La Trigonometrie Rectiligne et Spherique

Vlacq, Adriaan

A Paris, 1720

LA TRIGONOMETRIE RECTILIGNE ET SPHERIQUE,

OU IL EST TRAITÉ

De la conſtruction des Tables de Sinus, Tangentes, Secantes & Logarithmes. De l'uſage de ces Tables pour la réſolution des Triangles, avec des queſtions Aſtronomiques ; & ces mêmes Tables très-exactement calculées ſur un rayon de 10000000 parties.

Par WLAC, *corrigée & augmentée par M. OZANAM, de l'Academie Royale des Sciences, tirée de ſon Cours de Mathematique.*

A PARIS, RUE S. JACQUES,

Chez CLAUDE JOMBERT, au-deſſus de la ruë des Mathurins, à l'Image Nôtre-Dame.

MDCCXX.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

AU LECTEUR.

COMME il est important d'avoir des Tables très-correctes, & qu'il est difficile d'en avoir d'exactes sans y prendre un soin particulier ; je me suis efforcé à vous les donner, MON CHER LECTEUR, dans la derniere exactitude. Pour cette fin je les ai fait imprimer sur celles d'Ulacq, qui ont été imprimées à la Haye en l'année 1665, & qui passent pour être des plus correctes : & je les ait fait corriger sur celles du même Ulacq, imprimées à Amsterdam en l'année 1683. qui passent pour être encore plus correctes que les précedentes, afin de pouvoir connoître les fautes qui y seroient, lorsqu'il se rencontreroit quelque difference entre les chiffres de l'une & de l'autre de ces deux différentes éditions, ce qui m'a fait découvrir des fautes qu'on ne trouvera point ici. Et pour une plus grande perfection, auparavant que de faire imprimer ces Tables, j'ai prélu avec beaucoup de soin celles d'Ulacq, ayant corrigé les Sinus sur les Tables de Pitiscus in folio, & les Logarithmes ſur ceux d'Henri Briggs auſſi in folio, ce qui m'a fait découvrir quelques fautes eſſentielles, & pluſieurs autres de moindre conſequence, qu'on avoit negligées dans toutes les éditions, & qu'on ne trouvera point dans celle-ci. Ainſi l'on peut s'aſſurer d'avoir ici des Tables autant exactes qu'il eſt poſſible.

TABLE DES TERMES
expliquez dans la Trigonometrie.

Fin de la Table des Termes.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, Roy de France & de Navarre, à nos Amez & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Senechauz leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra. SALUT. Notre bien Amé C. A. JOMBERT Nous ayant fait remontrer qu'il souhaiteroit faire imprimer & donner au Public *Les Oeuvres du feu sieur Ozanam, contenant le Dictionnaire, le Cours, & les Recreations Mathematiques, l'Usage du Compas, un Traité de l'Arpentage, la Geometrie Pratique, & les Elemens d'Euclide.* S'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires, offrant pour cet effet de les faire imprimer en bon Papier & beaux Caracteres suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des presentes. A CES CAUSES voulant traiter favorablement ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces presentes de faire imprimer lesdits Livres cy-dessus specifiez, en un ou plusieurs Volumes conjointement ou séparement, & autant de fois que bon lui semblera sur papier & caracteres conformes à ladite feuille imprimée & attacchée sous notred. contre-scel, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date desdites présentes. Faisons defenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance. Comme aussi à tous Libraires Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Livres cy-dessus exposez en tout, ni en partie; ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui; à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts: A la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles: Que l'impreſſion de ces Livres ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, & que l'impetrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. Et qu'avant que de les expoſer en vente les manuſcrits ou imprimez qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Livres ſeront remis dans le même état où les approbations y auront été données ès-mains de notre trés-cher & feal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur CHAUVELIN; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit trés-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le ſieur CHAUVELIN: De tout à peine de nullité des Preſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Expoſant ou ſes Ayans cauſe pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement; Voulons que la copie deſdites Preſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Livres ſoit tenuë pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos Amez & Feaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraire: CAR tel eſt notre plaiſir. DONNE' à Paris le dixiéme jour du mois de Novembre l'an de Grace mil ſept cens trente-cinq, & de notre Regne le vingt-uniéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre neuviéme de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris N° 221. Fol. 202. conformément aux anciens Reglemens confirmez par celui du 28. Fevrier 1723. A Paris le 28. Decembre 1735.

G. MARTIN, Syndic.

De l'Imprimerie de J. CHARDON.

TRAITE' DE TRIGONOMETRIE.

LA *Trigonometrie* ſelon ſon étymologie, ſignifie la meſure des Triangles, auſſi elle nous enſeigne à réſoudre par le calcul toute ſorte de Triangles, tant rectilignes, que ſphériques, ce qui fait qu'elle ſe diviſe en *Trigonometrie rectiligne*, & en *Trigonometrie ſpherique.* L'une & l'autre ne conſidere que les angles & les côtez d'un Triangle, ſans avoir égard à ſa ſuperficie, cette conſideration appartenant à la *Planimetrie*, dont nous traiterons dans la *Geometrie Pratique.*

Comme dans un Triangle il y a trois angles & trois côtez, qui dépendent les uns des autres, il eſt évident que trois de ces grandeurs étant connuës, les autres ſe peuvent connoître par des raiſonnemens que la Trigonometrie nous enſeigne, pourvû que trois de ces ſix quantitez connuës déterminent les trois autres, en ſorte qu'elles ne puiſſent être que d'une certaine grandeur, ce que feront toûjours deux angles & un côté, ou bien deux côtez & un angle, ou bien encore les trois côtez, mais non pas les trois angles; pour le moins dans un Triangle rectiligne, où la seule connoissance des angles ne détermine pas la grandeur des côtez, mais seulement la proportion, étant certain que l'on peut imaginer une infinité de Triangles rectilignes équiangles & semblables qui n'auront pas les côtez égaux les uns aux autres: outre qu'il ne nous est pas libre de supposer les trois angles d'un Triangle rectiligne, tels que l'on voudra, parce que si l'on en suppose deux, chacun d'une certaine grandeur, le troisiéme doit être necessairement le reste de ces deux à 180 degrez *par* 32. 1. ce qui fait que ces trois angles connus ne sont équivalens qu'à deux choses connuës, & que par conséquent ils ne déterminent pas suffisamment les autres parties du Triangle. Il n'en est pas de même dans un Triangle Spherique, dont les trois angles déterminent les trois côtez, comme vous verrez dans la Trigonometrie spherique qui sera precedée de la Trigonometrie rectiligne, & celle-ci de la construction des Tables, par laquelle nous commencerons ce Traité, après avoir expliqué les

DEFINITIONS.

I. *Arc de Cercle* est une partie de la circonference de ce Cercle.

II. *Degré* est un petit arc de Cercle, qui contient la trois cens soixantiéme partie de sa circonference.

III. *Minute* est un petit arc de Cercle, qui contient la soixantiéme partie d'un degré.

IV. Valeur d'un arc de Cercle est la quantité de degrez, ou de degrez & minutes que cet arc contient.

V. *Complement* d'un arc, eſt ce qu'il faut de ſurplus à cet arc pour achever le quart de Cercle; ainſi l'arc F I, eſt le complement de l'arc B F.

V I. *Supplément* d'un arc eſt ce qu'il faut de ſurplus à cet arc pour achever le demi Cercle. Ainſi l'arc FIA eſt le ſupplément de l'arc FB. Fig. 1.

V I I. *Meſure* d'un angle n'eſt autre choſe que la quantité de degrez, ou de degrez & minutes, que l'arc embraſſé par les lignes qui forment cet angle, peut contenir. Ainſi l'angle FCB eſt meſuré par la quantité de degrez, ou de degrez & minutes que l'arc FB contient.

VI I I. *Corde* ou ſoutendante d'un arc, ou bien de l'angle dont cet arc eſt la meſure, n'eſt rien que la ligne droite tirée de l'une des extremités de l'arc à l'autre extremité. Ainſi la ligne droite FG eſt corde ou ſoutendante de l'arc FBG, ou de l'angle FCG, dont cet arc eſt la meſure.

I X. *Sinus droit* d'un arc, ou de l'angle dont cet arc eſt la meſure, n'eſt que la ligne droite qui tombe de l'une des extremitez du même arc, perpendiculairement ſur le diametre qui paſſe à ſon autre extremité. Ainſi la ligne FH, qui tombe de l'extremité F de l'arc FB, perpendiculairement ſur le diametre AB, qui paſſe à l'autre extremité du même arc, en eſt le Sinus droit, on bien de l'angle FCB, dont cet arc eſt la meſure. De même la ligne IC eſt Sinus droit de l'arc IFB, ou de l'angle ICB dont cet arc eſt la meſure. Fig. 1.

REMARQUE.

Le Sinus droit d'un arc, eſt auſſi Sinus droit de ſon ſupplément au demi Cercle; c'eſt-à-dire, de l'arc qui acheve la demie circonférence. Ainſi la ligne droite FH qui est Sinus droit de l'arc FB ; Fig. 1. l'est aussi de son arc de supplément FIA, ou de l'angle FCA dont cet arc est la mesure ; ce qui est évident par la définition du Sinus droit.

X. *Sinus verse* d'un arc, ou de l'angle dont cet arc est la mesure, est la partie du diametre comprise entre le sinus droit, & l'extremité de cet arc. Ainsi la ligne droite, ou partie du diametre HB, est Sinus verse de l'arc FB, ou de l'angle FCB dont cet arc est la mesure ; & la ligne LI est aussi Sinus verse de l'arc FI.

REMARQUE.

Le Sinus verse d'un arc étant joint au Sinus verse de son supplément au demi Cercle, égale toûjours le diametre ; ainsi la ligne BH qui est Sinus verse de l'arc BF, étant jointe à la ligne HA qui est Sinus verse du supplément FIA, égale le diametre AB.

Fig. 1. XI. *Tangente d'un arc*, ou de l'angle que cet arc mesure, est la ligne droite élevée perpendiculairement au bout du diametre, lequel passe à l'une des extremités de cet arc, prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le rayon du centre, qui passant par l'autre extremité du même arc, est aussi prolongée ; ainsi la ligne BE qui est perpendiculaire à l'extremité B du diametre AB, & prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le rayon CF, prolongé qui passe à l'autre extremité F du même arc, est la tangente de l'arc FB, ou de l'angle FCB, dont il est la mesure.

XII. *Secante d'un arc*, ou de l'angle que cet arc mesure, est le rayon ou demi diametre qui passant à l'une des extremitez de l'arc, va étant prolongé, rencontrer la tangente. Ainsi la ligne ou rayon CE, qui passe par l'extremité F, va étant prolongée rencontrer la tangente au point E, c'est la secante de l'arc BF.

REMARQUE.

Le Sinus total, ou Sinus de l'angle droit, est toûjours un demi diametre. Ainsi le rayon IC est Sinus droit de l'angle droit ICB, ou bien de ICA.

PREMIERE PARTIE
DE LA CONSTRUCTION DES TABLES.

APrès avoir défini ce que c'est que Sinus, Tangente & Secante : nous dirons que les Geometres, qui les premiers ont connu l'utilité des Sinus, ont divisé le rayon en 60. parties égales, & chaque partie en 60. autres parties plus petites qu'ils ont appellées minutes. C'est là dessus qu'ils ont calculé des Tables, pour sçavoir la valeur de tous les Sinus des angles depuis une minute jusqu'à 90. degrez, pour pouvoir connoître par exemple la valeur du Sinus d'un angle de 54. degrez 30. minutes, ou de 86. degrez 18. minutes, en un mot toute sorte d'angles. Mais les Geometres modernes ayant reconnu que les operations que l'on faisoit par le moyen de ces Tables, n'étoient pas assez precises, afin d'éviter ce défaut, ont calculé d'autres Tables dont le Sinus total, ou le rayon du Cercle est supposé de 100000. parties, & même de 10000000. C'est la construction de ces Tables que nous allons enseigner en peu de mots, & par les voyes les plus aisées dans la premiere & seconde partie de ce Traité.

PROPOSITION I.

THEOREME.

La ſoutendante d'un arc eſt double du Sinus de la moitié du même arc.

LA ligne BC ſoutendante de l'arc BDC eſt double du Sinus de l'arc BD, qui en eſt la moitié; car le rayon AD diviſant BC en deux également, la coupera auſſi perpendiculairement (par la 3. du 3.) donc BE ſera ſinus de l'arc BD; mais BC eſt double de BE, & l'arc BDC eſt double de BD; donc BC ſera double du Sinus d'un angle qui ſera la moitié de celui dont elle eſt la ſoutendante. Fig. 5.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de là que la ſoutendante d'un arc étant connuë, l'on aura le Sinus d'un arc qui ſera la moitié de l'arc propoſé; ainſi la ſoutendante d'un arc de 60. degrez, qui eſt égal au rayon du Cercle, étant donné à ſçavoir 100000. le Sinus de trente degrez ſera 50000.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Le quarré du Sinus droit d'un arc, avec le quarré du Sinus droit de son complement, sont égaux au quarré du rayon.

Fig. 3. AU quart de Cercle BC, dont le rayon est AD, soit DF Sinus de l'arc DC, & DE Sinus de son complement BD, je dis que les quarrez de ces deux Sinus DF, DE sontégaux au quarré du rayon AD.

Car puisque BC est un quart de Cercle, CA est perpendiculaire à AB; mais DE est aussi perpendiculaire à AB, par la definition du Sinus; donc DE & CA sont paralleles; & par la même raison BA & DF sont aussi paralleles; & partant FE est un parallelograme, dont le côté DE est égal à son opposé FA; mais le quarré de AD est égal aux quarrez de DF & de FA, ou de son égal DE; par consequent le quarré de DF, Sinus droit de l'arc DC, & le quarré de DE Sinus droit de son complement DB, sont égaux au quarré du rayon AD. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de là que le Sinus droit d'un arc étant donné, l'on aura le Sinus droit de son complement au quart de Cercle; car si l'on ôte le quarré du Sinus donné, du quarré du rayon, il restera le quarré du Sinus de son complement, dont la racine quarrée sera le Sinus cherché.

Ainsi de l'arc de 36. degrez le Sinus droit étant

58779. si l'on ôte son quarré qui est 3454970841. du quarré du rayon qui est 10000000000, il restera 6545029159. pour le quarré du Sinus de 54. deg. dont la racine quarrée est 80901; quand ce qui reste excede 50000. on ajoûte une unité dans les Tables; c'est pourquoi l'on y trouve 80901, pour le Sinus de 54. deg.

PROPOSITION III.

THEOREME.

La difference des Sinus des deux arcs également éloignez de 60. degrez, est égale au Sinus de la moitié de la difference de ces deux arcs.

JE dis que si l'arc BD est de 60 degrez, & que les deux arcs BC, BE en soient également éloignez, en sorte que l'arc ED, ou CD soit égal, soit la moitié de leur difference CE; la difference des Sinus EG, CI, des deux arcs BC, BE, est égale au Sinus EO, ou CO, de la moitié CD, ou DE de leur difference CE. Fig. 4.

Si l'on tire du point C la ligne CH parallele au rayon AB, & au point F, où le rayon AD se trouve coupé par le Sinus EG, la droite CF, on connoîtra aisément que le triangle ECF est équilateral, & que la ligne EH, ou le Sinus EO, ou CO, est la difference des Sinus EG, CI. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Il s'ensuit de là, premierement que si les Sinus de deux arcs également distans de la sixiéme partie du Cercle, sont donnez, l'on trouvera le Sinus de la difference de l'un de ces arcs à la sixiéme partie du Cercle.

Par exemple, soit donné le Sinus de 40. deg. à sçavoir 64278. & celui de 80. degrez, à sçavoir 98480. qui sont également distans de 60. deg. qui est la sixiéme partie du Cercle, l'on trouvera le Sinus de 20. deg. à sçavoir 34202. parce que la difference du Sinus de 40. deg. à celui de 80. étant égale au Sinus de 20. deg. il est évident que si l'on soustrait le plus petit du plus grand, ce qui restera sera le Sinus cherché.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit encore que si le Sinus d'un arc moindre que la sixiéme partie du Cercle est donné, avec le Sinus de la difference de cet arc à la sixiéme partie du Cercle, on trouvera le Sinus d'un arc qui surpassera autant la sixiéme partie du Cercle, que l'autre en étoit surpassé.

Ainsi le Sinus de 50. deg. à sçavoir 76604. étant donné avec le Sinus de 10. deg. à sçavoir 17364. difference de 50. deg. à la sixiéme partie du Cercle, on trouvera le Sinus de 70. d. Car d'autant que la difference du Sinus de 50 deg. à celui de 70. est égale au Sinus de 10. deg. qui est le défaut de 50. d. à la sixiéme partie du Cercle, il est évident que si au Sinus de 50. deg. 76604. on ajoûte le Sinus de 10. deg. 17365. ce qui viendra, à sçavoir 93969, sera le Sinus de 70. deg. que l'on demande.

COROLLAIRE III.

De même étant donné le Sinus de 70. deg. avec celui de 10. il est évident qu'en ôtant celui-ci de l'autre, il restera le Sinus de 50. deg.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Le Sinus verſe d'un arc, & le Sinus droit de ſon complement, ſont égaux au rayon du Cercle.

SOit FG le Sinus verſe de l'arc GE, & ED, le Sinus droit de ſon complement EC; je dis que FG, ou ED, ſont égaux au rayon AG. Fig. 5.

Car puiſque DE eſt un parallelograme, ED eſt égale à AF, à quoi ajoûtant FG vient le rayon AG.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de là que le rayon étant donné, & le Sinus droit du complement de quelque arc, le Sinus verſe de cet arc ſera connu; car en ôtant du rayon le Sinus droit donné, reſtera le Sinus verſe cherché.

Ou bien le Sinus verſe d'un arc étant donné avec le rayon, le Sinus droit de ſon complement ſera connu; car en ôtant du rayon le Sinus verſe donné, reſtera le Sinus droit cherché.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Les Quarrez des Sinus droit & verſe d'un arc ſont égaux au quarré de la ſoutendante du même arc.

DE l'arc CE le Sinus droit ſoit CF, & FE le Sinus verſe; je dis que leurs quarrez ſont égaux au quarré de la ſoutendante CE. Fig. 6.

Pour le prouver. Le triangle CFE étant rectangle; il eſt évident que les quarrez de CF & de FE, ſont égaux au quarré de CE.

COROLLAIRE.

Les Sinus droit & verſe d'un arc étant donc donnez, on connoîtra la ſoutendante de cet arc, & le Sinus droit de ſa moitié.

Soit par exemple, EF. 6. & CF. 8. leurs quar-
Fig. 6. rez 36. & 64. étant ajoûtez font 100. pour le quarré de CE, dont la racine quarrée eſt 10. qui eſt ce que vaut la ſoutendante cherchée; & 5. eſt la valeur du Sinus droit du demi arc.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Au quart de Cercle, le Sinus droit d'un arc eſt moyen proportionnel entre la moitié du rayon, & le Sinus verſe d'un arc double.

Fig. 7. SOit par exemple EC, double de l'arc ED; je dis que EH Sinus droit de ED, eſt moyen proportionnel entre la moitié du rayon AG & EF Sinus verſe de l'arc double EC; c'eſt-à-dire que comme la moitié du rayon AG eſt à EH, ainſi EH eſt à EF.

Pour le prouver. Aux deux triangles AHE, CFE, l'angle AHE étant droit, & partant égal à CFE, & l'angle au point E étant commun; il s'enſuit que ces deux triangles ſont équiangles, & qu'ils ont les côtez au tour de l'angle commun E proportionnaux (par la 4. du 6.) c'eſt-à-dire que comme AE eſt à EH, ainſi CE eſt a EF, ou bien comme la moitié de AE, ſçavoir AG, eſt à EH, ainſi la moitié de CE, à ſçavoir EH eſt à EF. C. Q. F. D. il en eſt de même au demi Cercle.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de là que ſi le rayon eſt donné, avec le Sinus droit de quelque arc, on trouvera le Sinus verſe d'un arc double ; & enſuite l'on trouvera auſſi le Sinus verſe de cet arc double.

Soit, par exemple, le demi rayon AG 9. & EH Sinus droit de l'Arc ED 6. on trouvera le Sinus verſe EF 4. Car puiſqu'il y a même raiſon de AG à EH, que de EH à EF, il eſt évident, ſuivant les regles des proportions que le quarré de EH eſt égal au produit de AG, EF. Si donc on diviſe le quarré de EH qui eſt 36. par la valeur du demi rayon 9. il viendra le Sinus verſe cherché ; à ſçavoir 4. Planche 2. Fig. 15.

Et pour trouver la valeur de CF Sinus droit de CE, double de ED, après avoir trouvé le Sinus verſe, il faut trouver (par la Propoſition 4.) le Sinus droit du complement de cet arc double, & par le moyen de ce Sinus droit, trouver (par la 2. Propoſition) le Sinus droit cherché.

Ou bien il s'enſuit qu'étant donné le Sinus verſe d'un arc avec le demi rayon, on trouvera le Sinus droit d'un arc, qui ſera la moitié de l'arc propoſé : Car puiſqu'il y a même raiſon du demi rayon au Sinus cherché, qu'il y a de ce même Sinus, au Sinus verſe de l'arc double propoſé, il eſt évident par les regles des proportions, que ſi l'on multiplie les deux extrémes donnez, l'un par l'autre, le produit ſera le quarré du Sinus cherché.

Soit, par exemple AG 9. & EF 4. ſi vous les multipliez l'un par l'autre, le produit ſera 36, dont la racine quarrée 6. ſera la valeur du Sinus droit cherché EH.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

La tangente d'un arc eſt au rayon, comme le Sinus droit de cet arc, eſt au Sinus droit de ſon complement.

AU quart de Cercle ADC, ſoit DE tangente de l'arc DF, dont FG eſt le Sinus droit, & ſoit FB Sinus droit de ſon complement FC; je dis qu'il y a même raiſon de la tangente DE au rayon DA, que de FG à FB, ou à GA ſon égale.

Fig. 8. Pour le prouver. Aux deux triangles EDA, FGA, les deux angles G, & D ſont droits & égaux, & l'angle A commun; partant ces deux triangles ſont équiangles, & ont les côtez au tour des angles égaux G, & D, proportionnaux; c'eſt à-dire que comme ED eſt à DA, ainſi FG eſt à GA, ou à FB ſon égale.

On peut convertir ainſi cette propoſition, en diſant qu'il y a même raiſon de FB, Sinus d'un arc donné à FG Sinus de ſon complement, qu'il y a du rayon AD, à la tangente de ce même complement D E.

COROLLAIRE.

Etant donc donné le Sinus droit d'un arc, & celui de ſon complement, avec le rayon, on trouvera la tangente de ce même complement; car puiſque ces quatre choſes ſont proportionnelles, il eſt évident que les deux moyens connus étant multipliez l'un par l'autre, & le produit diviſé par l'extrême connu : il viendra l'autre extrême cherché. Fig. 8.

Soit, par exemple AG, ou ſon égal FB 6. FG 8. AD 10. DE ſera 13. & $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$. Car 8. multiplié par 10. font 80. leſquels diviſez par 6. vient 13. $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ pour la tangente cherchée.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Le rayon eſt moyen proportionnel entre la tangente d'un arc, & la tangente de ſon complement.

SOit ici la ligne DF tangente de l'arc DC, & BE tangente de ſon complement CB; je dis que comme DF eſt au rayon AD; ainſi le rayon AD, ou AB eſt à la tangente BE. Fig. 9.

