Instituzioni di meccanica, d'idrostatica, d'idrometria e dell'architettura statica, e idraulica ...

Frisi, Paolo

In Milano, 1777

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 707

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-11376

Della meccanica, e della statica, ossia delle leggi generali dell' equilibrio, e del moto de' corpi. Libro primo.

luto, il moto dell' altro corpo, in quanto si accosta, o si discosta da essi, chiamasi relativo. Le prime idee dell' estensione, dello spazio, del moto, della quiete, del tempo, e della velocità sono tanto chiare, e distinte in ciascuno, che basta solamente di pronunziare questi vocaboli perchè da ciascuno s'intenda cosa significano. E così appunto succede generalmente nella serie delle nostre idee, che risolvendosi le più composte nelle più semplici, e arrivando alle semplicissime non si può andare più oltre. Gli Autori antichi, e moderni, che hanno abusato delle sottigliezze metafisiche per disputare sulla natura del tempo, dello spazio, e del moto, non hanno fatto che confondere quanto v'è di più semplice nelle nozioni umane. Archimede, Galileo, e Newton, partendo dalle prime nozioni del moto, ne ritrovarono le leggi principali, ed indicarono la retta strada di ritrovar tutte le altre.

Più, o meno veloce, e celere si dice quel corpo, che trascorre uno spazio dato in meno, o più di tempo, ossia che in un dato tempo trascorre uno spazio maggiore, o minore. Forza motrice si chiama un' azione qualunque, che altera, e muta ne' corpi in qualunque maniera lo stato di moto, o di quiete: la linea, secondo cui viene impressa ne' corpi la forza motrice, si chiama direzione del moto: e quantità di moto, ossia impeto di un corpo mosso, si chiama la somma del moto di tutte le particelle componenti, ch'è il prodotto di tutta la massa nella comune velocità. La distinzione che si è voluta fare tra le forze dei corpi in quiete, e dei corpi in moto, indicate coi nomi di forze morte, e forze vive, e le questioni che sono insorte nel misurare le forze vive, o dal quadrato della velocità, come propose il Leibnitz, o dalla velocità semplice, come sostennero molti altri, sono questioni affatto estranee alla Meccanica. La soluzione dei problemi ancor più difficili si può trattare sui soli dati delle velocità, e delle masse: e questo basta perchè levando alla Meccanica le suddette questioni si debbano interamente abbandonare alla Metafisica.

Per

Per mettere sott' occhio le prime analogie, e i rapporti analitici delle velocità, delle masse, e delle quantità di moto, non fa bisogno che di ordinare una semplice composizione di ragioni. E' manifesto che la quantità Q del moto in un corpo, la cui massa sia M, e la velocità V, sta alla quantità Q' del moto in un altro corpo, che abbia la stessa massa M, e la velocità v in ragione delle semplici velocità: e però sarà $Q:Q'=V:v$.
E' manifesto ancora che la quantità di moto Q' nel corpo della massa M, e della velocità v sta alla quantità q del moto in un altro corpo, che abbia la stessa velocità v, e la massa m, in ragione delle semplici masse: e però sarà ancora $Q':q=M:m$.
Adunque componendo le ragioni si avrà $QQ':Q'q=Q:q=MV:mv$, e moltiplicando insieme le quantità estreme, e le medie di questa analogía, e risolvendo nuovamente i prodotti si dedurranno gli altri rapporti delle velocità, e delle masse.

Per ritrovare le variazioni, che devono succedere quando due corpi M, ed m, colle velocità V, ed v, e colle quantità di moto MV, mv vengano ad urtarsi nella medesima direzione, bisogna in oltre por mente ad alcuni altri principj per se evidenti. Il primo si è, che un corpo più veloce continua sempre ad agire contro un corpo più tardo, fino che l'uno e l'altro non abbiano acquistata una eguale velocità, cosicchè prescindendo da qualsivoglia altra forza, che sopravvenga, debbano i due corpi muoversi dopo l'urto come se facessero un corpo solo. Il secondo si è, che non potendo la quantità del moto nè crescere, nè scemare da se medesima, quando innanzi all' urto i due corpi siano indirizzati verso la stessa parte, la quantità del moto accresciuta al corpo più tardo deve mancare al più veloce, e così tanto prima che dopo l'urto si deve conservare la stessa somma delle quantità del moto $MV+mv$. Il terzo principio si è, che quando i due corpi vadano ad urtarsi direttamente dalle due parti opposte, si devono distruggere le due quantità di moto, che sono eguali, e contrarie, e così tanto prima che dopo l'urto si deve conservare la stessa differenza delle quantità del moto $MV - mv$.

Il Newton espresse forse con minore precisione questi ultimi due principj quando disse che l'azione è sempre eguale, e contraria alla reazione, ossia che le azioni di due corpi sono sempre eguali tra loro, e si dirigono in parti contrarie. Mentre quando il corpo più veloce va ad urtare il più lento nella stessa direzione, il più lento non esercita propriamente azione alcuna nel più veloce. Questo perde bensì la stessa quantità di moto, che comunica all' altro corpo. Ma dove si hanno azioni eguali, e contrarie, la quantità del moto non si trasferisce soltanto, ma si distrugge. E così quando due corpi vanno ad urtarsi dalle due parti opposte, coll' azione dell' uno, e colla reazione dell' altro viene a distruggersi la differenza delle due quantità di moto. Anche quella, che il Newton chiamava forza d'inerzia, non deve già concepirsi come una forza assoluta, che risieda propriamente ne' corpi, e che tenda a conservarli nello stato, in cui sono, o di moto, o di quiete. Un corpo, ridotto che sia allo stato di quiete, abbisogna di qualche forza per moversi: e quand' abbia incominciato a moversi con una data velocità, e direzione, abbisogna di una nuova forza per deviare o da una parte, o dall' altra, e per accrescere, o scemare la propria velocità. E così uno stato qualunque si conserva precisamente perchè vi vuole una ragione per poterlo cambiare.

Per esprimere analiticamente i principj accennati dovrebbe dirsi che nell' urto de' corpi rimane sempre costante la quantità $MV \pm mv$, prendendo il segno superiore quando i due corpi vanno ad urtarsi verso la stessa parte, ed il segno inferiore quando il moto si fa dalle parti opposte. In oltre chiamando Z la velocità comune ad ambidue dopo l'urto, la quantità del moto dovrebbe anche esprimersi per $Z \,.\, \overline{M + m}$: ed eguagliando tra loro queste due quantità

si

ſi avrebbe $Z = \frac{MV \pm mv}{M+m}$. Il caſo ſarebbe ancora lo ſteſſo ſe, oltre alle velocità V, ed v, vi foſſe nei corpi, che ſi urtano, qualche altro grado di velocità comune ad ambidue. Mentre i corpi non agiſcono gli uni ſugli altri che colla differenza delle loro velocità: e la differenza è la ſteſſa, tanto di V, ed v, quanto di $A+V$, ed $A+v$. Dunque il moto comune non può portare cambiamento alcuno alle leggi del moto relativo: oſſia per uſare la fraſe del Newton, il moto de' corpi chiuſi in un dato ſpazio rimane ſempre il medeſimo, relativamente a ciaſcuno di eſſi, comunque lo ſpazio o ſtia fermo, o ſi muova con una velocità comune a tutte le ſue parti.

Prendendo le differenze delle velocità innanzi l'urto V, ed v, e della velocità comune dopo l'urto $\frac{MV \pm mv}{M+m}$ ſi avrà la velocità acquiſtata da un corpo, e perduta dall' altro per cagione ſemplicemente dell' urto. L'elaſticità deve fare che i corpi ſi comprimano urtandoſi, e che poſcia ripiglino la figura iſteſſa di prima, rilaſciandoſi in parti oppoſte. Se le forze, con cui ſi comprimono, e con cui ſi rimettono i corpi foſſero tra loro eguali, cioè ſe l'elaſticità foſſe perfetta, il corpo, che perde per l'urto una data porzione della velocità di prima, ne dovrebbe perdere altrettanto per l'elaſticità: e così pure la velocità acquiſtata dall' altro corpo dovrebb' eſſere il doppio di quella, che corriſponde all' urto ſemplice. Però dalle formole generali dell' urto ſi poſſono derivare anche quelle dell' urto de' corpi elaſtici. Ma tutte le ſteſſe formole, e tutte le leggi dell' urto de' corpi, già ritrovate dal Wallis, dal Wrenn, e dall' Huygens, ſono eſpoſte tanto ſemplicemente nell' Introduzione al ſecondo tomo della Coſmografia, che non occorre quì di traſcriverle.

CAPO

CAPO SECONDO.

Delle prime leggi del Moto uniforme, e variabile.

Anche tutt' i rapporti della velocità, dello ſpazio, e del tempo, nel moto, che ſi continua equabilmente, e colla ſteſſa invariabile velocità, dipendono da una ſemplice compoſizione di ragioni. Lo ſpazio S percorſo nel tempo T colla velocità V, dev'eſſere allo ſpazio S' percorſo nello ſteſſo tempo T, e colla velocità v in ragione delle velocità ſemplici V, ed v, cioè dev'eſſere $S:S'=V:v$. Ma lo ſpazio S' percorſo nel tempo T, e colla velocità v dev' eſſere allo ſpazio s percorſo nel tempo t, e colla ſteſſa velocità v in ragione de' tempi T, e t, cioè dev'eſſere $S':s=T:t$. Sarà dunque $S:s=TV:tv$, cioè gli ſpazj percorſi nel moto equabile, ed uniforme, ſaranno in ragion compoſta delle velocità, e dei tempi. Di quì ancora ſi caverà $Stv=sTV$: e conſeguentemente ſi avranno le analogie $V:v=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}$, e ſimilmente $T:t=\frac{S}{V}:\frac{s}{v}$. Cioè le velocità ſaranno in ragione diretta degli ſpazj, e reciproca dei tempi: e i tempi ſaranno in ragione diretta degli ſpazj, e reciproca delle velocità: al che ſi riducono tutt' i teoremi, e le leggi del moto equabile eſpoſte dal Galileo nel dialogo terzo della Meccanica.

Dalle ſuddette leggi ſi poſſono ricavare anche le altre del moto variabile, accelerato, o ritardato, quando di più ſi rifletta che qualunque ſia l'accelerazione, e il ritardo in un tempo più corto ſi avrà ſempre una variazione minore, e però diminuendo il tempo all' infinito ſi avrà finalmente un limite, dentro il quale ſi potrà traſcurare ogni variazione, e il moto potrà riguardarſi come uniforme. Applicando adunque le analogie del moto equabile alle velocilocità, e agli ſpazj percorſi in qualunque tempo infinitamente piccolo, non farà più di biſogno che di prenderne le ſomme per avere l'intero ſpazio percorſo in qualunque altro tempo propoſto. Data la legge, con cui creſce la velocità, ſarebbe un problema puramente analitico quello di ritrovare generalmente il rapporto dello ſpazio, e del tempo. Ma nell' ipoteſi più ſemplice, che, preſi eguali tra loro i tempicciuoli infinitamente piccoli, ſi abbiano in ciaſcuno di eſſi degli accreſcimenti eguali della velocità, e che il moto ſia uniformemente accelerato, la ſola Geometria può baſtare per la ſoluzione del problema.

