

www.e-rara.ch

Geometrie und ebene Trigonometrie

Prändel, Johann Georg

München, 1793

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5134

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3790>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

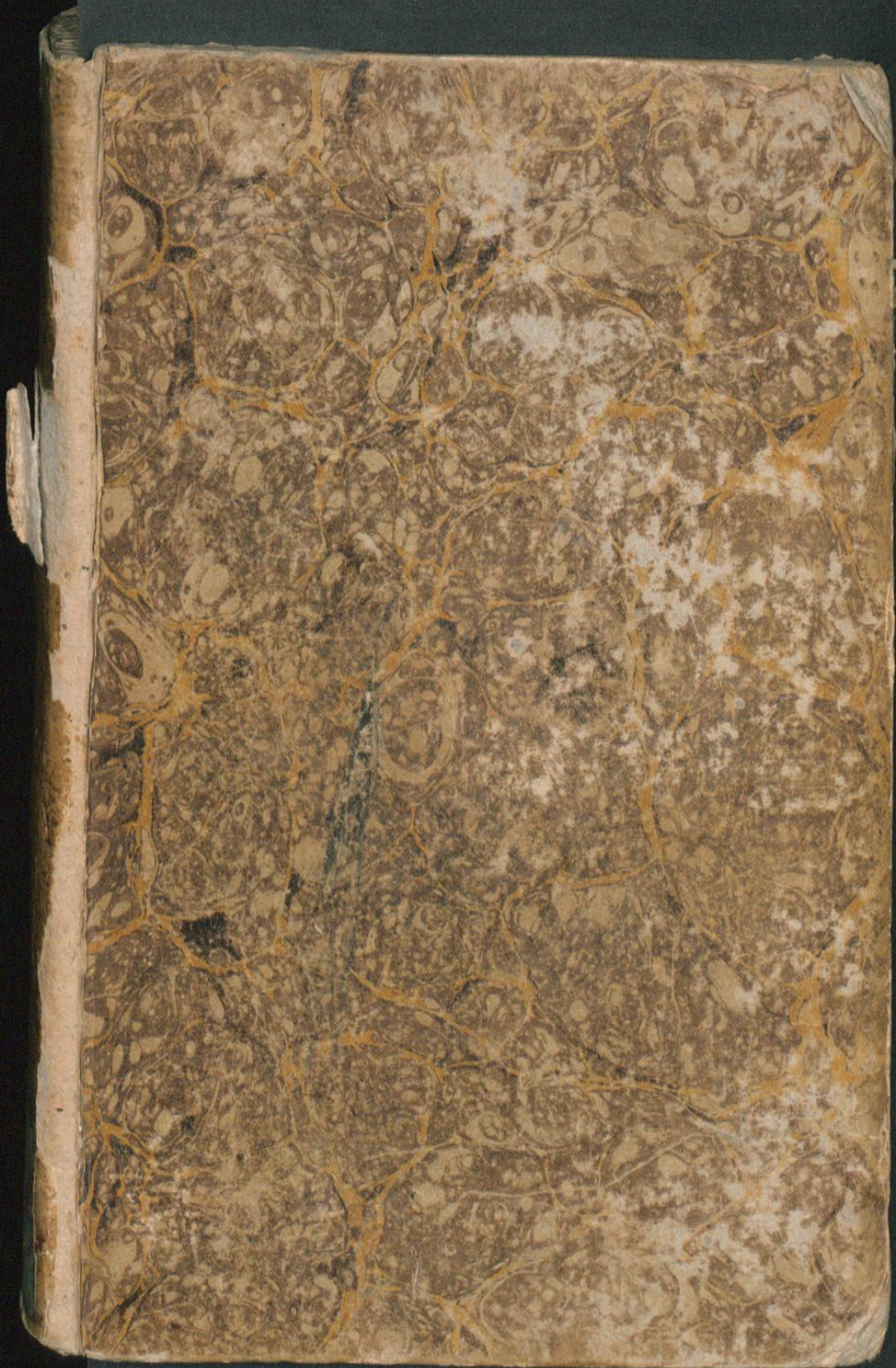
e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

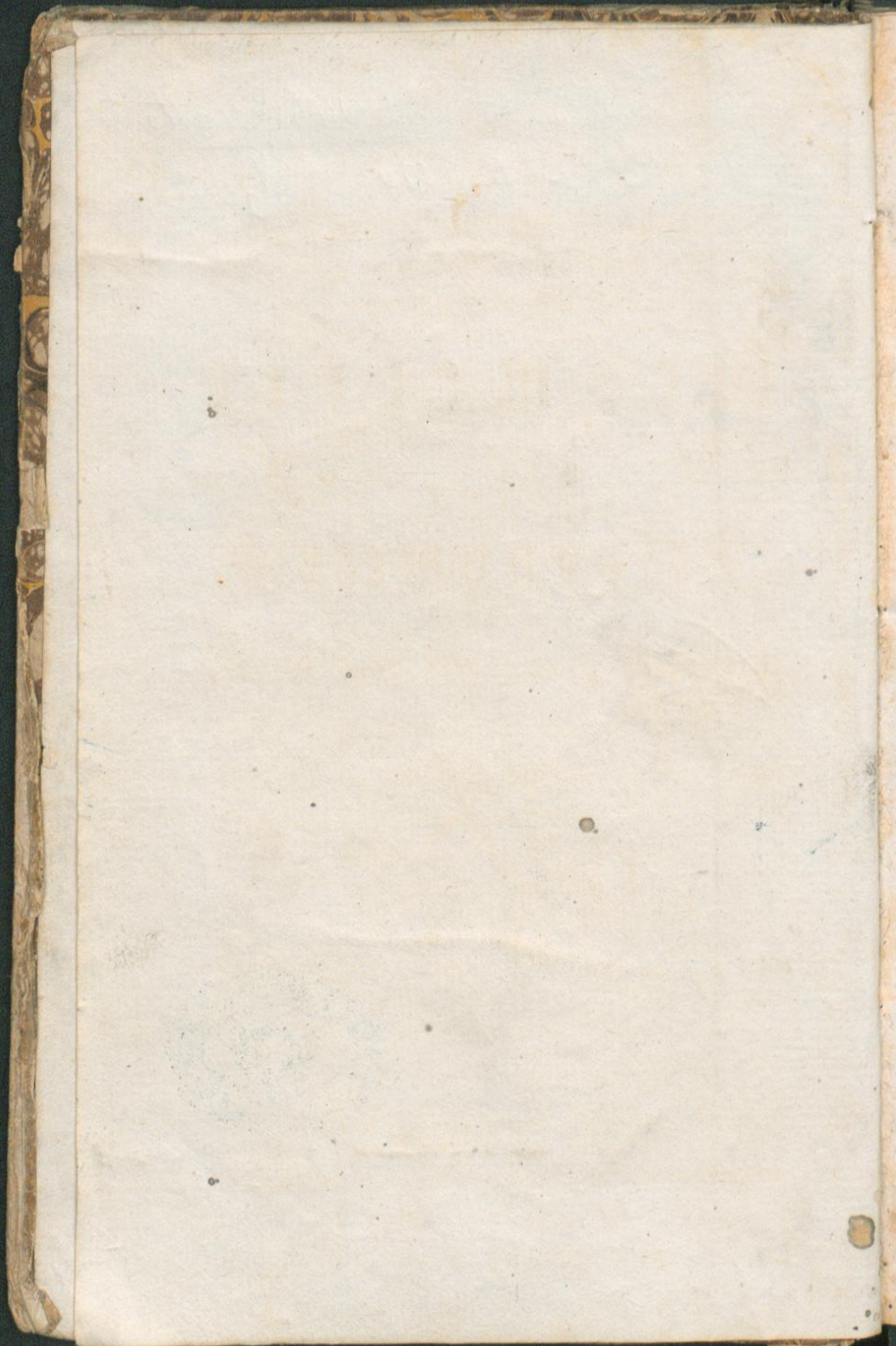


no 39.

43. 7716 (Pare)

Rot 5134

Braunfingb Buche Frid. Wilh. Netto
Berlin 1820 21/6



Johann Georg Prändels

Öffentlichen Repetitors der Mathematik auf dem Chur-
fürstl. Schulhause zu München

G e o m e t r i e

und

e b e n e

Trigonometrie

nebst

ihrer Ausübung auf dem Felde.



Mit 9 Kupfertafeln.



München, 1793.

Bei Joseph Lentner.

Nro 1312.

Geometrie und ebene Trigonometrie 2c.
Von Joh. Georg Prändt, Repetitor.

Imprimatur.

München im churfürstl. Bücher-
chercensur-Collegium, den
10ten April 1793.

Registr. Fol. 172.

J. F. Graff,
wirl. Rath und Sec.

V o r r e d e.

Eine Art von Commentär über Geometrien einiger schwerer Lehrbücher, den ich sowohl bey öffentlicher, als Privatunterweisung durch die acht Jahre in Nebenscripten nach und nach zu entwerfen genöthigt war, sind die ursprüngliche Veranlassung zu gegenwärtigem Werkchen. Erst enthielten diese Scripten blos Erläuterungen etwas zu unvollständiger Begriffe, beyläufig wie Seite 6. S. 20. vom Maasse der Winkel, und beträchtliche Abkürzungen der Beweisarten, z. B. S. 155 oder S. 44 Trig. Zuweilen wurden auch Lücken ausgefüllt, als wie S. 60 der Uebergang zur Lehre von Parallellinien, oder S. 98 von Winkeln innerhalb der Peripherie zum Gegensatz der Winkel außer derselben. Es wurden auch merkliche Zusätze eingerückt, und, um die Sache für Anfänger weniger trocken zu machen, so manche praktische Anwendung untergestreut. Oft glückte es mir auch, die Lehrsätze präciser, oder wenigst mit mehr Bestimmtheit vorzutragen. Zum Beweise mag S. 213 der Satz von der Quadratur

V o r r e d e.