Pour le prouver. Du point F, ſoit menée FG, paralelle à AD qui lui ſera égale, puiſque ce ſont les côtez oppoſez du parallelogramme GD.

Maintenant aux deux triangles ABE, AGF les deux angles G & B ſont droits & égaux, & l'angle A commun, partant ces deux triangles ſont équiangles, & ont les côtez au tour des angles égaux GB, proportionnaux; c'eſt-à-dire, que comme AG, ou DF ſon égale, eſt à GE, ou à ſon égale AD; ainſi AB ou ſon égale AD, eſt à BE. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Etant donc donné la tangente d'un arc, avec ſon rayon on trouvera la tangente de ſon complement, par exemple.

Soit DF 8. AD 10. la tangente BE ſera 12$\frac{1}{2}$; car Fig. 9.

puisque DF est à AD, comme AD est à BE; si on multiplie AD 10. quarrément, & que l'on divise le produit 100. par DF 8. le Quotient sera $12\frac{1}{2}$ qui sera la tangente cherchée.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Fig. 12. *Le rayon est moyen proportionnel entre le Sinus droit d'un arc, & la secante de son complément.*

SOit CB Sinus droit de l'arc GC, & AE secante de son complément CD; je dis que le rayon AC, ou AD est moyen proportionnel entre BC & AE; c'est-à-dire que comme BC est à AC, ainsi AC est à AE.

Pour le prouver. Aux deux triangles EAD, CAF, les deux angles F & D sont droits & égaux, & l'angle A commun, & partant ces deux triangles sont équiangles, & ont les côtez au tour de l'angle commun, A, proportionnaux. C'est-à-dire que comme AF, ou BC son égale, est à AC ainsi AC, ou AD son égale est à AE. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

Fig. 12 Le Sinus droit d'un arc étant donné, avec le rayon, on trouvera la secante de son complement; car puisqu'il y a même raison du Sinus droit de cet arc, au rayon, que du rayon, à la secante de son complément; le quarré du rayon étant divisé par le Sinus droit connu, il viendra la secante que l'on cherche; ainsi si AF, ou BC son égale, est 6. & le rayon AC 10. la secante AE sera $16.\frac{1}{3}$.

COROL-

COROLLAIRE II.

Etant donné le Sinus droit d'un arc, avec le rayon, on trouvera la ſecante de cet arc; car le Sinus droit d'un arc étant donné, on trouve le Sinus droit de ſon complément (par le Corroll. de la 2.) enſuite dequoi il ne faut queſe ſervir du raiſonnement précedent, & l'appliquer à ce Sinus; car il y a même raiſon du Sinus droit du complément au rayon, que du rayon à la ſecante de l'arc donné.

SECONDE PARTIE.

De la conſtruction des Tables des Sinus, des Tangentes, & des Secantes.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

De la maniere de conſtruire les Tables des Sinus.

SUppoſé ce qui a été démontré en la premiere partie, & prenant certaines choſes pour accordées, qui ont été prouvées dans les Elemens d'Euclide, la choſe n'eſt pas ſi difficile qu'elle paroît d'abord.

Le diametre du Cercle eſt ſuppoſé valoir 200000 parties par quelques-uns, & par d'autres plus ou moins ; mais nous nous tenons à cette diviſion commune, qui eſt de 200000. ſur ce pied.

Le côté de l'exagone inſcrit au Cercle vaut 100000. Car il eſt égal au rayon du Cercle (par la 15. du 4.)

Le côté du triangle équilateral inſcrit au Cercle, vaut 173205. Car le quarré d'un tel triangle eſt égal à trois fois le quarré du rayon (par la 12. du 13.) de ſorte que ſi l'on prend trois fois le quarré de 100000. & que de la ſomme on prenne a racine quarrée, ce ſera la valeur du côté de ce riangle.

Le côté du quarré inſcrit au Cercle, vaut 141421. Car(par la 6. du 4.) le côté du quarré inſcrit au Cercle ſoutient un angle droit d'un triangle, dont les deux autres côtez ſont les rayons du Cercle; d'où réſulte que le côté du quarré inſcrit au Cercle, eſt la racine quarrée de deux fois le quarré du rayon.

Le côté du Pentagone vaut 117557. Car (par la 10. du 13.) le quarré du côté du Pentagone eſt égal aux quarrez des côtez de l'Exagone & du Decagone, de ſorte que ſi l'on prend les quarrez de 100000. & de 61804. qui ſont les côtez de l'Exagone & du Decagone, la racine quarrée de leur ſomme ſera le côté du Pentagone.

Le côté du Decagone vaut 61804. d'autant que (par la 9. du 13.) le côté du Decagone eſt le moindre ſegment d'une ligne coupée en la moyenne, & extrême raiſon, qui ſeroit compoſée du côté de l'Exagone, & du côté du Decagone pris enſemble; & par le Corollaire de la même Propoſition, c'eſt le plus grand ſegment du côté de l'Exagone ou du rayon, ainſi coupé.

C'eſt pourquoi (par la 11. du 2.) ſi l'on ôte le demi rayon 50000. de la racine quarrée du quarré du rayon, & du quarré du demi rayon pris enſemble, il reſte 61803. pour côté du Decagone; & d'autant qu'il reſte encore 89191. qui eſt plus de 50000. l'on ajoûte une unité dans les Tables, & l'on met d'ordinaire 61804. pour côté du Decagone. Plan. 2.

Le côté du Quindecagone vaut 41582. car (par la 6. du 4.) le côté du Quindecagone eſt une ligne droite, compriſe entre la Baſe d'un triangle Equilateral, & celle d'un Pentagone inſcrit au Cercle, & commençant en un même point; telle qu'eſt ici DE qui eſt compriſe entre les Baſes DH, & FG. Or la valeur ou la quantité de DE ſe peut trouver ainſi. DH eſt connu étant le côté d'un triangle Equilateral inſcrit au Cercle; EG eſt auſſi connu étant le côté d'un Pentagone. Partant leurs moitiez DK, EL ſont auſſi connuës, qui ſont les Sinus droits des arcs FD, FE; d'où s'enſuit que leur difference DI ſera auſſi connuë.

De plus d'autant que EM, ou LA ſon égale eſt le Sinus droit du complement de FE, & que DN, ou AK ſon égale eſt le Sinus droit du complement de FD, les deux lignes AK, AL viendront connuës, (par la 2. Prop. de la 1. Partie.) Et partant leur difference auſſi KL, ou ſon égale IE; ſi donc au triangle rectangle DIE, les deux côtez DI & IE étant connus, on prend leurs quarrez, ils compoſeront enſemble le quarré de DE, dont la racine quarré ſera DE, côté du Quindecagone cherché. C. Q. F. D.

Le côté de l'exagone contient 60. degrez
Le côté du triangle en contient 120.
Le côté du quarré en contient 90.
Le côté du pentagone en contient 72.
Le côté du decagone en contient 36.
Le côté du quindecagone en contient 24.

Le côté de l'exagone qui eſt égal au rayon, vaut 100000. p.
Le côté du triangle en vaut 173205.
Le côté du quarré en vaut 141421.
Le côté du pentagone en vaut 117557.
Le côté du decagone en vaut 61804.
Le côté du quindecagone en vaut 41582.

Cela ſuppoſé, pour conſtruire les Tables des Sinus, il n'y a plus d'autre fatigue à eſſuyer que la longueur du travail; car il ne faut rien ſuppoſer autre choſe que ce qui eſt contenu dans les propoſitions précedentes.

Les ſoutendantes de ſoixante degrez ſont 100000. parties.
de 120. degrez 173205.
de 90. d. 141421.

de 72. degrez	117557.
de 36. d.	61804.
de 24. d.	41582.

Desquelles si l'on prend les moitiez, on aura les Sinus.

de 30. degrez	50000 parties.
de 60. d.	86602.
de 45. d.	70710.
de 36. d.	58779.
de 18 d.	30902.
de 12. d.	20701.

Et par le moyen de ces Sinus trouvant la corde de leurs arcs (par la 4. & 5. Prop. de la 1. Partie,) on aura aussi des Sinus de la moitié de leurs arcs, & des moitiez de leurs moitiez ; puis des complemens de ces moitiez, & des moitiez de ces complemens ; & à la fin cela donnera la plus grande partie de tous les Sinus que l'on cherche, excepté seulement quelque peu que l'on trouvera (par la 3. & 6. de la 1. Partie.)

PROPOSITION II.

De la maniere de construire les Tables des Tangentes.

D'Autant que (par la 7. Prop. de la 1. Partie) il y a même raison de la tangente d'un arc au rayon du Cercle, que du Sinus droit de cet arc, au Sinus droit de son complement ; & d'autant aussi que les Sinus droits de tous les arcs du Cercle sont connus, (par la précedente,) il s'ensuit que si l'on mulplie le rayon droit par le Sinus d'un arc, & que l'on divise le produit par le Sinus droit de son complement, il viendra la tangente de l'arc proposé, & par ce moyen l'on pourra achever toutes les Tables des tangentes ; mais d'autant que (par la 8.) le rayon eſt moyen proportionnel entre la tangente d'un arc, & la tangente de ſon complement, l'on abregera de moitié les operations d'Arithmetique ci-deſſus preſcrites, en prenant une ſeule fois pour toutes le quarré du rayon, & le diviſant ſucceſſivement par les tangentes de tous les arcs moindres que 45. deg. qu'on aura déja trouvées par le premier moyen ; car ce qui viendra vous donnera les tangentes des complemens de tous ces arcs.

PROPOSITION III.

De la maniere de conſtruire les Tables des Secantes.

COmme (par la 9. de la 1. Partie) le rayon eſt moyen proportionnel entre le Sinus droit d'un arc, & la ſecante de ſon complement, il s'enſuit que ſi l'on prend le quarré du rayon, & qu'on le diviſe ſucceſſivement par tous les Sinus droits de tous les arcs de Gercle, que l'on ſuppoſe connus (par les précedentes,) l'on aura ſucceſſivement les ſecantes des complemens de tous ces arcs, & ainſi l'on aura les Tables des Secantes.

Je croi avoir aſſez ſatisfait dans la premiere Partie, au deſſein que je m'étois propoſé dans ce Traité ; c'eſt-à-dire, d'enſeigner en peu de mots la maniere de conſtruire les Tables des Sinus, Tangentes & Secantes, afin de donner aux Curieux le plaiſir de ſçavoir comme ces Tables ont été calculées : ce qui doit ſuffire ; d'autant que ceux qui s'attachent à la Trigonometrie, doivent plûtôt s'appliquer à la theorie des triangles, & à la maniere d'en calculer les angles & les côtés, que de perdre le tems à rechercher quantité de choſes par rapport à la conſtruction des Tables ; car cette matiere a été épuiſée par ceux à qui nous ſommes redevables de ces Tables, qui ayant été une fois calculées, ne ſe calculeront peut être jamais.

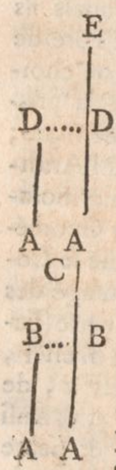
Il ne nous reſte plus qu'à parler des Logarithmes, qui eſt une autre maniere de Tables, dont nous allons enſeigner la conſtruction.

DE LA SUPPUTATION DES LOGARITHMES.

LEs Logarithmes ſont des nombres en proportion Arithmetique, correſpondans à d'autres nombres en proportion Geométrique, deſquels ils ſont appellez Logarithmes. Comme il eſt libre de prendre telle progreſſion que l'on voudra, on choiſira la plus commode, qui eſt de prendre la progreſſion décimale pour la proportion Geométrique; & la progreſſion des nombres naturels pour l'Arithmetique, en ſorte pourtant que le premier nombre Arithmetique, qui répond au premier Geométrique, ou à l'unité, ſoit o, c'eſt-à-dire, que le Logarithme de l'unité ſoit o, pour rendre l'uſage des Logarithmes, comme vous voyez dans cette Table, où le Logarithme de 1. eſt o, de 10. eſt 1, de 100 eſt 2, de 1000 eſt 3, & ainſi enſuite ; & parce que dans la pratique on a beſoin des Logarithmes des nombres moyens 2. 3. 4. 5. &c. & que ces Logarithmes ne peuvent être exprimez qu'en fractions, on ſe ſervira auſſi de la progreſſion decimale pour

Prop. Geom.	*Prop. Arith.*
1	0. 0000000
10	1. 0000000
100	2. 0000000
1000	3. 0000000
10000	4. 0000000
100000	5. 0000000
1000000	6. 0000000

la facilité du calcul, en ajoutant un certain nombre de zeros à chaque terme de la progression Arithmetique, plus ou moins, selon que l'on voudra avoir des Logarithmes plus ou mois exacts, comme vous voyez ici. Ainsi nous supposerons que le Logarithme de 10 est 1. 0000000, que le Logarithme de 100 est 2. 0000000, de 1000 est 3. 0000000, &c. ensuite de quoi il faut trouver les Logarithmes des nombres moyens 2, 3, 4, 5, &c. ce que nous ferons après avoir expliqué la nature & les proprietez des Logarithmes dans les Propositions suivantes.



PROPOSITION I.

De quatre quantitez en proportion Arithmetique, la somme des deux extrêmes est égale à la somme de deux moyennes.

SI les quatre quantitez AB, AC, AD, AE, sont en proportion Arithmetique, en sorte que l'excez BC de la seconde AC, sur la premiere AB, soit égal à l'excez DE, de la quatriéme AE sur la troisiéme AD; je dis que la somme de AB, & de AE des deux extrêmes est égale à la somme de AC, & de AD des deux moyennes, parce que chacune est composée de choses égales, comme il est aisé de voir.

PROPOSITION II.

De trois quantitez en proportion Arithmetique; la somme des deux extrêmes est égale au double de la moyenne.

CEtte Proposition est un Corollaire de la précedente; car quand on a trois quantitez Arithmetiquement proportionnelles, c'eſt comme ſi l'on en avoit quatre, dont les deux moyennes fuſſent égales, & alors la ſomme des deux extrêmes eſt (par la Propoſition précedente) égale à la ſomme des deux moyennes, c'eſt-à-dire, au double de la moyenne. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

La ſomme des Logarithmes de deux nombres entiers eſt égale au Logarithme de leur produit, lorſque le Logarithme de l'unité eſt o.

PRopoſons, par exemple, les deux nombres entiers 4, 6, dont le produit eſt 24; je dis que le Logarithme de 24, eſt égal à la ſomme des Logarithmes de 4. & de 6. le Logarithme de l'unité étant o. Car puiſque 24. eſt le produit de 4. & de 6, ces quatre nombres 1, 4, 6, 24, ſeront en proportion Geométrique, c'eſt pourquoi leurs Logarithmes ſeront en proportion Arithmetique, & (par la 1.) la ſomme des deux extrêmes, c'eſt-à-dire, la ſomme des Logarithmes de 1 & de 24, ſera égale à la ſomme des deux moyennes, ou à la ſomme des Logarithmes de 4. & de 6; & parce qu'on ſuppoſe que le Logarithme de 1. eſt o, le ſeul Logarithme de 24 ſera égal à la ſomme des Logarithmes de 4. & de 6, qui produiſent 24. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

La difference des Logarithmes de deux nombres entiers est égale au Logarithme de leur quotient, lorsque le Logarithme de l'unité est 0.

PRoposons, par exemple, les deux nombres entiers 6, 24, dont le quotient est 4; je dis que le Logarithme de 4 est égal à la difference des Logarithmes de 6 & de 24, le Logarithme de l'unité étant 0. Car puisque divisant 24 par 6, il vient 4. ces quatre nombres 1, 4, 6, 24, seront en proportion Geometrique, & leurs Logarithmes en proportion Arithmetique, & l'on connoîtra comme auparavant, que le Logarithme de 24 est égal à la somme des Logarithmes de 6 & de 4: c'est pourquoi si du Logarithme de 24, on ôte le Logarithme de 6, la difference sera le Logarithme 4. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Le Logarithme d'un nombre, est la moitié du Logarithme de son quarré, & le tiers du Logarithme de son cube, lorsque le Logarithme de l'unité est 0.

PRoposons, par exemple, le nombre 6, dont le quarré est 36, & le cube est 216; je dis premierement que le Logarithme de 6 n'est que la moitié du Logarithme de son quarré 36. Car puisque le quarré 36. est le produit de 6 par 6, son Logarithme sera égal à la somme des Logarithmes de 6 & de 6, c'est-à-dire, au double du Logarithme de 6 (par la 1.) d'où il s'ensuit que le Logarithme de 6. est la moitié du Logarithme de son quarré 36. C. Q. F. D.

Je dis en second lieu que le Logarithme de 6 est le tiers du Logarithme de son cube 216. Car puisque 216 est le produit de 6 & de son quarré 36, son Logarithme sera (par 1.) égal à la somme des Logarithmes de 6 & de 36, c'est-à-dire au triple du Logarithme de 6, parce que le Logarithme de 36 a été démontré double du Logarithme de 6. D'où il suit que le Logarithme de 6, n'est que le tiers du Logarithme de son cube 216. ce qui restoit à démontrer.

PROPOSITION VI.

Trouver entre deux nombres donnez un moyen Geometrique proportionnel.

SI on multiplie ensemble les deux nombres donnez, on aura(par 20. 7.)le quarré du moyen; c'est pourquoi si on prend la racine quarrée de ce produit, on aura le moyen qu'on cherche. D'où il suit que si l'un des deux nombres donnez est l'unité, il n'y a qu'à prendre la racine quarrée de l'autre, pour avoir le moyen proportionnel qu'on demande.

PROPOSITION VII.

Entre deux nombres donnez, trouver un moyen proportionnel arrithmetique.

SI on ajoûte ensemble les deux nombres donnez, on aura (par la 2.) le double du moyen; c'est pourquoi si on prend la moitié de cette somme, on aura le moyen qu'on cherche. D'où il suit que quand l'un des deux nombres donnez est 0, il n'y a qu'à prendre la moitié de l'autre, pour avoir le moyen qu'on cherche.

PROPOSITION VIII.

Trouver le Logarithme d'un nombre proposé.

POur trouver le Logarithme d'un nombre donné, comme de 9, qui est entre 1 & 10, dont on connoît les Logarithmes 0. 0000000, 1. 0000000, ou 0. 00000000, 1. 00000000 en les augmentant chacun d'un zéro, pour avoir plus exactement le Logarithme qu'on cherche, à cause des fractions qui restent après la derniere figure; augmentez aussi les deux nombres 1, 10, & tous les autres de la progression Geométrique, d'autant de zéros que leurs Logarithmes en contiennent, comme ici de sept zéros, pour avoir exactement dans le même nombre de figures le Logarithme du nombre proposé 9, qui alors vaudra autant que 9, 0000000, comme 1. vaut autant que 1. 0000000, que nous appellerons A, & 10, autant que 10. 0000000 que nous appellerons B: & faites ainsi.

Cherchez (par la 6.) entre A & B un moyen Geometrique proportionnel C, qui est moindre que le nombre proposé 9. 0000000; C'est pourquoi pour approcher davantage de ce nombre 9, il faudra chercher entre les deux plus proches B & C, un second moyen proportionnel D, qui étant encore moindre que le nombre proposé, 9. 0000000, & plus proche que le nombre trouvé C, on se cherchera entre ce plus proche C, & le plus grand B, un troisiéme moyen proportionnel D, qui étant encore moindre que le nombre proposé 9. 0000000 on cherchera pareillement entre ce plus proche D, & le plus grand B, un quatriéme moyen proportionnel E, qui est encore moindre que le proposé 6. 0000000; c'est pourquoi on cherchera de nou-

	Nomb. Proport.	Logarithmes
A	1.0000000	0.00000000
C	3.1622777	0.50000000
B	10.0000000	1.00000000
B	10.0000000	1.00000000
D	5.6234132	0.75000000
C	3.1622777	0.50000000
B	10.0000000	1.00000000
E	7.4989421	0.87500000
D	5.6234132	0.75000000
B	10.0000000	1.00000000
F	9.6596432	0.93750000
E	7.4989421	0.87500000
B	10.0000000	1.00000000
G	8.3057204	0.96875000
F	8.6596432	0.93750000
G	9.3057204	0.96875000
H	8.9768713	0.95312500
F	8.6496432	0.93750000
G	9.3057204	0.96875000
I	9.1398170	0.96093750
H	8.9768713	0.95312500
I	9.1398170	0.96093750
K	9.0579777	0.95703125
H	8.9768913	0.95312500
K	9.0579777	0.95703125
L	9.0173333	0.95507812
H	8.9768713	0.95312500
L	9.0173333	0.95507812
M	8.9970796	0.95410156
H	8.9768713	0.95312500
L	9.0173333	0.95507812
N	9.0072008	0.95458984
M	8.9970796	0.95410156
N	9.0072008	0.95458984
O	9.0021388	0.95434570
M	8.9970796	0.95410156
O	9.0021388	0.95434570
P	8.9996088	0.95422363
M	8.9970796	0.95410156

	Nomb. Proport.	Logarithmes
O	9.0021388	0.95434570
Q	9.0008737	0.95428467
P	8.9996088	0.95422363
Q	9.0008737	0.95428467
R	9.0002412	0.95425415
P	8.9996088	0.95422363
R	9.0002412	0.95428467
S	8.9999250	0.95421889
P	8.9996088	0.95422363
R	9.0002412	0.95428467
T	9.0000831	0.95424652
S	8.9999250	0.95423889
T	9.0000831	0.95424652
V	9.0000041	0.95424271
S	8.9999250	0.95423889
V	9.0000041	0.95424271
X	8.9999650	0.95424080
S	8.9999250	0.95423889
V	9.0000041	0.95424271
Y	8.9999845	0.95424217
X	8.9999650	0.95424080
V	9.0000041	0.95424271
Z	8.9999943	0.95424223
Y	8.9999845	0.95424217
V	9.0000041	0.95424271
&	8.9999992	0.95424247
Z	8.9999943	0.95424223
V	9.0000041	0.95424171
AA	9.0000016	0.95424259
&	8.9999992	0.95424247
AA	9.0000016	0.95424259
BE	9.0000004	0.95424253
&	8.9999992	0.95424247
BB	9.0000004	0.95424253
CC	8.9999998	0.95424250
&	8.9999992	0.95424247
BB	9.0000004	0.95424253
DD	9.0000000	0.95424251
CC	8.9999998	0.95424247

veau entre ce prochainement moindre E, & le plus grand B, un quatriéme moyen proportionnel F, qui quoique moindre que 9. 0000000, en approche plus que le précedent D; c'eſt pourquoi on cherchera entre ce prochainement moindre F, & le plus grand B, un cinquiéme moyen proportionnel G, qui ſe rencontrant ici plus grand que 9. 0000000, on doit chercher entre ce plus grand G, & le plus petit F, un ſixiéme moyen proportionnel H, qui eſt bien moindre que 9. 0000000, mais non pas avec une ſi grande difference que F, ainſi entre ce prochainement moindre H, & le prochainement plus grand G, on doit chercher un ſeptiéme moyen proportionnel I, qui eſt plus grand que 9. 0000000, mais non pas avec un ſi grand excez que G, c'eſt pourquoi entre ce prochainement plus grand I, & le prochainement moindre H, il faut chercher un huitiéme moyen proportionnel K, qui quoique plus grand que 9. 0000000, en approche encore davantage que le précedent I. Ainſi en continuant à chercher entre le prochainement moindre, le prochainement plus grand des moyens Geometriques proportionnels, on aura des nombres qui approcheront toûjours de plus en plus du nombre propoſé 9. 0000000, lequel enfin ſe trouve ici le ving-ſixiéme moyen Geometrique proportionnel, dont le Logarithme ſera connu ſans peine ; car comme entre les nombres A, B, on a trouvé un moyen proportionnel Geometrique C, ſi entre les Logarithmes des mêmes nombres A, B, on cherche (par la 7.) un moyen proportionnel Arithmetique, on aura le Logarithme du moyen proportionnel Geometrique C. C'eſt de la même façon que les Logarithmes des autres moyens Geometriques proportionnels ſe découvriroient, & par conſéquent le Logarithme du dernier 9. 0000000, ou du nombre proposé 9. dont le Logarithme se trouve tel, 0. 954242 5 1, ou 0. 9542422 5 en retranchant la derniere figure 1, vers la droite, à cause du zéro de surplus que nous avons ajoûté au commencement.