I tempicciuoli eguali, e infinitamente piccoli ſi eſprimano colle rette AB, BC, CD, DE, ec., *fig.* 1., e ſia BF la velocità acquiſtata nella prima porzione di tempo AB. Tirando la retta AFM, e ſegnando tutte le parallele come nella figura, ſaranno aG, cH, eI, ec. gli accreſcimenti eguali della velocità, e la velocità totale nel tempo AE dovrà eſprimerſi per EI, e in qualunque altro tempo AN ſi eſprimerà per NM. Ma perchè preſi i punti D, E infinitamente proſſimi tra loro, il moto può riguardarſi come uniforme, e la velocità DH come coſtante nel tempo DE, e ſi può in oltre traſcurare la retta eI riſpetto a DH, e il triangolo HeI riſpetto al trapezio $DHIE$; lo ſpazio percorſo in tutto il ſuddetto tempo ſi eſprimerà col prodotto del tempo DE nella velocità DH, oſſia col trapezio $DHIE$. Così pure in qualunque altra porzione di tempo CD lo ſpazio percorſo ſi eſprimerà col trapezio corriſpondente $CEHD$, e, prendendo le ſomme, tutto lo ſpazio percorſo nel tempo AE ſi eſprimerà coll' area del triangolo AEI, e lo ſpazio percorſo in qualunque altro tempo AN ſi eſprimerà coll' area ANM.

Dunque nel moto uniformemente accelerato ſe i tempi ſi eſprimeranno colle baſi di due triangoli ſimili, le velocità ſi dovranno eſprimere colle altezze, e gli ſpazj percorſi colle aree corriſpondenti alle baſi, e alle altezze dei triangoli. Ma le aree di tutte le figure

ſimili

ſimili ſtanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi, ed è pure l'area del triangolo *AEI* all' area del triangolo *ANM* come il quadrato di *AE* al quadrato di *AN*, o come il quadrato di *EI* al quadrato di *NM*. Dunque nel moto uniformemente accelerato creſcendo le velocità in ragione ſemplice de' tempi computati dal principio del moto, gli ſpazj percorſi creſceranno in ragione duplicata tanto de' tempi, quanto delle velocità. Ma di più ſe in tutto il tempo eſpreſſo per *AN* un corpo ſi moveſſe equabilmente colla velocità invariabile *NM*, lo ſpazio percorſo dovrebbe eſprimerſi coll' intero rettangolo di *AN* in *NM*, cioè col doppio del triangolo *ANM*. Dunque ſe dopo un tempo qualunque il moto uniformemente accelerato ſi convertiſſe in equabile, e il corpo continuaſſe a moverſi colla velocità acquiſtata nel fine del tempo ſuddetto, percorrerebbe in altrettanto tempo uno ſpazio doppio di quello, che ha veramente percorſo incominciando dalla quiete, e gradatamente accelerandoſi.

Per applicare tutti queſti teoremi alla caduta libera de' corpi, biſognerebbe richiamare alla mente alcune verità fiſiche: che la gravità è una proprietà generale de' corpi, e che agiſce in tutti, accelerandoli ſempre egualmente in tempi eguali. Il Galileo incominciò ad eſplorare colle ſperienze queſte leggi primarie della natura, laſciando cadere dal campanile di Piſa dei corpi di diverſo genere, ed oſſervando che la differenza dei tempi della caduta era tanto piccola da doverſi onninamente attribuire alla reſiſtenza dell' aria. Dopo che il Guericke inventò la macchina Pneumatica, le ſperienze fatte nel vuoto divennero più preciſe. Il Galileo dall' eguale accelerazione di tutt' i corpi, che cadono, ne inferì che la gravità aſſoluta, e il peſo totale de' corpi dev' eſſere proporzionale alla quantità della materia. Mentre eſſendo eguale la velocità in tutte le particelle, che cadono, la quantità totale del moto, e la forza motrice dev' eſſere come il numero delle particelle medeſime, oſſia come la quantità di materia di ciaſcun corpo.

A questi principj d'esperienza aggiunse il Galileo un' ipotesi che la gravità in tempi eguali agisca sempre egualmente, e nei corpi che incominciano, e in quelli che continuano a muoversi. L'idea di una forza continua non basterebbe a somministrarci una prova diretta di questa fisica verità. Al Galileo bastò che l'ipotesi fosse conforme in se stessa alla semplicità della natura, ne ricercò risultati, e trovandoli pienamente conformi alle sperienze rimase certo della verità dell' ipotesi. I primi risultati sono, che la velocità deve crescere in ragione semplice, e gli spazj in ragione duplicata dei tempi: che, esprimendo i tempi successivamente coi numeri 1, 2, 3, 4, ec., gli spazj presi dal principio del moto si esprimeranno coi termini analoghi della serie 1, 4, 9, 16, ec.: e gli spazj successivamente percorsi in tempi eguali saranno 1, 3, 5, 7, ec. Il Galileo verificò questa proporzione ne' piani inclinati, dove, come il moto è più lento, così ancora l'esperienza è più facile. Secondo le più precise esperienze, che si sono fatte nell' Osservatorio di Parigi, un corpo cadendo liberamente in un minuto secondo di tempo percorre 15 piedi di Parigi, 1 pollice, e linee $2\frac{1}{18}$: nell' altro secondo susseguente piedi 45, pollici 3, e linee $6\frac{1}{2}$: e successivamente in un altro secondo piedi 75, pollici 5, linee $10\frac{5}{18}$. Il divario dalla ragione dei numeri 1, 3, 5 è tanto piccolo da doversi onninamente attribuire alla resistenza dell' aria.

Volendo esprimere analiticamente anche i rapporti della velocità, del tempo, e dello spazio ne' moti uniformemente accelerati, chiamando G la forza assoluta, e costante della gravità, T, V, ed S rispettivamente il tempo, la velocità acquistata, e tutto lo spazio percorso, T', V', S' i rispettivi elementi infinitamente piccoli; sarà in primo luogo il prodotto della forza, e dell' elemento del tempo, in cui agisce, eguale all' elemento della velocità, cioè

B sarà

sarà $G.T'=V'$, e prendendo le somme $G.T=V$. In secondo luogo, poichè in un tempo infinitamente piccolo il moto può prendersi per equabile, e nel moto equabile lo spazio S' dev' essere eguale al prodotto del tempo T', e dell' intera velocità V, e per conseguenza dev' essere $T'=\frac{S'}{V}$; sarà ancora $G.S'=V.V'$. In terzo luogo, perchè tutto lo spazio S, percorso nel tempo T con un moto uniformemente accelerato, è doppio dello spazio, che si potrebbe percorrere nello stesso tempo, e coll' ultima velocità V continuata uniformemente; sarà $2S=VT=\frac{V^2}{G}$, ed $V=\sqrt{2G.S}$. Per applicare le stesse formole ai corpi gravi, che cascano in un piano inclinato, bisogna premettere un altro teorema elementare, che quantunque sia stato il soggetto di molti dubbj, e di molte, ed oscure dimostrazioni, si può adesso ridurre alla maggiore semplicità, ed evidenza.

CAPO TERZO.

Dei principj della composizione, e della risoluzione delle forze.

SIa spinto il corpo da due forze che bastino separatamente per trasportarlo in un dato tempo, la prima da O in P, *fig.* 2., la seconda da O in M, e che però si possano esprimere rispettivamente colle rette OP, OM. Sia retto l'angolo MOP, e s'intenda che l'effetto della prima forza sia di allontanare il corpo dalla retta OM dello spazio OP, e l'effetto della seconda sia di allontanarlo da OP dello spazio OM. Impresse insieme le due forze, la seconda di esse non potrà fare che il corpo si discosti da OM, nè più nè meno di quello che farebbe colla prima. Mentre per discostarlo maggiormente bisognerebbe che una porzione della seconda forza agisse da O in P: ed essendo OM egualmente inclinata, e posta rispetto alla OP, ed alla linea prolungata Op, non vi sarebbe ragione alcuna, per cui dalla seconda forza non dovesse risultare

una

una azione diretta da O in p eguale a quella, che ſupporrebbeſi diretta da O in P: e ciò poſto le due azioni eguali, e contrarie ſi diſtruggerebbero. Così ancora nell' ipoteſi del ritardo, riſultando dalla forza OM una qualche azione diretta da O in p, ne dovrebbe riſultare un' altra eguale da O in P. Il corpo adunque nel tempo dato ſi diſcoſterà da OM della ſteſſa quantità OP, e arriverà preciſamente alla retta PN parallela ad OM. Alla ſteſſa maniera ſi potrà provare che la ſeconda forza porterà il corpo ſino alla retta MN parallela ad OP, o ſia, o non ſia impreſſa la prima forza. Però impreſſe inſieme le due forze il corpo paſſerà nello ſteſſo tempo da O in N, come ſe foſſe ſpinto da una ſola forza rappreſentata colla retta ON.

Due forze adunque, che ſi eſprimano co' due lati di un rettangolo, equivalgono ad una forza, che ſi eſprima colla ſola diagonale, e ſi potrà ſoſtituire indifferentemente, e queſt' una a quelle due, e quelle due a queſt' una. Poichè nella ſteſſa maniera movendoſi il corpo per la diagonale ON ſi diſcoſta dal lato OM della quantità OP, e dal lato OP della quantità OM, e i moti ſecondo OM, OP, formando un angolo retto colle loro direzioni, non poſſono reciprocamente influire l'uno ſull' altro. Così il principio della compoſizione, e della riſoluzione delle forze ſi può dimoſtrare con una ſpecie di riduzione all' aſſurdo, quando l'angolo delle due forze ſia retto. Gli altri due caſi dell' angolo acuto, e ottuſo ſi riducono Geometricamente al caſo dell' angolo retto. Sono molti anni che ho propoſto queſta maniera di dimoſtrare una verità elementare, forſe non abbaſtanza ſchiarita, e dimoſtrata con altri più lunghi ragionamenti. Ho avuto il piacere di veder poi ſeguitata la ſteſſa idea in un trattato di Meccanica ſtampato in Parigi, e in operetta ſtampata ſullo ſteſſo argomento in Verona. Biſogna adeſſo ripetere la riduzione degli angoli obliqui al caſo che le direzioni delle due forze formino inſieme un angolo retto.

Siano le due forze OP, OM, *fig.* 3., e ſia acuto l'angolo POM.

Si compisca il parallelogrammo $POMN$, e il rettangolo circoscritto $DOCN$, e in oltre dal punto M si tiri sul lato OP la perpendicolare ME. Nel rettangolo $MEOC$ la forza espressa per OM, per ciò che si è detto, equivale alle due OE, OC. Dunque le due OP, OM equivalgono alle tre OP, OE, OC. Ma sono eguali i triangoli OME, PND, ed eguali pure le rette OE, PD. Dunque le due OP, OM equivalgono ad altre due forze espresse per OD, OC, che insieme equivalgono alla forza espressa per ON. Se l'angolo MOP fosse ottuso, come nella fig. 4., la forza OE avrà una direzione contraria alla forza OP, e la differenza di esse sarà OD. Così le due forze OP, OM saranno equivalenti alle due OD, OC, che già equivalgono alla forza ON. Dunque generalmente se le due forze impresse insieme ad un corpo, e le due direzioni di esse si esprimeranno co' due lati di un parallelogrammo qualunque, la forza risultante, e composta si dovrà esprimere per la diagonale: ed al contrario la forza espressa con una retta qualunque sarà equivalente a due altre, le cui quantità, e direzioni si esprimano co' due lati d'un parallelogrammo qualunque, che abbia la stessa retta per diagonale.