tur des mondenförmigen Zirkelausschnitts, des Hippokrates dienen. Das System erhielt nebenher auch hie und da bessere Ordnung. So z. B. sehe ich nicht ein, warum Klemm den Lehrsatz, daß die vier Winkel in jedem Trapeze 360° halten, sammt dessen Zusatz mitten in die Figurenwanlung hineinsetzt: oder daß der Satz von der Gleichheit der Produkte aus den Sehnensegmenten, nicht mit zur Lehre des Zirkels gehören soll. Endlich bemühte ich mich, so viel möglich, bey den Ausföhrungen und Beweisen die Verfahrungsart mit Worten, und nicht so fast mit Buchstaben auszudrücken; damit sowohl mehr mathematische Sprache als Allgemeinheit dadurch erzielt würde. Was die Beweise betrifft, so wollte ich lieber mit einigen den algebraischen als den sonst beliebten geometrischen Zuschnitt dazu wählen. Der Jüngling, scheint es mir, gewinnt dabey den Vortheil, daß er die fettenartige Verbindung derselben leichter und eher zu überblicken in Stand gesetzt wird, als durch die geometrische Form des Barstens, Kästners u. a. wo sich bey Anfängern, wenn sie nicht sehr wohl in der dialektischen Syllogistik bewandert sind, leicht Fehlschlüsse einzuschleichen pflegen. Indes habe ich jene nicht hintangesezt, und wo die Sache dadurch

V o r r e d e.

dadurch thunlicher schien, sie ebenfalls zu benutzen gesucht. Am Ende hielt ich es auch für gut, nach Prof. Feders und Anderer Beyspiel, eine kleine Geschichte der Geometrie anzuhängen. Ich schöpfte hier vorzüglich aus dem ersten Theil der Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der berühmtesten Mathematiker. Münster 1788; wo sich freylich in Vergleichung mit Klemms u. a. Geschichte hie und da, vorzüglich in Rücksicht der Zeitrechnung, Widersprüche vorfinden, welchem Fehler zuweilen auch interessantere Geschichten unterworfen sind. Kurz, die Scripten faßten nach einer kleinen Bearbeitung ein ziemlich vollständiges Ganzes in sich. Sie erhielten allen Beyfall, sowohl von Seite meiner Schüler, als der hier öffentlich aufgestellten Lehrer. Ich wagte es daher, vorzüglich auf wiederholtes Zureden des hiesigen verdienstvollen gelehrten Herrn Professors der Physik, und würdigen Mitgliedes der churfürstl. Akademie P. Mar. Imhofs, meine geringe Arbeit den unpartheyischen Augen des Publicums vorzulegen. Enthält dieß Werk gleich nicht viel Neues; so wird man doch darinn durchgehends sehen, daß nirgend das mindeste Plagium begangen worden: sondern daß der Verfasser, um so deutlich seyn zu können, sowohl das

System

V o r r e d e.

System selbst, als die kleinsten hineingehörigen Theile vorher wohl einstudiert und verdauet haben müsse. Sollte dasselbe auch keine sonderlichen Verdienste haben, so gilt es nichts destoweniger als ein Beweis von der großen Neigung eines Mannes zur Mathematik, der sie ganz ohne allen Lehrer studierte; dem es doch von jeher an Aufmunterung, an Unterstützung gefehlt, und der vielleicht seinem Vaterlande Nutzen schaffen würde, wenn ihn die Gunst des Schicksals auf den gehörigen Posten stellte.

Schriebs

München den 9ten Aprils 1792.

Der Verfasser.

Ueber

U e b e r b l i c k

Der vornehmsten abgehandelten Theilen dieses Werkes.

	Seite
Allgemeine Vorbegriffe der Geometrie	1
Nöthigste Bestimmungen des Zirkels, seiner Theile, der Winkel und Flächenfiguren	3
Grundbestimmungen der geradlinichten Dreyecke sammt ihrer allerersten Anwendung	9
Weitere Bestimmungen der Winkel, von Parallellinien und ihrer nächsten Anwendung	16
Figurenwandlung	39
Figurenberechnung	52
Ähnlichkeit der Figuren, und ihre Verhältnisse zu einander	58
Vom Zirkel	69
Stereometrie	98
Körperwandlung	118
Ebene Trigonometrie	124
Berechnung der Dreyecke	128
Erste Klasse dieser Berechnungen, wo eine Seite und zween Winkel gegeben sind	139
Zweyte Klasse, wenn zwei Seiten und ein Winkel gegeben ist	141

	Seite
Dritte Klasse, wenn aus den Seiten die Winkel be- stimmt werden sollen	145
Anwendung der Trigonometrie auf Polygone und Zirkel- abschnitte	148
Von Erfindung der Sinusse n facher Bögen, als ein Anhang zur ebenen Trigonometrie	151
Praktische Geometrie. Vorbegriffe	161
Von Weitemessungen	164
Von Höhenmessungen, und zwar erstens	
durch Hilfe zweener Stäbe	174
Durch den Schatten	175
Durch den Körperfall	177
Durch Hilfe des Barometers	180
Von Aufnehmung der Gegenden	186
Ueber die Reduzierung der in verschiednen Ländern üb- lichen Schuhe oder Füßen	189
Etwas zur Geschichte der Geometrie	193



Geometrie.

Allgemeine Vorbegriffe.

§. 1. Erklärung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft der Gröſſen, in ſo ferne man dabey nur auf ihre Ausdehnung ſieht.

§. 2. **Erkl.** Ausdehnung bloß nach Länge ſind Linien: Ausdehnungen nach Länge und Breite ſind Flächen; und Ausdehnungen nach Länge, Breite, und Tiefe oder Höhe, ſind endlich Körper.

§. 3. **Zuſatz.** Die Gegenſtände der Geometrie ſind demnach Linien, Flächen und Körper.

§. 4. **Erkl.** Ein mathematischer Punkt ist die Gränze einer Linie, und dem zufolge ist auch eine solche Linie nichts anders als die Gränze einer Fläche, und eine solche Fläche die Gränze eines Körpers.

§. 5. **Anmerk.** In einem minder strengen Sinne läßt sich auch sagen, daß die Linie eine Reihe von Punkten, die Fläche eine Reihe von Linien, und der Körper eine Reihe von Flächen sey.

§. 6. **Erkl.** Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zween Punkten Fig. 1 Nro I: jeder andere Weg ist eine krumme Linie, voraus gesetzt, daß kein Theil des Weges gerade gehe Nro II. — Oder eine gerade Linie ist jene, deren Theile sämtlich einerley Richtung haben. Im wiedrigen Falle, wo kein Theil des andern Richtung beybehält, eine krumme Linie.

§. 7. **Anmerk.** Man könnte noch eine dritte Gattung von Linien annehmen, deren Theile nämlich bald gerade, bald krumm sind, und selbe zusammengesetzt oder gemischt nennen. Sie wird in der Natur am häufigsten angetroffen. Z. B. Das Ufer eines Flusses, das zickzacke Schlangen des Blitzstrahls, der Sprung durch eine Glasplatte oder ein Porzellanteller, die Bahn eines geschwungenen Körpers, die Marmoradern: überhaupt fast alle Umrisse der thierischen Körper und Pflanzen; vorzüglich eines Laubbaumes u. s. f.

§. 8. **Willkührl. Satz.** Das Maas der geraden Linien sind Ruthen, Schuhe, Zolle, Linien. Eine Ruthe wird zu 10 Schuh, ein Schuh zu 10 Zoll u. s. f. angenommen. Man bezeichnet die Ruthen durch ($^{\circ}$); die Schuhe durch ($'$), die Zolle durch ($''$) und s. f. Z. B. 18° , $7'$, $2''$, $3'''$.

§. 9. **Zusatz.** Krumme Linien ist man daher nicht eher zu messen im Stande, als bis sie zuvor, wenn es möglich, in gerade verwandelt worden sind.

§. 10.

§. 10. **Erkl.** Jener Theil der Geometrie nun, der sich mit geraden Linien, und außerdem noch mit dem Kreise, samt den damit verwandten Flächen und Körpern beschäftigt, macht die Elementargeometrie aus: die übrigen nach Gesetzen beschriebnen krummen Linien samt ihren Abstammungen der Flächen und Körper gehören in das Gebiet der höhern Geometrie.

Nöthigste Bestimmungen des Zirkels, seiner Theile, der Winkel und Flächenfiguren.

§. 11. **Erkl.** Ein Zirkel (Kreis) entsteht, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punkt ganz herum bewegt. Der feste Punkt ist der Mittelpunkt (*Centrum*) Die gerade herum bewegte Linie ist der Strahl (*Radius*) Die beschriebne krumme Linie, die Zirkellinie (*Peripheria*) Jede gerade Linie von einem Punkt der Peripherie zum andern, eine Sehne (*Chorda*) Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne ein Durchmesser (*Diameter*) Jede den Zirkel berührende Linie, Tangente (*Tangens*) Was immer für ein Theil der Peripherie, Bogen (*Arcus*) Ein Theil der Zirkelfläche zwischen einem Bogen und der dazu gehörigen Sehne, Abschnitt (*Segmentum*) zwischen zween Radiussen und dem Bogen, Ausschnitt (*Sector*). So ist z. B. Fig. 2 das c der Mittelpunkt. c d der Radius a d b h p die Peripherie. p h eine Sehne. a b der Diameter. f g oder q k eine Tangente. d b oder b h oder a p ein Bogen. p l h m ein Abschnitt. d e b ein Ausschnitt.

§. 12. **Willk. Satz.** Jede Peripherie denkt man sich in 360 gleiche Theile getheilet, die man

Grade nennt, weil sich diese Zahl durch die meisten Faktoren dividieren läßt. Der Grad wird wieder unterabgetheilt in 60 Minuten, dieser in 60 Sekunden u. s. f. Man bezeichnet sie gleichfalls, wie oben, mit ($^{\circ}$) ($'$) ($''$) u. s. f. Z. B. $76^{\circ}, 15', 29''$. Die obwaltenden Umstände werden allemal den Ausschlag geben, ob diese Zeichen von Linien oder Zirkelbögen zu verstehen seyen.

S. 13. **Lehrsatz.** Alle geraden Linien eines Zirkels vom Mittelpunkt bis an die Peripherie gezogen, d. i. alle Radiusse ein und des nämlichen Zirkels sind einander gleich.

B e w e i s .

Was gleiches Maas hat, ist gleich; nun haben alle Radiusse des nämlichen Zirkels die Zenlinie, oder die Oeffnung des Zirkelinstruments zum Maasse; also sind sie einander gleich.

S. 14. **Lehrs.** Der Radius gleicht dem halben Diameter. Fig. 2.

S a t z .

$$R = \frac{1}{2} D$$

B e w e i s .