On trouvera de la même façon les Logarithmes des autres nombres entre 1, & 10, & des nombres entre 10, & 100, & pareillement des nombres entre 100 & 1000, & ainsi de suite. Mais cette Methode ne se doit appliquer qu'aux nombres premiers, c'est-à-dire qu'aux nombres qui ne sont pas divisibles par d'autres; car quand ils sont composez, & que l'on connoît les Logarithmes des deux nombres qui les produisent par leur multiplication, il est évident (par la 3.) que la somme de ces deux Logarithmes, sera le Logarithme du nombre composé. Ainsi ayant trouvé le Logarithme de 9, le double de ce Logarithme, sera le Logarithme de 81, quarré de 9, & la moitié du même Logarithme sera le Logarithme de 31 racine quarrée de 9, ainsi des autres. Nous allons parler plus particulierement des Logarithmes dans l'article suivant.

DE L'USAGE DES TABLES.

NOus avons ajoûté sur la fin de ce Traité, deux grandes Tables de nombre, dont la premiere contient les Sinus, les Tangentes, & les Secantes, avec les Logarithmes des Sinus & des Tangentes de tous les degrez & de toutes les minutes du quart de Cercle; qui sont tellement disposées dans chaque page, que les degrez & les minutes d'une page, font avec les degrez & les minutes correspondantes de l'autre page qui regarde la premiere, toûjours 90. degrez: & qu'ainsi les uns sont les complemens des autres. Ce qui est très-commode dans la pratique, où l'on a presque toûjours besoin du complement d'un arc, ou d'un angle que l'on trouve dans l'autre page vis-à-vis des degrez & des minutes de cet arc, sans avoir la peine de les ôter de 90. degrez. Ainsi l'on connoît que le complement d'un arc, ou d'un angle de 35, 16. est de 54. 44. & que le complement d'un angle de 50, 20 est de 49. 40. ainsi des autres.

Chaque page contient un demi degré, ou trente minutes, lesquelles sont marquées à côté vers la gauche, & les degrez en haut avec le Sinus, leurs Tangentes & leurs Secantes, pour un Sinus total de 10000000. parties, que l'on peut prendre seulement de 100000. parties dans les petites supputations, telles que sont ordinairement celles de la Geométrie Pratique, en retranchant deux zeros; auquel cas on doit aussi retrancher deux figures à la droite de chaque Sinus, de chaque Tangente, & de chaque Secante. Lesquelles figures pour cette fin, nous avons separées par un point, pour faire connoître qu'il faut s'arrêter à ce point, quand on veut avoir le Sinus, la Tangente, ou la Secante d'un arc, pour un Sinus total de 100000. parties.

Ainsi si l'on vouloit avoir le Sinus d'un angle de 20. degrez & 15. minutes; il faudroit chercher premierement dans la Table la page, où il y a marqué en haut 20. degrez, & puis descendre tout du long de la colomne des minutes jusqu'à ce qu'on aye rencontré 15. qui corresponde à 34611. qui se trouvent dans la colomne des Sinus; ce nombre est le Sinus qu'on cherche, c'est-à-dire de 20. degrez, & 15. minutes. La Tangente du même angle se trouve aussi dans le même rang, qui est 36891. Pareillement si l'on vouloit avoir la Secante, elle se trouve aussi dans le même rang qui est ici de 106588. ainsi pour les autres. Quant

Quant aux Logarithmes des Sinus & des Tangentes, ils ſont pour un Sinus total beaucoup plus grand, ſçavoir de 10000000 parties ; ce qui fait voir évidemment, qu'en travaillant par Logarithmes, les grands calculs ſont non ſeulement plus faciles, mais encore plus exacts.

Pour trouver le Logarithme du Sinus d'un angle de 12 degrez & 44 minutes. Je cherche comme ci-devant la page où les 12 degrez ſont marquez, & étans deſcendu juſqu'aux 44 minutes ; je trouve que le Logarithme de 12. degrez & de 44 minutes, eſt 9343238 6 la Tangente du même angle ſe trouve ainſi à côté.

Nous avons omis les Logarithmes des Secantes, parce qu'on s'en peut paſſer dans la pratique, comme vous verrez dans les deux Livres ſuivans, où tous les cas qui ſe peuvent reſoudre par les Secantes, ſe reſoudront auſſi autrement ; ſçavoir par les Sinus, ou par les Tangentes.

La ſeconde Table contient les Logarithmes des nombres naturels, depuis l'unité, juſqu'à 10000, ce qui ſuffit pour les calculs de la Geométrie pratique ; & il eſt facile par ce qui a été dit de la prolonger juſqu'au Logarithme de 10000000, ſans que l'erreur ſoit ſenſible.

PROBLEME I.

Multiplier enſemble deux nombres entiers moindre que 10000.

CHerchez dans la ſeconde Table les Logarithmes des deux nombres propoſez, & ajoûtez enſemble ces deux Logarithmes, dont la ſomme ſera le Logarithme du produit des deux nombres donnez (*par la Prop.* 4.) C'eſt pourquoi ſi l'on cherche ce Logarithme dans la derniere Table, & on l'y trouvera toûjours, pourvû qu'il ne ſurpaſſe pas 4. 0000000, qui eſt le Logarithme du dernier & plus grand nombre 10000 de la Table, on trouvera vis-à-vis le nombre auquel il appartient, pour le produit de la multiplication.

Comme pour multiplier enſemble ces deux nombres 144, 64, dont les Logarithmes ſont 2. 1583625, 1. 8061800, leſquels étant ajoûtez enſemble on a ce Logarithme 3. 9645425, auquel il répond dans la Table 9216, pour le produit des deux nombres propoſez 144. 64.

SCOLIE.

Il peut arriver que la ſomme des deux Logarithmes ſera plus grande que 4. 0000000, auquel cas on ne pourra pas la trouver dans la derniere Table, pour lors on pourra trouver à quel nombre ce Logarithme appartient (*par Prob.* 11.)

PROBLEME II.

Diviſer un nombre entier moindre que 10000, *par un autre.*

CHerchez dans la ſeconde Table les Logarithmes des deux nombres propoſez, & du Logarithme du Dividende ôtez le Logarihme du Diviſeur, & le reſte ſera le Logarithme du Quotient. C'eſt pourquoi ſi l'on cherche ce Logarithme dans la derniere Table, ou ſon plus proche, on trouvera vis-à-vis le Quotient qu'on cherche.

Comme pour diviſer 9216, dont le Logarithme eſt 3. 9645425 par 64, dont le Logarithme est 1. 8061800 ; en ôtant ce Logarithme du précedent, il reste cet autre Logarithme 2. 1583625, auquel il répond dans la seconde Table, 144 pour le Quotient de la Division.

SCOLIE.

Lorsqu'il y aura au Quotient une Fraction, ce que l'on connoîtra quand le Logarithme qu'on cherche dans la Table, ne s'y trouvera pas exactement, on connoîtra cette Fraction, comme il sera enseigné dans le *Prob.* 11.

PROBLEME III.

Trouver la Racine quarrée d'un nombre donné moindre que 10000.

SI l'on prend la moitié du Logarithme du nombre proposé, on aura le Logarithme de la Racine qu'on cherche. Comme pour trouver la Racine quarrée de ce nombre 9216, dont le Logarithme est 3. 9645425 ; la moitié de ce Logarithme est 1. 982272, à laquelle il répond dans la seconde Table, 96 pour la Racine quarrée du nombre proposé 9216.

PROBLEME IV.

Trouver la Racine cubique d'un nombre donné moindre que 10000.

SI l'on prend le tiers du Logarithme du nombre proposé, on aura le Logarithme de la Racine qu'on cherche. Comme pour trouver la Racine cubique de nombre 9261, dont le Logarithme eſt 3. 9666579 ; le tiers de ce Logarithme 1. 3222193, auquel il répond dans la derniere Table, 21 pour la Racine cubique du nombre propoſé 9261.

PROBLEME V.

Trouver le Logarithme d'un nombre entier plus grand que 10000.

ON peut trouver le Logarithme d'un nombre moindre que 10000 dans la derniere Table, par le moyen de laquelle on trouvera le Logarithme d'un nombre plus grand que 10000, par une Methode qui n'eſt pas bonne dans la rigueur Geometrique, mais qui ne manque pas ſenſiblement pour les nombres plus grands que 10000 juqu'à 10000000 : c'eſt pourquoi nous nous en ſervirons ici.

Pour donc trouver le Logarithme d'un nombre plus grand que 10000, & moindre que 10000000 comme de 3567894 : parce que ce nombre ſurpaſſe le plus grand de ceux, dont les Logarithmes ſont marquez dans la derniere Table, & qu'ainſi on ne peut pas l'y trouver, ni par conſequent ſon Logarithme ; on retranchera de ce nombre les trois figures à la droite 894, afin que le reſte 3567 ſe puiſſe trouver dans la Table, & vis-à-vis ſon Logarithme 3. 5523031. On en pourroit bien retrancher plus de figures, mais comme le reſte ſeroit plus petit, & que les differences des Logarithmes ſont au commencement de la Table plus inégales entr'elles, cela pourroit cauſer quelque erreur. Ainſi afin que l'erreur ſoit moins conſiderable, on doit retrancher du nombre propoſé le moins de figures à la droite que l'on pourra, afin que le reſte se puisse trouver autant proche qu'il sera possible de la fin de la seconde Table, où les differences des Logarithmes croissent plus lentement, c'est-à-dire où les Logarithmes approchent plus de la progression Arithmetique simple, telle que cette Methode la suppose, laquelle ainsi donnera un Logarithme plus exact.

En se servant donc du Logarithme 3 5523031 de 3567, qui vaut autant que 3567000, qui est 1000 fois plus grand que 3567; à cause que c'est comme si du nombre proposé 3567894 on en avoit ôté 894, lorsqu'on en a retranché les trois figures 894; on ajoûtera à ce Logarithme 3.5523031, le Logarithme de 1000, qui est 3.0000000, ce qui se fera par abregé en augmentant la caracteristique 3, du Logarithme 3,5523031 de 3 unitez, à cause des trois figures retranchées 894, car la multiplication se fait en Logarithmes par l'addition des Logarithmes des nombres multiplians, comme vous avez vû au *Probl.* 1. & l'on aura 6. 5523031. pour le Logarithme de 3567000, lequel Logarithme est moindre que celui du nombre proposé, 3567894; pour sçavoir de combien le Logarithme est moindre, ôtez le Logarithme 3. 5523031 de 3567 du Logarithme 3.5524248 du nombre immediatement suivant 3568, le reste sera 1217 pour la difference des Logarithmes des nombres 3567, 3568, laquelle est aussi la difference des Logarithmes des nombres 3567000, 3568000, dont la difference est 1000, qui répond à la difference 1217 de leurs Logarithmes. ainsi on dira par la Regle de Trois directe, si 1000 qui est l'excez de 3568000 sur 3567000, donne 1217 pour la difference de leurs Logarithmes, combien donnera 894 qui est l'excez du nombre proposé 3567894 sur 3567000 ? & l'on trouvera 1087 pour sa difference de leurs Logarithmes, laquelle par consequent étant ajoûtée au Logarithme 6. 5523031 du plus petit 3567000, on aura 6. 5524118 pour le Logarithme du plus grand nombre, ou du nombre proposé 3567894.

PROBLEME VI.

Trouver le Logarithme du Sinus droit connu d'un arc.

IL est évident par le Problême précedent, que si le Sinus droit connu d'un arc est pour un Rayon de 10000000, on pourra connoître le Logarithme de ce Sinus, comme il vient d'être enseigné. Mais si ce Sinus connu est pour un Rayon de 10000000000 parties, pour lequel les Logarithmes des Sinus, des Tangentes, & des Secantes ont été supputez dans la premiere Table, quoique ces Sinus, ces Tangentes, & ces Secantes n'y ayent été calculez que pour le Sinus Total de 10000000 parties; dans ce cas le Sinus proposé pourra être plus grand que 10000000, & la Methode du Probleme précedent ne pourra plus servir, parce que les differences des Logarithmes seront trop inégales, pour pouvoir donner au juste le Logarithme d'un nombre si grand. Alors il est absolument nécessaire de se servir d'une Table des Logarithmes plus ample que la seconde, où il y ait au moins les Logarithmes des nombres jusqu'à 100000, telle qu'on la trouve dans l'*Arithmetique Logarithmetique d'Henrys Brigs*, dont nous nous servirons en raisonnant comme dans le Problême précedent, pour trouver le Logarithme du Sinus proposé d'un arc, par exemple de ce Sinus 4226182617, qui appartient à un arc de 25 degrez, pour un Rayon de 10000000000 parties, comme vous allez voir.

Parce que le nombre proposé 4226182617 ne se trouve pas dans la Table des Logarithmes, on en retranchera vers la droite les cinq figures 82617, afin que le reste 42261 s'y puisse trouver, & vis-à-vis son Logarithme 4. 6259398, dont le caracteristique 4 doit être augmentée de 5 unitez, qui valent autant que 5.0000000, qui est le Logarithme de 100000, à cause des 5. figures retranchées 82617, qui font que le reste 42261 vaut autant que 4226100000, qui est 100000 fois plus grand que 42261, dont le Logarithme par consequent sera 9.6259398; qui est moindre que le Logarithme du nombre proposé 4226182617: & pour sçavoir de combien il est moindre, ôtez le Logarithme 4. 6259398 de 42261, du Logarithme 4. 6259500 du nombre immédiatement suivant 42262, le reste sera 103 pour la difference des Logarithmes des nombres 42261, 42262, laquelle est aussi la difference des Logarithmes des nombres 4226100000, 4226200000, dont la difference est 100000, qui répond à la difference 103 de leurs Logarithmes. C'est pourquoi on dira par la Regle de Trois directe, si 100000 qui est l'excez de 4226200000 sur 4226100000, donne 103 pour la difference de leurs Logarithmes, combien donnera 82617 qui est l'excez du nombre proposé 4226182617 sur 4226100000? & l'on trouvera 85 pour la difference de leurs Logarithmes, laquelle par consequent étant ajoûtée au Logarithme 9. 6259398 du plus petit 4226100000, on aura 9. 6259483 pour le Logarithme du plus grand 42261826617, ou du Sinus proposé d'un arç ou d'un angle de 25 degrez.

SCOLIE.

On peut se servir de la seconde Table sans qu'il soit besoin de la prolonger, parce que par le moyen du *Probl.* 5. on peut trouver les Logarithmes des deux nombres 42261, 42262, & par consequent ceux des deux nombres 4226100000, 4226200000, en augmentant les caracteristiques chacune de 5 unitez, parce que ces deux nombres sont multiples des deux précedens par ce nombre 100000, dont le Logarithme est 5. 0000000; après quoi on achevera le reste, comme il a été enseigné dans ce Problême, ou dans le précedent.

PROBLEME VII.

Trouver les Logarithmes des Tangentes & des Secantes.

Les Logarithmes des Tangentes & des Secantes se peuvent supputer de la même façon que les Logarithmes des Sinus : mais cela se peut faire plus facilement & plus exactement par le moyen des Logarithmes des Sinus, comme vous allez voir.

Parce que la Tangente d'un arc est quatriéme proportionnelle au Sinus du Complement, au Sinus droit, & au Sinus Total, il s'ensuit que si au Logarithme du Sinus de l'arc proposé on ajoûte le Logarithme du Sinus Total, & que de la somme on ôte le Logarithme du Sinus du complement, on aura le Logarithme de la Tangente du même arc.

Comme si l'on propose un arc de 25. degrez dont le Logarithme du Sinus est 9. 6259483, & le Logarithme du Sinus de complement est 9.

9572757. si l'on ôte ce Logarithme de la somme 19. 6259483, du Logarithme 9. 6259483 du Sinus de 25 degrez, & du Logarithme 10. 0000000 du Rayon, le reste 9. 6686726 sera le Logarithme de la Tangente de l'arc proposé de 25 degrez, dont la Tangente du complement se trouvera par Logarithmes, en ôtant du double du Logarithme du Rayon le Logarithme de la Tangente, qui vient d'être trouvée, parce que le Rayon est moyen proportionnel entre ces deux Tangentes, ce qui fait que la somme des Logarithmes de ces deux mêmes Tangentes est double du Logarithme du Sinus Total.

Pareillement parce le Rayon est moyen proportionnel entre la Secante d'un arc & le Sinus du complement, il s'ensuit que si du double du Logarithme du Sinus Total on ôte le Logarithme du Sinus du complement de l'arc proposé, on aura le Logarithme de la Secante du même arc.

Comme si l'on propose le même arc de 25 degrez, dont le Logarithme du Sinus du complement est 9. 9572757 : si l'on ôte ce Logarithme du double 20. 0000000 du Logarithme du Sinus Total, il restera 10. 0427243 pour le Logarithme de la Secante de 25 degrez.

PROBLEME VIII.

Trouver le Logarithme du Sinus verse d'un arc proposé.

SI l'arc proposé est moindre qu'un quart de Cercle, en ôtant son Sinus du complement du Sinus Total, on aura son Sinus verse, & l'arc proposé est plus grand qu'un quart de Cercle, en ajoûtant le Rayon au Sinus du complement, on aura le

Sinus verſe, lequel étant ainſi connu, on en pourra connoître le Logarithme *par Probl.* 5. Mais cela ſe peut faire immediatement & plus facilement en cette ſorte.

Parce que le quarré du Sinus d'un arc eſt égal au produit ſous le Sinus verſe de cet arc & la moitié du Rayon, ou le Sinus de 30 degrez, il s'enſuit que ſi l'on diviſe le quarré du Sinus de la moitié d'un arc toûjours par le Sinus de 30 degrez, on aura le Sinus verſe du même arc. D'où il ſuit que ſi du double du Logarithme du Sinus de la moitié de l'arc propoſé on ôte toûjours ce nombre 9. 6989700, qui eſt le Logarithme du Sinus d'un arc de 30 degrez, on aura le Logarithme du Sinus verſe de l'arc propoſé.

Comme ſi l'on propoſe un arc de 25 degrez, dont la moitié eſt 12. 30. Le Logarithme du Sinus de cette moitié eſt 9. 3353368, dont le double eſt 18. 6706736, duquel ôtant le Logarithme 9. 6989700, le reſte 8. 9717036 eſt le Logarithme du Sinus verſe de l'arc propoſé de 25 degrez.

PROBLEME IX.

Trouver le Logarithme d'une Fraction propoſée.

NOus avons remarquez au commencement de ce Chapitre, que le Logarithme d'une Fraction, qui eſt moindre que l'unité, dont le Logarithme eſt 0, eſt un nombre nié, lequel eſt égal à la difference des Logarithmes du Numerateur & du Dénominateur de la Fraction propoſée. Ainſi on connoîtra que le Logarithme de cette Fraction $\frac{3}{4}$ — eſt 0. 1249388, & que le Logarithme de celle-ci, $\frac{10}{3}$ eſt—0. 3617278. Ainſi des autres.

PROBLEME X.

Trouver le Logarithme d'un nombre entier avec une Fraction.

POur resoudre ce Problême, il faut du nombre entier donné avec sa Fraction, en faire une Fraction impropre, dont le Logarithme étant trouvé *par Probl. 9.* sera celui qu'on cherche, mais il sera affirmé, parce que la Fraction impropre est plus grande que l'unité. Ainsi on connoîtra que le Logarithme de $5\frac{2}{3}$, ou de $\frac{17}{3}$ est 0. 7533277: & que le Logarithme de $25\frac{3}{4}$, ou de $\frac{103}{4}$ est 1. 4107772. Ainsi des autres.

PROBLEME XI.

Trouver à quel nombre appartient un Logarithme donné.

PRemierement si le Logarithme donné est moindre que le dernier & plus grand 4. 0000000 de la seconde Table, qui est le Logarithme de 10000, il se pourra toûjours trouver dans cette Table, ou pour le moins celui qui en approchera le plus, pour avoir vis-à-vis à la gauche le plus proche nombre entier, auquel le Logarithme proposé appartient. Mais pour avoir ce nombre plus exactement, lorsque le Logarithme proposé ne se trouvera pas entierement dans la derniere Table, on fera ainsi.

Pour connoître par exemple à quel nombre appartient ce Logarithme 3. 9531250, qui est moindre que 4. 0000000, cherchez ce Logarithme dans la seconde Table; & par ce qu'il ne s'y trouve pas exactement, arrêtez-vous au Logarithme 3. 9530828, qui est moindre & plus proche, auquel il répond à la gauche ce nombre 8976, qui fait connoître que le Logarithme proposé 3.9531250 appartient à 8976, & quelque chose de plus, qui ne sçauroient être qu'une Fraction, que l'on trouvera en cette sorte.

Si vous voulez que le Dénominateur de la Fraction qu'on cherche, soit par exemple 100, en sorte que l'unité ou l'entier soit divisé en 100 parties égales, pour trouver le Numerateur, ôtez du Logarithme proposé 3.9531250, le Logarithme prochainement moindre 3.9530828 de 8976, pour avoir l'excez 422 du Logarithme proposé sur le Logarithme de 8976. Otez aussi le même Logarithme moindre 3.9530828 du Logarithme immédiatement suivant 3.9531312 de 8977, pour avoir l'excez 484, qui répond à l'unité, ou à 100 parties, parce que c'est la difference des Logarithmes des nombres 8976, 8977, c'est pourquoi pour trouver à proportion ce que doit donner l'excez 422 du Logarithme proposé sur le Logarithme de 8976, on dira par la Regle de Trois directe, si l'excez 484 donne 100 parties, combien donnera l'excez 422? vous trouverez 87 parties pour le Numerateur de la Fraction qu'on cherche, laquelle par consequent sera $\frac{87}{100}$. Ainsi on dira que le Logarithme proposé 3.9531250 est le Logarithme de 8976 $\frac{87}{100}$ assez près.

J'ai dit assez près, parce que cette Methode n'est pas bonne dans la rigueur Geometrique, mais elle ne manquera pas sensiblement, quand le Logarithme proposé se trouvera entre ceux de 1000 & de 10000, dont les differences sont à peu près proportionnelle à celles de leurs nombres. C'est pourquoi lorsque le Logarithme proposé sera moindre que celui de 1000, pour trouver plus exactement à quel nombre il appartient, on l'augmentera du Logarithme de tel nombre qu'on voudra, pourvû que la ſomme ſe puiſſe trouver entre les Logarithmes de 1000 & de 10000, & ayant trouvé, comme il vient d'être enſeigné, à quel nombre ce Logarithme appartient, on diviſera ce nombre ainſi trouvé par celui dont le Logarithme a été ajoûté au propoſé, parce que l'addition des Logarithmes eſt une multiplication en nombres abſolus, pour avoir ainſi le nombre qu'on cherche avec ſa Fraction, autant exactement qu'il eſt impoſſible.

