

www.e-rara.ch

Ausführliches Lehrbuch der Analysis

Lübsen, Heinrich B.

Hamburg, 1853

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-134615>

Neuntes Buch.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Neuntes Buch.

Auflösung aller zweigliedrigen Gleichungen.

130.

Die zweigliedrigen oder sogenannten reinen höhern Gleichungen lassen sich, wie *Gauss* zuerst gezeigt hat, *) alle direct und leicht lösen. Wir betrachten diese Gleichungen zuerst in der Form:

$$x^n \pm 1 = 0$$

worauf sie alle gebracht werden können.

131.

Berücksichtigen wir in obiger Form zuerst das untere Zeichen, nämlich:

$$x^n - 1 = 0$$

$$x^n = 1$$

so ist klar, dass diese Gleichung, wenn n grade, zwei reelle Wurzeln $+1$ und -1 und wenn n ungrade, eine reelle Wurzel $+1$ hat und nach § 127 nicht mehr reelle Wurzeln haben kann. Die übrigen Wurzeln müssen also imaginair, und wie die Rechnung selbst gleich zeigen wird, alle verschieden sein. Mit andern Worten: es können aus ± 1 so viele verschiedene Wurzeln gezogen

*) S. Serret Cours d'algèbre supérieure, 1849. Dies Werk handelt fast bloss über höhere Gleichungen, setzt aber nicht allein alles Vorhergehende, sondern auch Differential- und Integralrechnung als bekannt voraus.

werden als man will. Denn bezeichnen wir nach *Cauchy* die gewöhnliche arithmetische, mittelst Logarithmen leicht zu findende n te Wurzel aus 1 mit $\sqrt[n]{1}$, alle n Wurzeln aus ± 1 aber mit $(\pm 1)^{\frac{1}{n}}$, so ist, weil immer $\cos 2k\pi = 1$ und $\sin 2k\pi = 0$, wenn k irgend eine ganze Zahl ist (Trigon. § 59) und zufolge § 88, was auch k und n für ganze Zahlen sein mögen, immer:

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi \pm i \sin 2k\pi = 1$$

Da nun der Ausdruck $\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}$ auf die n te Potenz erhoben $+1$ giebt, so muss dieser Ausdruck auch als die n te Wurzel aus $+1$ betrachtet werden.

Dass nun aber, wenn in diesem Ausdruck für n eine beliebige ganze Zahl und dann für k successive die Zahlen $0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n$ gesetzt werden, n verschiedene Werthe (Wurzeln) kommen, folgt aus den Lehren der Trigonometrie, wornach die Ausdrücke $\cos \frac{0 \cdot \pi}{n} \pm i \sin \frac{0 \cdot \pi}{n}$, $\cos \frac{1 \cdot \pi}{n} \pm i \sin \frac{1 \cdot \pi}{n}$ &c. offenbar verschieden sind. Man findet also alle n Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, indem man in:

$$x = (1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

für $2k$ successive alle graden Zahlen zwischen 0 und n , oder was dasselbe ist, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}n$ setzt. Man habe z. B. die Gleichung:

$$x^6 - 1 = 0$$

so ist, weil hier $n = 6$:

$$x = (1)^{\frac{1}{6}} = \cos \frac{2k\pi}{6} \pm i \sin \frac{2k\pi}{6}$$

$$\text{für } k=0 \text{ ist: } x = \cos 0\pi \pm i \sin 0\pi = 1$$

$$\text{" } k=1 \text{ " } x = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot i^*)$$

*) Es ist nämlich: $\cos \frac{1}{3}\pi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

für $k=2$ ist: $x = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i$

„ $k=3$ „ $x = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

Die Gleichung $x^6-1=0$ hat also wirklich sechs verschiedene Wurzeln und es ist:

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}i)(x-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}i)(x+1-\frac{1}{2}\sqrt{3}i)(x+1+\frac{1}{2}\sqrt{3}i)$$

oder indem man die Factoren, welche zweien gepaarten Wurzeln entsprechen, mit einander multiplicirt, um lauter reelle Grössen zu erhalten, und deshalb die dreigliedrigen (trinomischen) Factoren einführt:

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

Man könnte glauben, noch mehrere Wurzeln zu erhalten, wenn man für k Werthe setzt, die über $\frac{1}{2}n$ hinausgehen. Dies ist aber eben nur ein Glaube, den schon § 104 verbietet. Denn, weil $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos(\pi + \frac{2h}{n}\pi) = -\cos \frac{2h}{n}\pi$ und auch $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{n}\pi = \cos(\pi - \frac{2h}{n}\pi) = -\cos \frac{2h}{n}\pi$, so ist immer $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{n}\pi$, d. h. für alle Werthe von k , welche eben so viel über als unter $\frac{1}{2}n$ sind, erhält man dieselben Cosinus wieder, und eben so dieselben Sinus, letztere nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil $\sin(\pi + \frac{2h}{n}\pi) = -\sin \frac{2h}{n}\pi$ und $\sin(\pi - \frac{2h}{n}\pi) = \sin \frac{2h}{n}\pi$, aus welchem Grunde gleich das doppelte Vorzeichen $\pm$ gesetzt ist. In obigem Beispiel für $x^6-1=0$, ist $\frac{1}{2}n=3$ und es kommt z. B. für $k=3+1=4$ derselbe Cosinus wie für $k=3-1=2$ &c.