Man beschreibe was immer für einen Zirkel, so ist

$$\left. \begin{array}{l} ac = R \\ cd = R \end{array} \right\} \text{ aus der Definition.}$$

add. $ac + cd = 2 R$. Aber in der Figur ist wegen der nämlichen Richtung.

$$ac + cd = D$$

$$\text{Folglich } 2 R = D$$

$$R = \frac{1}{2} D$$

:2

S. 15.

S. 15. **Erkl.** Ein ebner Winkel ist die Neigung zweier geraden Linien in einen Punkt. Fig. 3 Ist die Neigung neutral d. i. neigt sich eine Linie weder mehr hinweg von der andern, als hinzu, so heißt der Winkel ein rechter und die Linien lothrecht oder perpendicular aufeinanderstehend. Neigt sich eine Linie mehr hinzu zu der andern als hinweg so ist der Winkel spizig; — und stumpf, wenn sich die eine mehr hinweg als zur andern hinzu neigt. So ist z. B. o ein rechter, m ein spiziger, und x ein stumpfer Winkel.

§. 16. **Zus.** Man sieht ohne mein Erinnern, daß ein spiziger Winkel kleiner als ein rechter, und ein stumpfer größer seyn müsse.

S. 17. **Willk. Satz.** Die Bezeichnung eines Winkels kann entweder durch einen oder drey Buchstaben geschehen. Im ersten Falle wird er in die Neigung hinein geschrieben, und dazu schicken sich stumpfe Buchstaben, als m, n, x, o u. s. f. Im zweyten Falle werden sie an die Endpunkte der Linien geschrieben, und muß jener in die Mitte zu stehen kommen, wenn man sie ausspricht oder schreibt, welcher vor die Neigung gesetzt wird. Z. B. der Winkel a b c oder c b a; aber niemals b a c oder c a b.

S. 18. **Erkl.** Die zwei Linien, welche den Winkel bestimmen heißen Schenkel, und ihr Neigungspunkt — Scheitel.

S. 19. **Zusatz.** Es kommt bey der Größe eines Winkels alles auf die Neigung an. Die Länge oder Kürze der Schenkel trägt nichts dazu bey.

S. 20. **Lehrsatz.** Jeder Zirkel besteht aus 4 rechten Winkeln.

Satz.

S a t z. Fig. 4.

$$C = 4 r$$

B e w e i s.

Man ziehe in dem Zirkel einen Diameter ab, so kann der Radius dc im Mittelpunkte so aufgerichtet werden, daß er sich weder mehr rechts als links neigt d. i. neutral ist; eben das kann auch mit dem Radius cf auf der Gegenseite bewerkstelliget werden, und daher ist

$$o = r$$

$$m = r$$

$$y = r$$

$$x = r$$

$$o + m + y + x = 4 r. \text{ Aber die Neigungen}$$

$$o + m + y + x = C$$

$$\text{also} \quad C = 4 r$$

§. 20. Zusatz. Es sind demnach die Bögen aus dem Scheitel des Winkels beschriebener Zirkel das natürlichste Maas eines Winkels. Denn man stelle sich vor, es sey Fig. 5 der Radius dc um c beweglich, so wird, wenn er als Schenkel von d nach a oder nach b rückt, der Bogen da oder ab in eben dem Verhältnisse abnehmen oder zunehmen, wie die Neigung; weil der Radius bey Erzeugung des Zirkels als Ursache eben so große Wirkung in der Peripherie d. i. in den sämtlichen Bögen hervorbringen mußte, als weit er sich von der ersten Richtung weggeneigt hatte. Nun aber diese Neigung läßt sich als wachsender Winkel betrachten; also ist sie proportionel, und zwar an jeden Orte mit dem Bogen, der ihr entspricht, und kann folglich sein Maas abgeben.

§. 21.

S. 21. Zusatz. Weil grosse und kleine Zirkel alle gleich viele Grade haben, so liegt nichts daran, ob aus der Neigung eines Winkels ein grosser oder kleiner Bogen zwischen den Schenkeln beschrieben wird; weil, wie wir schon oben sagten, die Kürze oder Länge der Schenkel gar nichts zur Neigung des Winkels beyträgt. Um wie viel also ein concentrischer Bogen grösser ist als ein anderer, um so viel hat er auch grössere Grade. So z. B. Fig. 6 haben a b, f d, h g als concentrische Böden alle gleich viele Grade, und ist daher ein jeder das Maaß des Winkels.

S. 22. Lehrsatz. Jeder rechte Winkel hält 90°

S a t z.

$$r = 90$$

B e w e i s.

Erwiesen ist worden, daß

$$C = 4 r \text{ Aber}$$

$$C = 360^\circ$$

$$\text{Also } 4 r = 360$$

$$:4 \quad r = 90$$

S. 23. Zusatz. Folglich hält jeder spitzige Winkel weniger als 90° und jeder stumpfe Winkel mehr als 90° ; weil dieser grösser und jener kleiner als ein rechter ist.

S. 24. Defl. Eine Figur ist eine allenthalben begränzte stättige Grösse. Eine Flächenfigur nun ist eben, wenn sich von jedem Punkte derselben zum andern eine gerade Linie darauf ziehen läßt; geradlinicht, wenn ihre Gränzen d. i. die Linien gerade sind, und erhält allemal ihren Namen von der Anzahl der Seiten, z. B. Viereck, wenn sie von 4 Seiten eingeschlossen ist u. s. f.

S. 25.

S. 25. Zusatz. Es ist leicht begreiflich, daß zwei gerade Linien unmöglich einen Raum einschließen können, und daß also das Dreyeck die erste mögliche Flächenfigur seyn müsse.

S. 26. Erkl. Es giebt sechserley Gattungen von Dreyecken. Dreyerley in Rücksicht der Winkel und dreyerley in Rücksicht der Seiten. In Rücksicht der Seiten Fig. 7 giebt es erstens gleichseitige Nro 1, in welchen jede Seite der andern gleich ist. 2tens gleichschenklichte Nro 2, wenn nur zwei Seiten einander gleich sind. 3tens ungleichseitige Nro 3, wo keine Seite der andern gleich ist. In Rücksicht der Winkel Fig. 8 1) rechtwinklichte Nro I, in welchen sich unter die dreyen Winkeln ein rechter befindet. 2) stumpfwinklichte Nro II, wo von den drey Winkeln einer ein stumpfer ist. 3) spitzwinklichte Nro III, wenn alle drey Winkel spitzig sind.

S. 27. Erkl. Von Vierecken giebt es fünferley Gattungen. 1) Quadrate Fig. 9 Nro 1, eine Figur von 4 gleichen Seiten und eben so viel gleichen Winkeln. 2) Rechtecke Nro 2, wo die Winkel zwar alle gleich aber nur zwei und zwei sich entgegen stehende Seiten gleich sind. 3) Rauten Fig. 10 Nro 1, wo zwar alle Seiten, aber nur zween und zween gegen überstehende Winkel gleich sind. Sie heißen auch Rhomboiden. 4) Länglichte Rauten oder Rhomboiden Nro II, wo allemal zwei und zwei entgegen stehende Seiten und auch zween und zween solcher Winkel sich gleich sind. Diese 4 Arten von Vierecken befaßt man auch sonst unter dem Name Parallelogram. 5) Trapezen Nro III, wo keine Seite eben der andern gleich seyn

seyn darf, oder wo keine der obigen Bestimmungen statt hat.

§. 28. **Erkl.** Polygone oder Vielecke heißen alle übrigen Figuren, die mehr als 4 Seiten haben. Sind die Seiten und Winkel gleich, wie Fig. 11 Nro 1, so heißen sie regulär; im wiedrigen Falle z. B. Nro 2 irregulär.

Grundbestimmungen der geradlinichten Dreyecke samt ihrer allerersten Anwendung.

§. 29. **Grundsatz.** Flächen, die sich einander vollkommen decken, sind gleich und ähnlich, d. i. Congruent.

§. 30. **Willk. Satz.** Das Zeichen der Congruenz ist $\cong$, und das der bloßen Ähnlichkeit $\sim$

§. 31. **Lehrsatz.** Durch eine Seite und die zween darauf liegenden Winkel, die aber zusammen genommen kleiner als 180° seyn müssen, läßt sich ein einziges Dreyeck bestimmen. Fig. 12

B e w e i s.

Denn man verlängere die beyden Seiten so lange in der nämlichen Richtung, bis sie sich durchschneiden, und den dritten Winkel bilden, so wird nur ein einziger Punkt möglich seyn, wo dieser Durchschnit geschieht. Werden aber die Seiten nicht in der einmal zu Grund gelegten Richtung verlängert, so werden entweder die Winkel verändert, oder die Figur wird mehreckigt, oder auch krumlinicht.

§. 32. **Anmerk.** Daß die beyden Winkel zusammen nicht 180° halten dürfen, sondern kleiner seyn müssen, kann indeß

indess aus der Erfahrung gezeigt werden, bis man tiefer unten im Stande seyn wird, es in aller mathematischen Schärfe zu erhärten.

S. 33. **Zusatz.** Wenn also in Zukunft erwiesen werden kann, daß in zwey oder mehrern Dreyecken diese Bestimmung gleich ist, das heißt, daß eine Seite, und die darauf liegende Winkel in dem einen Dreyecke, einer Seite und den darauf liegenden Winkeln in dem andern Dreyecke gleich sind, so ist auch eben darum erwiesen, daß die Dreyecke selbst kongruent sind, denn die Seite deckt die Seite, und die Winkel die Winkel, also die ganzen Dreyecke.

S. 34. **Lehrsatz.** Zwo Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel, bestimmen ebenfalls nur ein Dreyeck. Fig. 13

B e w e i s.

Denn um die Figur zu begränzen, und die gegebenen Stücke beyzubehalten, muß man gerade da eine Schlußlinie ziehen, wo die beyden Endpunkte der Seiten sind.

S. 35. **Zusatz.** Dreyecke also, wo überall diese statt findet, sind gleich und ähnlich, weil sie einerley Bestimmung haben.

S. 36. **Lehrsatz.** Drey Seiten bestimmen ebenfalls nur ein Dreyeck. Fig. 14

B e w e i s.

Man lege die Seitenlinien zusammen wie man will, so wird zwar die Lage aber nie das Dreyeck selbst verändert werden; denn nach gehöriger Wendung decken sie sich allemal wieder.