Comme pour ſçavoir à quel nombre appartient ce Logarithme 1.8243945, qui eſt trop petit, on lui ajoûtera ce Logarithme 2.0000000, qui appartient au nombre 100, & l'on aura cet autre Logarithme 3. 8243945, qui appartient à ce nombre $6674 \frac{13}{100}$, lequel étant diviſé par 100, qui eſt le nombre dont le Logarithme a été ajoûté au Logarithme propoſé, on aura $66 \frac{7413}{10000}$, pour le nombre qui appartient au Logarithme propoſé 1. 8243945.

Secondement ſi le Logarithme donné eſt plus grand que le dernier 4. 0000000 de la ſeconde Table, comme ſeroit 4. 5524118, on trouvera à quel nombre appartient ce Logarithme qui ne ſe peut pas trouver dans la derniere Table, pour être trop grand, en le diminuant du Logarithme d'un nombre le plus petit que l'on pourra, en ſorte que le reſte ſe puiſſe trouver dans la ſeconde Table, comme de ce Logarithme 0. 6020600, qui appartient au nombre 4, & il reſtera cet autre Logarithme 3. 9503158, qui appartient au nombre $8919 \frac{73}{100}$, lequel étant multiplié par le nombre 4, dont le Logarithme a été ôté du propoſé, parce que la ſouſtraction des Logarithmes eſt une division en nombres vulgaires, on aura 35678 $\frac{25}{25}$ pour le nombre qui appartient au Logarithme proposé 4. 5524118.

PROBLEME XII.

Trouver le Sinus, la Tangente, ou la Secante d'un arc ou d'un angle connu en Degrez, Minutes, & Secondes.

POur trouver par exemple le Sinus d'un arc ou d'un angle de 40 degrez, 32 minutes, & 22 secondes, on trouvera dans la premiere Table que le Sinus de 40 degrez & 32 minutes est 6498903, auquel il faut ajoûter quelque chose à raison des 22 secondes qui sont du surplus : & pour trouver ce qu'il lui faut ajoûter, ôtez-le du Sinus immediatement suivant 6501114, pour avoir leur difference 2211, qui répond à une minute, ou 60 secondes. C'est pourquoi on dira par la Regle de Trois directe, si 60 secondes donnent 2211 pour l'excez du Sinus 40. 33'. sur le Sinus de 40. 32'. combien donneront 22 secondes ? & l'on trouvera 811 pour l'excez du Sinus de 40. 32'. 22', sur le Sinus de 40. 32', si donc on ajoûte cet excez 811 au Sinus 6498903 de 40. 32', on aura 6499714, pour le Sinus de l'arc proposé de 40. 32'. 22.

On trouvera de la même maniere le Logarithme du Sinus d'un arc ou d'un angle proposé en degrez, minutes, & secondes, & il est aisé de juger que l'on peut aussi trouver de la même façon les Tangentes & les Secantes, soit en nombres absolus, ou en Logarithmes, mais elles ne se trouveront pas si exactement que le Sinus, parce que leurs differences sont plus inégales.

PROBLEME XIII.

Trouver les Degrez, les Minutes, & les Secondes d'un Sinus, d'une Tangente, ou d'une Secante proposée.

POur trouver à quel angle, ou à quel arc appartient par exemple ce Sinus 6297824, on cherchera ce Sinus dans la premiere Table, & comme il ne s'y trouve pas exactement, on s'arrêtera à son plus proche & moindre 6297724 qui répond à un arc de 39 degrez & 2 minutes, ce qui fait connoître que le Sinus proposé 6297824 appartient à un arc ou à un angle de 39. 2', & quelques secondes de plus, & que l'on trouvera en cette sorte.

Otez ce Sinus moindre 6297724 de son suivant 6299983, qui appartient à un arc de 39. 3', pour avoir leur difference 2259, qui répond à une minute, ou à 60 secondes. Otez-le aussi du Sinus proposé 6297824, pour avoir leur difference 100, & dites par la Regle de Trois directe; si l'excez 2259 du Sinus de 39. 3', sur le Sinus de 39. 2', donne 60 secondes, combien donnera l'excez 100 du Sinus proposé sur le même Sinus de 39. 2'? & vous trouverez 2 secondes pour le surplus qu'on cherche; de sorte que vous prononcerez que le Sinus proposé 6297824 appartient à un arc de 39. 2'. 2''.

On trouvera de la même façon les Degrez, les Minutes, & les Secondes d'un Logarithme de Sinus: & il est facile de concevoir que cette Methode se peut aussi appliquer aux Tangentes & aux Secantes, mais elles ne donneront pas les secondes si exactement, parce que leurs differences sont plus inégales.

PROBLEME XIV.

Trouver le Logarithme de la difference de deux nombres quarrez donnez.

PArce que la difference de deux nombres quarrez est égale au produit sous la somme & la difference de leurs côtez, il s'ensuit que si l'on ajoûte ensemble les Logarithmes de cette somme & de cette difference, on aura le Logarithme de la difference des deux quarrez proposez.

Comme si l'on propose ces deux nombres quarrez 65536, 20736, dont les côtez sont 256, 144, desquels la somme est 400, & la difference est 112, dont les Logarithmes sont 2. 6020600, 2. 0492180; la somme 4. 6512780 de ces deux Logarithmes sera le Logarithme de la difference 44800 des deux quarrez proposez.

On est averti qu'aux Titres des pages où il y a Définitions, il devoit y avoir de la Construction des Tables.

TROISIE'ME PARTIE.

Du calcul des Triangles rectilignes.

PROPOSITION. I.

Si dans un Triangle rectangle, la base est prise pour le rayon du Cercle, les côtez seront les Sinus des angles opposez.

AU Triangle rectangle ABC, si le côté BC, est pris pour le rayon du Cercle, je dis que AB sera le Sinus de l'angle C, & que AC sera le Sinus de l'angle B. Fig. 10.

Pour le prouver. Par la définition du Sinus, AB est le Sinus de l'arc BD, ou de l'angle C; de même BE, ou son égal AC, est le Sinus de l'arc BF, ou de l'angle BCF, mais l'angle ABC est égal à l'angle BCF; par consequent le côté AC est le Sinus de l'angle ABC. C. Q. F. D.

Corollaire I.

Dans un Triangle rectangle la base étant connuë, avec un des angles, l'on connoîtra l'autre angle & les côtez.

Soit BC 37. & l'angle ACB 36 degrez, l'angle ABC son complement a 90 degrez sera de 54 degrez, maintenant le Sinus de 36 degrez est 58779. & le Sinus de 54 degrez est 80902; ensuite de quoi l'on trouvera AB 21. t. $\frac{1}{4}$ ou environ, & AC 30. t. ou environ.

Car comme BC, 100000. eſt à BC 37. toiſes; ainſi AB, 58779 eſt à AB 21. toiſes ¼ ou environ. De même, comme BC, 100000, eſt à BC 37. toiſes, ainſi AC 80902 eſt à AC 30 toiſes ou environ.

COROLLAIRE II.

La baſe étant encore donnée avec l'un des côtez, on connoîtra les deux autres angles & l'autre côté.

Soit encore la baſe BC 37. t. & le côté connu AB 22 t. on trouvera l'angle ACB de 36 degrez 29 minutes.

Car comme BC. 37. t. eſt à BC, 100000 ainſi AB 22. t. eſt à AB 59459. Sinus de l'angle ACB qui vaut 36 degrez 29 minutes, & pour le côté AC, on le peut trouver, ou par le précedent Corollaire, à cauſe que l'angle C étant connu, tous les trois le ſont avec la baſe; ou par la 47. du 1.

COROLLAIRE III.

Etant encore donné l'un des côtez avec les angles, on connoîtra la baſe & l'autre côté.

Soit AC 30. t. & l'angle ABC 55 degrez, on trouvera BC 36. toiſes. Car comme AC Sinus de l'angle ABC, 81915 eſt à AC 30 toiſes, ainſi CB 100000 eſt à CB 36 toiſes, & pour le côté AB il ſe peut trouver par le 1. Corol. ou par la 47 du 1.

PROPOSITION II.

Si dans un Triangle rectangle, l'un des côtez est pris pour le rayon du Cercle, l'autre côté sera la Tangente de l'angle auquel il est opposé, & la base en sera la Secante.

AU Triangle rectangle ABC, le côté AC étant pris pour le rayon du Cercle; je dis que AB est la Tangente de l'angle C, & que CB en est la Secante. Fig. 10.

Car après avoir du centre C, & de l'intervalle CA, décrit le Cercle ADE, il est évident (par la définition de la Tangente) que AB perpendiculaire au rayon est la Tangente de l'arc AD, ou de l'angle C.

COROLLAIRE I.

Etant donc connu, l'un des côtez d'un Triangle rectangle, avec les angles, l'on connoîtra l'autre côté & la base. Ce Corollaire est une autre maniere de trouver la même chose que ce qui a été trouvé par le Corollaire precedent.

Soit AC 53 toises, & l'angle C 34 degrez, l'on connoîtra le côté AB 36 toises. Car comme AC 100000 est à AC 53. toises, ainsi AB Tangente de l'angle C 67451, est à AB 36 toises.

De même pour la base CB, comme AC 100000 est à AC 53 toises, ainsi CB Secante de C, 120622 est à CB 63 toises.

COROLLAIRE II.

Les côtez d'un Triangle rectangle étant connus, on connoîtra les deux autres angles & la base.

Fig. 11. Au Triangle ADC, le côté AC étant 53 toises, & AB 36. toises, l'on connoîtra premierement la base (par la 47. du 1.) puis on connoîtra l'angle C de 34. degrez 11. minutes.

Car comme AC 53. toises est à AC 100000. ainsi AB 36. tois. est à AB Tangente de l'angle C 67924 dont l'angle vaut 34. degrez 11. minutes.

PROPOSITION III.

En tout Triangle les côtez sont en même raison que les Sinus de leurs angles opposez.

Plan. 1. Fig. 16. AYant fait passer la circonference d'un Cercle par les sommets des trois angles A, B & C, les trois côtez du Triangle seront des cordes sur lesquelles si on abaisse du centre L, des perpendiculaires, LG, LH, & LI, elles seront chacunes partagées en deux également aux points D, E, F, aussi bien que les arcs qu'elles soûtiennent. Or l'angle C a pour mesure la moitié de l'arc BGA sur lequel il s'appuye (par la 20 du 3.) mais nous avons dit dans nos définitions, que le Sinus d'un angle étoit la moitié de la corde d'un angle double : cela étant la ligne DB sera donc le Sinus de l'arc GB, ou de l'angle C, par la même raison BE est le Sinus de l'angle A, & CF de l'angle B; mais AB a même raison à sa moitié DB, que BC à sa moitié BE : donc en raison alterne AB est à BC, comme DB Sinus de l'angle C, est à BE Sinus de l'angle A. De même BC sera à CA, comme EC Sinus de l'angle A, est à CF Sinus de l'angle B. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Plan. 2. Fig. 18. Il suit de cette Proposition que dans un Triangle qui n'est pas rectangle, tel que EFG; si l'on connoît l'angle F de 43. degrez, qui est opposé au côté

EG de 12. toises, l'on connoîtra aisément par le moyen de l'angle G de 54. le côté EF qui lui est opposé; en faisant cette analogie. Comme le Sinus 68199 de l'angle de 43 degrez est à 12 toises côté opposé, ainsi 81915 Sinus de 54. degrez est au côté EF que je cherche, & qui se trouve ici de 14. toises, & près d'un tiers. Il est bon de remarquer que dans les Colloraires précedens, aussi bien que dans celui-ci, lorsqu'on dit en analogie, comme le Sinus de cet angle là est à ce côté-ci, ainsi le Sinus de cet angle ci est à ce côté-là; c'est la même chose que si l'on disoit si le Sinus de cet angle-là m'a donné tant pour son côté opposé, que donnera cet angle-ci pour son côté opposé que je cherche. Ceci est comme vous voyez l'opération de la Regle de Trois.

PROPOSITION IV.

La somme des deux cotez inégaux d'un Triangle qui n'est pas équilateral, est à leur difference, comme la Tangente de la moitié de la somme des deux angles opposez à ces deux côtez inégaux, est à la Tangente de la moitié de la difference des mêmes angles.

JE dis que des deux côtez inégaux AC, BC, du Triangle ABC, la somme est à leur difference, comme la Tangente de la moitié de la somme des angles A, B opposez à ses deux côtez, est à la Tangente de la moitié de la difference des mêmes angles AB. Plan. 2. Fig. 14.

Décrivez de l'angle C, compris par les deux côtez AC, BC, dont il est question, par la pointe de l'un de leurs angles opposez A, B, comme par la pointe B, une circonference de Cercle EBDH. Prolongez l'un des deux mêmes côtez AC, BC,

comme AC, de part & d'autre juſqu'à la circonference du Cercle aux points D, E, & joignez les droites BD, BE, qui ſeront perpendiculaires entr'elles (par la 31. du 3.) & alors on connoîtra aiſément que AD eſt la ſomme des côtez AC, BC; à cauſe des deux lignes égales BC, CD, & que AE eſt la difference des mêmes côtez AC, BC, à cauſe des deux lignes égales BC, CE. Tirez encore du point E, la droite EF parallele à la droite BD, & par conſequent perpendiculaire à la ligne BE (par la 29. du 1.) laquelle ligne EF rencontre le troiſiéme côté AB prolongé en F. Décrivez encore du point E par le point B, l'arc de Cercle BG, qui (par la 16. du 3.) ſera touché en B par la droite BD, laquelle par conſequent ſera la Tangente de cet arc BG, ou de l'angle BED qu'il meſure, à l'égard du Sinus total EB: & du point B par le point E, l'arc EI, qui (par la 16 du. 3.) ſera touchée en E, par la droite EF, laquelle par conſequent ſera la Tangente de l'arc EI, ou de l'angle AEB qu'il meſure; & alors on connoîtra (par la 32. du 1.) que l'angle BCD, eſt la ſomme des deux angles A, B, & (par la 20. du 3.) que l'angle BED eſt la moitié de cette ſomme; d'où il ſuit que la ligne BD eſt la Tangente de la moitié de la ſomme des angles A, B, à l'égard du rayon EB, on connoîtra auſſi (par la 32. du 1.) que l'angle A ſurpaſſe l'angle BED, du petit angle ABE, & que l'angle B eſt ſurpaſſé par le même angle BED, ou BEC ſon égal (par la 5. du 1.) du même petit angle ABE,
Plan. 2. Fig. 14. & que par conſequent ce petit angle ABE eſt la moitié de la difference des deux angles A, B, & qu'ainſi la Tangente de la moitié de leur difference eſt EF. Je dis donc que la ſomme des côtez AD, eſt à leur difference AE, comme la Tangente BD de la moitié de la ſomme des angles, eſt à la Tan-

gente EF de la moitié de leur difference.

Parce que les deux lignes DB, EF ſont parallele (par la conſtruction) les deux angles alternes BDE, DEF, ſeront égaux (par la 29 du 1.) & parce que les deux angles oppoſez au ſommet BAD, EAF, ſont auſſi égaux entr'eux (par la 15. du 1.) il s'enſuit (par la 32. du 1.) que les deux Triangles ABD, ABF ſont équiangles ; & (par la 4. du 6.) que les quatre lignes AD, AE, BD, EF ſont proportionnelles. C. Q. F. D.

Corollaire.

Il s'enſuit de là que ſi deux côtez d'un Triangle ſcalene, ſont donnez, avec l'angle qui eſt enfermé par ſes deux côtez, on trouvera les deux autres angles, & le troiſiéme côté, par exemple.

Au Triangle ABC, le côté AB étant de 45. toiſes, AC de 30. toiſes, & l'angle A qui eſt enfermé par ſes deux côtez, de 95. degrez, l'angle C ſera trouvé de 52. degrez 53. minutes. Car en ôtant l'angle A qui eſt connu de 180. degrez, reſtera 85. degrez pour la ſomme des deux angles B & C. Plan. 2. Fig. 19.

Or comme la ſomme des deux côtez AB, AC, 75 toiſes, eſt à leur difference 15. toiſes, ainſi 91633. Tangente de 42. degrez 30. minutes, moitié des deux angles B & C, eſt à 18326. Tangente d'un autre angle, dont le plus grand angle C, ſurpaſſe cette moitié ; mais par les Tables on trouve que 18326. eſt la Tangente de 10. 23. minutes. Si donc l'on ajoute 10. deg. 23. min. avec 42. degrez 30. minutes, moitié des deux angles, il viendra 52. degrez 53. min. pour le plus grand angle C. D'où il s'enſuit que ſi l'on ôte ces 10. degrez 23. minutes, de 42. degrez 30. minutes, il restera 32. degrez 7. minutes pour l'angle B.

Quant au côté BC, il sera trouvé de 56. toises, car comme 53164. Sinus de l'angle B est à son côté opposé 30. toises, ainsi 99619. Sinus de l'angle A, qui est le même que celui de son complement à deux droits, ou de 85. degrez est à son côté opposé BC, 56. toises.

PROPOSITION V.

Si dans un Triangle qui ne soit pas équilateral, on tire du plus grand-angle sur la base une perpendiculaire qui la divise en deux segmens inégaux, il y aura même raison de cette base à la somme des deux autres côtez, que de leur difference, à la difference des segmens.

Plan. 2. Fig. 17. JE dis que si du plus grand angle C, du Triangle ABC, dont les deux côtez AC, BC, sont inégaux, on tire sur la base AB, la perpendiculaire CF qui la divisera en deux segments aussi inégaux AF, BF : il y a même raison de la base AB, à la somme des deux autres côtez AC, BC, que de leurs differences à la difference des segments AF, BF.

Décrivez comme auparavant de l'angle C, à l'intervale de l'un des deux côtez AC, BC, comme du plus grand BC, une circonference de Cercle BEGD ; & prolongez l'autre côté AC, & la base AB, jusqu'à la circonference du Cercle aux points D, E, G, & vous aurez AD pour la somme des côtez AC, BC, à cause des lignes égales BC, CD : AE pour la difference des mêmes côtez AC, BC, à cause des lignes égales BC, CE : & AG pour la difference des segments AF, BF à cause des lignes égales FG, FB, (par la 3. du 3.) je dis donc que la base AB est à la somme des côtez AD, comme leur difference AE, est à la difference AG, des segments.

Parce que le rectangle sous les lignes AB, AG est égal au rectangle des lignes AD, AE (par la 35. du 3.) il s'ensuit (par la 14. du 6.) que les quatre lignes AB, AD, AE, AG sont proportionnelles. C. Q. F. D.

Corollaire.

Etant donc connus les côtez d'un Triangle scalene, pour connoître ses angles, il faut du plus grand angle abaisser une perpendiculaire sur la base, & l'on trouvera les segments de la base, & la valeur de la perpendiculaire, & ensuite les angles du Triangle. Par exemple. Plan. 2. Fig. 19.

Au Triangle ABC, le côté AB étant 48. toises AC 26. & BC 54. du plus grand A, étant abaissé la perpendiculaire AF, on trouvera FB 42. toises, & FC 12. toises.

Car comme BC 54. toises est à BA, & AC 74. toises, ainsi BG 22. toises (difference des deux côtez BA,) est à BE 30. toises & $\frac{4}{27}$, ôtant donc BE de BC : reste EC 24. toises, & divisant EC en deux également par la perpendiculaire AF, FC, vaudra 12. toises, & BF 42. toises.

On connoît donc les Sections BF, FC, maintenant pour trouver les angles ; voici comme il faut proceder.

D'autant qu'au Triaugle rectangle AFB, la base AB, & le côté BF sont connus, on trouvera l'angle B de 28. deg. (par les Corollaires de la 1. & 2.) de même l'angle C sera trouvé dans le Triangle rectangle AFC ; ce qui étant trouvé, le troisiéme BAC est aussi connu étant le complement de 180. deg.

Remarquez que quand le Triangle eſt Iſocele ; ſi les trois côtez ſont connus, pour connoître les angles, il faut du ſommet de l'angle enfermé des deux côtez égaux abaiſſer une perpendiculaire, qui coupera la baſe en deux parties égales, & partant on aura deux côtez & l'angle droit connu ; & pour connoître le reſte, il faudra operer ſuivant le 2. Corollaire de la premiere Propoſition.

Après avoir donné dans les Corollaires précedens la maniere de trouver les angles & les côtez des Triaugles ; par le moyen des Sinus, des Tangentes & des Secantes, il eſt à propos de finir cette troiſiéme partie, & de donner quelques Problêmes qui enſeignent la maniere de trouver les côtez & les angles d'un Triangle par le moyen des Logarithmes, & pour en faciliter l'uſage ; d'autant que l'on agit bien plus briévement par cette voye ci que par la précedente, puiſqu'au lieu de multiplier & de diviſer, il n'eſt beſoin que d'additionner, & ſouſtraire ; ce qui donne beaucoup de facilité dans la pratique.

PROBLEME.

Plan. 2. Fig. 20. Dans le Triangle ABC, on a l'angle droit C de connu, & l'angle aigu A avec le côté AC, on demande la valeur du côté BC, il faut proceder ainſi, comme le Sinus Total de 100000000 eſt à la Tangente de l'angle A de 49. deg. dont le Logarithme eſt de 100608369. ainſi le Logarithme du côté AC de 20. toiſes, qui eſt de 13010300. eſt au Logarithme du côté BC que je cherche.

Remarquez qu'au lieu d'avoir mis ſimplement le côté de 20. toiſes, comme ci-devant, on a mis ſon Logarithme qu'on a cherché dans la ſeconde Table. Maintenant pour trouver le côté BC, il faut additionner le second terme avec le troisiéme, c'est-à-dire, 100608369. avec 130010300. leur somme sera 113618669, d'où ayant soustrait le premier terme qui est 100000000, le restant ou la difference sera 13618669. pour le Logarithme du côté BC. Si l'on cherche dans la seconde Table le nombre qui approche le plus de celui-ci, il correspondra à un nombre qui se trouve de 23, qui est la valeur du côté BC.

Si dans le même Triangle ABC, on ne connoissoit que l'angle droit C, avec les deux côtez AC & CB, & que l'on voulût connoître l'angle B, il faudroit chercher le Logarithme du côté BC, aussi bien que celui du côté AC, & puis dire; comme le Logarithme du côté BC est au Logarithme du côté AC, ainsi le Sinus Total de 100000000 est à la Tangente de l'angle B. Le Logarithme de cette Tangente étant trouvé, il faut chercher dans la premiere Table le nombre qui en approche le plus dans la colomne des Logarithmes des Tangentes, il correspondra à un angle de 41. degrez, qui est la valeur de l'angle B, & en même tems le complement de l'angle A.

QUATRIE'ME PARTIE.

DE LA RESOLUTION DES TRIANGLES SPHERIQUES.

LA Trigonometrie Spherique enſeigne la maniere de ſupputer les parties d'un Triangle Spherique, par des raiſonnemens qui ſe tirent des proprietez qui ſont bien differentes de celles des Triangles rectilignes, étant d'une Theorie beaucoup plus profonde. Nous ferons enſorte néanmoins d'expliquer cette quatriéme Partie le plus briévement qu'il nous ſera poſſible, en nous ſervant de la Sphere artificielle pour expliquer en peu de mots quantité de Theorêmes qui s'entendent, pour ainſi dire, d'eux-mêmes. On ſuppoſe pour cela, que ceux qui veulent avoir la connoiſſance des Triangles Spheriques, connoiſſent au moins la conſtruction de la Sphere artificielle. Les Définitions ſuivantes pourront ſuppléer au défaut de ceux qui ne l'entendent pas comme il faut.