Perchè la diagonale è sempre minore della somma de' due lati, ancora la forza composta secondo la diagonale sarà minore della somma delle due forze risolute secondo i lati: e lo stesso si dovrà dire delle velocità, quand' esse siano proporzionali alle quantità delle forze impresse. Ma se da M, e P si condurranno sulla diagonale ON le due perpendicolari MQ, PR, e se così le due forze OM, OP si risolveranno nelle quattro MQ, OQ, PR, OR; le due MQ, PR, essendo tra loro eguali, faranno equilibrio nel punto O, e le due sole OQ, OR agiranno secondo la direzione della diagonale. Nel caso dell' angolo acuto, *fig.* 5., cospireranno insieme le due forze, e se ne dovrà prendere la somma, e sarà $ON = OQ + OR$. Nel caso dell' angolo ottuso, *fig.* 6., bisognerà prendere la differenza delle due forze contrarie, e sarà $ON = OR - OQ$.

Però

Però l'errore di quelli, che credettero di trovare nella composizione delle forze l'effetto minore della causa, e maggiore nella risoluzione, nasce dall' aver essi paragonato l'effetto prodotto in una data direzione alla causa, che agisce in una direzione diversa. Ridotto il paragone alla direzione medesima è manifesto, che la forza composta secondo la diagonale produce sempre lo stesso effetto, che le due forze espresse separatamente coi lati potrebbero produrre secondo la direzione della già detta diagonale.

Era più singolare l'error di quelli, che ammetendo la composizione del moto rigettavano poi il principio della risoluzione, ch' è una immediata conseguenza del primo, e sostenevano che la natura si serve sempre della composizione, e giammai della risoluzione. I fenomeni più famigliari dell' equilibrio di varj pesi, della tensione delle corde, e dell' urto obliquo de' corpi fanno chiaramente vedere, che la natura si serve indifferentemente, e di un principio, e dell' altro. Mentre se da tre fili *PO*, *MO*, *QO*, *fig.* 8., tirati in un piano orizzontale, e uniti insieme nel punto *O*, si lascieranno pendere verticalmente tre pesi *P*, *M*, *Q*, si avrà l'equilibrio di tutti e tre, e il punto *O* si fermerà dove i pesi *P*, *M*, *Q* saranno ordinatamente proporzionali ai seni degli angoli *ONP*, *NOP*, *OPN*. Onde essendo i lati di qualunque triangolo proporzionali ai seni degli angoli opposti, con questa semplice esperienza può ciascuno vedere, che nel caso dell' equilibrio le forze esercitate secondo le direzioni *OQ*, *OP*, *OM* devono essere tra di loro come la diagonale *ON*, e come i lati *OP*, *OM* del parallelogrammo *POMN*: ossia che le forze *OP*, *OM* equivalgono alla forza *ON*, a cui è eguale, e contraria la forza *OQ*, che arriva ad equilibrarle.

Istessamente se la linea *MNm*, *fig.* 7., rappresenterà un piano immobile, che venga urtato da una palla nel punto *N*, e nella direzione *ON*, esprimendo la forza della palla colla retta *ON*, e risolvendola nelle due *OP*, *OM*; la forza *OM* sarà quella, che dovrà estinguersi coll' urto. Senza di essa la palla continuerebbe a scor-

ſcorrere equabilmente al lungo del piano, colla ſemplice forza OP, oſſia Nm; quando nell' urto iſteſſo per ragione dell' elaſticità non veniſſe a rimetterſi qualch' altra forza perpendicolare. Se l'elaſticità foſſe perfetta, e ſi rimetteſſe la forza NP eguale ad OM, la palla riſalirebbe nella direzione No, e l'angolo di rifleſſione oNm ſarebbe eguale all' angolo d'incidenza ONM. Se l'elaſticità foſſe imperfetta, come ordinariamente ſuccede, l'angolo d'incidenza ſarebbe minore: e per lo contrario ſi avrebbe colla rifleſſione un angolo maggior di prima ſe il corpo ricuperaſſe la propria figura con una forza maggiore di quella della compreſſione, come ſuccede nella gomma Peruana, detta Caotchouk. Negli urti obbliqui di molte palle, ſeguitando i principj medeſimi, biſognerà riſolvere la forza intera dell' urto in due, l'una parallela alla ſuperficie del corpo urtato, che non eſerciterà contra di eſſo azione alcuna, l'altra perpendicolare, che ſoſtituendoſi in luogo della forza, e della velocità aſſoluta, laſcierà applicare le formole già eſpoſte ſopra l'urto diretto de' corpi a qualunque altro caſo, che i corpi ſi urtino con qualſivoglia direzione.

CAPO QUARTO.

Della diſceſa libera de' corpi ne' piani inclinati.

IL principio della riſoluzione delle forze, baſta per applicare le leggi della caduta libera de' corpi a quei corpi, che cadono ſopra qualunque piano inclinato. Sia il piano AB, *fig. 9.*, inclinato all' orizzonte CB coll' angolo ABC. Sia poſto il corpo nel punto O, e tutta la gravità ſi eſprima colla verticale NO, e dal punto N ſi tiri ſul piano AB la perpendicolare NP. Tutta la forza del corpo nel punto O ſi riſolverà in due: una eſpreſſa per NP, che eſſendo perpendicolare al piano s'impiegherà unicamente nel premerlo: l'altra eſpreſſa per OP, che eſſendo parallela al piano s'impiegherà nell' accelerazione della caduta. Ed eſſendo tra loro

ſimili

simili i due triangoli NOP, BAC, sarà in qualunque punto O la forza totale della gravità alla forza, con cui il corpo cade, e s'accelera nel piano inclinato AB, nella ragione costante della lunghezza del piano AB all' altezza AC. Però essendo data, e costante la forza, che agisce al lungo del piano inclinato, il moto vi sarà uniformemente accelerato: le velocità cresceranno nella semplice ragione de' tempi: e gli spazj percorsi AO, AB saranno come i quadrati dei tempi, o ancora come i quadrati delle velocità acquistate in O, e B. Cioè il moto in un piano inclinato sarà quell' istesso che avrebbesi nella caduta verticale di un corpo, la cui gravità assoluta G fosse diminuita nella ragione dell' altezza del piano alla lunghezza, e divenisse solamente $G.\frac{AC}{AB}$.

Questa è una semplice conseguenza dei principj antecedenti. Affine di paragonare il moto nella verticale AC, e nel piano inclinato AB, basta riflettere che in un luogo, e nell' altro continuando sempre l'azione della forza come comincia, le velocità acquistate in tempi eguali, comunque o infinitamente piccoli, o finiti, devono essere proporzionali alle forze: cioè, la velocità della libera discesa dev' essere alla velocità acquistata in egual tempo nel piano inclinato AB, come la lunghezza AB all' altezza AC. E questa pure sarà la ragione degli spazj percorsi in egual tempo. Poichè in un tempo infinitamente piccolo potendosi riguardare come equabile il moto uniformemente accelerato, e nel moto equabile gli spazj essendo proporzionali alle velocità; se tutto il tempo della discesa divideraffi in qualsivoglia numero di parti eguali, e infinitamente piccole, gli spazj percorsi nella prima parte del tempo verticalmente, e nel piano inclinato saranno tra loro come la velocità della discesa verticale alla velocità nel piano inclinato, ossia nella ragione costante della lunghezza AB all' altezza AC. E ciò valendo egualmente nella seconda porzione di tempo, e in tutti gli altri tempi successivi, prendendo tutte le somme, e componendo le ragioni,

gioni, tutto lo ſpazio percorſo nella diſceſa verticale ſarà allo ſpazio percorſo in egual tempo nel piano inclinato, come la lunghezza del piano all' altezza.

Se dal punto C, *fig.* 10., ſul piano inclinato AB ſi tirerà la perpendicolare CP, eſſendo $AB:AC=AC:AP$, ſarà AP lo ſpazio percorſo nel piano inclinato AB in tutto quel tempo, in cui il corpo cadendo verticalmente arriverebbe da A in C. Ed eſſendo gli ſpazj AC, AP percorſi in egual tempo, la velocità in C, ſecondo l'altro teorema antecedente, ſarà alla velocità in P, come tutta la forza della gravità a quella porzione di forza, che agiſce nel piano inclinato, cioè, come la lunghezza del piano AB all' altezza AC. Ma poichè il moto nel piano AB è uniformemente accelerato, lo ſpazio AB dev' eſſere allo ſpazio AP, come il quadrato della velocità in B al quadrato della velocità in P. Dunque la velocità acquiſtata cadendo da A in B, ſarà alla ſemplice velocità acquiſtata cadendo da A in P, come la radice di AB alla radice di AP, oſſia nella ragione ſemplice di $AB:AC$. Dunque tanto la velocità in C, quanto la velocità in B avranno la ſteſſa ragione alla velocità in P: e per conſeguenza le velocità in C, e in B ſaranno tra loro eguali. Alla ſteſſa maniera ſi proverà che la velocità della caduta libera da A in C, ſarà eguale a quella, che ſi acquiſterebbe cadendo in qualunque altro piano Ab, che abbia la ſteſſa altezza AC: e così ſarà vero generalmente che un corpo cadendo da un dato punto per qualſivoglia piano inclinato arriverà ſempre colla ſteſſa velocità alla ſteſſa linea orizzontale.

Poichè le perpendicolari CP, Cp, ec., che dal punto C ſi poſſono tirare ſu tutt'i piani inclinati AB, Ab, ec., terminano nel ſemicircolo deſcritto col diametro AC, cadendo un corpo per tutte le corde ſuperiori AP, Ap, ec. del ſemicircolo APC impiegherà lo ſteſſo tempo, in cui cadrebbe dal diametro AC. E poichè tirando pa parallela, ed eguale ad AC, e congiungendo la Ca, l'angolo aCp è retto, e aC è la perpendicolare tirata

dal

dal punto a nel piano inclinato pc; ancora tutte le corde inferiori PC, pC, ec. si percorreranno nello stesso tempo del diametro AC, o pa. In oltre, poichè il tempo della discesa da A in B è al tempo della discesa da A in P, come la radice di AB alla radice di AP, ossia in ragione semplice di $AB:AC$, e istessamente il tempo della discesa da A in P, ossia da A in p è al tempo della discesa da A in b, come $AC:Ab$; il tempo della discesa da A in B, sarà al tempo della discesa da A in b, come $AB:Ab$, cioè i tempi della discesa per diversi piani inclinati di eguale altezza, saranno proporzionali alle lunghezze semplici de' piani. Finalmente se ancora le altezze dei piani fossero differenti, *fig. 9.*, poichè il tempo della discesa per AC è al tempo della discesa per aC, come $\sqrt{AC}:\sqrt{aC}$, componendo insieme tutte le ragioni di $AB:AC$, $\sqrt{AC}:\sqrt{aC}$, $aC:ab$, si troverà che il tempo della discesa per AB è al tempo della discesa per ab, come $\frac{AB}{\sqrt{AC}}:\frac{ab}{\sqrt{aC}}$, cioè, che i tempi della discesa per differenti piani diversamente inclinati all' orizzonte sono tra loro in ragione semplice delle lunghezze, e sudduplicata reciproca delle altezze.

