schicht von zwei Reihen von je $m+1$ Kugeln; diese Schicht enthält also $2(m+1)$ Kugeln, und liegt wieder auf einer Schicht von drei Reihen von je $m+2$ Kugeln. Diese dritte Schicht enthält also $3(m+2)$ Kugeln &c. Liegen also in einer Seite eines Seitendreiecks (welches offenbar gleichseitig ist) n Kugeln, so besteht der ganze Haufen aus n Schichten und die unterste Schicht enthält n Reihen von je $m+n-1$ Kugeln.

Die aufeinander folgenden Schichten des ganzen Haufens sind also:

$$\begin{array}{ccccccccc} \overset{1}{\smile} & \overset{2}{\smile} & \overset{3}{\smile} & \overset{4}{\smile} & \overset{5}{\smile} & & & \overset{n}{\smile} \\ m, & 2m+2, & 3m+6, & 4m+12, & 5m+20 \dots & n(m+n-1). \end{array}$$

Diese Reihe ist offenbar eine arithmetische vom 2ten Range, das summatorische Glied also vom 3ten Range. Mithin: $s = an^3 + bn^2 + cn + d$. Weil aber $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a = 2$ und zufolge des § 50 erwähnten Grundes für $n=0$ auch $s=0$ sein muss, so ist $a = \frac{1}{3}$ und $d=0$, folglich näher bestimmt:

$$s = \frac{n^3}{3} + bn^2 + cn$$

Die noch zu bestimmenden Coefficienten b, c müssen nun so beschaffen sein, dass für $n=1$, $s=m$ und für $n=2$, $s=3m+2$ wird. Dies giebt uns die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3} + b + c \\ 3m + 2 &= \frac{8}{3} + 4b + 2c \\ \text{woraus: } b &= \frac{1}{2}m \text{ und } c = \frac{1}{2}m - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Es ist mithin:

$$s = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}mn^2 + \frac{1}{2}mn - \frac{1}{3}n$$

$$\text{oder: } s = \frac{n}{6} \{ 2(n+1)(n-1) + 3m(n+1) \}$$

$$s = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (3m+2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Anmerk. Vega giebt für diese Formel folgende leichte Gedächtnissregel: Man addire zu dem Rücken des Haufens beide mit ihm gleichlaufenden Grundlinien und multiplicire den dritten Theil der Summe mit der Anzahl Kugeln eines Seitendreiecks, welche Anzahl immer $= \frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}$ ist. Diese Gedächtnissregel passt (wie schon Vega bemerkt) auch für die dreieckige und viereckige Pyramide, wo dann aber bei der viereckigen Pyramide der Rücken nur eine, und bei der dreieckigen sowohl der Rücken, als auch die eine Grundlinie, jede nur eine Kugel hat.