S. 37. **Zusatz.** Kann nun erwiesen werden, daß in zweyen Dreyecken einerley Seiten sind, so ist auch der Beweis von der Kongruenz der Dreyecke fertig.

S. 38.

S. 38. **Lehrsatz.** In gleichen und ähnlichen oder kongruenten Dreyecken stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten; und gleichen Seiten auch gleiche Winkel entgegen.

B e w e i s .

Weil sich in diesen Dreyecken bey der Auseinanderlegung alles decken muß, und weil überstehende Seiten und Winkel Ursach und Wirkung von einander sind, so folgt auch daraus, daß Winkel den Winkeln als Ursachen gleicher Wirkungen; und Seiten den Seiten als Wirkungen gleicher Ursachen gleich sind.

S. 39. **Zusatz.** Drey Seiten, deren zwey zusammen genommen nicht größer als die dritte sind, können kein Dreyeck bestimmen. Denn bey Errichtung derselben fallen sie allemal auf die dritte hinauf, und giebeln sich zu keinem Dreyecke.

S. 40. **Aufgabe.** Einen Winkel in zween gleiche Theile zu theilen. Fig. 15

§. 41. **Anflösung.** Man schneide mit einer beliebigen Zirkelöffnung aus dem Scheitel des Winkels von den Schenkeln 2 gleiche Stücke ab, setze ferner den Zirkel in die Abschnittspunkte ein, mache auswärts in der Mitte mit einer gleichen Öffnung Bögen, die sich einander durchschneiden, und ziehe dann eine gerade Linie aus dem Scheitel durch den Durchschnittspunkt der Bögen, so ist der Winkel in zween gleiche Theile getheilt.

S a t z

$$o = m$$

Beweis.

B e w e i s.

$$\left. \begin{array}{l} ab = bd \\ ac = cd \\ bc = bc \end{array} \right\} \text{als gleiche Zirkelöffnungen.}$$

Also $\triangle abc \cong \triangle bcd$; weil die Seiten überall einerley nach §. 37., und $o = m$, weil ihre entgegengesetzten Seiten gleich sind §. 38.

§. 42. Zusatz. Daraus ist begreiflich, daß sich jeder Winkel in 2, 4, 8, 16, u. s. f. gleiche Theile theilen läßt. Denn man darf nur jeden Theil wieder in zween gleiche Theile theilen, so erhält man 4 gleiche Theile. Wird das Geschäft wiederhollet, so bekommt man 8, u. s. w.

§. 43. Aufgabe. Eine gerade Linie in zween gleiche Theile zu theilen. Fig. 17

§. 44. Auflösung. Man beschreibe unter und über der Linie aus den beyden Endpunkten mit gleicher Zirkelöffnung Bögen, die sich einander durchkreuzen, und ziehe dann durch die beyden Durchkreuzungspunkte eine Linie, so wird dieselbe die gegebne Linie in 2 gleiche Theile theilen.

S a t z

$$ac = cb$$

B e w e i s.

Man zeichne die Zirkelöffnungen wirklich aus den Durchschnittspunkten, so ist

$$\left. \begin{array}{l} ad = db \\ af = fb \\ df = df \end{array} \right\} \text{als Radiusse.}$$

also

△

$\triangle a d f \cong \triangle d b f$; wenn die Linie $a b$ wegge-
dacht wird. Folglich auch

$$o = n \text{ ferner}$$

$$a d = d b$$

$d c = d c$ mithin wenn man die beyden
Theile von $a b$ wieder gelten läßt

$\triangle a d c \cong \triangle d c b$; weil überall zwei
Seiten und der dazwischen liegende Winkel die näm-
lichen sind S. 34. daher $a c = c b$; weil sie gleichen
Winkeln entgegen stehen, nämlich dem o und n .

S. 45. Anmerk. Eben so leicht wird es nach dieser
Methode seyn, eine gerade Linie in 4, 8, 16, u. s. f. Theile
zu theilen. Weiter unten soll auch gezeigt werden, wie eine
gerade Linie in beliebige gleiche Theile getheilt werden könne,
z. B. in 3, 5 u. d. gl. welches bey Winkeln so leicht nicht angeht.

S. 46. Aufgabe Von was immer für einen
Punkt aus, auf eine gerade Linie einen Perpendi-
kel oder lothrechte Linie aufzurichten. Fig. 18

S. 47. Auflösung. Der Fall ist hier dreyfach.
Erstens kann der Punkt über oder unter der Linie
gegeben seyn; einmal in der Linie selbst, und einmal
kann auch einer der Endpunkte eine Lothe verlangen.

Erster Fall. Man setze den Zirkel Nro I in
den gegebenen Punkt ein, schneide mit gleicher Oeff-
nung beyderseits die Linie ab. Setze ferner den Zir-
kel in die Abschnittspunkte, und beschreibe mehrmals
auf der dem Punkte entgegengesetzten Seite Durch-
schnittsbögen mit gleicher Oeffnung, so wird die von
dem gegebenen Punkt auf den Durchschnittspunkt ge-
zogene gerade Linie die gegebne Linie rechtwinklich
durchschneiden, das heißt, man wird den verlangten
Perpendikel erhalten. Denn es gilt der

S a t 3

$$o = n$$

Beweis.

B e w e i s.

Wenn die ersten Radiusse gezeichnet sind, wird
 $da = db$ seyn

auch $ac = cb$ weil auf diese Weise eine Linie
 in gleiche Theile getheilt wird. Also

$$\triangle dac \stackrel{\circ}{=} \triangle dcb \text{ folglich} \\ o = n$$

Zweyter Fall. Man setze den Zirkel Nro II in
 den Punkt ein, schneide beyderseits gleiche Stücke ab,
 und beschreibe aus dem Abschnittspunkten mit gleicher
 Oeffnung des Zirkels ober dem Punkte Bögen, die
 sich durchkreuzen, so wird die aus dem Durchschnitt
 auf dem Punkte herabgezogene Linie perpendicular seyn.

S a t z.

$$o = n$$

B e w e i s.

$$\left. \begin{array}{l} ac = cb \\ ad = db \end{array} \right\} \text{ als Radiusse.} \\ dc = dc \text{ also} \\ \triangle acd \stackrel{\circ}{=} \triangle cbd \text{ und} \\ o = n$$

Dritter Fall. Man setze den Zirkel Nro III in
 den Endpunkt ein, schneide von der Linie ein Stück
 ab, beschreibe auch von der entgegengesetzten Seite ei-
 nen Bogen mit der nämlichen Oeffnung, und ver-
 längere die Linie in ihrer Richtung bis dahin, so
 wird die übrige Verfahrensart, so wie der Beweis,
 wie im zweyten Falle seyn.

S. 48. **Lehrsatz.** In einem gleichschenkligen Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie gleich. Fig. 19

S a t z.

$$o = n$$

B e w e i s.

Man theile die Grundlinie in zween gleiche Theile, und ziehe von dem entgegenstehenden Winkel eine Linie auf den Theilungspunkt, so werden zwey gleiche Dreyecke entstehen.

Dem $ad = dc$ als Schenkel
 $ab = bc$ der Theilung gemäß
 und $db = db$ folglich
 $\triangle adb \cong \triangle dbc$
 also $o = n$

S. 49. **Lehrsatz.** In gleichseitigen Dreyecken sind alle Winkel einander gleich. Fig. 20

S a t z.

$$m = n = x$$

B e w e i s.

Man mag zur Basis eine Linie annehmen, welche man will, so wird allemal das Dreyeck als gleichschenkligt, wie oben, betrachtet werden können. Z. B. man nehme ac für die Grundlinie an, so sind ba und bc die gleichen Schenkel, und eben darum

$n = x$. Nimmt
 man ab , so ist $n = m$ folglich
 $m = x = n$

S. 50.

S. 50. Anmerk. Wollte man den Beweis ordentlich führen, ohne den obigen vorauszusetzen, so dürften nur ein Paar Grundlinien in zweien gleiche Theile zerstückt, und wie oben verfahren werden.

Weitere Bestimmungen der Winkel, von Parallellinien und ihrer nächsten Anwendung.

S. 51. Prkl. Wenn zweien oder mehr Winkel auf einer geraden Linie liegen, und aus einem Punkte gezogen sind, so heißen sie Nebenwinkel. Fig. 21 Und wenn die Schenkel eines Winkels rückwärts verlängert werden, so entstehen Vertikalwinkel. Fig. 22. Nro I Nebenwinkel z. B. sind o und m oder x, y und z. Vertikalwinkel aber sind o und m oder auch x und y; weil, wenn man x oder y für den ursprünglichen Winkel annimmt, bey der rückwärtigen Verlängerung der Schenkel, der andere nothwendig entstehen muß.

S. 52. Lehrsatz. Alle Nebenwinkel sind zusammen genommen 180° gleich. Fig. 22 Nro II

S a t z.

$$x + y + n = 180^\circ$$

B e w e i s.

Man ziehe aus dem gemeinschaftlichen Punkt einen halben Zirkel durch die Schenkel, so ist

$$x = a b$$

$$y = b c$$

$$n = c d$$

$$x + y + n = a b + b c + c d$$

$$a b + b c + c d = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$x + y + n = 180^\circ$$

S. 53.

S. 53. **Lehrsatz.** Alle Winkel um einen Punkt herum halten zusammen 360° . Fig. 23

S a t z.

$$o + m + n + x = 360^\circ$$

B e w e i s.

Denn man beschreibe aus ihrem Zusammenstoßungspunkt einen Kreis, und läßt die Schenkel die Peripherie durchschneiden, so haben sie zum sammelichen Maasse den ganzen Kreis, das ist 360° .

S. 54. **Anmerk.** Abgebräut wird die Sache finlicher; denn es gelte der obige Satz, so ist der Beweis

$$o = a b$$

$$m = b c$$

$$n = c d$$

$$x = d a$$

$$o + m + n + x = a b + b c + c d + d a$$

Nun ist auch $360^\circ = a b + b c + c d + d a$, als
Folgl. $o + m + n + x = 360^\circ$. der ganze Kreis.

S. 55. **Lehrsatz.** Zween und zween Vertikalwinkel sind einander gleich. Fig. 22 Nro I

S ä t z e.

$$1) o = m \quad 2) x = y$$

B e w e i s e.