DEFINITIONS.

I. Une Sphere, ou un Globe, eſt un corps compris d'une ſeule ſuperficie qu'on nomme Spherique, au dedans duquel il y a un point qu'on nomme centre, duquel toutes les lignes droites menées à cette ſuperficie Spherique ſont égales entr'elles.

II. Un diametre de la Sphere, eſt une ligne droite qui paſſe par le centre de la Sphere, & qui ſe termine de part & d'autre à la ſuperficie Spherique.

III. Un Cercle de la Sphere, eſt un Cercle dont la circonference eſt dans la ſuperficie de la Sphere.

IV. Un grand Cercle de la Sphere, eſt un Cercle dont le plan paſſe par le centre de la Sphere. Tous les grands Cercles de la Sphere ayant pour diametres, des diametres de la Sphere, qui ſont tous égaux entr'eux, il s'enſuit que tous ces grands Cercles ſont auſſi tous égaux entr'eux.

V. Un petit Cercle de la Sphere, eſt un Cercle dont le plan ne paſſe point par le centre de la Sphere.

Il eſt évident qu'il y en peut avoir de pluſieurs diverſes grandeurs.

VI. Les poles d'un Cercle de la Sphere, ce ſont deux points de la ſuperficie de la Sphere, chacun deſquels eſt également éloigné de tous les points de ſa circonference.

VII. Un angle Spherique, eſt un angle compris de deux arcs de grands Cercles qui s'entrecoupent.

VIII. La meſure ou la valeur d'un angle Sphérique, c'eſt le nombre des degrez que cet angle comprend, d'un grand Cercle qui a la pointe de l'angle pour pole.

IX. Un Triangle Spherique, eſt un Triangle compris de trois arcs de trois grands Cercles qui s'entrecoupent dans la ſuperficie de la Sphere.

X. Un angle droit Spherique, eſt un angle qui eſt meſuré par un quart de Cercle.

XI. Un angle obtus Spherique, eſt un angle qui eſt meſuré par plus d'un quart de Cercle.

XII. Un angle aigu Spherique, eſt un angle qui eſt meſuré par moins d'un quart de Cercle.

Voici quelques Theorêmes principaux ſur quoi les démonſtrations ſuivantes ſont appuyées. Il ſeroit à propos pour qu'on les entendît bien, qu'on eût en liſant ceci une Sphere artificielle à la main, puiſque vous en allez voir vous même la neceſſité.

THEOREME I.

Les grands Cercles qui s'entrecoupent dans la ſuperficie de la Sphere, s'entrecoupent en deux également.

Pour exemple de ceci, conſiderez la ſection de l'Eclyptique & l'Equateur qui s'entrecoupent en deux également à deux points cardinaux qui ſont l'Orient & l'Occident.

THEOREME II.

Si un grand Cercle paſſe par le pole d'un autre grand Cercle, il le coupe à angles droits, & au contraire s'il le coupe à angles droits, il paſſe par le pole.

Prenez pour exemple un Meridien qui coupe à angles droits l'un ou l'autre des Tropiques.

THEOREME. III.

L'arc d'un grand Cercle qui eſt mené du pole d'un autre grand Cercle, juſqu'à ſa circonference, eſt un quart de Cercle qui le coupe, ou plutôt qui tombe & s'appuye ſur lui à angles droits; & au contraire un quart de grand Cercle qui tombe ou s'appuye ſur un autre grand Cercle, eſt mené du pole de ce Cercle juſqu'à ſa circonference.

Prenez pour exemple un arc de Cercle renfermé entre un des poles & un des Tropiques : cet arc ſera, ſi vous voulez, partie d'un Meridien, qui étant continué, ira tomber en angles droits ſur l'Equateur. Cet arc prolongé ſera donc un quart de Cercle, puiſque la diſtance qui eſt entre l'Equateur & un de ſes poles, eſt un quart de Cercle.

Theoreme IV.

Si l'arc d'un grand Cercle paſſe par le pole d'un autre grand Cercle, cet autre paſſe réciproquement par le pole du premier.

Si vous prenez pour exemple l'arc d'un grand Cercle qui ſera partie d'une des colures, il paſſera par le pole de l'Equateur, & pareillement l'Equateur paſſe par le pole de ce colure, qui eſt un des points cardinaux.

Theoreme V.

Les côtez d'un angle Spherique étant prolongez juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent, font des demi Cercles, l'angle qu'ils font en ſe rencontrant eſt égal à celui qu'ils faiſoient auparavant.

Prenez pour exemple l'angle que fait l'Eclyptique avec l'Equateur, lorſque le Zodiaque eſt oblique à l'horiſon rationnel, ſi l'on prend une partie de chacun de ſes deux Cercles vers un des points où ils ſe coupent, qui eſt un des points cardinaux, on aura un angle Spherique, dont les côtez étant prolongez, iront ſe rencontrer au point cardinal opposé. Cela étant on aura deux demi Cercles, puiſqu'ils vont d'un point cardinal à l'autre, & par conſequent deux angles égaux, puiſque leur meſure commune ſe trouve ſur le grand Cercle qui diviſe ces deux demi-cy en deux également.

Ce grand Cercle-ci étant, comme vous voyez, celui ſur lequel on meſure les degrez de diſtance de l'Eclyptique à l'Equateur.

THEOREME VI.

L'arc d'un grand Cercle tombant ſur l'arc d'un autre grand Cercle, fait deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Prenez encore pour exemple l'Equateur qui tombant ſur un des colures, fait deux angles droits, le point angulaire etant un point cardinal, il fera deux angles droits, dis je, puiſque l'un de ſes angles a pour meſure la diſtance qu'il y a d'un des poles au point où il coupe le colure, qui eſt un quart de Cercle; & pareillement l'autre angle aura pour meſure la diſtance de ce même point à l'autre pole du monde qui eſt auſſi un quart de Cercle. De même quand l'Eclyptique eſt oblique, il fait un angle droit & un angle obtus avec l'horiſon rationnel, leſquels ont enſemble pour meſure un demi Cercle, qui eſt la diſtance d'un des poles du monde à l'autre.

THEOREME VII.

Si deux arcs de grands Cercles s'entrecoupent; ils font les angles oppoſez au ſommet égaux entr'eux.

Ce qu'on dit des arcs de Cercles, ſe peut dire des Cercles entiers; ainſi conſiderez ſur la Sphere l'Equateur & l'Eclyptique qui s'entrecoupant au pole de l'horiſon rationnel qui eſt un des points cardinaux, font des angles au ſommet égaux, ce qui s'entend de ſoi-même.

THEO-

Theoreme VIII.

Si un Triangle Spherique eſt iſocele, il a les angles ſur la baſe égaux entr'eux, & au contraire s'il a les angles ſur la baſe égaux entr'eux, il eſt iſocele.

Ceci eſt trop clair pour mériter une démonſtration particuliere.

Theoreme IX.

Si de la pointe d'un Triangle Spherique comme pole, on décrit tant que l'on voudra des Cercles inégaux, les arcs de ces Cercles ſeront ſemblables.

Conſiderez la Sphere celeſte, où un des poles du monde étant pris pour le point angulaire d'un angle Spherique, dont les côtez peuvent être pris ſur deux meridiens, qui s'entrecouperoient à ce même pole ; il eſt aiſé de voir qu'un Tropique, & un Polaire peuvent être conſiderez comme ayant été décrits du pole, & qu'ils ſont coupez par les deux parties des meridiens qui forment un angle, & que les arcs de ces Cercles qu'ils renferment ſont égaux, puiſqu'ils renferment chacun un même nombre de degrez.

THEOREME X.

Chacun des deux angles obliques d'un Triangle Spherique rectangle eſt de même affection que ſon côté oppoſé.

JE dis premierement que ſi le côté AC du Triangle Spherique ABC rectangle en A, eſt moindre qu'un quart de Cercle, ſon angle oppoſé B eſt aigu. Fig. 21.

Si l'on prolonge le côté AC jusqu'en D, en sorte que AD soit un quart de Cercle, & que par les deux points B, D, on fasse passer l'arc du grand Cercle BD, on connoîtra que puisque l'angle A est droit, & AD un quart de Cercle, le point D est le pole de l'arc AB, que par consequent l'angle ABD est droit. D'où il suit que l'angle ABC est aigu.

Fig. 22. Je dis en second lieu que si le côté AC du Triangle Spherique ABC rectangle en A, est plus grand qu'un quart de Cercle, son angle opposé B est obtus.

Si l'on retranche du côté AC, le quart de Cercle AD, & que par les deux points B, D, on fasse passer l'arc de grand Cercle BD, on connoîtra comme auparavant que le point D est le pole de l'arc AB, & que l'angle ABD est droit. D'où il suit que l'angle ABC est obtus.

Enfin je dis que si le côté AC du même Triangle ABC est un quart de Cercle, son angle opposé B sera droit, parce que dans ce cas le point C sera le pole de l'arc AB, & l'angle B sera par consequent droit.

THEOREME XI.

Si les deux côtez d'un Triangle Spherique rectangle, sont chacun aigu, ou chacun obtus, l'hypotenuse sera moindre qu'un quart de Cercle, & si l'un est aigu & l'autre obtus, l'hypotenuse sera plus grande qu'un quart de Cercle.

Plan. 5. Fig. 23. JE dis premierement que si chacun des deux côtez AC, BC, du Triangle Spherique ABC ectangle en B, est aigu, l'hypotenuse AC est r oindre qu'un quart de Ce cle.

Prolongez le côté AB, en D, & le côté BC en

F, jusqu'à ce que les arcs AD, BF soient chacun un quart de Cercle, & faites passer par les deux points D, F, l'arc de grand Cercle DEF, qui coupe ici l'hypotenuse AC prolongée au point E.

Parce que l'angle B est droit, & que BF est un quart de Cercle, le point F sera le pole de l'arc AB, & l'angle D sera aussi droit, & parce que AD est aussi un quart de Cercle, le point A sera le pole de l'arc DE, & AE sera un quart de Cercle, & l'hypotenuse AC sera par consequent moindre qu'un quart de Cercle.

Je dis pareillement que si chacun des deux côtez AB, BC, du Triangle Spherique ABC rectangle en B, est obtus, l'hypotenuse AC est moindre qu'un quart de Cercle. Plan. 3. Fig. 30.

Retranchez des deux côtez AB, BC les quarts de Cercle AD, BF, & faites passer par les deux points D, F, l'arc de grand Cercle DFE, qui étant prolongé rencontre ici l'hypotenuse AC, aussi prolongée au point E.

En lisant la démonstration précedente sur cette figure, on connoîtra comme auparavant, que l'arc AE est un quart de Cercle, & que par consequent l'hypotenuse AC est moindre qu'un quart de Cercle.

Je dis en second lieu que si le côté AB est obtus, & le côté BC aigu, du Triangle Spherique ABC rectangle en B, l'hypotenuse est plus grande qu'un quart de Cercle. Plan. 3. Fig. 31.

Ayant retranché du côté AB, le quart de Cer- AD, & prolongé l'autre côté BC en F, en sorte que BF soit un quart de Cercle, faites passer par les deux points D, F, l'arc de grand Cercle DEF, qui coupent ici l'hypotenuse AC, au point E.

En lisant pareillement la démonstration précedente ſur cette figure, on connoîtra comme auparavant, que l'arc AE eſt un quart de Cercle ; & que par conſequent l'hypotenuſe AC eſt plus grande qu'un quart de Cercle.

Plan. 3. Fig. 35. Il eſt évident que ſi chacun des deux côtez AB, BC, étoit un quart de Cercle, l'hypotenuſe AC ſeroit auſſi un quart de Cercle, parce qu'en ce cas les trois angles du Triangle ABC ſeroient droits (par le Theor. 10.) & que chacun de ces angles ſeroit le pole de ſon côté oppoſé, & l'hypotenuſe AC, par conſequent un quart de Cercle.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de ce Theorême que ſi les deux angles obliques d'un Triangle Spherique ſont de même affection, l'hypotenuſe ſera moindre qu'un quart de Cercle, & plus grande s'ils ſont de differente affection. Parce que (par le Theor. 10. (ces angles ſont de même affection que leurs côtez oppoſez.

COROLLAIRE II.

Il s'enſuit auſſi que ſi l'hypotenuſe d'un Triangle Spherique rectangle eſt moindre qu'un quart de Cercle, les deux côtez, ou bien les deux angles obliques, ſeront entr'eux de même affection, & de differente affection ſi l'hypotenuſe eſt plus grande qu'un quart de Cercle. Parce que ſi dans le premier cas les côtez étoient de differente affection, l'hypotenuſe ſeroit plus grande qu'un quart de Cercle, comme il a été démontré, ce qui eſt contraire à la ſuppoſition de ce premier cas ; & que ſi dans le ſecond cas les deux côtez étoient de même affection, l'hypotenuſe ſeroit moindre qu'un quart de Cercle, comme il a été auſſi démontré, ce qui eſt contre la ſuppoſition de ce ſecond cas.

Corrollaire III.

Il s'enſuit encore que ſi l'hypotenuſe & un côté d'un Triangle Spherique rectangle ſont de même affection, l'autre côté ou bien ſon angle oppoſé ſera aigu, & obtus s'ils ſont de differente affection. Parceque (par le Corroll. 2) ſi l'hypotenuſe & un côté ſont chacun moindres qu'un quart de Cercle l'autre côté ſera auſſi moindre qu'un quart de Cercle ; & plus grand ſi l'hipotenuſe & un côté ſont chacun plus grands qu'un quart de Cercle. Mais ſi l'hypotenuſe & un côté ſont de differente affection, en ſorte que l'hypotenuſe ſoit, par exemple, plus grande qu'un quart de Cercle, & un côté par conſequent aigu, l'autre côté ſera obtus : & pareillement ſi l'hypotenuſe eſt moindre qu'un arc de Cercle, & un côté par conſequent obtus, l'autre côté ſera auſſi obtus, parce que dans ce cas les deux côtez ſont de même affection (par le Coroll. 2.).

THEOREME XII.

Si deux angles d'un Triangle Spherique, ſont de même affection, la perpendiculaire tirée du troiſiéme angle ſur ſon côté oppoſé, tombera au dedans du Triangle, & au dehors ſi les deux mêmes angles ſont de diverſe affection.

Je dis premierement que ſi les deux angles A, B, du Triangle Spherique ABC, ſont de même affection, par exemple chacun obtus, la perpendiculaire CD tombera au dedans du Triangle, parce que ſi elle tomboit au dehors, comme dans la Plan. 3. Fig. 29.

figure, cette perpendiculaire CD étant confiderée dans le Triangle rectangle ADC, eft (par le Theorême 10.) de même affection que fon angle oppofé A, que nous avons fuppofé obtus, & par confequent plus grande qu'un quart de Cercle, & qu'étant confiderée dans le Triangle rectangle
Plan. 3. Fig. 35. BDC, dont l'angle B eft aigu, parce que l'angle ABC a été fuppofé obtus, elle eft moindre qu'un quart de Cercle, ce qui eft contradictoire, & l'on trouvera la même contradiction, en fuppofant que chacun des deux angles A, B, eft aigu. Donc &c.

Je dis en fecond lieu, que fi les deux angles A, B, du Triangle Spherique ABC, font de differente affection, comme fi l'angle A eft aigu, & l'angle B obtus, la perpendiculaire CD tombera au dehors du Triangle, parce que fi elle tomboit en dedans, comme dans cette figure, cette perpendiculaire CD étant confiderée dans le Triangle rectangle ADC, eft (par le Theor. 10.) de même affection que fon angle oppofé A, que nous avons fuppofé aigu, & par confequent moindre qu'un quart de Cercle; & qu'étant confiderée dans le Triangle rectangle CDB, dont l'angle B a été fuppofé obtus, elle eft plus grande qu'un quart de Cercle, ce qui eft contradictoire, & la même contradiction arrivera en fuppofant l'angle A obtus, & l'angle B aigu. Donc &c.

THEOREME XIII.

Aux Triangles Spheriques rectangles, il y a même raiſon de la Tangente de l'angle oppoſé à la perpendiculaire, à la Tangente de cette perpendiculaire qu'il y a du rayon du Cercle au Sinus de la baſe.

CONcevez que dans une Sphere dont le point A eſt le centre, les grands Cercles OGCM, OIDM s'entrecoupent dans le diametre commun OAM, & qu'ils font l'angle IOG; puis penſez que l'arc d'un autre grand Cercle GIN, paſſe par le point N, qui eſt le pole du Cercle OGCM; d'où il ſuit que le plan de ce Cercle GIN, ſera perpendiculaire au plan du Cercle OGCM, que l'arc GI ſera perpendiculaire à l'arc OG, que l'angle IGO ſera droit; & par conſequent que le Triangle OGI ſera rectangle; après cela ayant pris l'arc OI qui ſoutient l'angle droit, pour l'hypotenuſe de ce Triangle, l'arc OG pour la baſe, & l'arc GI pour la perpendiculaire; du pole O, & de l'intervale OC (que je ſuppoſe de 90. degrez.) Décrivez le Cercle CDN, cela étant l'arc CD ſera la meſure de l'angle IOG; puis dans le plan du Cercle ACN, à l'extrêmité du rayon AC, élevez la perpendiculaire CE, juſqu'à ce qu'elle rencontre le rayon AD prolongé; cette ligne CE ſera la Tangente de l'arc CD, ou de l'angle IOG que cet arc meſure; de même dans le plan du Cercle AGN, à l'extrêmité du rayon AG, élevez la perpendiculaire GL, juſqu'à ce qu'elle rencontre le rayon AI prolongé; cette ligne GL ſera la Tangente de la perpendiculaire GI; enfin du point G, abaiſſez la ligne GF, perpendiculaire au rayon AO, cette ligne GF ſera le Sinus de la baſe OG; cela ainſi poſé; je dis qu'il Plan. 3. Fig. 25.

y a même raiſon de CE Tangente de l'angle IOG à GL, Tangente de la perpendiculaire GI, à laquelle il eſt oppoſé, que du rayon du Cercle AC, à GF Sinus de la baſe OG. Pour le prouver.

Fig. 25. Du point F au point L, menez la ligne droite FL; puis conſiderez que les deux lignes GE, GL, étant dans les plans des Cercles ACN, AGN, & perpendiculaires aux deux lignes, ou rayons AC, AG, qui ſont les communes ſections de ces deux plans, & d'un troiſiéme AOGCM, auquel ils ſont perpendiculaires, c'eſt une neceſſité que les lignes GE, GL, ſoient perpendiculaires au plan du Cercle AOGCM; & par conſequent qu'elles ſoient paralleles entre elles.

De plus, l'angle OAC, qui eſt ſoutenu par le quart du Cercle OC, étant droit; & l'angle OFG étant auſſi droit, il s'enſuit que les lignes AC, GF ſont paralleles; & ainſi les lignes AC, CE, étant paralleles aux lignes GF, GL, le plan qui paſſe par AC, CE, s'enſuit parallele au plan qui paſſe par GF, GL; & ces deux plans étant coupez par un troiſiéme, à ſçavoir OIDM, les lignes de communes ſections AE, FL, ſont auſſi paralleles. Si bien que les trois côtez du Triangle rectiligne ACE, ſont paralleles aux trois côtez du Triangle rectiligne FGL, par conſequent ces deux Triangles ſont équiangles; & partant il y a même raiſon de GE à GL, que de AC, à GF. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Plan, 3. Fig. 32. Il ſuit de là que ſi dans un Triangle Spherique rectangle, comme ABC, dans lequel l'angle B eſt droit, on donne un des angles aigus, par exemple A, avec le côté oppoſé BC, on trouvera l'arc AB. Car par la Propoſition précedente comme l'angle

A, eſt à la Tangente de l'arc BC, ou de la perpendiculaire à laquelle il eſt oppoſé; ainſi le rayon du Cercle eſt au Sinus de l'arc AB, ou de la baſe. Or par le moyen des Tables, quand on a la valeur des Sinus & des Tangentes, on a la valeur des angles & des arcs.

COROLLAIRE II.

Ou bien enfin, ſi dans le même Triangle, on donne l'angle A, & le côté AB, on trouvera l'arc BC; car comme le rayon du Cercle eſt au Sinus de l'arc AB, ou de la baſe; ainſi la Tangente de l'angle A, eſt à la Tangente de l'arc BC, ou la perpendiculaire à laquelle il eſt oppoſé; qui eſt ce que l'on cherche. Plan. 3. Fig. 32.

THEOREME XIV.

Aux Triangles Spheriques rectangles, il y a même raiſon du Sinus de l'angle oppoſé à la perpendiculaire, au Sinus de cette perpendiculaire qu'il y a du rayon du Cercle au Sinus de l'hypotenuſe.

DAns la figure précedente, concevez que la ligne DB ſoit perpendiculaire au rayon AC, & qu'ainſi elle ſoit le Sinus de l'arc CD, & conſequemment de l'angle IOG, qui eſt meſuré par cet arc. De même concevez que la ligne IH ſoit perpendiculaire au rayon AG, & qu'ainſi ſoit le Sinus de l'arc, ou de la perpendiculaire GI: enfin concevez que la ligne IP, ſoit perpendiculaire au rayon AO, & qu'ainſi elle ſoit le Sinus de l'hypotenuſe OI; cela ainſi poſé, je dis qu'il y a même raiſon de DB, Sinus de l'angle IOG, à IH Sinus de la perpendiculaire GI, à laquelle cet an- Plan. 3. Fig. 25.

gle eſt oppoſé, que du rayon du Cercle AD à IP, Sinus de l'hypotenuſe OI; pour le prouver.

Du point P au point H, menez la ligne droite PH.

Maintenant conſiderez que puiſque la ligne DB eſt dans le plan du Cercle ACN, & qu'elle eſt perpendiculaire au rayon AC, qui eſt la commune ſection des plans ACN, & AOC qui s'entrecoupent à angles droits, il s'enſuit que cette ligne DB eſt perpendiculaire au plan AOC; de même puiſque la ligne IH eſt dans le plan du Cercle AGN, & qu'elle eſt perpendiculaire au rayon AG qui eſt la commune ſection des plans AGN, & AOC, qui s'entrecoupent auſſi à angles droits; il s'enſuit que cette ligne IH, eſt auſſi perpendiculaire au plan AOC; & partant que les lignes DB, & IH ſont paralleles entre elles; d'ailleurs les lignes AD & IP étant perpendiculaires à la même ligne AO, ſont auſſi paralleles entre elles; d'où il ſuit que le plan qui paſſe par les lignes AD, DB, eſt parallele à celui qui paſſe par les lignes IP, IH, & ces deux plans étant coupez par un troiſiéme, à ſçavoir AOC, les lignes de communes ſections AC, PH, ſont auſſi paralleles; ſi bien que les trois côtez du Triangle rectiligne DBA ſont paralleles aux trois côtez du Triangle rectiligne IHP; par conſequent ces deux Triangles ſont équiangles; & partant il y a même raiſon de DB à IH, que de AD à IP. C. Q. F. D.

REMARQUE.