Sono questi i principali teoremi, che il Galileo, e in seguito gli altri Autori hanno insegnato intorno alla discesa de' corpi in qualsivoglia piano di una data inclinazione. Il Galileo aveva anche insegnati gli altri teoremi, che risguardano la composizione, e la risoluzione dei moti, e delle forze: e se n'è anzi servito ampiamente nella teoria de' corpi gettati obbliquamente. Ma è poi singolare, che nel Teorema undecimo del moto naturalmente accelerato non abbia egli avvertito, che il moto di un corpo deve conseguentemente variarsi nel passare da un piano all' altro di diversa inclinazione: ed abbia anzi supposto generalmente, che un corpo partendo da un punto dato dovesse sempre arrivare colla stessa velocità ad un dato orizzonte, qualunque fosse il numero, e la posizione dei piani inclinati, e contigui, per i quali fosse obbligato di ſcendere ſucceſſivamente. L'Huygens nella Propoſ. VIII. dell' Orologio Oſcillatorio, il Keill nel Teorema XXXVIII. dell' Introduzione alla Fiſica, e molti altri hanno adottato lo ſteſſo errore. E' però facile da vederſi, che ſe i due piani AB, BC, *fig.* 11., formeranno tra loro l'angolo ABC, e ſulla BC continuata ſi condurrà la perpendicolare AD, ſarà la velocità del corpo nel primo piano alla velocità reſidua nel ſecondo, come $AB:DB$, oſſia come il ſeno totale al coſeno dell' angolo de' due piani. E ſe la prima velocità ſi eſprimerà per AB, ſarà DB la velocità nel ſecondo piano, AD la porzione di velocità, che impiegheraſſi nel premerlo, e deſcritto col centro B, e col raggio BA il ſemicircolo EAC, ſarà ED la velocità perduta per la ſemplice inclinazione dei piani.

Se l'angolo ABD ſarà infinitamente piccolo, ſarà pure infinitamente piccolo il ſeno AD riſpetto al raggio AB. Ora egli è chiaro, che in qualſivoglia curva continua è infinitamente piccolo l'angolo, che formano tra loro tutti gli archetti, o elementi contigui del perimetro. Dunque, ſe un corpo ſi moverà nel perimetro di una curva, ſarà infinitamente piccola la forza della preſſione, che nel paſſare da un archetto all' altro s'impiegherà perpendicolarmente contro ciaſcuno di eſſi. Ma poichè il ſeno verſo ED ſi uguaglia al quadrato di DA diviſo per DC, eſſendo DC una quantità finita, ed AD una quantità infinitamente piccola del prim' ordine, come ſuccede in qualſivoglia curva continua, la velocità ED, perduta nel paſſare da un archetto all' altro, ſarà come il quadrato di una quantità infinitamente piccola, cioè ſarà una quantità infinitamente piccola del ſecond' ordine. Biſognerà adunque, che il corpo paſſi per un numero infinito di archetti infinitamente piccoli del primo ordine, cioè che paſſi per un arco d'eſtenſione finita, perchè tutte le velocità perdute formino un infinitamente piccolo del prim' ordine. Dunque in un tempo dato, e finito non perderà il corpo, che una porzione infinitamente piccola di moto, e il corpo continuerà a moverſi in una curva, ſenza che la variazione delle direzioni porti alcuna variazione ſenſibile nella velocità.

CAPO

CAPO QUINTO.

Della discesa nelle curve, e del moto de' Pendoli.

IL teorema antecedente è di un uso grandissimo nella dottrina delle acque correnti, importando moltissimo di sapere, che la velocità de' Fiumi si diminuisce bensì per l'irregolarità del fondo, e delle ripe, e per l'urto negli angoli rettilinei, ma non soffre però alcuna variazione sensibile quando il fondo, e le ripe formino col loro andamento una qualche curva continua. Nella Meccanica quest' è il principio generale, che ci guida nella soluzione di tutt' i Problemi appartenenti alla discesa de' corpi in qualsivoglia curva *CBD*, *fig.* 12. Poichè non dovendosi tener conto delle variazioni, che nascono per la curvità istessa, e per la continuata deviazione di tutte le direzioni, il corpo arriverà da *C* in *B* con una velocità eguale a quella, che acquisterebbe cadendo liberamente da tutta l'altezza verticale *HB*. Il che si può ancora dedurre più brevemente dagli altri principj antecedenti. Mentre, secondo ciò, che si è detto, la velocità in *M*, *fig.* 13., è la stessa, comunque il corpo vi cada dal piano *CM*, o *PM* egualmente alto. In oltre supposto l'angolo *CMP* infinitamente piccolo non può succedere variazione alcuna passando da *CM* in *MN*: e però il corpo cadendo ne' due piani *CM*, *MN* arriverà al punto *N* colla stessa velocità, che acquisterebbe colla caduta continuata nel solo piano *PMN*. E similmente passando nel terzo piano *NB*, o in qualunque altro numero di piani, che formino tra loro degli angoli infinitamente piccoli, il corpo arriverà al punto *B* colla stessa velocità, che acquisterebbe cadendo nel solo piano *ENB*, o ancora cadendo da tutta l'altezza verticale *HB*.

Nell' introduzione al primo tomo della Cosmografia si è applicato questo principio alla soluzione de' problemi più celebri, com'è quello, in cui si cerca la curva della più breve discesa da *K* in *B*, *fig.* 12., oppure la curva, in cui cominciando il corpo a cadere da qualsivoglia altezza C, o K arriverebbe sempre in egual tempo all' infimo punto D. Ma quantunque questi problemi siano ivi trattati alla maniera degli antichi Geometri, e coll' ajuto della semplice Geometria, noi quì ci limiteremo a quelle sole considerazioni, che risguardano gli usi più ordinarj, e importanti della Meccanica. Incomincieremo adunque a far osservare ai principianti, che il caso della caduta libera in un arco circolare CBD è lo stesso di un corpo, che si sospenda dal centro A col filo AB, e si lasci cadere dal punto C. In oltre faremo riflettere, che in qualunque altro punto B esprimendo tutta la gravità colla verticale BE, e tirando dal punto E le due perpendicolari EF, EG sulla tangente BF, e sul raggio prodotto AB; tutta la stessa forza si risolverà in due altre, l'una delle quali BG agirà direttamente contro il punto di sospensione A, e produrrà la tensione del filo AB: l'altra BF s'impiegherà nell' accelerazione del corpo al lungo dell' arco circolare BD.

Da questa risoluzione delle forze, e dalla semplice ispezione dei triangoli è manifesto, che la forza BG nell' infimo punto D si confonde colla BE, e che così la tensione cresce gradatamente da C in D. E' manifesto in secondo luogo, che la forza BF si confonde colla BE all' altezza C del quadrante CD, e va sempre diminuendosi nell' accostarsi al punto D. Così adunque il moto da C, o da K in D è bensì accelerato continuamente, ma non uniformemente, e nel progresso diventano sempre minori i gradi accresciuti in egual tempo alla velocità. La somma poi di tutti gl' istessi gradi, ossia la velocità totale, si farà massima nel punto D: sarà eguale a quella che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza verticale, e sarà proporzionale alla radice dell' altezza medesima. E poichè la velocità concepita si dirige sempre secondo la tangente del circolo, il corpo caduto da K in D dovrà risalire nell' arco Dk: e finalmente poichè le forze BF, bf non sono eguali, e contrarie se non

nei

nei punti egualmente alti B, b; non si potranno estinguere tutt' i gradi della velocità acquistata cadendo da K in D, se non salendo per un arco Dk eguale a DK. Così adunque le oscillazioni continuerebbero sempre egualmente se non vi fosse la resistenza dell' aria, e l'attrito del filo intorno al punto di sospensione.

Incominci il corpo a cadere dal punto K nell' arco circolare KBD, *fig.* 14.. La velocità nel punto B sarà quella che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza LM: e per ciò, che si è detto sul fine del Cap. II., esprimendo coll' unità la forza assoluta della gravità, la velocità si dovrà esprimere generalmente colla radice del doppio spazio percorso, e sarà essa nel punto $B = \sqrt{2LM}$. Ma perchè il moto può riguardarsi come equabile nell' archetto piccolissimo BF, per le altre formole del Cap. I., sarà il tempo della discesa da B in $F = \frac{BF}{\sqrt{2LM}}$: e descritto sopra di LD il semicircolo LND, essendo LM terza proporzionale ad MD, ed MN, posta $2LM = \frac{2MN^2}{MD}$; sarà il tempo dell' istessa discesa $= \frac{BF}{MN} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}MD}$. Affine di ridurre quest' espressione a qualch' altra, di cui si possa prendere facilmente la somma, per esprimere tutto il tempo della discesa da K in D, bisogna premettere alcune analogie geometriche, che risguardano i principj del calcolo infinitesimale: e che sono.

I. Prese le due semiordinate MB, QF infinitamente prossime tra loro, e sulla prima di esse tirata dal punto F la perpendicolare FO, il triangoletto FOB potrà considerarsi come rettilineo, e come simile al triangolo rettangolo BMA. Ed essendo eguali gli angoli FBO, BAM, che aggiunti all' angolo MBA arrivano a formare un angolo retto, si avrà l'analogia $MB : AB = FO : BF = MQ : BF$. Sarà dunque l'archetto $BF = AB \cdot \frac{MQ}{MB}$.

II. Il

II. Il quadrato della ſemiordinata d'un ſemicircolo eſſendo ſempre eguale al rettangolo delle aſciſſe, ſarà $MB^2 = 2AB.MD - MD^2$. Ma ſe l'arco KD, e tutta l'altezza LD ſi ſupponeſſe tanto piccola, che riſpetto al rettangolo $2AB.MD$ ſi poteſſe traſcurare la quantità MD^2 come d'un ordine inferiore, ſarebbe $MB = \sqrt{2AB.MD}$. In queſto caſo adunque potrebbe ſupporſi l'archetto $BF = \frac{AB.MQ}{\sqrt{2AB.MD}} = \frac{MQ}{\sqrt{MD}}.\sqrt{\tfrac{1}{2}AB}$: e ciò poſto ſarebbe il tempo della diſceſa del corpo da B in $F = \frac{MQ}{2MN}.\sqrt{AB}$.

III. Ma ſe P ſarà il centro, e PN il raggio del ſemicircolo LND, colla ſteſſa analogia di prima ſi caverà $MN:PN = MQ:NR$. Sarà dunque $MQ = \frac{MN}{PN}.NR$: e fatta queſt' altra ſoſtituzione ſarà il tempo della diſceſa in qualſivoglia archetto $BF = \frac{NR}{2PN}.\sqrt{AB} = \frac{NR}{LD}.\sqrt{AB}$, oſſia eguale alla quantità coſtante $\frac{\sqrt{AB}}{LD}$, moltiplicata per l'archetto NR del ſemicircolo LND.