1)

$$o + x = 180^\circ$$

$$x + m = 180^\circ$$

als Nebenw.

$$o + x = x + m$$

$$-x = -x$$

$$o = m.$$

B

2)

$$\begin{array}{rcl}
 2) & x+m & = 180 \\
 & m+y & = 180 \\
 \hline
 & x+m & = m+y \\
 & -m & = -m \\
 \hline
 & x & = y.
 \end{array}$$

Oder auch so

$$\begin{array}{rcl}
 & x+o & = 180 \\
 & o+y & = 180 \\
 \hline
 & x+o & = o+y \\
 & -o & = -o \\
 \hline
 & x & = y
 \end{array}$$

§. 56. Zusatz. Wenn nun von 4 Vertikalwinkeln einer gegeben ist, so sind alle gegeben. Denn es halte z. B. $x = 100^\circ$; also auch $y = 100$. Weil aber alle Winkel um einen Punkt herum 360° halten, so ist:

$$100 + m + 100 + o^*) = 360.$$

Aber $m = o$ folglich

subst. $100 + m + 100 + m = 360$

abgef. $200 + 2m = 360$

$$- 200 \quad \quad \quad = -200$$

$$2m = 160$$

$$:2 \quad \quad \quad m = \frac{160}{2} = 80$$

Und da $m = o$ ist
sohin ist auch $o = 80^\circ$

§. 57.

*) Hier muß der Buchstabe o nicht mit Null verwechselt werden.

S. 57. **Lehrsatz.** In einem jeden geradlinichten Dreyecke halten immer zween Winkel weniger als 180° . Fig. 24.

B e w e i s.

Weil dieß bey spizwinklichten Dreyecken ohne hin schon klar ist; indem zween Winkel, deren keiner 90° hält, nicht miteinander 180° , das ist zweymal 90° geben können, so darf der Beweis bloß für die stumpfwinklichten Dreyecke geführt werden, und zum Ueberflusse auch für rechtwinklichte; um zu zeigen, daß zween rechte Winkel in keinem Dreyecke Platz haben.

Man theile demnach jene Seite, wo die gegebenen Winkel anliegen, in zween gleiche Theile, dann ziehe man aus dem Scheitel des dritten Winkels eine gerade Linie bis an den Theilungspunkt, verlängere sie ausserhalb im nämlichen Maasse und Richtung, schliesse durch eine dritte gerade Linie noch ein Dreyeck, wo man will, und verlängere jene Seite des ersten Dreyecks, wo zween Winkel darauf zusammen stossen, so wird der Beweis für ein Paar Winkel allgemein seyn.

S a t z.

$$x + y < 180^\circ$$

B e w e i s.

$$\begin{array}{l} af = fc \\ bf = fd \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} af = fc \\ bf = fd \end{array}} \right\} \text{aus der Konstruktion}$$

$$o = m \quad \text{als Vertikalw.}$$

$$\text{Also } \triangle afb \cong \triangle fdc; \text{ folglich}$$

$$x = s$$

$$\text{Aber } y + s < y + s + r$$

$$\text{Da nun } y + s + r = 180^\circ$$

$$\text{Also } y + s < 180^\circ, \text{ und weil } x = s$$

$$\text{substit. } y + x < 180^\circ$$

§. 58. Anmerk. Läßt man nun einen von den gegebenen Winkeln weg und nimmt den dritten dazu, so wird der Beweis der vorige seyn. Ich will ihn, wegen der verkehrten Lage der Figur ganz hieher setzen. Fig. 25

Satz.

$$x + y < 180^\circ$$

Beweis.

$$af = cf$$

$$bf = fd$$

$$o = m$$

$$\text{Also } \triangle abf \cong \triangle fcd \text{ und}$$

$$x = s.$$

$$\text{Aber } s + y < s + y + r$$

$$s + y + r = 180^\circ$$

$$\text{Folglich } s + y < 180^\circ$$

$$\text{substit. } x + y < 180^\circ$$

§. 59. Zusatz. Weil die Bildung eines Dreyecks eine Zusammenstoßung zweier Linien über einer dritten voraussetzt, so können die Schenkel zweener an die Endpunkte einer Linie gesetzter Winkel, die miteinander nicht kleiner als 180° sind, nie zusammenstoßen oder konvergieren.

§. 60. Lehrsatz. Wenn zween an die Endpunkte einer Linie gesetzte Winkel miteinander größer als 180° sind, so werden sie rückwärts verlängert konvergieren, und also dießseits divergieren; denn die Winkel jenseits sind kleiner als 180° . Fig. 26.

Satz.

S a t z.

$$o + x < 180^\circ$$

B e w e i s.

Es sey $y + m$ um p größer als 180° ; oder der Ueberschuß der beyden Winkel heiße p .

$$\begin{array}{l} \text{Nun ist } y + o = 180^\circ \\ \quad \quad m + x = 180^\circ \end{array} \quad \text{als Nebenw.}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{add. } y + m + o + x & = & 360^\circ \\ \text{subt. } y + m & = & 180^\circ + p \\ \hline o + x & = & 180^\circ - p \end{array}$$

$$\text{Folglich } o + x < 180^\circ$$

S. 61. *Erkl.* Linien, welche, wenn man sie auch auf beyden Seiten unendlich verlängert, weder konvergieren noch divergieren, heißen Parallellinien.

S. 62. *Lehrsatz.* Wenn zwei Linien von einer dritten so durchschnitten werden können, daß

I die beyden innern Winkel zusamm 180° halten;

II oder die Wechselwinkel gleich sind; das heißt, jene Winkel, welche oben und unten, dießseits und jenseits, zwischen den durchschnittenen Linien liegen;

III oder auch, daß ein äußerer Winkel dem innern entgegengesetzten gleich wird:

So läßt sich in jedem Falle erweisen, daß die Linien parallel sind. Fig. 27. Nro I

Erste

Erste Voraussetzung.

$$x + y = 180$$

Satz.

$a b$ und $b c$ parallel

Beweis.

x und y sind zusammen nicht kleiner als 180° ; also können nach §. 59. $a b$ und $b c$ nicht konvergieren. x und y sind nicht größer als 180 ; also können sie nach §. 60. nicht divergieren. Linien aber die nicht konvergieren und nicht divergieren, sind parallel: also sind $a b$ und $b c$ parallel.

Zweite Voraussetzung.

$$x = n$$

Satz.

$a b$ und $b c$ parallel

Beweis.

$$y + n = 180^\circ$$

Aber $x = n$, wie vorausgesetzt ist.
substit. $y + x = 180$. Also dem vorigen gemäß, $a b$ mit $b c$ parallel.

Dritte Voraussetzung.

$$m = n$$

Satz.

$a b$ und $b c$ parallel

Beweis.

B e w e i s.

$$m + z = 180^\circ$$

Aber $m = n$, gemäß der Voraussetzung.

Subst. $n + z = 180^\circ$

Also wiederum, dem oben erwiesenen Satze zufolge, $a b$ mit $b c$ parallel; weil die innern Winkel 180° halten.

S. 63. **Lehrsatz.** Alles obige von Parallellinien läßt sich auch umgekehrt erweisen: das heißt, wenn vorausgesetzt wird, daß zwei Parallellinien von einer dritten Linie durchschnitten werden, so halten

I. die innern Winkel 180 ;

II. die Wechselwinkel sind gleich;

III. der äußere Winkel ist dem innern entgegengesetzten gleich.

Voraussetzung für alle drey Sätze.

$a b$ mit $b c$ parallel.

E r s t e r S a t z.

$$x + y = 180^\circ$$

B e w e i s.

$a b$ und $b c$ konvergieren nicht; also haben die anliegenden Winkel auch nicht weniger, als 180° .

$a b$ und $b c$ divergieren nicht; also haben sie auch nicht mehr als 180 §§. 59. 60.

folglich $x + y = 180^\circ$

Zwey:

666

Zweyter Satz.

$$x = n$$

B e w e i s.

$x + y = 180$; wie oben erwiesen worden.

$$y + n = 180$$

$$\text{Also } x + y = y + n$$

$$-y = -y$$

$$x = n$$

Dritter Satz.

$$m = n$$

B e w e i s.

$$z + n = 180$$

$$m + z = 180$$

$$\text{Folglich } m + z = z + n$$

$$-z = -z$$

$$\text{Sohin } m = n$$

S. 64. Zusatz. Wenn mehrere Linien mit einander parallel gezogen werden Fig. 27 Nro II, so halten, was immer für zween innere Winkel, die zusammen gehören, 180° : was immer für zween Wechselwinkel sind gleich; und jeder äußere Winkel beträgt so viel als einer von seinen entgegengesetzten innern Winkel. Denn, weil die Linien unter sich parallel sind, so ist eben darum jede mit der andern parallel, und dann gilt wieder das obig erwiesene. So ist z. B. $x + r = 180$, weil ab mit fg parallel ist; ebenfalls $o = n$ und $x = n$.

S. 65. Zusatz. Wenn eine von den Parallellinien unter einen rechten Winkel geschnitten wird, so wird es auch, falls die schneidende Linie verlängert ist, eben so gut die andere seyn. Oder, wenn einer von den innern Winkeln ein rechter ist, so läßt sich dieß auch von dem andern behaupten; denn $90 + 90 = 180^\circ$.

S. 66. Lehrsatz. Parallellinien zwischen Parallellinien, in so fern sie abgeschnitten werden, sind gleich. Fig. 28

Satz.

$$1) ab = dc. \quad 2) ad = bc$$

Beweis.

Man ziehe von einem der vier Winkel zum gegenüberstehenden durch die begränzte Figur eine Linie; wir wollen selbe in der Folge etymologisch Diagonallinie nennen. So ist

$$\left. \begin{array}{l} ac = ac \\ x = y \\ z = n \end{array} \right\} \text{ als Wechselw.}$$

folglich $\triangle adc \cong \triangle abc$. Nun steht dem x das dc und dem y das ab entgegen. Also $ab = dc$, und eben so $ad = bc$

S. 67. Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke zwei und zwei überstehende Seiten gleich sind, so müssen sie auch eben darum parallel seyn. Fig. 29

Voraussetzung.

$$ab = dc \text{ und } ad = bc$$

Satz.

S a t z.

a b parallel mit d c und

a d parallel mit b c

B e w e i s.

