

www.e-rara.ch

Ausführliches Lehrbuch der Analysis

Lübsen, Heinrich B.

Hamburg, 1853

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-134615>

Zwölftes Buch.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Zwölftes Buch.

Von den Kettenbrüchen.

149.

Erklärung. Unter einem Kettenbruch versteht man einen Grössen-
ausdruck in folgender Form:

$$y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{1}{y_3 + \frac{1}{y_4 + \frac{1}{y_5 + \frac{1}{y_6}}}}}}$$

nämlich eine ganze Zahl y_0 (wo y_0 aber auch 0 sein kann) plus
einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze
Zahl plus einem Bruche, dessen Zähler wieder 1 ist &c. Die
ganzen Zahlen $y_0, y_1, y_2, y_3 \dots$ heissen die Glieder des Ketten-
bruchs. *Brounker* soll zuerst auf diese Bruchsform verfallen
sein, indem er, um die Zahl $\frac{\pi}{4}$ zu berechnen, dafür den Aus-
druck:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}$$

aufstellte. Wie er darauf gekommen, ist nicht bekannt. *Euler*
jedoch ist der Erste gewesen, welcher die Kettenbrüche einer

nähern Betrachtung unterworfen hat und zwar in der zuerst angegebenen Form (wo nämlich der Zähler immer 1 ist), auf welche jeder andere Kettenbruch immer gebracht werden kann.

Die Kettenbrüche bieten so viele merkwürdige Eigenschaften dar und lassen so mancherlei Anwendungen zu, dass eine vollständige Theorie derselben einen ganzen Band füllen würde. *) Wir beschränken uns hier jedoch auf das Wichtigste.

150.

Es ist leicht, einen gewöhnlichen echten oder unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln. Ist der Bruch echt, so dividire man Zähler und Nenner durch den Zähler; den im Nenner entstehenden Bruch eben so behandelt &c. bis der letzte Zähler 1 wird. Ist der Bruch unecht, so stelle man erst die ganze Zahl heraus. Es ist z. B.

$$\frac{17}{74} = \frac{1}{4 + \frac{6}{17}} = \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{6}{6}}} = \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

$$\frac{74}{17} = 4 + \frac{6}{17} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{6}{6}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

Umgekehrt würde man ohne weitere Regel aus einem Kettenbruch den erzeugenden Bruch finden können. Es ist z. B.

$$\frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}} = \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}} = \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{6}{6}}} = \frac{1}{4 + \frac{1}{17}} = \frac{1}{4 + \frac{6}{17}} = \frac{17}{74}$$

151.

Beide vorhergehenden Rechnungen, um einen Bruch in einen Kettenbruch und umgekehrt zu verwandeln, lassen sich aber bedeutend abkürzen.

*) *Kausler*, die Lehre von den continuirlichen Brüchen nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen auf Arithmetik und Algebra.

Um erstlich gewöhnliche Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln, z. B. $\frac{17}{74}, \frac{74}{17}, \frac{972}{1393}$, verfähre man mit jedes Bruches Nenner und Zähler, als wenn man ihren grössten gemeinschaftlichen Factor suchen wollte (Algebr. § 29), so sind die Quotienten die Glieder des Kettenbruchs. Die Richtigkeit folgt aus der Rechnung in § 150, z. B.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 17 : 74 : 17 : 6 : 5 : 1 \end{array}$$

$$\text{mithin ist: } \frac{17}{74} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 74 : 17 : 6 : 5 : 1 \end{array}$$

$$\text{mithin: } \frac{74}{17} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 972 : 1393 : 972 : 421 : 130 : 31 : 6 : 1 \end{array}$$

$$\text{mithin: } \frac{972}{1393} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}}}}$$

152.

Um nun auch ein allgemeines Gesetz zu finden, nach welchem man bequemer, als der unmittelbare Gedanke § 150 es angiebt, einen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wollen wir, die allgemeine Bezeichnung beibehaltend, statt vom letzten Gliede nach und nach zum ersten zurückzugehen, umgekehrt verfahren. Es sei also der Kettenbruch allgemein:

$$y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{1}{y_3 + \frac{1}{y_4 + \frac{1}{y_5 + \dots}}}}}$$