Ridotta l'eſpreſſione del tempo a queſti termini è manifeſto, che, prendendo tutte le ſomme, il tempo della diſceſa da K in D, ſarà eguale alla ſteſſa quantità coſtante $\frac{\sqrt{AB}}{LD}$, moltiplicata per tutto il ſemicircolo LND. Conſiderando poi la formola $\frac{LND}{LD}.\sqrt{AB}$ ſe ne potranno ricavare molte conſeguenze importanti.

I. Poichè $\frac{LND}{LD}$ eſprime la ragione della ſemiperiferia al diametro, ch' è coſtantemente la ſteſſa in qualſivoglia ſemicircolo, data la lunghezza del pendolo AB, ſi avrà ſempre la ſteſſa eſpreſſione del tempo della diſceſa negli archi circolari, comunque diſu-

guali

guali tra di loro, quando ſi poſſano riguardar tutti come aſſai piccoli: e però le oſcillazioni ne' minimi archi circolari ſi faranno tutte in egual tempo.

II. Data la quantità $\frac{LND}{LD}$ ſe ſi varierà la lunghezza del pendolo AB, il tempo di ciaſcuna oſcillazione negli archi minimi ſi varierà in ragione ſudduplicata della lunghezza medeſima: e al contrario le lunghezze dei pendoli ſaranno in ragione duplicata diretta del tempo di ciaſcuna oſcillazione, oſſia in ragione duplicata reciproca del numero delle oſcillazioni fatte in un dato tempo: mentre è manifeſto, che il numero delle oſcillazioni fatte in un dato tempo è in ragione reciproca del tempo di ciaſcuna oſcillazione.

III. Poichè il tempo della diſceſa per $\frac{1}{2}AB$, ſecondo le altre formole antecedenti, ſi deve ſimilmente eſprimere per $\sqrt{AB}$; ſarà il tempo della diſceſa nel piccolo arco circolare KD al tempo della diſceſa libera per la metà della lunghezza del pendolo, come $\frac{LND}{LD}\cdot\sqrt{AB}:\sqrt{AB}$, o come $LND:LD$, cioè come la ſemiperiferia di un circolo al ſuo diametro.

IV. Quando ſia data la lunghezza di un pendolo, che nel tempo di un minuto ſecondo compiſce un' intera oſcillazione ſcendendo, e poi ſalendo in un piccolo arco circolare, ſarà il diametro alla periferia, come il tempo della diſceſa per la metà della lunghezza del pendolo al tempo di un minuto ſecondo: e poichè nelle cadute libere ſono gli ſpazj decorſi come i quadrati dei tempi impiegati a decorrerli; ſarà il quadrato del diametro al quadrato della periferia, come la metà della lunghezza del pendolo all' altezza, che ſi percorre verticalmente in un minuto ſecondo.

V. Eſſendo il diametro alla periferia di un circolo proſſimamente, come 100000 : 314159, ſuppoſto che a Roma la lunghezza del pendolo ſemplice, che compiſce una vibrazione nel tempo di

un

un minuto ſecondo ſia di 3 piedi di Parigi, e linee 8.38, come riſulta dalle oſſervazioni de' celebri le Seur, e Jacquier, ſarà lo ſpazio decorſo in un minuto ſecondo da un corpo, che cada liberamente, di piedi 15, un pollice, e linee $1\frac{1}{5}$. Ed eſſendo la latitudine di Roma di 44° 54′, cioè minore di circa un mezzo grado ſolamente della latitudine di Milano, in qualunque ipoteſi della gravità accreſciuta nelle maggiori diſtanze dall' Equatore, ſi potrà ſupporre che ancora nel noſtro paeſe lo ſpazio decorſo in un ſecondo nella caduta libera ſia circa di piedi 15. 1.

Il Galileo fu il primo ad accorgerſi nelle lampane ſmoſſe dell' eguaglianza dei tempi di tutte le vibrazioni, ma non arrivò mai a cavarne la dimoſtrazione dalle prime leggi, e dalla natura iſteſſa della gravità. Anzi credette il Galileo, che ciò poteſſe ſuccedere generalmente comunque gli archi circolari non foſſero più tanto piccoli. L'Huygens fu il primo a dimoſtrare, che tutti gli archi e piccoli e grandi della cicloide ſi ſcorrono in egual tempo da un corpo, che continua a cadervi ſino al punto più baſſo: e che ciò non ſuccede nel circolo ſe non quando gli archi ſono piccoliſſimi. La teoria del moto nella cicloide è ſtata ridotta alla maggiore ſemplicità nell' introduzione al primo tomo della Coſmografia. Nell' introduzione al ſecondo ſi ſono anche ſpiegate tutte le formole per ritrovare il centro d'oſcillazione nei pendoli compoſti. Quì biſognava eſporre i fondamenti Geometrici, e Meccanici dell' uſo ordinario di adattare agli orologj aſtronomici dei pendoli, che ſi vibrino nei minimi archi d'un circolo.

CAPO SESTO.

Del moto de' Projetti.

UN corpo, che ſi muova in qualſivoglia curva *DAT*, *fig.* 15., quando foſſe abbandonato a ſe ſteſſo in qualſivoglia punto *A*, ſcor-

ſcorrerebbe per la tangente AMN deſcrivendo eguali ſpazj in tempi eguali: poichè la tangente AMN ſi può conſiderare come la direzione iſteſſa della curva nel punto A: e ſi ricercano ſempre delle nuove forze per deviare un corpo dall' attuale direzione del moto, e per accelerarlo, o ritardarlo. Ma ſe foſſe AR perpendicolare alla curva nel punto A, e ſe col centro R, e col raggio AR ſi deſcriveſſe l'arco circolare APQ, il corpo ſcorrendo per la tangente ſi ſcoſterebbe dal centro degli ſpazj MP, NQ. Il niſo adunque, e la forza, che ha il corpo di ſeguitare, quanto è da ſe, la prima direzione del moto, e di ſcorrere ſecondo la tangente fa naſcere un' altra forza di allontanarſi dal centro direttamente. Queſt' altra forza ſi chiama forza centrifuga, ed è la ſteſſa, che quando un ſaſſo ſi fa girare in una fionda la tiene ſempre diſteſa, e ſi fa ſentire contro la mano. La conſiderazione di queſta forza entra ſoſtanzialmente nella teoria delle variazioni della gravità, che ſi hanno andando dall' equatore ai poli, anzi entra in tutte le teorie più ſublimi della Terra, e del Cielo, come ſi è ampiamente ſpiegato nel primo, e nel ſecondo tomo della Coſmografia.

Ora per limitarci al ſemplice moto de' Projetti, faremo riflettere in primo luogo, che qualunque ſia la curva ATQ, *fig.* 16., ceſſando la forza di gravità in qualunque punto A, il corpo ſcorrerebbe per la tangente AMN, deſcrivendo gli ſpazj AM, AN proporzionali ai tempi. In ſecondo luogo è da rifletterſi, che per la forza di gravità, cadendo il corpo, e deviando dalla tangente, deſcriverebbe gli ſpazj MR, NT proporzionali ai quadrati dei tempi. Sarebbe adunque $MR : NT = AM^2 : AN^2$, e tirate le parallele come nella *fig.* 16., ſarebbe $AB : AC = BR^2 : CT^2$: ch' è la proprietà della parabola ATQ riferita al diametro AO. Da queſta ſemplice conſiderazione ſe ne poſſono ricavare moltiſſime conſeguenze.

I. Poichè il corpo abbandonato nel punto A alla forza di projezione, movendoſi equabilmente nella tangente AMN, ſi ſcoſterebbe dalla verticale AO degli ſpazj AL, AP proporzionali ai tempi, e poichè in oltre la forza della gravità, agendo nella direzione verticale, non può alterare il moto orizzontale; la parabola ATQ ſi deſcriverà in maniera, che, tirate le verticali equidiſtanti AO, ML, NT, il corpo paſſerà in egual tempo dall' una all' altra, e conſerverà ſempre la ſteſſa velocità orizzontale, che aveva al principio del moto.

II. Poichè il corpo abbandonato a ſe ſteſſo ne' punti A, ed R ſcorrerebbe per le tangenti AM, RV, e, per ciò che ſi è detto precedentemente, arriverebbe in egual tempo da A in M, e da R in V: e poichè in oltre nel moto equabile le velocità ſono proporzionali agli ſpazj percorſi in tempi eguali; la velocità, e la quantità del moto, oſſia l'impeto del corpo ſarà proporzionale alle tangenti AM, RV intercette tra le verticali equidiſtanti AO, ML, NT.

III. Eſſendo equabilmente accelerato il moto delle cadute verticali, la velocità acquiſtata cadendo per qualſivoglia ſpazio NT, o AC ſarà quella, con cui in egual tempo ſi potrebbe ſcorrere equabilmente lo ſpazio $2AC$. Però la velocità della caduta libera ſarà alla velocità della projezione in qualſivoglia punto A, come $2AC : AN$, e la velocità, con cui il corpo è gettato nel punto A, ſi eguaglierà alla velocità acquiſtata deviando dalla tangente di uno ſpazio AC tale che ſia $2AC = AN$.

IV. Se ſi chiamerà P il parametro della parabola appartenente al diametro AO, e ſarà generalmente $P \cdot AB = BR^2$, e $P \cdot AC = CT^2$, poſta $CT = AN = 2AC$, ſi troverà $P = 4AC$, e $AC = \frac{1}{4}P$: cioè dato il punto A, il parametro P, e tutta la parabola ATQ, il corpo cadendo per un' altezza eguale alla quarta parte dello ſteſſo parametro acquiſterebbe una velocità eguale a quella, con cui dev' eſſere gettato nel punto A ſecondo AMN, acciò deſcriva la parabola ATQ.

Ciò

Ciò posto il moto del corpo si può ridurre ad una semplice costruzione Geometrica. Si prenda la verticale $XA = \frac{1}{4}P$, *fig.* 17., e sopra la XA si descriva il semicircolo XMA, che taglj la linea AZ della direzione del getto nel punto M. Si produca la semiordinata KM in D, per modo che sia $KM = MD$, e però $AZ = BD = 2AM$. Per la proprietà del circolo sarà $XA . KA = \frac{1}{4}P . KA = AM^2$, ed essendo $KA = ZD = AB$, sarà ancora $P . AB = 4AM^2 = BD^2$: cioè il punto D sarà nella parabola, e poichè il punto D determinato con questa costruzione non può essere se non un solo, sarà D il vertice, DE l'altezza, e $2AE$ l'ampiezza AQ della parabola. Da ciò se ne cavano ancora molte altre conseguenze.

I. Data l'altezza XA, che corrisponde alla velocità della projezione, si avrà colla stessa costruzione l'altezza, e l'ampiezza di tutte le parabole corrispondenti alle diverse direzioni del getto AM, AU, *fig.* 18. Poichè in quella maniera, che KA è l'altezza, e $2KD$, oppure $4KM$ l'ampiezza del getto diretto secondo AM; se posta la stessa velocità del getto sarà la direzione AU, sarà pure SA l'altezza, e $4SU$ l'ampiezza del nuovo getto.

II. Essendo il raggio la maggiore semiordinata del circolo, data la velocità, con cui un corpo è gettato, si avrà l'ampiezza massima $4AM$ quando sarà $KM = KA$, e quando per conseguenza sarà semiretto l'angolo MAK, o MAQ. Dunque la massima distanza, a cui si possa spignere una palla di cannone con una data quantità di polvere, si avrà dando al cannone l'inclinazione di gradi 45 coll' orizzonte.