Man ziehe eine Diagonal so ist

$$\begin{array}{lcl}
 a c & = & a c \\
 a b & = & d c \\
 b c & = & a d
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} a c \\ a b \\ b c \end{array}} \right\} \text{ nach der Voraussetzung}$$

also $\triangle a b c \cong \triangle a d c$ und

$$\begin{array}{lcl}
 m & = & y \\
 o & = & x
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} m \\ o \end{array}} \right\} \text{ als Winkel die gleichen Sei-}$$

ten entgegen stehen. S. 38.

Weil dieß aber zugleich Wechselwinkel sind, so ist

a b paral. mit d c und

a d mit b c

§. 68. Zusatz. Alle Perpendikel zwischen zwei Parallellinien sind gleich. Denn zween und zween Perpendikel sind immer unter sich parallel, weil die innern Winkel $90^\circ + 90^\circ = 180$. S. 15. Nun aber sind Paralleln zwischen Paralleln gleich; also gilt dieß eben darum auch von Perpendikeln zwischen Paralleln. Ueberhaupt ist ein solcher Perpendikel das Maas der Parallelweite; da aber diese Weite überall sich selbst gleich ist, so müssen auch ihre Maase gleich seyn.

§. 69. Lehrsatz. Wenn in einem Parallelogram ein rechter Winkel ist, so sind alle vier Winkel rechte Winkel. Fig. 30.

V o r a u s s e t z u n g.

$$Z. B. m = 90^\circ$$

S ä t z e.

S ä t z e.

$$1) x = 90^\circ. \quad 2) n = 90. \quad 3) o = 90^\circ.$$

B e w e i s.

$$1) \quad m + x = 180^\circ \text{ als innere Winkel.}$$

$$\text{Aber } \underline{m} = 90^\circ$$

$$\text{Also } x = 90^\circ$$

$$2) \quad x + n = 180^\circ \text{ aus obigem Grunde,}$$

$$\text{Aber } \underline{x} = 90^\circ \text{ wie erwiesen worden}$$

$$\text{folglich } n = 90$$

$$3) \quad n + o = 180 \text{ wie oben}$$

$$\text{Aber } \underline{n} = 90 \text{ wie erwiesen worden.}$$

$$\text{Also } o = 90$$

§. 70. **Lehrsatz.** Alle Winkel in einem Dreyecke machen zusammen 180° . Fig. 31

S a t z.

$$o + x + m = 180^\circ$$

B e w e i s.

Man ziehe mit einer Seite durch den Scheitelpunkt des entgegenstehenden Winkels eine Parallellinie, so erhält man Wechselwinkel: da nun

$$o + n + s = 180$$

und $n = x$, dann $s = m$, so läßt sich substituieren, und es wird aus der Gleichung

$$o + x + m = 180^\circ$$

S. 71. Zusatz. Es können demnach in einem Dreyecke weder zween stumpfe noch zween rechte Winkel seyn; weil diese zween Winkel im ersten Falle mehr als 180° und im zweyten Falle völlige 180° hielten, und demnach für den dritten Winkel nichts mehr übrig bliebe.

S. 72. Zusatz. In gleichseitigen Dreyecken beträgt ein Winkel 60° ; denn die Winkel sind in solchen Dreyecken gleich S. 49; folglich hält einer $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

S. 73. Zusatz. In rechtwinklichten Dreyecken mißt ein Winkel an der größten Seite 45° ; denn man kann sich dieselbe als die Basis oder Grundlinie vorstellen; da nun die Winkel in gleichschenkligten Dreyecken an der Basis gleich sind S. 48, und sie hier miteinander 90° halten, so trifft für einen 45° , das ist $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Durch Algebra fällt der Beweis mehr in die Augen.

S ä t z e. Fig. 32

$$1) y = 45^\circ$$

$$2) z = 45^\circ$$

B e w e i s.

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 180^\circ \\ - x & & = -90^\circ \\ \hline y + z & = & 90^\circ \end{array}$$

Aber $y = z$ und substit.

$$\begin{array}{lcl} \text{I Subst. } y + y & = & 90^\circ \\ 2 y & = & 90^\circ \\ : 2 & & y = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \end{array}$$

II Sub.

II Substit.

$$z + z = 90^\circ$$

$$2z = 90^\circ$$

: 2

$$z = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

S. 74. Zusatz. In gleichschenkligen Dreyecken überhaupt sind alle drey Winkel insonderheit gegeben, wenn einer gegeben ist; denn ist der an der Spitze gegeben, so bleiben für die übrigen beyden an der Grundlinie der Rest von 180° , oder nach der Sprache der Geometer das Komplement zu 180° , folglich für einen derselben die Hälfte dieses Komplements, weil beyde gleich groß sind. Ist ein Winkel an der Grundlinie gegeben, so ist auch eben darum sein Nachbar an der Grundlinie bekannt, weil er gleich viele Grade hält. Für den dritten Winkel am Scheitel bleibt das Komplement von den ersten beyden zu 180° . Fig. 8 Nro II Algebraisch geht die Operation so vor sich. Setze man erstens, es halte der Scheitelwinkel $o = 28^\circ$ so ist

$$o + x + y = 180$$

$$\begin{array}{r} o \\ - 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 28 \end{array}$$

$$x + y = 152$$

Aber $x = y$ folglich substit.

$$x + x = 152 \text{ und } y + y = 152^\circ$$

$$\text{Abgekürzt } 2x = 152 \text{ und } 2y = 152$$

$$\text{div. durch 2} \quad x = 76 \text{ und } y = 76$$

Setze man zweitens, es sey ein Winkel an der Grundlinie bekannt. Es halte z. B. Fig. 7 Nro III

$$x = 34^\circ;$$

folglich auch der andere Winkel $m = 34^\circ$

$$\text{Nun ist } x + m + y = 180$$

$$\begin{array}{r} - x \\ - m \end{array} \quad \begin{array}{r} = 180 \\ = 34 \end{array}$$

$$m + y = 146$$

$$\text{Aber auch } \begin{array}{r} - m \end{array} \quad \begin{array}{r} = 146 \\ = 34 \end{array}$$

$$\text{folglich } y = 112^\circ \text{ S. 75.}$$

§. 75. Zusatz. Wenn in ungleichseitigen Dreyecken zweyen Winkel zusammen bekannt sind, so ist auch der dritte als das Komplement zu 180° bekannt.

§. 76. Lehrsatz. Alle vier Winkel in einem Vierecke, es mag ein Parallelogram oder ein Trapez seyn, machen zusammen 360° . Fig. 33

S a t z.

$$a + b + c + d = 360^\circ$$

B e w e i s.

Man ziehe, wo man will, eine Diagonal, so zerfällt die Figur in zwei Dreyecke, wo die Winkel überall 180° machen, folglich in beyden 360° seyn müssen. Denn

$$a + m + x = 180$$

$$y + c + z = 180$$

$$a + y + m + c + x + z = 360$$

Aber $y + m = b$ } Denn die Theile zusammen
und $x + z = d$ } genommen geben das
Ganze.

Also substituirt. $a + b + c + d = 360^\circ$

§. 77. Zusatz. Da sich das Viereck durch eine Diagonal in zwei Dreyecke, das Fünfeck Fig. 34 in 3 Dreyecke, das Sechseck in 4 Dreyecke, u. s. f. zerfallen läßt, vorausgesetzt, daß sich die Diagonalen nicht durchkreuzen, so kann man den Inhalt aller Winkel in einem Polygone, es mag regulär oder irregulär seyn, leicht bestimmen: weil man weiß, daß sich jedes Polygon in so viel Dreyecke zerfallen läßt, als es Ecke oder Seiten hat, weniger zwey: Folglich darf nur die Anzahl der Dreyecke mit 180° multipliziert

eiert werden. Z. B. bey einem Siebened *Fig. 35* ist die Anzahl der Dreyecke $7 - 2 = 5$; und demnach der Inhalt aller Winkel $180 \times 5 = 900^\circ$. Wenn also allgemein n die Anzahl der Ecke in einen Polygon ausdrückt, so ist $180 \times (n - 2)$ der Winkelinhalt jedes Polygons.

S. 78. Lehrsatz. Jeder äußere Winkel eines Dreyeckes, der durch die Verlängerung einer Seite entsteht, ist den beyden innern entgegengesetzten gleich.

S a t z. *Fig. 36*

$$o = m + n$$

B e w e i s.

$$\begin{array}{rcl} x + o & = & 180^\circ \quad \text{S. 52.} \\ x + m + n & = & 180^\circ \quad \text{S. 70.} \\ \hline x + o & = & x + m + n \\ - x & & - x \\ \hline o & = & m + n \end{array}$$

S. 79. Zusatz. Ist der äußere Winkel in einem Dreyecke gegeben, so sind die zween entgegengesetzten innern zusammen genommen, und der dritte als Nebwinkel bekannt.

S. 80. Zusatz. Der äußere Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreyeckes ist einem doppelten innern gleich, weil sie beyde gleich sind; folglich einer von beyden zweymal genommen so viel ist, als alle beyde.

S. 81. Lehrsatz. Der Winkel zwischen zweo Parallellinien ist so groß als die Summe der zween spizi-

spitzigen Winkel, die seine verlängerten Schenkel mit den Parallellinien machen.

S a t 3. Fig. 37

$$o = n + y$$

B e w e i s.

Man verlängere auch einen der Schenkel rückwärts bis auf die Parallellinie, so entstehen Wechselwinkel, ein Dreyeck und ein äußerer Winkel an selben. Es ist demnach

$$o = m + y \quad \text{S. 78.}$$

Aber $n = m$ als Wechselw.

substit. $o = n + y$

S. 82. Erkl. Wenn der Scheitelpunkt eines Winkels im Centrum eines Kreises ist, so heißt dieser Winkel ein Zentralwinkel. Liegt aber der Scheitelpunkt in der Peripherie, so bekommt ein solcher Winkel den Namen — Peripherialwinkel.

S. 83. Lehrsatz. Jeder Peripherialwinkel hat zu seinem Maasse den halben Bogen, den seine verlängerten Schenkel von der Peripherie abschneiden.

Der Beweis, um recht allgemein zu seyn, muß durch drey Fälle geführt werden. Denn es kann

- I ein Schenkel durch den Mittelpunkt gehen;
- II der Mittelpunkt sich zwischen den beyden Schenkeln befinden;
- III oder derselbe kann gar außer den beyden Schenkeln liegen.