Plan. 3. Fig. 25. Comme le rayon du Cercle eſt le Sinus d'un angle droit, & que l'angle IGO eſt droit, il eſt évident (par la précedente) que comme le Sinus de l'angle IOG, eſt au Sinus de l'arc GI qui lui eſt opposé; ainsi le Sinus de l'angle IGO, ou le rayon du Cercle, est au Sinus de l'arc OI, qui lui est opposé. De plus si l'on avoit pris GI pour la base, & OG pour la perpendiculaire; on auroit montré que le Sinus de l'angle OIG, est au Sinus de l'arc OG, qui lui est opposé, comme le Sinus de l'angle IOG, ou le rayon du Cercle, est au Sinus de l'arc OI; & comme les raisons qui sont semblables à une même, sont semblables entr'elles, il s'ensuit que comme le Sinus de l'angle IOG, est au Sinus de l'arc GI, qui lui est opposé; ainsi le Sinus de l'angle OIG, est au Sinus de l'arc OG qui lui est opposé; & ainsi il est toûjours vrai de dire, qu'aux Triangles Spheriques rectangles, il y a même raison du Sinus d'un angle, au Sinus de l'arc qui lui est opposé, que du Sinus d'un autre angle, au Sinus de l'arc qui lui est opposé.

Corollaire I.

Il suit de là, que si dans un Triangle Spherique rectangle, comme ABC, duquel l'angle B est droit, on donne l'angle A, & l'arc BC, on trouvera l'hypotenuse AC; car comme le Sinus de l'angle A, est au Sinus de l'arc BC qui lui est opposé; ainsi le Sinus de l'angle B, ou le rayon du Cercle, est au Sinus de l'arc AC qui lui est opposé, & que l'on cherche.

Corollaire II.

Que si dans le même Triangle ABC, on donne l'angle A, & l'hypotenuse AC, on trouvera l'arc BC; car comme le Sinus de l'angle B, ou le rayon du Cercle, est au Sinus de l'arc AC, qui lui est opposé; ainsi le Sinus de l'angle BA, est au Sinus Fig. 32.

de l'arc BC, qui lui eſt oppoſé & que l'on cherche.

COROLLAIRE III.

Enfin, ſi dans le même Triangle on donne l'hypotenuſe AC, & l'un des côtez comme BC, on trouvera l'angle A, qui lui eſt oppoſé, car comme le Sinus de l'arc AC, ou de l'hypotenuſe, eſt au rayon du Cercle, ou au Sinus de l'angle B qui lui eſt oppoſé, ainſi le Sinus de l'arc CB, eſt au Sinus de l'angle A qui lui eſt oppoſé, & que l'on cherche.

REMARQUE.

De ces Corollaires & de ceux de la précedente, il eſt évident qu'aux Triangles Spheriques rectangles trois choſes étant données (pourvû toutesfois que ce ne ſoit pas ſimplement les trois angles) l'on trouvera les trois autres.

THEOREME XV.

En tout Triangle Spherique, comme le Sinus d'un angle eſt au Sinus du côté qui lui eſt oppoſé, ainſi le Sinus d'un autre angle eſt au Sinus du côté qui lui eſt oppoſé.

Fig. 27. & 28. LA vérité de cette Propoſition a déja été démontrée, touchant les Triangles Spheriques rectangles ; & ainſi il ne s'agit plus ici que de ceux qui ne le ſont point, comme par exemple le Triangle ABC, où l'on va faire voir d'abord que comme le Sinus de l'angle A, eſt au Sinus du côté BC, qui lui eſt oppoſé ; ainſi le Sinus de l'angle B, eſt au Sinus du côté AC qui lui eſt oppoſé (& enſuite l'on fera voir le même des autres.) Pour le prouver,

Du Sommet de l'angle C, abaissez la perpendiculaire CD sur le côté AB, (prolongée s'il en est besoin.) Cela fait, considerez que puisque le Triangle ADC est rectangle, il y a même raison du Sinus de l'angle A, au Sinus de l'arc CD, qu'il y a du Sinus de l'angle ADC, ou du rayon du Cercle, au Sinus de l'arc AC, & partant le rectangle compris du Sinus de l'angle A, & du Sinus de l'arc AC, qui sont les deux extrêmes de quatre choses proportionnelles, est égal au rectangle compris du Sinus de l'arc CD, & du Sinus de l'angle ADC, ou du rayon du Cercle, qui sont les moyennes. De même puisque le Triangle BDC est rectangle, il y a même raison du Sinus de l'angle CBD (ou CBA qui est la même, ou qui est son complement à deux droits, & qui par consequent a un même Sinus) au Sinus de l'arc CD, que du Sinus de l'angle BDC, ou du rayon du Cercle, au Sinus de l'arc BC; & partant le rectangle compris du Sinus de l'angle B, de quelque façon qu'on le prenne, & du Sinus de l'arc BC, qui sont les extrêmes; est égal au rectangle compris du Sinus de l'angle BDC, ou ADC son égal; en un mot du rayon du Cercle, & du Sinus de l'arc CD, qui sont les moyennes. Or le rectangle compris du Sinus de l'angle A, & du Sinus de l'arc AC, a déja été démontré lui être égal; d'où il suit que le rectangle compris du Sinus de l'angle A, & du Sinus de l'arc AC, est égal au rectangle compris du Sinus de l'angle B, de quelque façon qu'on le prenne, & du Sinus de l'arc BC; & partant ces deux rectangles ont leurs côtez reciproquement proportionnaux; c'est-à-dire, qu'il y a même raison du Sinus de l'angle A, qui est un des côtez du premier rectangle, au Sinus du côté BC qui lui

Fig. 27. & 28.

est opoſé, & qui eſt un des côtez du ſecond; qu'il y a du Sinus de l'angle B, qui eſt encore un des côtez du ſecond rectangle, au Sinus du côté AC, qui lui eſt oppoſé, & qui eſt un des côtez du premier; C. Q. F. d'abord D.

Maintenant pour achever la démonſtration, & prouver le même à l'égard des Sinus des autres angles, & des autres côtez; il ne faut qu'abaiſſer
Fig. 27. & 27. du ſommet de l'angle A, la perpendiculaire AE, ſur le côté BC, prolongé s'il en eſt beſoin; & ſuivant le même raiſonnement que l'on vient de faire, l'on montrera que comme le Sinus de l'angle B, de quelque façon que l'on le prenne, eſt au Sinus du côté AC, qui lui eſt oppoſé; ainſi le Sinus de l'angle ACB, eſt au Sinus du côté AB qui lui eſt oppoſé. D'où il ſuit enfin que comme le Sinus de l'angle A, eſt au Sinus du côté BC qui lui eſt oppoſé, ainſi le Sinus de l'angle C, ou ACB eſt au Sinus du côté AB qui lui eſt oppoſé, puiſque ces deux raiſons ſont ſemblables à une même, ſçavoir à celle du Sinus de l'angle B, au Sinus du côté AC: ſi bien qu'on peut dire generalement, qu'en tout Triangle Spherique, comme le Sinus d'un angle eſt au Sinus du côté qui lui eſt oppoſé; ainſi le Sinus d'un autre angle eſt au Sinus du côté qui lui eſt oppoſé. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 32. Si donc dans un Triangle Spherique, comme ABC, l'on donne les deux angles A & B, avec le côté AC, oppoſé à l'un des deux angles donnez, l'on trouvera le côté CB oppoſé à l'autre angle donné; car comme le Sinus de l'angle B, eſt au Sinus de l'arc AC; ainſi le Sinus de l'angle A, eſt au Sinus de l'arc BC que l'on cherche.

Corollaire II.

Que si dans un Triangle Spherique comme ABC, l'on donne les deux côtez AC, CB, avec l'angle B opposé à l'un des deux côtez donnez, l'on trouvera l'angle A opposé à l'autre côté; car comme le Sinus de l'arc AC, est au Sinus de l'angle B, ainsi le Sinus de l'angle CB est au Sinus de l'angle A que l'on cherche. Fig. 32.

Remarque.

Après ce qui a été démontré jusqu'ici, il est aisé de conclure qu'en tout Triangle Spherique non rectangle, trois choses étant données (pourvû toutefois que ce ne soit pas simplement les trois côtez, ou les trois angles) l'on trouvera les trois autres; car pour cela il ne faut que résoudre le Triangle donné en deux Triangles rectangles, par une perpendiculaire abaissée de l'un de ces angles sur le côté qui lui est opposé, en sorte que l'un des Triangles ait deux angles & un côté connus; & après cela par ce qui a été dit ci-devant des Triangles rectangles, l'on trouvera les trois choses qui sont inconnuës. Fig. 35.

Par exemple, si dans le Triangle ABC, l'on donne les deux angles A & B avec le côté AC opposé à l'un des deux angles donnez; pour trouver ce qui reste, à sçavoir l'angle C, & les deux côtez AB, BC, il faut premierement trouver le côté BC (par le 1. Coroll. de cette Proposition;) puis pour trouver le côté AB, il faudra de l'angle C, abaisser la perpendiculaire CD sur le côté AB, & par le 2. Coroll. du 14. Theor. trouver l'arc CD; & ensuite par le 1. Coroll. du 13. Theor. Fig. 33. & 34.

trouver les deux arcs AD, DB des deux Triangles rectangles ADC & DBC ; & ajoûtant ces deux arcs ensemble on aura le côté AB ; après quoi l'on trouvera l'angle C, par le 2. Coroll. de ce Theor. qui est tout ce qu'il falloit trouver.

Fig. 33. & 34. Que si dans le Triangle ABC, l'on donne les deux côtez AC, BC, avec l'angle B opposé à l'un des deux côtez donnez, pour avoir le reste, on trouvera premierement l'angle A, par le 2. Coroll. de ce Theor. & ensuite l'on trouvera le côté AB, & l'angle C, en abaissant, comme je viens de dire, la perpendiculaire CD, & en opérant comme dessus.

Enfin si dans le Triangle ABC, l'on donne les deux côtez AC, BC, avec l'angle C qu'ils enferment, pour trouver le reste, à sçavoir les deux angles A & B, avec le côté AB qui est entre deux ; il faut premierement abaisser une perpendiculaire de l'un de ces angles, sur le côté qui lui est opposé, comme est ici AD ; puis on trouvera cette perpendiculaire AD, par le 1. Coroll. de ce Theor. & ensuite l'arc CD, par le 1. Coroll. du 13. Theor. puis ôtant CD de CB, restera DB. Ensuite dans le Triangle ADB, l'on trouvera l'angle B, par le 2. Coroll. du 13. Theor. & le coté AB, par le 1. Coroll. du 14. Theor. après quoi dans le Triangle ABC l'on trouvera l'angle A, par le 2. Coroll. de ce Theor. qui est tout ce qu'il falloit trouver.

LEMME I.

Fig. 26. Aux Cercles inégaux les Sinus verses des arcs semblables, ont même raison entr'eux que les rayons de leurs Cercles ; par exemple aux deux arcs inégaux ABC, DEF, les Sinus verses GC, HF, des arcs semblables BC, EF ont même rai-

son

ſont entr'eux que les rayons IC, LF ; pour le prouver.

Des centres I & L, menez les deux lignes droites IB, LE ; puis conſiderez que les deux Triangles IBC, LEF, ſont iſocelles & ſemblables, à cauſe que les angles BIC, ELF, qui s'appuyent ſur des arcs ſemblables ſont égaux ; & partant il y a même raiſon de IB à LE, que de BC à EF ; de plus les angles C & F étant égaux, comme l'on vient de montrer, & les angles G & H étant droits, les deux Triangles BGC, EHF ſont auſſi ſemblables ; & partant il y a auſſi même raiſon de GC à HF, que BC à EF ; d'où il ſuit que la raiſon des Sinus verſes GC, HF eſt ſemblable à celle des rayons IB, LE, ou IC, LF, puiſqu'elles ſont toutes deux ſemblables à une même, ſçavoir à celle de BC à EF. C. Q. F. D. Fig. 26.

LEMME II.

Le rectangle contenu du Sinus droit de la moitié de l'aggrégé de deux arcs inégaux d'un Triangle Spherique rectangle, & du Sinus droit de la moitié de leur difference, eſt égal au rectangle contenu du rayon du Cercle, & de la moitié de la difference de leurs Sinus verſes. Pour le prouver. Fig. 24.

Que les deux arcs inégaux ſoient par exemple AB, BC, leur aggrégé ſera l'arc AC ; puis faiſant BD égal à AB, l'arc CD ſera leur difference ; enſuite ayant mené la ſoutendante AC, & du centre E abaiſſé la perpendiculaire EH, le Sinus droit de la moitié de l'aggrégé ſera AH. De plus ayant auſſi mené la ſoutendante AD, & du centre E au point B, la ligne EB, cette ligne coupant l'arc ABD en deux également, coupera auſſi en deux également la ſoutendante AD, & à angles droits,

& partant FB ſera le Sinus verſe de l'arc AB ; puis ayant encore abaiſſé CG perpendiculaire ſur EB, & CL perpendiculaire ſur AD, la partie GB ſera le Sinus verſe de l'arc BC ; & FG ſon égal CL, ſera la difference des deux Sinus verſes. Maintenant ayant mené la ligne droite CD, & la ligne HI parallele à AD, cette ligne HI, & ſa partie HM étant parallele aux baſes des deux Triangles ACD & ACL, leurs cotez AC, CD, & AC, CL ſeront coupez proportionnellement, & partant la raiſon de AH, HC ſera la même que de DI, à IC, ou de LM à MC. Or eſt-il que AH eſt égale à HC. Donc DI ſera auſſi égale à IC, & LM, à MC; & partant IC ſera le Sinus droit de la moitié de CD, different des deux arcs AB, BC ; & MC moitié de CL, ou de ſon égale FG, ſera la moitié de la difference des Sinus verſes. Ce qu'il faut donc maintenant faire voir, eſt que le rectangle compris de AH & de IC, eſt égal au rectangle de EA & de MC. Pour le prouver.

Les deux angles AEH & ADC ſont égaux, puiſque le premier qui eſt au centre, s'appuye ſur la moitié de l'arc, ſur lequel s'appuye l'autre qui eſt en la circonference ; & puiſque l'angle MIC eſt auſſi égal à l'angle ADC, à cauſe que les lignes AD, HI étant paralleles, la ligne CD tombe deſſus ; il s'enſuit que l'angle AEH eſt égal à l'angle MIC. De plus les angles EHA & CMI étant droits, il s'enſuit que les deux Triangles HAE & & MCI ſont ſemblables; c'eſt pourquoi comme AH eſt à EA, ainſi MC eſt à IC ; d'où il ſuit que le rectangle contenu ſous les extrêmes AH & IC eſt égal au rectangle des moyennes EA & MC. C. Q. F. D.

THEOREME XVI.

Aux Triangles Spheriques, qui ont les cotez à l'entour de l'angle du ſommet inégaux, ces quatre choſes ſont proportionnelles. La premiere, le rectangle compris des Sinus droits de ces cotez inegaux. La ſeconde, le quarré du rayon. La troiſiéme, le rectangle dont l'un des cotez eſt le Sinus de la moitié de l'aggregé de la baſe & de l'excez de l'un de ces cotez par deſſus l'autre, & l'autre coté eſt le Sinus de la moitié de la difference de la baſe & de cet excez. Et le quatriéme, le quarré du Sinus de la moitié de l'angle du ſommet, ou de la moitié de l'angle oppoſé à la baſe, qui eſt la même choſe.

COncevez que DRT eſt un grand Cercle d'une Sphere dont E eſt le centre. Concevez auſſi que du Triangle QRB, RB eſt l'un des côtez inégaux à l'entour de l'angle du ſommet R, dont l'autre côté QR, & la baſe QB ſont ſuppoſez élevez en l'air, & avoir pour projections ortographiques QR & QB ; & ainſi la projection ortographique de l'angle du ſommet ſera QRB. Puis ayant mené du centre E les deux lignes droites ER, EB, ſi par le point Q, l'on mene à chacune de ces lignes une perpendiculaire, à ſçavoir NC à ER, & AD à EB, la ligne NC ſera le diametre d'un petit Cercle, dont la circonference paſſera par ce point du Triangle, dont Q eſt la projection, & qui aura pour pole le point R ; d'où il ſuit que les arcs RN & RC qui ſont égaux entr'eux, ſont auſſi égaux à ce côté du Triangle propoſé, lequel côté eſt ici repréſenté par QR ; & partant OC ſera le Sinus droit de ce même côté, & PB perpendiculaire à ER, ſera le Sinus droit de l'autre côté RB, & BC ſera Fig. 36. Fig. 36.

l'excès d'un des côtez par dessus l'autre, dont le Sinus droit sera CG perpendiculaire à EB. De même AD sera le diametre d'un autre petit Cercle, dont le pole est B, & dont la circonference passera aussi par ce point qui est représenté par Q. D'où il suit que les arcs égaux BA & BD sont aussi égaux à cette base du Triangle proposé, laquelle est ici représentée par QB ; & partant l'arc ABC est l'aggregé de la base & de l'excez d'un des côtez par dessus l'autre ; de la moitié duquel aggregé le Sinus droit est HC, moitié de AC ; & l'arc CD sera la difference de la base & de cet excez, dont la soutendante est CID. Ensuite de quoi ayant mené HI parallele à AD, il s'ensuit que comme AH, est à HC, ainsi DI est à IC ; & d'autant que AH est égale à HC, il s'ensuit aussi que DI est égale à IC : & partant que IC est le Sinus droit de la moitié de la difference de la base, & de l'excès de l'un des côtez par dessus l'autre. De plus ayant continué la projection QR, jusqu'à celle d'un grand Cercle, dont R est le pole, & dont le diametre & la projection tout ensemble, est YEZ ; & au point S où la rencontre se fait, ayant élevé la perpendiculaire ST, il s'ensuit que l'arc TZ sera la mesure de l'angle du sommet de notre Triangle proposé QRB. Puis ayant mené la ligne droite TZ, & du centre E abaissé la perpendiculaire EV, sa moitié VZ sera le Sinus droit de la moitié de l'angle du sommet R, duquel angle tout entier le Sinus verse sera ZS, dans un grand Cercle dont EZ est le rayon ; & CQ sera dans un petit Cercle dont OC est le rayon.

Fig. 36.

Cela posé, il faut maintenant faire voir que comme le rectangle compris de PB & de OC, Sinus droits des deux côtez inégaux RB, QR est au quarré du rayon EZ ou EB ; ainsi le rectangle compris des deux Sinus HC & IC (dont l'un est le Sinus de la moitié de l'aggregé de la baſe, & de l'excez d'un des côtez par deſſus l'autre, & l'autre eſt le Sinus de la moitié de la difference de la baſe & de cet excez) eſt au quarré de VZ, Sinus droit de la moitié de l'angle du ſommet, ou de l'angle opposé à la baſe, qui eſt la même choſe. Pour le prouver.

Abaiſſez premierement ſur EZ la perpendiculaire VX, cette ligne coupera ZS en deux également, à cauſe que VX étant parallele à TS, SX ſera égale à XZ, comme TV, l'eſt à VZ, ainſi qu'il a été démontré ci-devant; abaiſſez auſſi ſur AD la perpendiculaire CL, cette ligne ſera coupée en deux également au point M, à cauſe que MI étant parallele à LD, baſe du Triangle CLD, LM ſera égale à MC, comme DI, l'eſt à IC. Ainſi qu'il a auſſi été démontré.

Cette préparation encore ſuppoſée, conſiderez maintenant que le Triangle BPE eſt ſemblable au Triangle OKE; que celui-ci eſt ſemblable au Triangle FKQ; & que ce dernier eſt encore ſemblable au Triangle LCQ; d'où s'enſuit du premier au dernier, que le Triangle PBE eſt ſemblable au Triangle LCQ; & partant qu'il y a même raiſon de PB à BE, que de LC à CQ. Et d'autant que CQ & ZS ſont les Sinus verſes des deux arcs ſemblables de deux Cercles inégaux, il s'enſuit (par le 1. Coroll. de la précedente) que CQ & ZS ſont entr'eux en même raiſon que les rayons de leurs Cercles OC & EZ. Fig. 32.

Cela ainſi poſé, concevez maintenant ces quatre rectangles, dont le premier ſoit compris des deux Sinus droits PB, OC; le ſecond des deux rayons EB, EZ, c'eſt-à-dire, dont le ſecond ſoit le quarré du rayon; le troiſiéme ſoit compris des deux li-

gnes LC, CQ: & le quatriéme des deux Sinus verses CQ, ZS, maintenant, comme les rectangles sont entr'eux en raison composée de celle de leurs côtez, c'est-à-dire, comme ils sont entr'eux comme le produit de leurs côtez; & que la raison du produit des côtez du premier rectangle, au produit de ceux du second, a été démontrée être la même que celle du côté des produits du troisiéme, au produit des côtez du quatriéme, il s'ensuit que ces quatre rectangles sont proportionnaux; & partant qu'il y a même raison du rectangle compris de PB, OC, au quarré du rayon EB, & que du rectangle compris de LC, CQ, au rectangle compris de CQ, ZS. Mais ces deux derniers rectangles ayant CQ pour commune hauteur, ils sont entr'eux comme leurs bases LC, ZS; ou comme leurs moitiez MC, XZ; & partant la raison du
Fig. 36. rectangle compris de PB, OC, au quarré du rayon EB, est la même que celle de MC à XZ. Mais comme MC est à XZ, ainsi le rectangle de EZ, MC, est au rectangle de EZ, XZ, à cause qu'ils ont tous deux la même hauteur EZ, d'où s'ensuit encore une fois que le rectangle de PB, OC, est au quarré du rayon EB, comme le rectangle de EZ, MC, est au rectangle de EZ, XZ, ou (à cause que VZ est moyenne proportionnelle entre EZ & XZ) au quarré de VZ. Que si au lieu du troisiémerectangle compris de EZ, MC, on prend le rectangle de HC, IC qui lui est égal (par le 2. Lemme de la précedente) (à cause que HC estle Sinus droit de la moitié de l'aggregé des deux arcs inégaux AB, BC, & IC le Sinus droit de la moitié de leur difference; & que MC est la moitié de CL, ou de son égale GF qui est la difference des Sinus verses des deux arcs inégaux AB, BC, & EZ le rayon.) Il sera vrai de dire que comme

le rectangle de PB, OC, eſt au quarré du rayon EZ, ou EB; ainſi le rectangle de HC, IC, eſt au quarré de VZ. C. Q. F. D.

Corollaire.

Il ſuit de là, que d'un Triangle Spherique, dont les côtez ſont inégaux, les trois côtez étant connus, on connoîtra les trois angles; car pour cela, il ne faut que faire une regle de Trois, dont le premier terme ſoit le rectangle, ou le produit des Sinus des deux côtez tels que l'on voudra; le ſecond ſoit le quarré du rayon; le troiſiéme ſoit le rectangle, ou le produit de deux autres Sinus, ſçavoir du Sinus d'un arc qui ſera la moitié de l'aggregé de la baſe, & de l'excez de l'un de ces côtez par deſſus l'autre, & du Sinus d'un autre arc qui ſera la moitié de la difference de la baſe & de cet excez; après quoi il ſuit de cette Propoſition, que le quatriéme terme ſera le quarré du Sinus de la moitié de l'angle oppoſé à la baſe. Si donc on extrait la racine quarrée du quatriéme terme, on aura le Sinus d'un angle, dont le double ſera la valeur de l'angle que l'on cherche, enſuite de quoi il ſera aiſé de trouver les deux autres angles par le moyen des Corollaires de la précedente.