III. Se si prenderanno due archi eguali MU, MU sotto, e sopra il punto M, saranno eguali i due angoli MAU, le due semiordinate SU, e per conseguenza le ampiezze AFI, AHI. Data adunque la forza del getto si potrà gettare la palla alla stessa diſtanza AI ſotto due differenti direzioni AU, che declinino egualmente dall' angolo ſemiretto MAQ. Si ſceglie la direzione ſuperiore nelle bombe, con cui ſi hanno a rompere i tetti, e le volte, e l'inferiore nei cannoni, con cui ſi atrerrano le muraglie.

IV. Vicendevolmente quando ſia data la forza del getto, e data l'ampiezza AI, a cui conviene gettar la palla, prendendone la quarta parte AV, e alzando in V la perpendicolare VU, che incontri il ſemicircolo XMA ne' punti U, U, ſi avranno le due direzioni AU, che ſoddisfaranno egualmente all' intento. Se la perpendicolare incontrerà il ſemicircolo in un ſolo punto M, ſarà unico il caſo del getto, e ſi avrà la maſſima ampiezza, che ſotto direzioni diverſe poſſa corriſpondere ad un impeto dato di projezione.

V. Se ſi farà una volta l'eſperienza della maſſima ampiezza AQ, che poſſa averſi con un impeto dato, cioè con una data quantità di polvere in una palla di un dato peſo, la quale ampiezza ſuol eſſere nelle colubrine di paſſi 500, e ſe ſi cercherà poi l'angolo QAU, ſotto cui abbia a dirigerſi il getto, perchè la palla arrivi alla diſtanza, per eſempio, di paſſi 400, dovrà prenderſi $QA : IA = KM : SU = 5 : 4$. In queſto caſo ſi troverà nelle tavole l'arco AU di gradi 54, l'arco MU di 36: e però l'angolo MAU ſarà di gradi 18, e ſi potrà ſoddisfare al queſito con due getti, che declinino egualmente dall' angolo ſemiretto, e ſopra, e ſotto di gradi 18.

In queſta ſemplice coſtruzione ſono abbracciati tutt' i Teoremi del Galileo intorno al getto de' corpi in un piano orizzontale. Il Grandi, il Simpſon, e molti altri Autori hanno dato la ſoluzione del problema del getto de' corpi in qualunque piano inclinato. Nell' introduzione al primo tomo della Coſmografia la ſoluzione Geometrica del Problema ſi è ridotta al principio medeſimo, che ſia fatto una volta l'eſperimento della maſſima ampiezza, che con un dato pezzo d'artiglieria ſi può avere in un piano orizzontale. Si ſono anche ſpiegate tutte le regole Trigonometriche di percuotere un corpo alzato di una quantità data ad una data diſtanza

ſull'

sull' orizzonte. L'equazione analitica del Problema si può dare più brevemente.

Sia AQ, *fig.* 19., la massima ampiezza, a cui può arrivare il getto, dirigendolo ad angolo semiretto dal punto A, e si faccia $AQ = a$. Sarà $\frac{1}{2}a$ l'altezza della caduta corrispondente alla velocità della projezione, e sarà $2a$ il parametro corrispondente al diametro AC. Sia t la tangente dell' angolo NAQ, sotto cui deve dirigersi il getto, perchè la parabola ATI passi per un dato punto T, e sia $AP = b$, $PT = c$, e però $PN = bt$, $NT = bt - c$, e $AN = b . \sqrt{(1 + t^2)}$. Per la natura della parabola, si avrà $2a . \overline{bt - c} = b^2 . \overline{1 + t^2}$, ed ordinando l'equazione, e poi estraendo la radice, si avrà $t = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - b^2 - 2ac)}$.

Per esempio sia l'ampiezza massima AQ di 8000 piedi, sia AP di 5600, e PT di 812, e però il punto T sia alzato sopra l'orizzontale AQ dell' angolo TAQ di 8° 15'. Fatte le sostituzioni numeriche, e prendendo il segno superiore, si troverà la tangente t di 2.22, che, posto il raggio 1, corrisponde ad un angolo di 65° 45': e prendendo il segno inferiore si troverà 0.637, che corrisponde ad un angolo di 32° 30'. Per lo contrario se fosse data la direzione del getto, e si cercasse la forza necessaria per arrivare ad un punto alzato di un angolo dato ad una data distanza sull' orizzonte, l'equazione da risolversi sarebbe $a = \frac{1}{2} b^2 . \frac{1 + t^2}{bt - c}$.

CAPO SETTIMO.

Dell' equilibrio, e del centro di gravità.

S'Intenda, che il piano ABH, *fig.* 20., sia mobile intorno ad un asse perpendicolare nel punto A, e che per moverlo vi sia da superare una resistenza determinata. Si esprima la forza, che vi s'ims'impiega, colla retta BC: si prolunghi la BC sino in H, e presa $BC = DE$ s'intenda, che la stessa forza nella direzione della stessa linea BH venga applicata, prima in B perpendicolarmente al raggio BA, e poi in D obbliquamente a DA. E' manifesto, che in un caso, e nell' altro si avrà sempre lo stesso effetto di svolgere il piano egualmente intorno al punto A. Ora tirando DF perpendicolare, ed EF parallela al raggio DA, e compiendo il parallelogrammo $DEFG$, la forza DE si risolverà in due, l'una DG, che agendo secondo la lunghezza del raggio DA non contribuirà punto al moto intorno ad A, e l'altra DF, che essendo perpendicolare resterà tutta impiegata nello stesso moto. In oltre, essendo simili tra loro i due triangoli rettangoli DFE, ABD, sarà $DF:DE = DF:BC = BA:DA$. Saranno dunque equivalenti le forze BC, DF quando avranno tra loro la ragione reciproca delle distanze perpendicolari DA, BA dal centro del moto A.

Ciò posto se alla linea inflessibile BAD, *fig.* 21., e mobile intorno al punto A, s'intenderanno applicate perpendicolarmente in B, e D le forze BC, DE, tali che si abbia $BC:DE = DA:BA$; saranno le due forze in equilibrio. E se alle suddette forze si sostituissero due pesi espressi per B, e D, e fosse $B.BA = D.DA$, sarebbe $B.BA$ tutto lo sforzo, o il momento esercitato dal peso B per alzare il peso D, e $D.DA$ il momento contrario del peso D, e per l'eguaglianza dei due momenti si avrebbe l'equilibrio. In questo caso il punto A, intorno a cui non potrebbe darsi alcun moto, si chiamerebbe il centro di gravità dei due pesi B, e D, ed essendo $B:D = DA:BA$, sarebbe ancora $B+D:D = BD:BA$; cioè sarebbe la somma dei due pesi ad uno di essi come la distanza totale alla distanza dell' altro peso dal centro di gravità. Con questa analogia, dati che siano due pesi, e la distanza di uno di essi dal punto di sospensione, si troverà a quale distanza si debba collocar l'altro, perchè abbiasi l'equilibrio: e date le due distanze, e un peso, si troverà qual debba essere l'altro peso da equilibrarsi.

Ora

Ora s' intendano attaccati i tre pesi A, D, M, *fig.* 22., alla verga inflessibile BM, e mobile intorno al punto A. S' intenda ancora, che O sia il centro di gravità dei due pesi D, ed M. I momenti dei due corpi D, ed M rispetto al punto C, dovranno essere $D.DA+M.MA=D.\overline{OA-DO}+M.\overline{OA+MO}$. Ma supposto, che O sia il centro di gravità, per ciò che si è detto precedentemente, sarà $D.DO=M.MO$. Dunque sottratte le quantità eguali saranno i momenti suddetti $D.OA+M.OA=\overline{D+M}.OA$: cioè i medesimi, che si avrebbero se i due pesi D, ed M fossero concentrati nel punto O, e sospesi alla distanza OA dal punto A. Che se dalla parte di D, ed M si aggiugnerà un terzo peso, si troverà alla stessa maniera, che il momento del terzo peso, e dei due D, ed M riuniti insieme nel centro O, sarà il momento istesso di tutti e tre i corpi riuniti insieme nel loro centro comune di gravità. E come il caso di tre corpi si riduce al caso di due soli, così il caso di quattro si riduce a quello di tre, ed in qualunque numero di corpi uniti insieme con linee inflessibili, e sospesi da qualche punto, il momento di tutti insieme deve essere quello stesso, che si avrebbe se tutti fossero riuniti nel centro di gravità.

Questo teorema basta per ritrovare in qualunque corpo il centro di gravità, cioè quel punto, intorno a cui, equilibrandosi tutte le forze, non si può dare alcun moto. Poichè supponendo, che siano legati insieme in qualunque modo i pesi P, P', P'', ec., e che le rispettive distanze di ciascuno di essi da un asse dato di posizione siano Q, Q', Q'', ec., e i momenti $P.Q$, $P'.Q'$, $P''Q''$, ec., e supponendo in oltre che sia z la distanza dell' asse dal centro di gravità, e il momento di tutt' i pesi riuniti nello stesso centro sia $(P+P'+P'', \text{ec.}).z$, dovendo questo momento eguagliarsi alla somma di tutti quelli, dovrà anch' essere $z=\dfrac{P.Q+P'.Q'+P''.Q'', \text{ec.}}{P+P'+P'', \text{ec.}}$

Per esempio, se si proponesse una lamina piana NAP, *fig.* 23., nella

nella cui ſuperficie foſſe diſtribuito il peſo uniformemente, e ſi cercaſſe il centro di gravità O, biſognerebbe riportare la figura ad un aſſe GAg dato di poſizione, e intenderla ſoſpeſa orizzontalmente, in modo che non poteſſe moverſi ſe non rotando intorno ad eſſo. Allora ponendo $AO = z$, chiamando y la ſemiordinata DC, x l'aſciſſa AD, dx l'elemento infinitamente piccolo Dd, ſarebbe $2y.dx$ il peſo dell' area $CFfc$, e il momento $2y.x.dx$, e indicando le ſomme colla lettera S, ſarebbe $z = \frac{Syxdx}{Sydx}$. Generalmente ſi avrà la diſtanza del centro di gravità da una data retta conſiderata come l'aſſe di ſoſpenſione di tutto il corpo, moltiplicando ciaſcun peſo per la riſpettiva diſtanza dall'aſſe, e dividendo la ſomma di tutti queſti prodotti per la ſomma di tutt' i peſi.