Satz

Satz für den ersten Fall. Fig. 38

$$x = \frac{a b}{2}$$

B e w e i s.

Man beschreibe auf den nämlichen Bogen auch einen Centralwinkel, so erhält man ein gleichschentliches Dreyeck, wo die Radiusse die Schenkel abgeben, und erhält auch einen äußern Winkel am Scheitel; folglich ist

$$2x = c \quad \text{§. 80.}$$

$$a b = c \quad \text{als sein Maas}$$

$$2x = a b$$

$$: 2 \quad x = \frac{a b}{2}$$

Satz für den zweyten Fall. Fig. 39

$$x = \frac{a b}{2}$$

B e w e i s.

Man theile den Winkel mittels einer Linie durch das Centrum in zween Theile, so hat man den obigen ersten Fall doppelt; denn es ist

$$o = \frac{a c}{2}$$

$$n = \frac{c b}{2}$$

$$\text{add. } o + n = \frac{a c + c b}{2}$$

$$\text{oder } x = \frac{a b}{2}; \text{ weil sich das Ganze für}$$

die Theile zusamm genommen substituieren läßt.

Satz für den dritten Fall. Fig. 40

$$x = \frac{a b}{2}$$

B e w e i s.

Man ziehe durch das Centrum des Zirkels aus dem Scheitel des Winkels einen Schenkel auf die Peripherie, so hat man mehrmal den ersten Fall doppelt.

$$\begin{array}{rcl} \text{Denn } 0 + x & = & \frac{a c}{2} + \frac{a b}{2} \\ \underline{- 0} & = & \frac{a c}{2} \\ \hline x & = & \frac{a b}{2} \end{array}$$

S. 84. Zusatz. Der Zentralwinkel ist daher noch so groß als der Peripherialwinkel, wenn er mit ihm auf einerley Bogen steht; denn der erste hat den ganzen Bogen zu seinem Maasse, dieser aber nur die Hälfte desselben.

S. 85. Zusatz. Alle Peripherialwinkel, die auf einerley Bogen stehen, sind gleich; eben darum, weil jeder die nämliche Bogenhälfte zum Maasse hat. Fig. 41

$$\begin{array}{rcl} \text{Denn } x & = & \frac{1}{2} a b \\ m & = & \frac{1}{2} a b \\ y & = & \frac{1}{2} a b \end{array}$$

$$\text{folglich } x = m = y$$

S. 86. Anmerkung. Da in der Optik erwiesen wird, daß bey dem nämlichen Sehungswinkel auch die nämliche scheinbare Größe und Deutlichkeit des Gegenstandes statt hat, so würde z. B. für Amphitheater die runde Form die angemessenste seyn; damit die Scene, welche als ein Zirkelabschnitt dieses Rundels betrachtet werden kann, einen gleichen Sehungswinkel, und eben darum gleiche Deutlichkeit und Größe in den Augen der Zuschauer hervorbrächte.

S. 87.

S. 87. Zusatz. Einer von den Schenkeln eines solchen Peripheriewinkels läßt sich als Sehne immer kleiner und kleiner denken; ohne, daß die Allgemeinheit des Satzes sich nicht mehr darauf erstrecken sollte. Folglich ist der Satz auch noch wahr, wenn einer der Schenkel der kleinstmögliche Theil einer Linie, oder so zu sagen, nur ein Punkt ist, und bey seiner Verlängerung, gemäß der Definition zur Tangente wird.

S. 88. Zusatz. Der Winkel also, den eine Sehne mit seiner Tangente macht, wie Fig. 42 hat zum Maasse den halben Bogen, welcher zwischen der Sehne und der Tangente liegt.

S. 89. Anmerk. So richtig dieß auch aus den Vorhergehenden fließt, so strenge läßt sich dieß weiter unten aus andern Gründen erweisen.

S. 90. Zusatz. Jeder Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf den Endpunkten des Diameters stehen, ist ein rechter Winkel; denn sein Maas ist die halbe Peripherie halb genommen.

S a t z. Fig. 43

$$x = 90$$

B e w e i s.

$$x = \frac{a b c}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

S. 91. Aufgabe. Auf den Endpunkt einer Linie einen Perpendikel aufrichten.

Auflösung. Man wähle einen solchen Punkt über der Linie, daß man aus selbem mit einem Handzirkel so wohl den Endpunkt erreichen, als auch die Linie selbst schneiden könne. Mit dieser Oeffnung nun beschreibe man aus dem nämlichen

C 2

Punkt

Punkt einen Zirkel; ziehe aus dem Durchschnittspunkt der Linie einen Diameter, und verbinde diese beyden Sehnen durch eine dritte Sehne, so ist diese perpendicular; denn es ist Fig. 44

$$x = 90^\circ$$

B e w e i s.

$$z = \frac{abc}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

§. 92. Zusatz. Ein Winkel, den die Tangente mit dem Diameter macht, wie Fig. 45 ist demnach ein rechter Winkel; weil der Bogen welcher zwischen dem Diameter und der Tangente liegt, die halbe Peripherie selbst ist §. 88., folglich das Maas des Winkels ein Quadrant seyn muß.

§. 93. Zusatz. Es stehet deswegen jeder Diameter, und jeder Radius, weil er ebenfalls zum Diameter verlängert werden kann, perpendicular auf seine Tangente.

§. 94. Zusatz. Eben so richtig ist, daß ein Winkel, welchen zween Tangenten miteinander machen, die halbe Differenz jener Bögen, die die Tangentialpunkte begränzen zum Maase haben. Fig. 46

S a t z.

$$x = \frac{afc - abc}{2}$$

B e w e i s.

Man verbinde die beyden Tangentialpunkte durch eine Sehne so ist

$$x + m = z$$

$$x = z - m$$

Aber

$$z = \frac{afc}{2}$$

$$m = \frac{abc}{2} \quad \text{substit.}$$

$$x = \frac{afc - abc}{2}$$

§. 95.

§. 95. Zusatz. Die Tangenten, welche den Winkel bilden, haben demnach allemal gleiche Länge;
denn $o = \frac{abc}{2}$

und $m = \frac{abc}{2}$

also $o = m$ folglich ist das Dreieck ago gleichschenkligt §. 48., und $ag = ge$.

§. 96. Lehrsatz. Zween und zween einander entgegengesetzte Winkel eines im Zirkel hinein beschriebnen Trapezes halten zusammen 180° .

S ä t z e. Fig. 47

1) $y + m = 180$

2) $o + x = 180$

B e w e i s.

1) $\left. \begin{array}{l} y = \frac{bcd}{2} \\ m = \frac{dab}{2} \end{array} \right\} \text{ §. 83.}$

$$y + m = \frac{bcd + dab}{2}$$

aber $bcd + dab = 360^\circ$

subst. $y + m = \frac{360}{2}$ oder

$$y + m = 180$$

2) $o = \frac{abc}{2}$

$$x = \frac{adc}{2}$$

$$o + x = \frac{abc + adc}{2}$$

aber $abc + adc = 360$

$$o + x = \frac{360}{2} \text{ oder}$$

$$o + x = 180^\circ$$

§. 97.

S. 97. **Lehrsatz.** Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt ausser einem Kreise liegt, und beyde Schenkel die Peripherie durchschneiden können, hat zu seinem Maaße die halbe Differenz der beyden Bögen, die zwischen seinen verlängerten Schenkeln liegen. Fig. 48

S a t z.

$$x = \frac{cd - ba}{2}$$

B e w e i s.

Da die Abschnitte der Schenkel innerhalb der Peripherie Sehnen bilden, so hänge man sie durch eine dritte Sehne zusammen, und dann ist

$$\begin{aligned} x + y &= o \text{ als ein äußerer Winkel am} \\ \text{oder} \quad x &= o - y \text{ Dreyeck.} \\ \text{substit.} \quad x &= \frac{cd - ab}{2} \text{ als Peripherialw.} \\ x &= \frac{cd^2 - ab^2}{2} \end{aligned}$$

S. 98. **Lehrsatz.** Jeder Winkel innerhalb der Peripherie hat zum Maaße die halbe Summe der beyden Bögen die seine und seines Vertikalwinkels verlängerte Schenkel abschneiden. Fig. 49

S a t z.

$$x = \frac{cd + ab}{2}$$

B e w e i s.

Man verbinde zweyerley Schenkel durch eine Sehne zum Dreyeck, so ist

$$\begin{aligned} x &= m + y \\ \text{substit.} \quad x &= \frac{cd}{2} + \frac{ab}{2} \text{ wegen Peripherialw.} \\ \text{oder} \quad x &= \frac{cd + ab}{2} \end{aligned}$$

Figur

Figurenwan d l u n g.

§. 99. **Erkl.** Eine Figur in eine andere umwandeln, heißt der Figur eine andere Gestalt geben, ohne den Inhalt derselben zu verändern.

§. 100. **Lehrsatz.** Jedes Parallelogram wird von einer Diagonallinie in zween gleiche Theile getheilt. Fig. 50

S a t z.

$$x = y$$

B e w e i s.

$$\begin{array}{l} dc = ab \\ ad = bc \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{als entgegenstehende Seiten} \\ \text{eines } \square. \end{array} \right\}$$

$$ac = ac \text{ folglich}$$

$$\Delta x = \Delta y$$

§. 101. **Erkl.** Ein Perpendickel, welcher von einer Seite zur andern in Parallelogramen gezogen wird, heißt die Höhe, und die Linie worauf man ihn gezogen hat, die Grundlinie, wie Fig. 51 In Dreyecken wird der Perpendickel von was immer für einen Winkel auf die entgegenafetzte Seite als die größte Höhe hinauefällt; z. B. Fig. 52 Nro I, wo auch in benöthigten Fällen diese Grundlinie verlängert werden muß, wie Nro II

§. 102. **Lehrsatz.** Ein jedes schiefwinklichtes Parallelogram läßt sich in ein ihm gleiches rechtwinklichtes von einerley Höhe und Grundlinie verwandeln; und auch umgekehrt. Oder mit andern Worten: Parallelograme von einerley Grundlinie sind gleich.

Dies

Dieß zu erweisen, stelle man die Parallelogramme auf eine gemeinschaftliche Grundlinie, so wird entweder

I eine von den Gegenseiten da aufhören, wo die andere anfängt; oder

II sie werden zum Theil in einander liegen, oder endlich

III sie werden zwischen ihnen einen leeren Raum lassen. Der Beweis ist überall etwas anders.