Remarquez que ſi l'on veut ſe ſervir des Tables des Logarithmes; il faudra ſeulement ajoûter à une ſomme le double du Logarithme du rayon, celui du Sinus de la moitié de l'aggregé de la baſe & de l'excez de l'un des côtez par deſſus l'autre, & le Logarithme du Sinus de la moitié de la difference de la baſe & de cet excez; puis de cette ſomme ôter les Logarithmes des Sinus des deux côtez; & enfin prendre la moitié du reſte; laquelle moitié ſera le Logarithme du Sinus de la moitié de l'angle oppoſé à la baſe. Et ainſi on épargnera plus des trois quarts du travail qu'il faudroit prendre en se servant des Tables ordinaires des Sinus.

Remarquez aussi, que si le Triangle proposé avoit deux côtez égaux, sans tant de circuit, ni de détour, il ne faudroit qu'abaisser un arc perpendiculaire sur la base, laquelle seroit divisée en deux également, & le Triangle en deux Triangles rectangles, qui auroient chacun un angle & deux côtez connus; ensuite de quoi on trouvera aisément le reste par les Coroll. du 13. & 14. Theorêmes. Et premierement on trouveroit l'angle opposé à la moitié de la base par le 3. Coroll. du 14. Theor. Puis l'on trouveroit la perpendiculaire que l'on aura abaissée par le 1. Coroll. du 13. Theor. en la prenant pour la base de son Triangle; & enfin l'on trouveroit le troisiéme angle par le 2. Coroll. du 13. Theor.

THEOREME XVII.

Si des angles d'un Triangle Spherique, comme poles on décrit trois grands Cercles; ils formeront en s'entrecoupant un autre Triangle Spherique, dont les côtez seront égaux aux supplémens des angles, & reciproquement les angles aux supplémens des côtez du Triangle proposé.

Fig. 39. QU'ABC soit le Triangle Spherique proposé, maintenant si du point A comme pole, l'on décrit le grand Cercle LGEM, & du point B le grand Cercle HDEFPQ; & enfin du point C aussi comme pole, le grand Cercle HXGFNO, il se formera le Triangle HGE; cela étant, je dis premierement que les côtez du Triangle HGE, sont égaux aux supplémens des angles du Triangle ABC. Pour le prouver.

Puiſque l'arc AB paſſe par les poles des deux Cercles GE, HE, reciproquement ces deux Cercles paſſeront par le pole de l'arc AB; & partant le point E, qui eſt le point de leur commune ſection, ſera le pole de l'arc AB. De même puiſque l'arc BC paſſe par les poles des deux Cercles HEF, HGF, reciproquement ces deux Cercles paſſeront par le pole de l'arc BC: & par tant le point F qui eſt le point de leur commune ſection, ſera le pole de l'arc BC. Enfin puiſque l'arc AC paſſe par les poles des deux Cercles GE, GH, reciproquement ces deux paſſeront par le pole de l'arc AC; & partant le point G qui eſt le point de leur commune ſection, ſera le pole de l'arc AC. D'où il s'enſuit que les arcs AR, AM, AI, AL; BD, BP, BQ, BZ; CX, CN, CT, CO, ſont des quarts de Cercles; & de même que les arcs ER, EM, ED, EP; FQ, FZ, FT; FO; GI, GL, GN, GX, ſont auſſi des quarts de Cercles, qui ſont égaux entr'eux & aux précedens. Puis donc que les deux quarts de Cercles GN & FO ſont égaux entr'eux, ſi l'on en ôte la partie commune FN, reſtera l'arc GF égal à l'arc NO; Mais cet arc NO eſt la meſure de l'angle NCO, ou de ſon égal ACB; & partant l'arc GF eſt auſſi la meſure de l'angle ACB, & lui eſt égal; mais GH eſt le complement au demi Cercle de l'arc GF, il ſera donc auſſi le ſupplément de l'angle ACB.

De même ſi des deux quarts de Cercles FQ, PE, l'on retranche la partie commune FP, reſtera l'arc QP, égal à l'arc FE; mais l'arc QP eſt égal, ou eſt la meſure de l'angle QBP, ou de ſon égal ABC; & partant l'arc FE ſera auſſi égal à l'angle ABC; & par conſequent EH complement au demi Cercle de l'arc FE, le ſera auſſi de l'angle ABC.

Enfin ſi aux deux quarts de Cercles GI, EM, l'on ajoûte l'arc commun IE, l'arc GE ſera égal à l'arc IM; mais l'arc IM eſt égal à l'angle IAM, dont il eſt la meſure; & partant l'arc GE eſt auſſi égal à l'angle IAM, ou au complement de l'angle BAC. C. Q. F. premierement D.

Fig. 39.

Secondement, je dis que les angles du Triangle HGE, ſont égaux aux ſupplémens des côtez du Triangle ABC; pour le prouver.

Si des deux quarts de Cercles AI & CN, l'on ôte l'arc commun CI, il reſtera l'arc AC, égal à l'arc IN; mais l'arc IN eſt égal, ou eſt la meſure de l'angle NGI, par conſequent le côté AC eſt auſſi égal à l'angle NGI: d'où il ſuit que l'angle HGE, qui eſt le complement à deux droits, ou au demi Cercle de l'angle NGI, eſt égal au complement du côté AC.

De même, ſi des deux quarts de Cercle AR & BP, l'on ôte la partie commune BR, il reſtera l'arc AB égal à l'arc RP; mais l'arc RP eſt égal, où eſt la meſure de l'angle PER; par conſequent le côté AB eſt auſſi égal à l'angle PER; d'où il ſuit que le ſupplément de l'angle PER, à ſçavoir GEH, eſt égal au ſupplément du côté AB.

Enfin ſi des deux quarts de Cercles BZ & CO, l'on ôte la partie commune CZ, il reſtera l'arc BC égal à l'arc ZO; mais l'arc ZO eſt égal à l'angle ZFO; d'où il ſuit auſſi que le complement de l'angle ZFO, à ſçavoir ZFG, ou ſon égal EHG, eſt égal au complement du côté BC. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 38. Il ſuit de cette Propoſition que les trois angles d'un Triangle Spherique étant connus, par exemple ceux du Triangle ABC, l'on trouvera les trois côtez.

Pour cela, il ne faut qu'à l'entour du Triangle proposé décrire ou imaginer un autre Triangle, comme DEF, & qui donne au côté DE la quantité du supplément de l'angle C, & au côté EF celle du supplément de l'angle A, & enfin au côté DF le supplement de l'angle B; & après cela par le Corollaire de la Proposition précedente, l'on trouvera les angles du Triangle DEF, dont les supplémens seront égaux aux côtez du Triangle ABC; c'est-à-dire, que le Supplément de l'angle D, sera égal au côté BC; le supplément de l'angle E, sera égal au côté AC; & enfin le supplément de l'angle F, sera égal au côté AB; & ainsi les trois côtez du Triangle ABC seront trouvez.

Voici quelques Questions Astronomiques qui peuvent servir a faire voir l'application que l'on peut faire de la Trigonometrie Spherique à l'Astronomie.

QUESTION I.

Etant connuë l'obliquité de l'Eclyptique, & la distance du Soleil au plus proche équinoxe, trouver sa déclinaison.

JE suppose que le colure des solstices convient avec le Méridien, en sorte que ces deux Cercles soient representez par le seul AEKB, passant par les deux poles du monde K, I; si AB est l'horison & CD l'Equateur, l'arc BK, ou l'angle BRK sera la hauteur du pole, & l'arc AC, ou l'angle ARC sera l'élevation de l'Equateur, qui est égale au complement de l'élevation du pole. Si EF est l'Eclyptique, les deux points E, F, où elle coupe le colure, seront les points solstitiaux de ♋ & de ♑ par où passent les Tropiques EH, FG, qui donnent sur l'horison AB, les plus grandes amplitudes Orientales, ou Occidentales d'Esté & d'Hyver RM, Fig. 37.

RL : & le point R où elle coupe l'Equateur CD, representera les deux points équinoxiaux d' ♈, & de ♎. Enfin l'angle CRE qu'elle fait avec l'Equateur CD, ou l'arc CE, eſt ce qu'on appelle plus grande obliquité de l'Eclyptique, ou plus grande déclinaiſon du Soleil, qui eſt à preſent d'environ 23.29.

Si l'on ſuppoſe que le Soleil ſoit au point Q de l'Eclyptique, en ſorte que ſon parallele ſoit TV, & ſon Cercle horaire ſoit KQI, ſa déclinaiſon ſera l'arc CT, ſçavoir la diſtance de ſon parallele à l'Equateur, qui eſt auſſi meſurée par l'arc SQ du Cercle horaire, terminé par le lieu du Soleil, & l'Equateur : & ſa diſtance au plus proche équinoxe, ſera QR, ſçavoir l'arc de l'Eclyptique, compris entre le lieu Q du Soleil, & le point Equinoxial R le plus proche.

Parce que dans le Triangle QRS, rectangle en S, on connoît l'angle oblique QRS, ou la plus grande déclinaiſon du Soleil, & l'hypotenuſe QR, ou la diſtance du Soleil au plus proche équinoxe, on pourra connoître ſa déclinaiſon QS, en faiſant cette Analogie.

Comme le Sinus total,
Au Sinus de la diſtance du Soleil au plus proche équinoxe ;
Ainſi le Sinus de la plus grande déclinaiſon du Soleil,
Au Sinus de ſa déclinaiſon particuliere.

QUESTION II.

Etant connuë l'obliquité de l'Eclyptique, & la déclinaiſon du Soleil, trouver le lieu du Soleil dans le Zodiaque.

Fig. 37.

SI dans le même Triangle rectangle RSQ, on connoît outre l'angle droit S, l'angle QRS, ou la plus grande obliquité de l'Eclyptique, & la déclinaiſon du Soleil QS, on pourra trouver le lieu du Soleil, ou ſa diſtance QR au plus proche équinoxe, en faiſant cette Analogie.

Comme le Sinus de la plus grande déclinaiſon du Soleil,
Au Sinus de ſa déclinaiſon particuliere;
Ainſi le Sinus total,
Au Sinus de la diſtance du Soleil au plus proche équinoxe.

QUESTION III.

Etant connuë la plus grande déclinaiſon du Soleil, & ſa diſtance au plus proche équinoxe, trouver ſon aſcenſion droite.

SI dans le même Triangle rectangle QRS, on connoît outre l'angle droit S, l'angle QRS, ou la plus grande déclinaiſon du Soleil, & ſa diſtance QR au plus proche équinoxe, on pourra connoître ſon aſcenſion droite, ou l'arc RS de l'Equateur compris entre le Cercle horaire du Soleil, & le point équinoxial, en faiſant cette Analogie. Fig. 37.

Comme le Sinus total,
Au Sinus du complement de la plus grande déclinaiſon du Soleil;
Ainſi la Tangente de la diſtance du Soleil au plus proche équinoxe,
A la Tangente de l'aſcenſion droite.

QUESTION IV.

Etant connue l'élevation du pole, & la déclinaison du Soleil; trouver son amplitude Orientale, ou Occidentale.

Fig. 37. ON appelle amplitude Orientale du Soleil, l'arc de l'horison RN, compris entre le point N où le Soleil se leve, & le point R du vrai Orient, ou le point équinoxial, où l'horison AB se trouve coupé par l'Equateur CD vers l'Orient: & amplitude Occidentale du Soleil, l'arc de l'horison compris entre le point où le Soleil se couche, & le point du vrai Occident, ou le point de l'Occident équinoxial, où l'horison se trouve coupé par l'Equateur vers l'Occident.

Pour trouver l'amplitude Orientale RN, faites passer par les poles du monde K, I, & par le point N, du lever du Soleil, le Cercle horaire KN, qui coupera à angles droits l'Equateur CD en quelque point, comme 2, de sorte que l'arc 2N sera la déclinaison du Soleil, comme 2RN est le complement de l'élevation du pole, on pourra connoître l'amplitude RN dans le Triangle rectangle R2N, en faisant cette Analogie.

Comme le Sinus du complement de l'élevation du pole,
Au Sinus de la déclinaison du Soleil;
Ainsi le Sinus total,
Au Sinus de l'amplitude Orientale.

QUESTION V.

Etant connue la déclinaiſon du Soleil, & l'élevation du pole, trouver la difference aſcentionnelle.

ON appelle difference aſcenſionnelle, l'arc de l'Equateur entre le cercle de ſix heures, & le cercle horaire du Soleil; quand il ſe leve, ou quand il ſe couche : comme R2, ſi le Soleil ſe leve, ou ſe couche en N, l'axe du monde IK repréſentant dans cette projection le cercle de ſix heures. Cet arc R2 ſe connoîtra dans le Triangle R2N rectangle en 2, où l'on connoît l'angle 2RN, ou le complement de la hauteur du pole, & l'arc 2N, ou la déclinaiſon du Soleil, ſçavoir en faiſant cette Analogie. Fig. 37.

Comme le Sinus total,
A la Tangente de la déclinaiſon du Soleil;
Ainſi la Tangente de l'élevation du pole,
Au Sinus de la difference aſcenſionnelle.

Il eſt évident que ſi l'on réduit en tems la difference aſcenſionnelle trouvée, en prenant une heure pour 15. degrez, on aura le tems auquel le Soleil ſe leve ou ſe couche, & par conſequent l'heure du lever ou du coucher du Soleil, dont le double donnera la longueur de la nuit, ou du jour.

QUESTION VI.

Etant connue l'élevation du pole, & l'heure du lever ou du coucher du Soleil, trouver ſa déclinaiſon.

SI l'on ôte ou qu'on diminuë de ſix heures, l'heure donnée du lever ou du coucher du Soleil, on aura la difference aſcenſionnelle R2, dont Fig. 37.

le complement 2D est la difference du Soleil au Meridien, qu'on appelle communément distance horaire, laquelle étant connuë avec l'angle 2RN, ou le complement de l'élevation du pole, on trouvera la déclinaison 2N, dans le Triangle rectangle R2N, en faisant cette Analogie.

Comme le Sinus total,
Au Sinus du complement de la distance horaire;
Ainsi la Tangente du complement de la hauteur du pole,
A là Tangente de la déclinaison.

Cette question est très-utile dans la Gnomonique, où l'on a besoin de sçavoir de combien le Soleil déclineroit de l'Equateur, s'il se levoit ou s'il se couchoit à une heure proposée, pour pouvoir tracer sur un Plan les heures Babiloniques, & Italiques, & même celles des heures Judaïques ou antiques.

FIN.

TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

De la Construction des Tables.

SECONDE PARTIE.

Conſtruction des Tables des Sinus, des Tangentes & des Secantes.

TROISIE'ME PARTIE.

Du Calcul des Triangles rectilignes.

QUATRIE'ME PARTIE.

De la resolution des Triangles Spheriques.

Les neuf premiers Theorêmes de cette quatriéme partie sont si brefs qu'ils sont presque renfermez dans leur seul titre, c'est pourquoy nous n'en rapporterons point l'intitulé dans cette Table, parce que d'ailleurs ils ne sont point de grande consequence; mais voici l'intitulé de ceux qui les suivent.

Fin de la Table des Matieres.

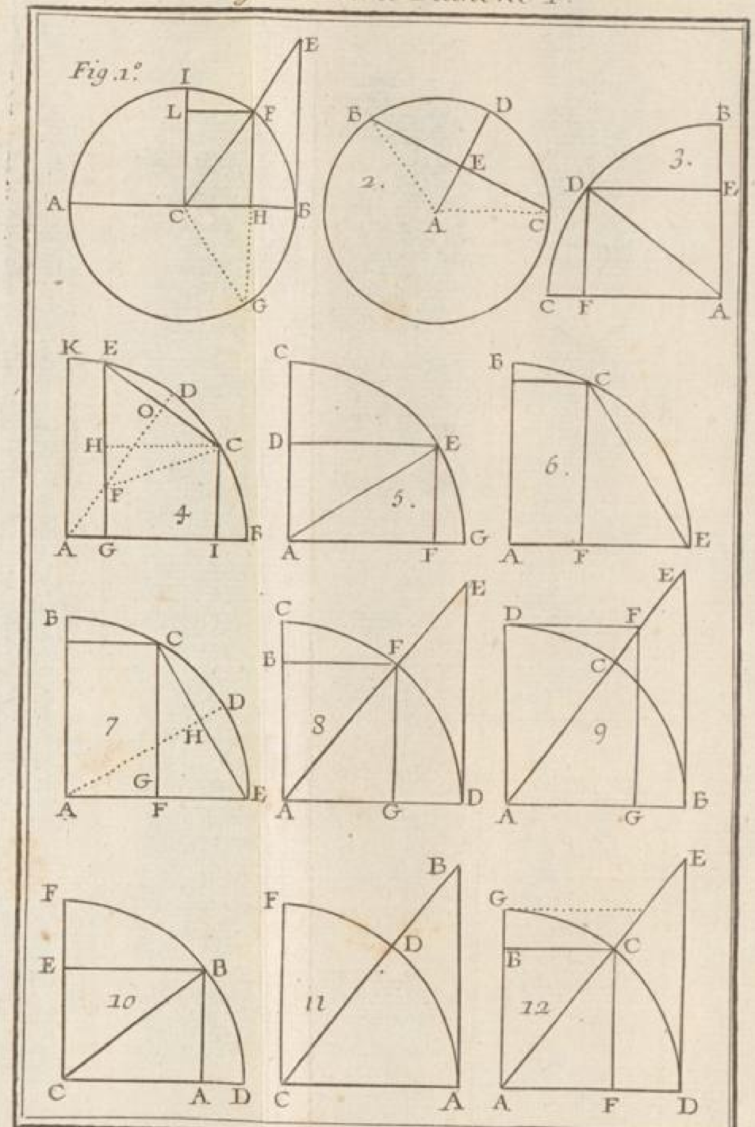


Fig. 1°
2.
3.
4
5.
6.
7
8
9
10
11
12

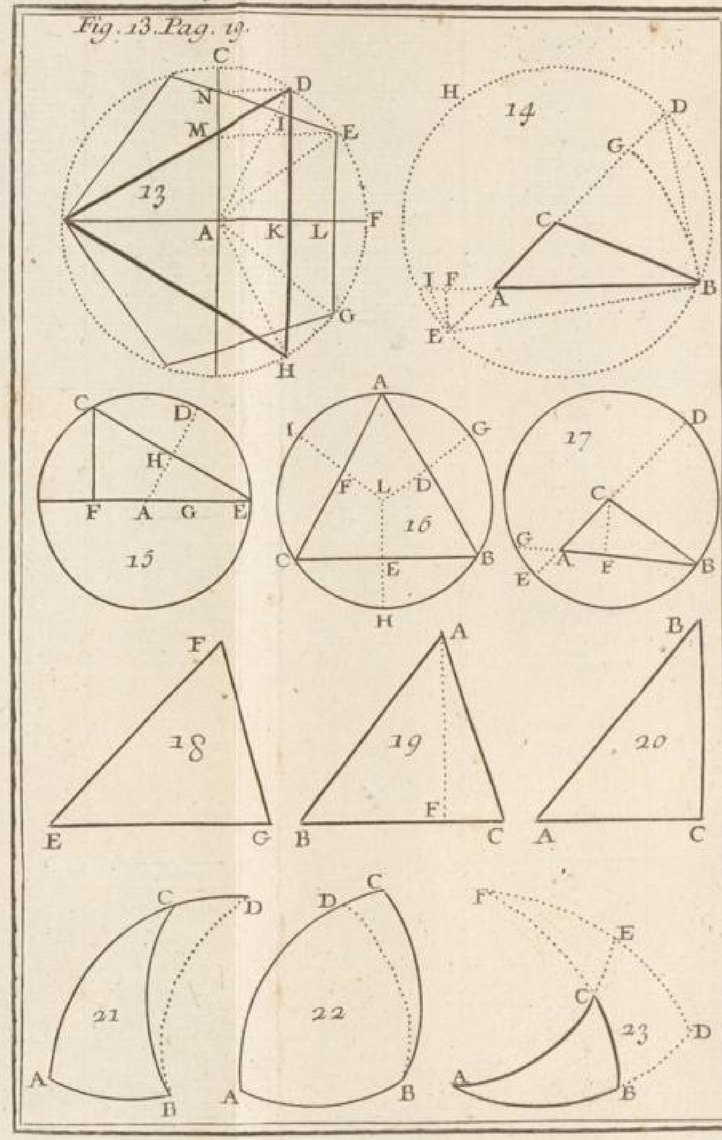
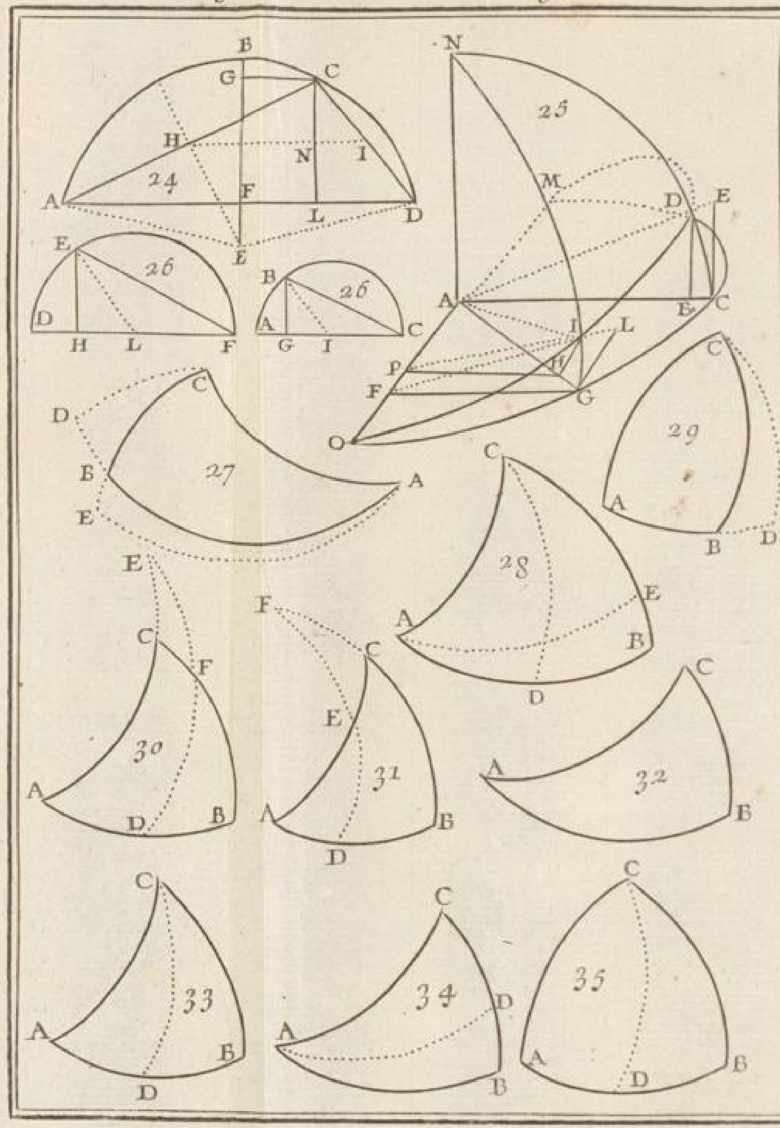
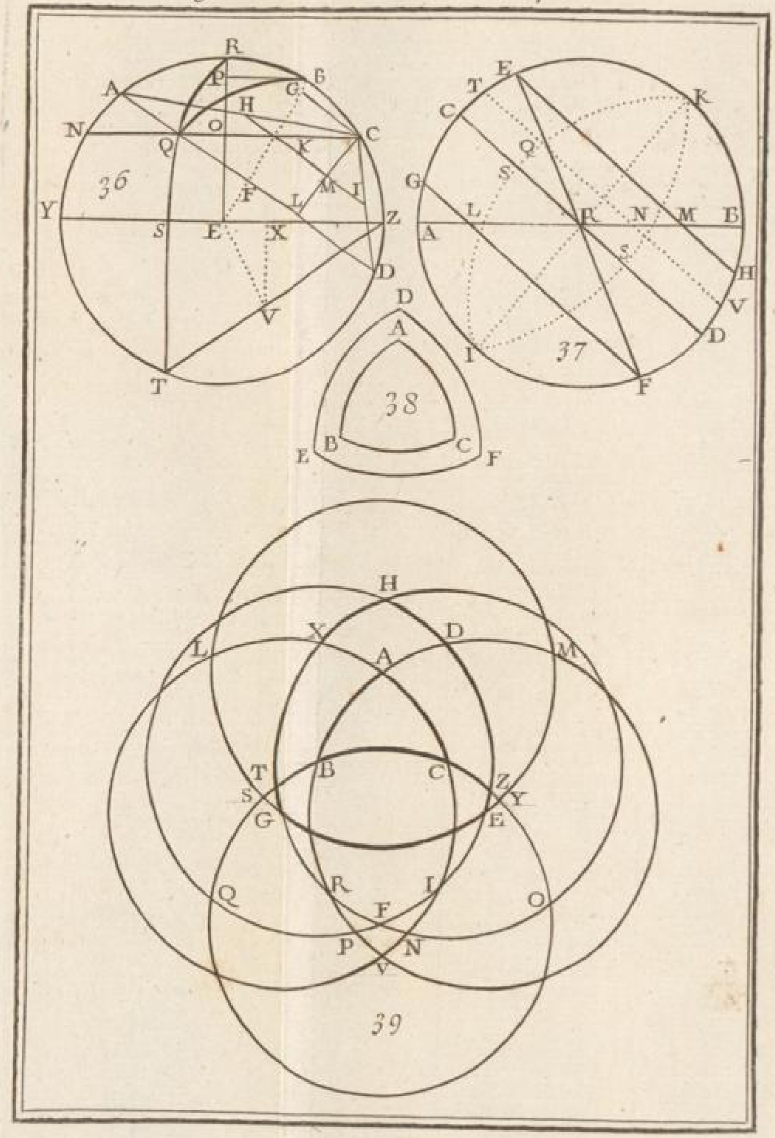


Fig. 13. Pag. 19.
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23

Trigonometrie Planche 3.