Nehmen wir nur das 0te Glied, so ist y_0 offenbar kleiner als der Werth des ganzen Kettenbruchs. Geht man bis zum 1sten Gliede, so ist offenbar $y_0 + \frac{1}{y_1}$ zu gross, weil in dem Bruche $\frac{1}{y_1}$ der Nenner zu klein ist. Geht man bis zum 2ten Gliede, so ist

$$y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2}}$$

offenbar wieder zu klein &c. Bezeichnet man die hier auf einander folgenden Werthe, welche abwechselnd kleiner und grösser sind, als der wirkliche Werth des ganzen Kettenbruchs und Näherungswerthe desselben genannt werden, mit $\frac{a}{a^1}, \frac{b}{b^1}, \frac{c}{c^1}, \&c.$, so hat man:

$$\frac{a}{a^1} = \frac{y_0}{1}$$

$$\frac{b}{b^1} = y_0 + \frac{1}{y_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$$

In dem Bruche $\frac{b}{b^1}$ setze man $y_1 + \frac{1}{y_2}$ statt y_1 , so kommt der folgende Bruch, nämlich:

$$\frac{c}{c^1} = \frac{y_0 \left(y_1 + \frac{1}{y_2} \right) + 1}{y_1 + \frac{1}{y_2}} = \frac{y_0 y_1 y_2 + y_2 + y_0}{y_1 y_2 + 1}$$

Achtet man hier auf die Verbindung der Glieder des Kettenbruchs, so ergibt sich ein einfaches Bildungsgesetz,

nach welchem man aus den beiden ersten Brüchen $\frac{a}{a^1} = \frac{y_0}{1}$, $\frac{b}{b^1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$, welche jedoch immer erst unmittelbar gebildet werden müssen, Zähler und Nenner der successiv folgenden Brüche leicht erhalten kann, indem man mit jedem folgenden Gliede, sowohl Zähler als Nenner des vorhergehenden Bruchs multiplicirt und zu den Producten Zähler und Nenner des vorhergehenden Bruchs addirt. So ist z. B. wirklich

$$\frac{c}{c^1} = \frac{b y_2 + a}{b^1 y_2 + a^1}$$

Setzt man hierin $y_2 + \frac{1}{y_3}$ statt y_2 , so ist auch:

$$\frac{d}{d^1} = \frac{b \left(y_2 + \frac{1}{y_3} \right) + a}{b^1 \left(y_2 + \frac{1}{y_3} \right) + a^1} = \frac{b y_2 y_3 + a y_3 + b}{b^1 y_2 y_3 + a^1 y_3 + b^1} = \frac{c y_3 + b}{c^1 y_3 + b^1}$$

Hiernach ist klar, dass es einerlei ist, ob man jetzt, um den folgenden Bruch $\frac{e}{e^1}$ zu erhalten, in den vorhergehenden $y_3 + \frac{1}{y_4}$ statt y_3 setzt, oder nach der obigen Regel verfährt, und dass dieses Gesetz durchgehends Statt findet.

Hätte man z. B.

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

so sind die auf einander folgenden Näherungswerthe (weil hier 4, 2, 1, 5 die Glieder und $\frac{4}{1}$ und $\frac{9}{2}$ die beiden ersten Brüche sind):

$$\left(\frac{4}{1} \right), \left(\frac{9}{2} \right), \frac{13}{3}, \frac{74}{17}$$

Sind 0, 4, 2, 1, 5 die Glieder, so hat man:

$$\left(\frac{0}{1} \right), \left(\frac{1}{4} \right), \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \frac{17}{74}$$

Sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Glieder, so hat man:

$$(1), (1), \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{30}{43}, \frac{157}{225}, \frac{972}{1393}.$$

153.

Subtrahirt man irgend zwei auf einander folgende Näherungswerthe, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler immer ± 1 ist. Diese merkwürdige Eigenschaft lässt sich folgendermassen beweisen.

Seien $\frac{m}{m^1}, \frac{n}{n^1}$ zwei unmittelbar folgende Näherungswerthe und y das Glied des Kettenbruchs, welches den folgenden Näherungswerth $\frac{p}{p^1}$ bestimmt, so ist:

$$\frac{p}{p^1} = \frac{ny + m}{n^1y + m^1}$$

Nimmt man nun die Differenz von den beiden Näherungswerthen $\frac{p}{p^1}$ und $\frac{n}{n^1}$, so wie auch von $\frac{n}{n^1}$ und $\frac{m}{m^1}$, so ist:

$$\frac{ny + m}{n^1y + m^1} - \frac{n}{n^1} = \frac{mn^1 - m^1n}{n^1(n^1y + m^1)}$$

$$\frac{n}{n^1} - \frac{m}{m^1} = -\frac{(mn^1 - m^1n)}{m^1n^1}$$

Hieraus ergiebt sich, dass der absolute Werth des Zählers der ersten Differenz, $\frac{p}{p^1} - \frac{n}{n^1}$, ganz derselbe ist wie bei der zweiten, $\frac{n}{n^1} - \frac{m}{m^1}$, natürlich mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil ja die Näherungswerthe abwechselnd zu klein und zu gross sind. Es kommt also nur darauf an, den absoluten Werth eines einzigen dieser gleichen Zähler zu bestimmen. Dazu kann man den Unterschied irgend zweier unmittelbar folgenden, also am einfachsten der beiden ersten Näherungswerthe nehmen, nämlich:

$$\frac{b}{b^1} - \frac{a}{a^1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1} - \frac{y_0}{1} = \frac{1}{y_1}$$