Hätte man die Gleichung:

$$x^3-1=0$$

so ist: $x=(1)^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{2k\pi}{3} \pm i \sin \frac{2k\pi}{3}$,

für $k=0$ ist: $x=\cos 0=1$

„ $k=1$ „ $x=\cos 120^\circ \pm i \sin 120^\circ$

oder: $x=-\cos 60 \pm i \sin 60 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i$

Mithin ist:

$$x^3-1=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i\right)$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

133.

Man kann auch, ohne erst die zweigliedrigen Factoren von x^n-1 zu suchen, gleich die dreigliedrigen berechnen. Aus:

$$x=\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

folgt nämlich der eine einfache Factor: $x-\cos \frac{2k\pi}{n}-i \sin \frac{2k\pi}{n}$

und der andere zugehörige: $x-\cos \frac{2k\pi}{n}+i \sin \frac{2k\pi}{n}$. Multiplicirt

man beide mit einander und beachtet, dass $\cos^2 \frac{2k\pi}{n} + \sin^2 \frac{2k\pi}{n} = 1$,

so ist der dreigliedrige Factor:

$$x^2-2x \cos \frac{2k\pi}{n}+1$$

hierin setze man $k=0, 1, 2 \dots \frac{1}{2}n$. Wird aber der Ausdruck ein vollkommenes Quadrat, was, wenn n grade, für $k=0$ und $k=\frac{1}{2}n$ und wenn n ungrade, für $k=0$ der Fall ist, so muss jedesmal nur die Wurzel genommen werden, indem die einfachen reellen Factoren $x-1$ und $x+1$ nur einmal vorhanden sind. Sei z. B. $n=3$, also die Gleichung $x^3-1=0$, so hat man:

$$x^2-2x \cos \frac{2k\pi}{3}+1$$

für $k=0$ kommt: $x^2-2x+1=(x-1)^2$

„ $k=1$ „ $x^2-2x \cos 120^\circ+1=x^2+x+1$,

daher: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Für die Gleichung $x^6-1=0$ hat man:

$$x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{6}+1$$

für $k=0$ kommt: $x^2-2x+1=(x-1)^2$

$$, \quad k=1 \quad , \quad x^2-2x\cos 60^\circ+1=x^2-x+1$$

$$, \quad k=2 \quad , \quad x^2-2x\cos 120^\circ+1=x^2+x+1$$

$$, \quad k=3 \quad , \quad x^2-2x\cos \pi+1=(x+1)^2$$

mithin: $x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

134.

Hat man allgemeiner die Gleichung:

$$x^n-a=0$$

so sind die n einfachen Factoren derselben: *)

$$x=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot\sqrt[n]{a}$$

und die dreigliedrigen:

$$x^2-2x\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}+(\sqrt[n]{a})^2$$

135.

Um nun auch die n Wurzeln der andern Gleichung:

$$x^n+1=0$$

zu finden, beachte man, dass wenn k eine beliebige ganze Zahl ist, immer $\cos(2k+1)\pi=-1$, und $\sin(2k+1)\pi=0$. (Trigon. § 59.)
Weil ferner:

$$\left(\cos\frac{2k+1}{n}\cdot\pi\pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^n=\cos(2k+1)\pi\pm i\sin(2k+1)\pi=-1$$

so ist nothwendig auch:

*) Aus $x^n=1\cdot a$ folgt nämlich: $x=(1)^{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{a}$.

$$x = (-1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k+1}{n} \pi \pm i \sin \frac{2k+1}{n} \pi$$

worin für $2k+1$ alle ungeraden Zahlen zwischen 0 und n gesetzt werden müssen.

Die dreigliedrigen Factoren von x^n+1 sind hier:

$$x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{n} \pi + 1$$

und allgemein für x^n+a :

$$x^2 - 2x \sqrt[n]{a} \cos \frac{2k+1}{n} \pi + (\sqrt[n]{a})^2$$

Beispiel 1. Für $x^3+1=0$ hat man:

$$x = (-1)^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{2k+1}{3} \pi \pm i \sin \frac{2k+1}{3} \pi$$

Für $k=0$ ist: $x = \cos \frac{1}{3} \pi \pm i \sin \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot i$

„ $k=1$ „ $x = \cos \pi \pm i \sin \pi = -1$

mithin: $x^3+1 = (x+1)(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i)(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i)$

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

Beispiel 2. Für x^6+1 hat man:

$$x = \cos \frac{2k+1}{6} \pi \pm i \sin \frac{2k+1}{6} \pi$$

Für $k=0$ ist: $x = \cos \frac{\pi}{6} \pm i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \pm \frac{1}{2} i$

„ $k=1$ „ $x = \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2} = \pm i$

„ $k=2$ „ $x = \cos \frac{5\pi}{6} \pm i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \pm \frac{1}{2} i$

Es ist also:

$x^6+1 = (x+i)(x-i)(x-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)(x-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i)$

$x^6+1 = (x^2+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)$