Trigonometrie Planche 4.



AVERTISSEMENT DU LIBRAIRE.

MALGRÉ toute l'attention qu'on a prise pour rendre cette nouvelle Edition des Tables des Sinus aussi parfaite qu'on pût le désirer, comme il est aisé de s'en appercevoir par la beauté du papier & la netteté des caractères, on n'a sçû empêcher qu'il ne s'y soit glissé un grand nombre de fautes, qui auroient pû devenir de conséquence dans un Livre comme celui-ci, si l'on n'avoit pris le soin de les corriger avec la derniere exactitude, comme on a fait dans l'*Errata* suivant : on le trouvera sans doute un peu ample, mais aussi il est si fidéle & si sincére qu'on y a marqué jusqu'aux moindres fautes, comme des chiffres renversés & autres aussi légeres, afin que ceux qui voudront se donner la peine de corriger avec soin dans ce Livre les fautes indiquées dans l'*Errata*, puissent se flatter d'avoir des Tables des Sinus plus correctes que toutes les Editions qui en ont été faites jusqu'à présent, & s'en servir avec confiance pour l'exactitude des Calculs.

Au reste, il ne faut point s'étonner de cette quantité de fautes : un Livre de la nature de celui-ci n'en est jamais exempt, quelque soin que l'on prenne pour la correction des Epreuves ; & l'on auroit tort d'en tirer des conséquences qui portent atteinte à la réputation que le Libraire s'est acquise par la façon dont il exécute ses impressions, puisqu'il avoit pris toutes les précautions possibles pour mettre ce Livre au-dessus de la critique. Malheureusement la personne qu'il avoit chargé du soin de cette édition, quoiqu'assez au fait des Mathematiques & même dans l'habitude de corriger des épreuves de plusieurs Livres d'Elemens, n'a point répondu à la confiance que l'on avoit en lui, ni a l'idée que l'on avoit de sa capacité, & soit négligence de sa part, soit distraction, il a laissé glisser dans ce Livre un grand nombre de fautes, dont la plûpart n'auroit pas même échapé au Libraire, s'il avoit osé se charger de ce travail

Quoiqu'il en soit, cet *Errata* joint à la Lettre suivante adressée au Libraire par un fameux Geométre, feront voir aux personnes interessées à critiquer ce petit Ouvrage, qu'il n'y a pas tant à se recrier, & même que l'on a été plus severe qu'eux dans l'examen que l'on en a fait, puisqu'ils n'ont encore pû indiquer qu'une douzaine de fautes dont ils ont fait beaucoup d'étalage dans quelques Journaux ou de pareilles découvertes deviennent fort indifférentes aux personnes qui s'amusent de ces sortes d'Ouvrages ; au lieu qu'on trouvera ici toutes les fautes dans le même ordre qu'elles ſont dans le Livre, & ſi exactement corrigées que l'on défie la critique la plus rafinée de trouver à préſent matiere à un nouvel *Errata*.

Lettre écrite à M. Jombert Libraire à Paris, par un Mathematicien de Province, au ſujet de ſa nouvelle Edition des Tables des Sinus.

En parcourant, ſuivant ma coutume, les Journaux de ce mois, j'y ai trouvé, Monſieur, une critique aſſez vive de votre nouvelle édition des Tables des Sinus, mais un peu trop partiale pour faire impreſſion ſur les perſonnes deſintereſſées, c'eſt pourquoi il ne faut pas beaucoup vous en inquieter : d'ailleurs vous connoiſſez les Auteurs, chacun eſt intereſſé à ne trouver rien de bon que ſes propres productions ; pour les faire valoir il eſt obligé d'être toujours à l'affût pour découvrir des défauts dans celles des autres, il n'y a rien dans tout cela que de fort ſimple & de très-naturel. Mais venons au fait.

Vos éditions des Tables des Sinus *in-octavo* (n'en déplaiſe à M. D...) m'ont toujours paru préférables aux autres pour bien des raiſons. 1°. A cauſe de leurs caractères qui ne fatiguent point la vûe comme celui de l'édition de M. D .. qui auroit dû le faire *in-folio* dès qu'il pouſſoit ſi loin ſes deſſeins. 2°. Parce qu'on n'a pas beſoin de recourir à deux Tables différentes pour avoir les Logarithmes des Sinus & Tangentes. M. D..... nomme ceci une confuſion, & bien d'autres avec moi le nomment une grande commodité. 3°. Parce que vos Tables ne ſont ordinairement accompagnées que d'un petit Traité de Trigonometrie, que vous auriez même pû ſuprimer, ce qui auroit épargné à M. D... beaucoup de travail & de tems perdu à déchirer impitoyablement ce petit Traité, d'ailleurs très indifférent à ceux qui achetent vos Tables. On veut des Tables pour l'uſage & non pas des Traités ſi étendus, encore moins des Traités étrangers à cette matiere, tels que la Gnomonique ; un Livre de cette eſpece ne ſçauroit être trop portatif. Je conviens que les Aſtronomes n'iront pas chercher ces Tables chez vous, elles ne ſont pas faites pour eux, mais pour les Geométres & Praticiens, & je doute fort que ces mêmes Aſtronomes ayent recours aux Tables de M. D... tandis qu'il en eſt d'autres plus étendues & plus propres à leur uſage.

Mais, dira-t-on, il y a beaucoup de fautes dans votre nouvelle édition : eh ! quel eſt l'ouvrage plein de chiffres comme celui-ci, qu'on en puiſſe garantir ? Après tout, de quelle nature ſont-elles, ces fautes ? elles ſont dans le caracteriſtique, ou dans les deux derniers termes des Sinus, Tangentes, Sécantes, Logarithmes, &c. ou dans le corps de ces choſes. Si elles ſont dans le caracteriſtique, on les reconnoît d'abord : ſi elles ſont dans les deux derniers termes, elles ne produiſent aucune erreur ſenſible, puiſqu'en calculant on ſuprime ordinairement ces deux caractères ; enfin ſi elles ſont dans le corps des quantités, elles ſont à la vérité un peu plus conſidérables, mais il n'eſt preſque point d'Ecoliers, qui en comparant ce qui précéde & ce qui ſuit dans les Tables, ne ſoit en état de s'en apercevoir, & ſouvent même de les corriger.

Ce n'eſt point que vous ne faſſiez bien d'ajouter un *Errata* à votre nouvelle Edition, & même pour vous faire plaiſir, en voici un des plus exacts que je vous envoye, je vous exhorte à le joindre à tous vos exemplaires, ne fût ce que pour épargner à M. D... la peine de travailler aux cartons qu'il vous offre ſi gratieuſement. Mais à propos de cartons, je m'imagine que vous ſeriez en état de payer M. D... de la même politeſſe, ſi tous ceux qui découvriront des fautes dans ſon Ouvrage venoient vous les indiquer : en voici une entr'autres que j'ai trouvée à la premiere ouverture que j'ai faite de ſon Livre, page 27, Problême 4. (No 70.) Dans cet endroit il ſe propoſe de trouver le côté AB d'un Triangle rectangle oppoſé à un Angle de 56 dégrés 12 minutes, l'autre côté BC étant de 456 toiſes ; & dans la ſolution qu'il en donne, il met pour le côté AB 687 toiſes au lieu de 681. Au reſte ces ſortes de fautes ne ſont pas beaucoup conſidérables, non plus que celles qu'il reprend dans votre Edition. Je la raporte ſeulement ici pour prouver à cet Auteur, qui ſe croit infaillible, que malgré ſon exactitude & celle des perſonnes illuſtres qui ont revû ſon Ouvrage avec tant d'attention, il eſt impoſſible qu'il ne ſe gliſſe toujours des fautes : ſon Livre n'en eſt pas exempt non plus que le vôtre, & tous les Ouvrages de cette nature ne le ſeront jamais quelque ſoin que l'on y apporte. En voilà bien aſſez, Monſieur, pour calmer vos inquiétudes, continuez à nous donner de belles éditions & à imprimer des Ouvrages nouveaux : l'aprobation que le Public donne à vos ſoins doit vous dedommager abondamment des tracaſſeries que celui-ci vous a occaſionné. Je ſuis avec bien de l'eſtime, Monſieur, &c.

ERRATA:

deg.	min.				
89	30	Log. Sin.	*99999856*	*liſez*	*99999836*
89	30	Log. Tang.	120591614	*liſez*	120591416
1	34	Log. Sin.	84365999	*liſez*	84367999
88	9	Tangentes	309[illegible]928	*liſez*	30959928
87	20	Sinus	9988171	*liſez*	9989171
87	15	Sinus	99884.85	*liſez*	99884.84
87	3	Sinus	9986548	*liſez*	9986748
87	12	Tangentes	20446480	*liſez*	20446486
87	4	Tangentes	19615584	*liſez*	19515584
87	28	Sécantes	22[illegible]24126	*liſez*	22624126
87	25	Sécantes	22686528	*liſez*	22186528
3	47	Log. Sin.	88294363	*liſez*	88194363
5	14	Log. Tang.	89618859	*liſez*	89618659
5	54	Tangentes	1933400	*liſez*	1033400
84	1	Sinus	9945622	*liſez*	9945522
84	0	Log. Tang.	106783798	*liſez*	109783798
6	23	Sinus	1111709	*liſez*	1111799
6	7	Sécantes	10057258	*liſez*	10057256
6	30	Sécantes	10064667	*liſez*	10064697
6	12	Log. Sin.	90344212	*liſez*	90334212
83	45	Sinus	9950563	*liſez*	9940563
6	36	Sécantes	10066815	*liſez*	10066715
6	35	Log. Sin.	90593671	*liſez*	90593672
6	52	Log. Sin.	90755832	*liſez*	90775832
6	55	Log. Sin.	90707189	*liſez*	90807189
6	41	Log. Tang.	90688455	*liſez*	90688465
83	8	Log. Sin.	99968738	*liſez*	99968736
7	0	Tangentes	1227[illegible]	*liſez*	1227846
7	28	Log. Tang.	91174728	*liſez*	91174724
7	29	Log. Tang.	91184511	*liſez*	91184518
7	30	Log. Tang.	91194294	*liſez*	91194291
82	34	Sinus.	9915661	*liſez*	9915961
7	47	Log. Tang.	91357267	*liſez*	91357260
7	50	Log. Tang.	91385410	*liſez*	91385417
82	6	Sinus	9904094	*liſez*	9905094
8	8	Sinus	1414712	*liſez*	1414772
81	38	Tangentes	67993568	*liſez*	67993565
81	7	Log. Sin.	99947598	*liſez*	99947591
81	11	Log. Tang.	108193713	*liſez*	108093713

39 fautes dont 29 dans l'édition de 1697

deg.	min.				
9	7	Log. Sin.	91908793	*liſez*	91998793
10	23	Sécantes	10168487	*liſez*	10166487
10	0	Log. Sin.	92366702	*liſez*	92396702
79	56	Tangentes	56326484	*liſez*	56329474
79	36	Log. Tang.	107362828	*liſez*	107362827
10	32	Sinus	1822075	*liſez*	1828075
10	33	Log. Tang.	92708772	*liſez*	92700772
11	42	Sinus	2027883	*liſez*	2027873
11	51	Log. Sin.	93114951	*liſez*	93124951
78	2	Sécantes	48229457	*liſez*	48229357
76	50	Log. Tang.	106309083	*liſez*	106309063
13	54	Sécantes.	10300668	*liſez*	10301668
13	57	Log. Sin.	93821623	*liſez*	93821523
75	44	Log Tang.	105946914	*liſez*	105946924
14	48	Log. Sin.	94062987	*liſez*	94072987
75	17	Tangent.	38072608	*liſez*	38072609
75	14	Log. ~~Tang.~~ Sin	99854135	*liſez*	99854133
74	3	Log. Sin.	99829601	*liſez*	99829501
16	17	Sinus.	2903875	*liſez*	2803875
17	18	Tangentes	3114953	*liſez*	3114653
17	9	Log. Tang.	94848898	*liſez*	94893898
17	32	Sécantes	10587217	*liſez*	10487217
19	5	Log. Tang.	95390209	*liſez*	95390200
19	40	Sinus.	3365375	*liſez*	3365475
20	54	Log. Tang.	94819074	*liſez*	95819074
21	30	Sinus	6665013	*liſez*	3665013
68	54	Sinus	9359535	*liſez*	9329535
68	48	Sécantes	17652988	*liſez*	27652988
68	19	Sinus	8202401	*liſez*	9292401
22	0	Log. Tang.	96064066	*liſez*	96064096
67	30	Sinus	9283795	*liſez*	9238795
23	18	Tangent.	5306680	*liſez*	4306680
66	51	Sinus	0194788	*liſez*	9194788
23	11	Sinus	3937845	*liſez*	3936745
23	52	Log. Tang.	96458675	*liſez*	96458575
24	18	Log. Tang.	96546844	*liſez*	96546744
65	30	Log Sin.	99590299	*liſez*	99590229
24	55	Sécantes.	11626313	*liſez*	11026313
24	31	Log Sin.	96180941	*liſez*	96180041
65	9	Sinus	9474111	*liſez*	9074111
65	5	Sinus	9469215	*liſez*	9069215

41 fautes dont 9 dans l'édition de 1697

deg.	min.				
65	28	Log. Tang.	103409267	*lisez*	103406267
25	16	Sécantes	11057891	*lisez*	11057898
64	44	Sinus	9043410	*lisez*	9043310
25	47	Log. Tang.	06840011	*lisez*	96840011
63	35	Tangentes	10130164	*lisez*	20130164
26	60	Tangentes	4095254	*lisez*	5095254
27	2	Log. Tang.	97077002	*lisez*	97077902
62	37	Sécantes	21751895	*lisez*	21741895
62	46	Log. Sin.	99489552	*lisez*	99489752
62	46	Log. Tang.	122884746	*lisez*	102884746
27	41	Log. Sin.	90670647	*lisez*	96670647
62	20	Sécantes	21530553	*lisez*	21536553
62	21	Log. Sin.	99473452	*lisez*	99473352
62	6	Log. Sin.	99463471	*lisez*	99463371
62	16	Log. Tang.	102792175	*lisez*	102792173
28.	9	Sinus	4717[illegible]15	*lisez*	4717815
61	52	Tangentes	12702141	*lisez*	18702141
29	18	Log. Sin. le 6 & le 4 ne paroiſſent pas aſſez.			
60	48	Log. Sin.	99419755	*lisez*	99409755
60	30	Log Sin.	99396988	*lisez*	99396968
60	5	Sinus	8867517	*lisez*	8667517
60	24	Tangentes	15603183	*lisez*	17603183
31	19	Sinus	5197679	*lisez*	5197676
31	24	Tangentes	6104006	*lisez*	6104026
31.	21	Log. Tang.	97847[illegible]38	*lisez*	97847638
58	46	Log. Tang.	122172287	*lisez*	102172287
58.	56	Log. Tang.	102200[illegible]23	*lisez*	102200823
32	12	Sécantes	11717633	*lisez*	11817633
57	34	Sinus	8440120	*lisez*	8440160
32	42	Tangentes	6419880	*lisez*	6419886
32	31	Sécantes	11859080	*lisez*	11859089
32	38	Log. Sin.	97317089	*lisez*	97317989
33	9	Tangentes	9531360	*lisez*	6531360
33	37	Sinus	5526338	*lisez*	5536338
33	38	Sinus	5528760	*lisez*	5538760
34	12	Sécantes	12090720	*lisez*	12090720
55	17	Log Tang.	101593725	*lisez*	101593525
35	25	Sinus	5795883	*lisez*	5795183
35	18	Tangentes	7060395	*lisez*	7080395
35	0	Log Tang.	98442268	*lisez*	98452268
54	45	Log. Tang.	121507464	*lisez*	101507464

deg.	min.				
35	52	Sinus	5159010	*lisez*	5859010
35	55	Tangentes	7243727	*lisez*	7243227
36	50	Tangentes	7499033	*lisez*	7490033
53	24	Sinus	8028275	*lisez*	8028175
37	14	Log Tang.	98807920	*lisez*	98807900
52	31	Sinus	7935504	*lisez*	7935304
52	59	Sécantes	16619990	*lisez*	16609990
52	45	Sécantes	16520298	*lisez*	16520898
37	35	Sécantes	12618829	*lisez*	12618820
52	20	Log. Tang.	101124058	*lisez*	101124058
38	4	Sinus	6165879	*lisez*	6165779
38	39	Tangentes	7097193	*lisez*	7997193
38	31	Sécantes	12780245	*lisez*	12780745
51	26	Log. Sinus	98231419	*lisez*	98931419
51	15	Log. Tang.	120955090	*lisez*	100955090
49	60	Sécantes	15557231	*lisez*	15557238
40	30	Log. Tang.	99324989	*lisez*	99314989
49	27	Tangentes	11685827	*lisez*	11687827
49	8	Log. Sinus	98786463	*lisez*	98786563
41	27	Tangentes	8821707	*lisez*	8831707
48	38	Sécantes	15132446	*lisez*	15131446
48	9	Sinus	7448091	*lisez*	7448940
48	15	Log. Tang.	120493752	*lisez*	100493752
47	38	Log. Sinus	98685348	*lisez*	98685548
43	56	Sinus	9938209	*lisez*	6938209
44	55	Sinus	7060576	*lisez*	7060776
44	53	Tangentes	9959558	*lisez*	9959358
45	12	Tangentes	16070058	*lisez*	10070058

69 fautes

8 d l'édition de 1797

ERRATA

Des Logarithmes des Nombres.

Nombres.				
18	au lieu de .	1.2452725	*lisez*	1.2552725
645	. . . .	2.8005497	*lisez*	2.8095597
1264	. . . .	3.1016471	*lisez*	3.1017471
1340	. . . .	3.1071048	*lisez*	3.1271048
1347	. . . .	3.1293670	*lisez*	3.1293676
1662	. . . .	3.2806310	*lisez*	3.2206310
1682	. . . .	3.2158260	*lisez*	3.2258260
1722	. . . .	3.2360341	*lisez*	3.2360331

Nombres.				
2241	au lieu de	3.2504419	*lisez*	3.3504419
2247	. . . .	3.4516031	*lisez*	3.3516031
2668	. . . .	3.4262858	*lisez*	3.4261858
2856	. . . .	3.4557482	*lisez*	3.4557582
3163	. . . .	3.4000992	*lisez*	3.5000992
3250	. . . .	3.5118134	*lisez*	3.5118834
3539	. . . .	3.5488808	*lisez*	3.5488806
3599	. . . .	3.5561816	*lisez*	3.5561818
3630	. . . .	3.5599966	*lisez*	3.5599066
3912	. . . .	3.5923088	*lisez*	3.5923988
4123	. . . .	3.6152233	*lisez*	3.6152133
4170	. . . .	3.6201368	*lisez*	3.6201361
4982	. . . .	3.6974137	*lisez*	3.6974037
4983	. . . .	3.6074909	*lisez*	3.6974909
5259	. . . .	3.7209037	*lisez*	3.7209032
5448	. . . .	3.7362571	*lisez*	3.7362371
5464	. . . .	3.7375007	*lisez*	3.7375107
5965	. . . .	3.7756004	*lisez*	3.7756104
6043	. . . .	3.7812426	*lisez*	3.7812526
6365	. . . .	3.8037084	*lisez*	3.8037984
Page suivante, en bas à la marge, au lieu de 4500 *lisez* 6500				
6507	. . . .	3.8133818	*lisez*	3.8133808
6891	. . . .	3.8383822	*lisez*	3.8382822
7156	. . . .	3.8546705	*lisez*	3.8546703
7167	. . . .	3.8563374	*lisez*	3.8553374
7298	. . . .	3.8632049	*lisez*	3.8632039
7299	. . . .	3.8632654	*lisez*	3.8632634
7445	. . . .	3.8718747	*lisez*	3.8718647
7929	. . . .	3.8991184	*lisez*	3.8992184
7976	. . . .	3.7017851	*lisez*	3.9017851
8053	. . . .	3.9050577	*lisez*	3.9059577
8090	. . . .	3.8079485	*lisez*	3.9079485
8387	. . . .	3.4236066	*lisez*	3.9236066
9028	. . . .	3.9556915	*lisez*	3.9555915
9031	. . . .	3.6557358	*lisez*	3.9557358
9321	. . . .	3.9694627	*lisez*	3.9694625
9564	. . . .	3.9806398	*lisez*	3.9806396
9677	. . . .	3.9357407	*lisez*	3.9857407
à la marge en bas Nn		9000.....	*lisez*	9900.....
9953	. . . .	3.9979504	*lisez*	3.9979540

Sur 46 fautes dans les log des nombres, il y en a 2 de celles-ci dans l'édition de 1697

En total ; des 195 fautes de cet errata 39 se retrouvent dans l'édition de 1697. —

soit les 0,2

La reproduction des erreurs de
l'édition de 1697 dans celle-ci (1741)
montre avec évidence que 1697 a
servi à la composition de 1741. —