Nei trattati elementari del calcolo differenziale, e integrale ſi diffondono ordinariamente gli Autori nell' applicazione di queſta formola ai caſi particolari dei triangoli, delle piramidi, delle parabole, delle paraboloidi, ec.: e l' applicazione non ricerca altro appunto, fuorichè le notizie elementari dello ſteſſo calcolo. Nei corpi omogenei come le sfere, le sferoidi, i priſmi, i poliedri, ec. il centro di gravità è manifeſtamente lo ſteſſo centro della figura, e della grandezza. In tutt' i corpi eſſendo eguali i momenti e da una parte, e dall' altra del piano, che paſſa per il centro di gravità, ſe ſi tirerà un altro piano che non vi paſſi, ſaranno maggiori i momenti nella porzione, che include il centro di gravità, e minori nell' altra. Così ſottoponendo a un corpo qualche impedimento alla diſceſa, il corpo o ſi moverà, o ſtarà fermo, ſecondo che l' impedimento o non arriverà fino al centro di gravità, o ſi ſtenderà più oltre. Nei corpi liberi poi la caduta ſi dirigerà ſecondo la linea tirata dal centro di gravità perpendicolarmente al piano dell' orizzonte, e alla ſuperficie media della Terra, che può riguardarſi come la ſuperficie dell' equilibrio. Mentre intorno alla

ſteſſa

ſteſſa linea di direzione per l'eguaglianza dei momenti non poſſono inclinarſi i corpi nè da una parte, nè dall' altra. Il Borelli nel ſuo celebre libro ſul moto degli animali riduſſe a queſti principj tutto il meccaniſmo dell' equilibrio, e dei differenti moti, e naturali, e forzati degli uomini, e dei quadrupedi.

Nella Meccanica ſublime la conſiderazione del centro di gravità apre un campo vaſtiſſimo ad altre più difficili ricerche intorno alla Teoria generale del moto. Nel primo libro del ſecondo tomo della Coſmografia la ricerca dell' aſſe, della velocità, e delle variazioni del moto di un corpo qualunque, con un metodo facile, e nuovo è già ſtata ridotta a tutta quella ſemplicità, di cui ſono ſuſcettibili queſte materie. I principali teoremi ſono: che ſe la direzione della forza impellente non paſſerà pel centro di gravità del corpo, oltre il moto di projezione, tutte le particelle concepiranno un moto di rotazione intorno ad un aſſe, che paſſi pel centro medeſimo: che il moto di projezione ſarà lo ſteſſo come ſe la forza foſſe impreſſa nel centro con una direzione parallela, e il moto di rotazione ſarà lo ſteſſo come ſe il centro reſtaſſe fiſſo, e non vi foſſe alcun moto di projezione: che due moti di rotazione intorno a due aſſi differenti compongono ſempre un ſolo moto di rotazione intorno ad un altr' aſſe dato di poſizione, e vicendevolmente un ſolo moto di rotazione ſi può riſolvere in due, o in più altri: che ſe i momenti delle forze centrifughe non ſi eguaglieranno da tutte le parti oppoſte, continuandoſi il moto di rotazione ſi varierà l'aſſe: che in ciaſcun corpo vi ſono almeno tre aſſi, poſti ad angolo retto, intorno a ciaſcuno dei quali può continuarſi uniformemente il moto di rotazione, come incomincia, ec.

Ma ancora nella Geometria la conſiderazione del centro di gravità ſomminiſtra un metodo ſemplice, e generale per miſurare tutt' i ſolidi generati dalla rivoluzione d'una figura piana, come *NAP*, *fig.* 23., intorno all' aſſe *Gg*. Mentre ſi può dimoſtrare, che tutto il ſolido ſi eguaglia al prodotto della figura generatrice

E *NAP*

NAP nella periferia del circolo descritto dal centro O in tutta la rivoluzione. Quest' elegante teorema, già indicato da Pappo Alessandrino, e provato dal Guldino coll' induzione di molti casi, fu per la prima volta dedotto dai principj del moto da un discepolo del nostro Cavalieri. La dimostrazione non deve quì tralasciarsi, e si riduce ai principj seguenti. Esprima $1 : p$ la ragione del raggio alla periferia, e restando le altre denominazioni antecedenti sia pz la periferia descritta col raggio AO intorno all' asse Gg, px la periferia descritta da qualunque punto della retta Cc, e $p.2yxdx$ l'anello circolare descritto dalla rivoluzione dell' area $CFfc$, ossia $2ydx$. Essendo $z = \frac{Syxdx}{Sydx}$, sarà ancora $pz.S2ydx = p.S2yxdx$, cioè il prodotto del circolo pz nella somma di tutte le aree, ossia in tutta la figura generatrice, sarà eguale alla somma di tutti gli anelli circolari, ossia a tutto il solido generato colla già detta rivoluzione.

CAPO OTTAVO.

Della Teoria, e del maneggio delle Macchine semplici, e composte.

NEl capitolo precedente si è già spiegato il principio generale dell' equilibrio, e nelle figure 24., 25., e 26. sono indicate le tre differenti combinazioni del peso P, della forza F, e del punto d'appoggio. In tutti tre questi casi si avrà l'equilibrio se il peso, e la forza saranno in ragion reciproca delle distanze dal centro del moto A, ossia se sarà $F : P = PA : FA$. Se adunque la forza F al peso P avrà una ragione maggiore di $PA : FA$, la resistenza del peso verrà superata dalla forza. Ma supposto che la linea inflessibile FP incominciando a svolgersi intorno al punto A passi in fp, e descriva gli angoli eguali PAp, FAf, sarà $PA : FA = Pp : Ff$, ed in oltre gli spazj Pp, Ff descritti nello stes-

so

ſo tempo eſprimeranno le velocità del peſo P, e della forza F. Adunque il principio fondamentale dell' equilibrio ſi riſolverà in queſt' altro: che non ſi potrà dare alcun moto quando la forza e il peſo ſiano in ragione inverſa della velocità: e che la forza prevalerà alla reſiſtenza del peſo quando la ragione della forza al peſo ſarà maggiore della ragione della velocità del peſo alla velocità della forza, oſſia quando ſarà $F:P > Pp:Ff$, ed $F.Ff > P.Pp$.

Da ciò appariſce generalmente, che eſſendo data la quantità aſſoluta della forza, e data pure la velocità, con cui ſi muove, non ſi può accreſcere la reſiſtenza, e il peſo da ſuperarſi ſe non diminuendone la velocità, e impiegando un tempo maggiore per alzarlo, o traſportarlo per uno ſpazio determinato. Così l'economia delle leve, e di tutte le altre macchine, ſi riduce propriamente a queſto, che non potendo noi accreſcere oltre di un certo limite la quantità delle forze motrici, e potendo diſporre del tempo, facciamo agire una data forza per un tempo tanto maggiore, quant'è maggiore la reſiſtenza da ſuperarſi. Il Galileo nel ſuo trattato della Scienza Meccanica ha preſentato ſotto queſto punto di viſta l'organizzazione delle macchine, ed ha anzi addotto l'eſempio, che ſe ci ſerviremo di una ſemplice corda con un ſecchio attaccato per cavare da un pozzo una data quantità d'acqua in un dato tempo con una data forza, s'ingannerebbe moltiſſimo chi credeſſe di poter coll' ajuto di qualſivoglia macchina, colla ſteſſa forza di prima, cavare nello ſteſſo tempo una maggiore quantità d'acqua. Onde fa meraviglia, che ancora volgarmente ſi dica di accreſcere colle macchine l'azione, e l'energia delle forze.

Il Galileo nel trattato ſuddetto al principale vantaggio di ſpendere in tempo ciò che non ſi può accreſcere nella forza, ha ſoggiunto ancora due altri vantaggi importantiſſimi, che ſi poſſono ricavare dalle macchine: di applicare più facilmente, e comodamente una forza data: e di ſoſtituire alla forza degli uomini le forze degli animali, delle acque correnti, e ſi potrebbe aggiugnere anche dell' aria, e del fuoco. Il de la Hire negli Atti dell' Accademia di Parigi del 1699 valutando il peso di un uomo di mezzana statura di circa 140 libbre di Francia, e riflettendo, che un uomo può alzarsi di ginocchio quand' anche sia caricato di 150 libbre, valutò la forza dei muscoli delle gambe, e delle coscie di circa 290 libbre. Con altre simili osservazioni lo stesso Autore fece ascendere la forza dei muscoli lombali solamente a 170 libbre, e a 160 la forza dei muscoli delle braccia, e delle spalle. Alcuni altri Autori Francesi eguagliano la forza di un cavallo a 7 uomini, ed alcuni Autori Inglesi la eguagliano solamente a 5, come può vedersi nelle note alla Lezione IV. del Desaguliers.

Con un semplice vette si può alzare, o smovere un peso anche 20 volte maggiore quando il peso resti applicato ad una distanza 20 volte minore di quella, a cui si applica la forza. Considerando il vette anch' esso come pesante vi è un' altra resistenza da vincere. Bisogna considerare il peso del vette AF, *fig.* 27., come riunito nel centro di gravità O: bisogna ricercare la forza, che può farvi equilibrio nel punto F, ed aggiugnerla alla forza necessaria per ismovere il peso P, posto alla distanza AP dal centro del moto A. Per esempio, se il peso del vette s'intendesse uniformemente distribuito per tutta la lunghezza, e fosse in tutto di 20 libbre, e però si potesse sostenere con una forza di libbre 10 nell' estremità F: e se in oltre il peso P fosse di libbre 300, e le distanze AP, AF fossero nella ragione di $1:6$; basterà una forza di libbre 60 nel punto F per equilibrare la resistenza e del vette, e del peso aggiunto, e per vincerla vi vorrà una forza un poco maggiore, o basterà la stessa di libbre 60 applicata ad una distanza un poco maggiore dal punto A. Nel caso che il punto d'appoggio, il peso attaccato, e la forza si combinino insieme come nella *fig.* 24., la porzione del vette AF conspirerà col proprio peso ad alzare il peso P.

Su questa considerazione si regolano appunto le divisioni della sta-

ſtadera, ch' è un vette di braccia diſuguali, in cui, come è noto, con un ſolo peſo traſportato a diverſe diſtanze da una parte ſi riconoſcono tutt' i peſi, che ſi ſoſpendono ſucceſſivamente dall' altra parte, ſempre ad egual diſtanza dal centro del moto. Nella pratica ſi mette la ſtadera in equilibrio da ſe medeſima con aggiugnere un peſo o da una parte, o dall' altra: e poi ſul braccio più corto facendo creſcere i peſi in ragione aritmetica, ſi ſegnano nel braccio più lungo le diviſioni per l'equilibrio. Ma in ciò vi vuole tutta la diligenza, perchè gli errori commeſſi a principio non ſi poſſono in ogni caſo correggere, alternando i peſi come nella bilancia. In queſta, ch' è una ſtadera di braccia eguali, riconoſcendoſi i peſi da una parte con altrettanti peſi poſti dall' altra, ſe foſſe corſo qualche errore nella differente lunghezza delle due lanci, e ſe il peſo da riconoſcerſi ſi attaccaſſe prima in F, e poi in P, *fig.* 24., ſe ne potrebbe avere la quantità preciſa con prendere una media geometricamente proporzionale tra i due peſi, che vi faceſſero equilibrio prima in P, e poi in F. Mentre ſuppoſto il peſo da riconoſcerſi in F, ſarà $FA : PA$, come il contrappeſo P al peſo ſuddetto: ed alternando le lanci ſarà pure $FA : PA$, come il ſuddetto peſo al contrappeſo da porſi in F. La bilancia, e la ſtadera, e così pure l'aſſe nella ruota, e gli altri ſtrumenti, che vi ſi riducono, il mangano, l'argano, le ruote dentate, ſono ſpecie di vetti così ſemplici, che per intenderne tutta l'applicazione non fa biſogno più altro dopo aver detto generalmente che nel caſo dell' equilibrio la reſiſtenza, e la forza devono eſſere in ragione reciproca delle diſtanze.