Es ist mithin der beständige Zähler in dem Unterschiede zweier unmittelbar folgenden Näherungswerthe $= \pm 1$.

154.

Aus vorstehendem § folgt noch, dass die Unterschiede der Näherungswerthe immer kleiner werden $\frac{b}{b^1} - \frac{a}{a^1} = \frac{1}{a^1 b^1}$; $\frac{c}{c^1} - \frac{b}{b^1} = \frac{1}{b^1 c^1}$, womit denn auch die Benennung Näherungswerthe gerechtfertigt ist, weil der letzte den vollen Werth des Kettenbruchs ausdrückt.

155.

Der wahre Werth eines Kettenbruchs, und wenn er auch bis in's Unendliche fortläuft, liegt immer zwischen zwei beliebigen Näherungswerthen $\frac{m}{m^1}$, $\frac{n}{n^1}$, weil ja der eine zu klein, der andere zu gross ist. Da nun der Unterschied dieser beiden nur $\frac{\pm 1}{m^1 n^1}$, so ist klar, dass wenn man irgend einen Näherungswerth, z. B. $\frac{m}{m^1}$, statt des ganzen Kettenbruchs setzt, der Fehler gewiss kleiner ist, als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat vom Nenner des gesetzten Näherungswerthes ist, also kleiner als $\frac{1}{m^1 m^1}$, weil er ja noch kleiner als $\frac{1}{m^1 n^1}$ ist. Der Kettenbruch sei z. B.

$$\frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

Also die Näherungswerthe: $(\frac{0}{1})$, $(\frac{1}{4})$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{17}{44}$. Nimmt man den Bruch $\frac{1}{4}$, statt des ganzen Kettenbruchs, so ist der

Fehler, den man begeht kleiner, als $\frac{1}{16}$. Nimmt man den Bruch $\frac{2}{9}$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{81}$ &c.

In allen für einen Kettenbruch erhaltenen Näherungsbrüchen sind Zähler und Nenner immer Primzahlen gegen einander.

Seien z. B. $\frac{m}{m^1}, \frac{n}{n^1}$ zwei unmittelbar auf einander folgende Näherungsbrüche, so ist

$$\frac{m}{m^1} - \frac{n}{n^1} = \frac{\pm 1}{m^1 n^1}$$

$$\text{hieraus: } mn^1 - m^1 n = \pm 1$$

Hier sind nun $mn^1, m^1 n$ ganze Zahlen. Hätten also m, m^1 oder n, n^1 einen gemeinschaftlichen Factor, so würde, indem man die Gleichung dadurch dividirt, linker Hand der Quotient eine ganze Zahl sein, was aber nicht möglich ist, weil er rechter Hand keine ganze Zahl sein kann.

Wir haben im Vorhergehenden die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche mitgetheilt. Was nun ihre Anwendung betrifft, so können sie benutzt werden, um aus einer Zahl eine Quadratwurzel bis auf beliebig viele Decimalen zu ziehen, was auf periodische Kettenbrüche führt. Eine andere Anwendung in der sogenannten unbestimmten Analytik und in der höhern Zahlentheorie. Ferner hat man versucht, durch ihre Vermittelung die Wurzeln einer höhern Gleichung zu finden. Die nützlichste Anwendung möchte aber wohl die sein: einen durch sehr viele Ziffern gegebenen Bruch (Verhältniss) näherungsweise und für practische Zwecke genügend, durch kleinere Zahlen auszudrücken, indem man ihn in einen Kettenbruch verwandelt und dessen Näherungswerthe sucht.

So ist z. B. $\pi = \frac{31415926535}{10000000000}$

$\overset{3}{3}1415927:\overset{7}{10}000000:\overset{16}{14}15927:\overset{1}{88}511:88262 \text{ \&c.}$

Es ist also $\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}}$

$(\overset{3}{1}), (\overset{2}{7}), \frac{333}{106}, \frac{355}{113} \dots$