Ma quantunque io ſupponga, che chi ſtudierà le preſenti inſtituzioni avrà ancora ſott' occhio non ſolamente le figure, ma ancora le macchine iſteſſe, aggiugnerò qualche coſa intorno alle taglie, che nei trattati elementari della Meccanica ſogliono dar luogo a più equivoci. In primo luogo ſe il centro delle taglie C, e B foſſe immobile, come nella *fig.* 28., ſarà manifeſtamente eguale la velocità

locità del peso P, e della forza F, non si varieranno i momenti, e vi si avrà solamente il vantaggio di cambiare la direzione, di scegliere la più comoda, e di adattare anche i cavalli ad alzare un peso verticalmente. In secondo luogo se il peso P si sospendesse dal centro C della taglia mobile LBA, come nella *fig.* 29., congiugnendo insieme colla sottesa BA i punti del contatto B, A, ed abbassando dal punto A la perpendicolare AE sulla direzione della corda BR, che si suppone tirata in F, mentre la taglia incominciasi a svolgere intorno al punto A, sarà OA la distanza perpendicolare alla direzione del peso, ed EA la distanza perpendicolare alla direzione della forza: ed essendo simili i triangoli COA, BAE, cederà il peso alla forza quando la ragione della forza, e del peso sarà maggiore di quella di $OA : EA$, ossia di $CA : BA$, cioè del raggio alla sottesa. Nel caso delle corde parallele TA, RB, confondendosi la sottesa col diametro, il peso si supererà da una forza, che sia un poco maggiore della metà.

Se si combineranno insieme diverse taglie mobili, come nella *fig.* 30., in primo luogo è manifesto, che le sottese GI, EK, ec. tirate per i punti estremi del contatto si ridurranno ad essere perpendicolari alle direzioni delle resistenze, che nelle taglie inferiori si devono superare in T, e in R. Altrimenti se DA fosse obbliqua ad EK, la forza secondo DA si potrebbe risolvere in due l'una perpendicolare, e l'altra paralella: e questa seconda forza smoverebbe la taglia da E in K, o da K in E, nè cesserebbe il moto se non quando la taglia avesse ripreso una situazione, in cui EK fosse perpendicolare a DA. Ciò posto la forza in E nel caso dell' equilibrio dovrebb' essere alla forza in A, come $DK : EK$, e la forza in A alla forza in P, come $CB : AB$, e così componendo tutte le ragioni sarebbe la forza F al peso P come il prodotto dei raggi di tutte le taglie mobili al prodotto di tutte le sottese. Nel caso delle corde parallele la ragione del raggio alla sottesa sarebbe quella di $1 : 2$, e posto che il numero delle taglie fosse $1, 2, 3, 4$, ec.

sareb-

ſarebbe il momento della ſteſſa forza 2, 4, 8, 16, ec., cioè ſi avrebbe l'equilibrio con una forza, che foſſe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ec. dell'a reſiſtenza da ſuperarſi.

Ciò che ſi è ricavato dal principio fondamentale della ragion reciproca delle forze, e delle diſtanze, riſulta ancora manifeſtamente dall' altro principio, in cui ſi riſolve il primo della ragion reciproca delle forze, e delle velocità. Mentre è manifeſto, che alzando di un dito il peſo *P* ne avanzerebbe uno in *A*, e un altro in *B*: e così, per tenere teſe le corde, biſognerebbe che ſi ſollevaſſe di due diti la ſeconda taglia *D*, e di 4 la taglia *H*: onde avanzandone 4 per parte in *G*, ed *I*, nell' ipoteſi delle corde parallele, la velocità della forza *F* ſarebbe 8. Lo ſteſſo principio ſi può anche facilmente adattare alle altre combinazioni di taglie, mobili, ed immobili alternativamente intrecciate, come nelle *fig.* 31., *e* 32. Se il capo della corda *FC* pende da un punto fiſſo *C*, come nella *fig.* 31., è manifeſto che per alzare di un dito il peſo *P*, biſogna che ne avanzino 2 nelle corde della taglia mobile *RL*, 4 nelle due taglie *RL*, *ID*, e così in tre taglie 6, e 8 in quattro, ec. Ma ſe la corda giraſſe prima intorno alla taglia immobile *HE*, e poi intorno alla mobile *RL*, come nella *fig.* 32., la ragione delle velocità del peſo, e della forza ſarebbe di 1 : 3, con due taglie immobili, e due mobili di 1 : 5, e ſucceſſivamente di 1 : 7, ec. Non è adunque vero ſe non in queſti ultimi caſi ciò che il Wolfio nel Teor. 195. della Meccanica, e molti altri Autori hanno ſuppoſto generalmente, che in qualunque combinazione di taglie diſtribuendoſi il peſo ſopra tutte le corde, e tenendole dappertutto teſe egualmente, debba eſſere alla potenza, che lo equilibra, nella ragione del numero delle corde all' unità.

Lo ſteſſo principio ſi adatta con eguale facilità a qualunque combinazione di ruote dentate, alla vite, ed al cuneo. Per eſempio in quella combinazione di ruote, che lo Stevino chiamò col nome

di

di Pancrazio, e che ſi rappreſenta nella *fig.* 33., le velocità ſaranno le ſteſſe in E, ed F, e così pure in N, ed H, in A, ed S: in D, ed A poi le velocità ſaranno proporzionali ai raggi, e così pure in S, ed H, in N, ed E, in F, e G: onde ſupponendo la ragione dei raggi di $10:1$, ſarà nel caſo dell' equilibrio la ragione del peſo, e della potenza di $10000:1$. La vite perchè ſi avanzi dell' intervallo delle due ſpire ricerca un' intera rivoluzione della potenza, che ſi applica con un vette ad una data diſtanza dall' aſſe: e così nel caſo dell' equilibrio la potenza dovrà eſſere al peſo da ſoſtenerſi, o da ſchiacciarſi, in ragione compoſta dell' intervallo delle due ſpire alla lunghezza del vette, e del raggio alla periferia. Il cuneo ABC, perchè paſſi nella ſituazione abc, *fig.* 34., deve avvanzarſi dello ſpazio Bb, mentre la perpendicolare BO miſura la quantità dello ſchiacciamento di tutte le parti del corpo $EHDG$, che ſono in contatto col cuneo. Sarà adunque la forza alla reſiſtenza, come $BO:Bb = AF:AD$, oſſia come la ſemi-larghezza del cuneo al lato.

Queſti ſono i rapporti generali, che determinano l'azione, e l'energia delle macchine indipendentemente dal peſo di eſſe, e dalle altre reſiſtenze. Si ſono già accennati i principj di valutare ciò che deveſi al peſo. Ma il peſo delle macchine ordinariamente è aſſai piccolo, e la principale conſiderazione da aggiugnerſi riſguarda la reſiſtenza che naſce dall' aſprezza de' corpi, e dall' intreccio reciproco delle piccole cavità, e delle piccole prominenze delle ſuperficie, che ſi toccano. Il Leibnitz nelle Miſcellanee di Berlino ne incominciò la teoria fiſica, e diſtinſe due ſorti di movimenti l'uno radente, l'altro volvente. Il primo è il caſo d'un parallelepipedo, il ſecondo di una ruota che ſcorre ſopra di un piano dato. Nel primo caſo preſentandoſi ſempre la ſteſſa ſuperficie al contatto, e non potendoſi avvanzare un corpo ſenza che ſi rompano, o che ſi pieghino tutte le piccole prominenze, la reſiſtenza è aſſai maggiore: e però la prima regola pratica, che può darſi generalmente, ſi è di ſoſti-

tuire

tuire il moto volvente al radente quant' è possibile. Sebbene in alcuni casi particolari, per esempio nelle ruote dentate, può aversi qualche volta un attrito assai maggiore di quello, con cui due pezzi della stessa materia verrebbero a soffregarsi senz' alcun moto di rotazione. E ciò non solamente per la difficile corrispondenza dei denti, ma ancora perchè le dimensioni dei metalli vengono alterate dalle variazioni del caldo, e del freddo, e quelle del legno dall' umido, e dal secco.

Il Desaguliers nelle note alla lezione decima ci diede i risultati delle sperienze, che fece intorno alla quantità dell' attrito in tutte le macchine. Nella bilancia lo trovò piccolo, essendo piccola la superficie, su cui si appoggia il vette, e circolare il moto concepito intorno al punto d'appoggio. Lo stesso accade nella bilancia: ma perchè si possano con essa discernere le più piccole differenze dei pesi, bisogna che l'asse, e l'anello, da cui pende siano assai lisci, e che la forma dell' anello sia più tosto ovale, che circolare, e bisogna che il peso, la figura, e la distanza dal centro del moto sia precisamente eguale nelle due lanci. Per lo contrario la forza dell' attrito è assai grande nelle piccole taglie, massime se accade che per l'umidità si gonfino le corde. Secondo il diverso diametro delle rotelle trovò il Desaguliers una grandissima differenza di attrito. In una taglia di centro immobile, e del diametro di 3 pollici, accavalcata una corda del diametro d'un pollice, e di due terzi, e sospese egualmente dai due capi 800 libbre di peso, ve ne volevano da una parte altre libbre $436\frac{2}{3}$ per incominciar qualche moto. Fatto lo stesso esperimento in una taglia di 29 pollici di diametro, bastavano per togliere l'equilibrio 45 libbre di peso, cioè meno di $\frac{1}{81}$. L'asse nella ruota ha pure un piccolo attrito, quando il cilindro sia piccolo, e non sia troppo grossa la corda, con cui si sostenta il peso, nè vi sia da impiegare una forza considerabile per piegarla. Il cuneo, presentando sempre la stessa superficie al corpo da fendersi, ha un attrito grandissimo: il che deve anche dirsi della vite, che propriamente è un cuneo spinto da un vette, come si espresse il Newton.

Anche a questo genere di ricerche il Sig. Eulero, ed altri celebri Matematici hanno ultimamente applicato tutti gli ajuti dell' Algebra più sublime. Le formole analitiche, per valutare la forza dello sfregamento in qualunque macchina, sono ridotte a maggiore semplicità sul fine della prima Parte della Meccanica del Sig. Bossut. Ma per l'applicazione delle stesse formole bisogna prima conoscere la proporzione, che passa in qualunque caso proposto tra la pressione, e la frizione. Questa non può conoscersi se non colle sperienze immediate: e le sperienze per determinare la proporzione delle due forze nelle superficie, che si sfregano insieme, nella bilancia, o in qualunque altra macchina, non ricercano meno di quelle, con cui si può determinare l'intero effetto dello sfregamento. Tutte le congetture proposte finora intorno alla natura dei primi filamenti dei corpi, e alla maniera, con cui si piegano, e cedono nel soffregarsi, non danno nessuna regola ben sicura. Le stesse sperienze, che si sono fatte per determinare in un caso dato le variazioni, che nascono dalla diversa velocità, e dai diversi pesi, non suggeriscono niente di ben preciso per gli altri casi. Essendomi adunque proposto di abbracciare in queste Instituzioni ciò che può essere di un uso immediato, lascio che in qualunque caso si giudichi dalle sperienze immediate della frizione, e senza portarne più avanti la teoria analitica, incomincierò ad applicare gli altri principj antecedenti alla teoria delle Fabbriche.

DELL'