Erster Fall.

Satz. Fig. 53 Nro I
 $x + y = y + z$ *)

Beweis.

$x = y$, wegen der Diagonal

$z = y$ ebenfalls.

$$\begin{array}{r} x = z \\ +y = +y \text{ überall addiert} \\ \hline x + y = y + z \end{array}$$

Zweiter Fall.

Satz. Nro II
 $x + y = y + z$

Beweis.

$ac = fg$ } als Gegenseiten eines
 $bd = fg$ } Parallelograms

also

$$\begin{array}{r} ac = bd \\ -bc = -bc \\ \hline ac - bc = bd - bc \text{ und in der Figur} \\ \qquad \qquad \qquad ab \end{array}$$

*) Wo diese Buchstaben keine Winkel, sondern jene begränzten Räume bedeuten, worinn sie stehen.

ferner
und

$$\begin{array}{rcl}
 ab & = & cd \\
 af & = & cg \\
 bf & = & dg \quad \text{folglich} \\
 \hline
 \Delta x & = & \Delta z \quad \text{aber} \\
 +y & = & +y \\
 \hline
 x+y & = & y+z
 \end{array}$$

Dritter Fall.

Satz. Nro III

$$x+y = y+z$$

Beweis.

Man verbinde die beyden Gegenseiten der Grundlinie durch eine dritte Linie, so ist

$$\begin{array}{rcl}
 ab & = & gf \\
 cd & = & gf \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} ab \\ cd \end{array}} \right\} \text{als Gegenseiten in } \square \text{en} \\
 \hline
 ab & = & cd \\
 +bc & = & +bc \\
 \hline
 ab+bc & = & cd+bc \quad \text{und in der Figur} \\
 ac & = & bd \quad \text{ferner wieder} \\
 ag & = & bf \\
 cg & = & df \quad \text{also} \\
 \Delta(x+v) & = & \Delta(v+z) \\
 -v & = & -v \\
 \hline
 x & = & z \\
 +y & = & +y \\
 \hline
 x+y & = & y+z
 \end{array}$$

S. 103. Zusatz. Weil Dreyecke nichts anders sind, als Hälften von Parallelogramen, so gilt der erwiesene Satz auch von Dreyecken; das heißt: Drey-
ecke

ecke von einerley Grundlinie und Höhe sind dem Inhalte nach gleich. Inzwischen läßt sich dieß auch förmlich beweisen.

S a t z. Fig. 54

$$\triangle abc = \triangle bgc$$

B e w e i s.

Man kompliere diese Dreyecke zu Parallelogramme von einerley Höhe und Grundlinie, so ist erwiesen, daß

$$abcf = dgbc$$

$$:2 \quad \frac{abcf}{2} = \frac{dgbc}{2}; \text{ in der Figur}$$

$$\triangle abc = \triangle bgc$$

S. 104. Lehrsatz. Jedes Parallelogramm kann in ein anders von gegebner Höhe oder Grundlinie verwandelt werden.

Denn man setze die gegebne Grundlinie in der nämlichen Richtung an die vorige; ziehe von dem Endpunkt derselben eine unbestimmte gerade Linie durch den nächsten Winkelpunkt der Figur; verlängere die Linien überall von dieser Seite; schließe diese Verlängerungen durch Parallellinien, so erhält man ein großes aus vier kleinern Parallelogrammen zusammengesetztes Parallelogramm, wovon jene zwey gleich sind, durch welche die Diagonallinie nicht durchgeht.

S a t z. Fig. 55

$$y = x$$

B e w e i s.

B e w e i s.

$$\begin{array}{rcl}
 m + x + v & = & n + y + z \\
 -m & & = -n \\
 \hline
 x + v & = & y + z \\
 -v & = & -z \quad \text{aus gleichem Grunde} \\
 \hline
 x & = & y
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} m + x + v & = & n + y + z \\ -m & & = -n \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{wegen der} \\ \text{Diagonal} \end{array}$$

S. 105. Zusatz. Giebt man die Höhe, so ist der nämliche Fall der Methode; nur setzt man sie lieber an eine Höhesseite des zu verwandelnden Parallelograms, wo die Diagonal dann abwärts gezogen wird.

S. 106. Zusatz. Wenn man also, wo immer in einem Parallelograme zwei Linien, die mit den Seiten parallel gehen, so zieht, daß sie sich einander auf der Diagonal durchschneiden, so entstehen allemal 4 neue Parallelograme, wovon jens zwey gleich sind, wo die Diagonal nicht durchgeht.

S. 107. Zusatz. Sollen schiefwinklichte Parallelograme verwandelt werden; so thut man am besten, wenn man allererst selbe in Rechtecke, und dann in die verlangten Figuren verwandelt.

S. 108. Zusatz. Daraus erhellet ferner, daß die Parallelograme auch nach der Verwandlung verschiedene Winkel annehmen können; wenn nur die Grundfläche und Höhe beybehalten werden.

S. 109. Lehrsatz. Jedes Dreyeck läßt sich in ein Parallelogram verwandeln, von verlangter Grundlinie oder Höhe. Auch ein Winkel nicht ausgenommen, der sich in dem verwandelten Parallelogram vorfinden soll.

Denn

Denn man compliere das Dreyeck zu einem Parallelograme von gleicher Grundlinie und Höhe, und halbiere dasselbe durch einen Parallelschnitt, so kann man mit einer der Hälften, weil es wieder ein Parallelogram ist, wie oben verfahren.

S a t z. Fig. 56

$$n + y = z$$

B e w e i s.

$$n + y = \frac{1}{2} a c d b$$

$$x + n = \frac{1}{2} a c d b$$

$$n + y = x + n$$

aber $z = x + n$ §. 106.

$$n + y = z$$

§. 110. Zusatz. Ist das Parallelogram einmal fertig, so kann es in allerley Rhombusse von versangten Winkeln umgeschaffen werden, ohne daß der Inhalt dabey verliert; weil immer die nämliche Parallelweite als Höhe, und die nämliche Grundlinie bleibt.

§. 111. Zusatz. Daraus wird begreiflich, wie Dreyecke eben so leicht wieder in andere Dreyecke umgewandelt werden können. Denn man mache alles wie vorher, nur lasse man den Parallelschnitt weg, und ziehe in dem neuentstandenen Parallelogram eine Diagonal, und es ist Fig. 57

S a t z.

$$y = z$$

Beweis.

B e w e i s.

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & = & z + v \\
 \text{aber} & & v = z \\
 \text{und} & & x = y \quad \text{folglich substit.} \\
 y + y & = & z + z \quad \text{oder abgez.} \\
 2 y & = & 2 z \\
 : 2 & & y = z
 \end{array}$$

§. 112. Zusatz. Was oben von verlangter Grundlinie, Höhe, oder Schiefe gesagt worden, gilt alles hier ebenfalls.

§. 113. Lehrsatz. Wenn die Diagonal eines Parallelograms in zween gleiche Theile getheilt, und durch den Theilungspunkt eine gerade Linie, wie immer an zwei Seiten hingezogen wird, so entstehen in jedem Falle gleiche Vierecke.

S a t z. Fig. 58

$$x + z = y + v$$

B e w e i s.

$$\begin{array}{rcl}
 f a & = & f b \quad \text{aus der Voraussetz.} \\
 r & = & s \quad \text{als Vertikalw.} \\
 o & = & m \quad \text{als Wechselw.} \\
 \text{folglich} & \Delta y & = \Delta z \quad \text{Nun ist aber} \\
 x + y & = & z + v \\
 - y & = & - z \\
 \hline
 x & = & v \\
 + z & = & + y \\
 \hline
 x + z & = & v + y
 \end{array}$$

§. 114.

§. 114. Zusatz. Weil sich solcher Linien unendlich viele durch den Mittelpunkt der Diagonal ziehen lassen, so kann ein Parallelogram, in unendlicherley gleiche Trapezien zertheilet werden.

§ 115. Erkl. In einem rechtwinklichten Dreyecke heißen die beyden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, Lothen oder Katheten, und die Gegenseite des rechten Winkels wird Hypothenuse genannt.

§. 116. Lehrsatz. In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der beyden Lothen zusammen genommen.

S a t z. Fig. 59

$$a c^2 = a b^2 + b c^2$$

B e w e i s.

Man quadrire die Seiten in der Figur; ziehe aus dem rechten Winkel des Dreyeckes einen Perpendikel auf die Hypothenuse, und verlängere selben durch das Quadrat eben dieser Linie, so wird das selbe in zwey Parallelelograme zerschnitten. Wenn man nun den an einem Parallelelograme anliegenden Theil des Dreyecks sowohl zum benachbarten Quadrate, als wieder zum Parallelelograme hinzu denkt, so hat man Trapezen. Man ziehe hier überall die längere Diagonal; dann auch in dem Parallelogram und Quadrat; doch so, daß die vorigen nicht durchschnitten werden: und der Beweis fängt also an

$$o = o$$

$$n = m \text{ als Rechtwinkel.}$$

folglich

$$o + n = o + m$$

ab

$$\left. \begin{array}{l} ab = ad \\ ag = ac \end{array} \right\} \text{ als Seiten des nämlichen Quadrates.}$$

Es ist demnach

$$\Delta agb = dac = dab^*) = \frac{1}{2} ab^2$$

$$\Delta agb = afg^*) = \frac{1}{2} aghf$$

$$\frac{1}{2} aghf = \frac{1}{2} ab^2$$

$$2 \times aghf = ab^2$$

Nachdem man in dem übrigen Parallelogram und Quadrate die nämlichen Diagonalen gezogen, so ist auch

$$x = x$$

$$y = z$$

$$x + y = x + z$$

$$cl = ca$$

$$bc = bq$$

$$\text{also } \Delta clb = acq = qcb^*) = \frac{1}{2} bc^2$$

$$\text{und } \Delta clb = flc^*) = \frac{1}{2} fhlc$$

$$\frac{1}{2} fhlc = \frac{1}{2} bc^2$$

$$\times 2 \quad fhlc = bc^2 \text{ aber oben war}$$

$$aghf = ab^2$$

$$fhlc + aghf = ab^2 + bc^2 \text{ in der}$$

$$\text{Figur} \quad ac^2 = ab^2 + bc^2$$

S. 117. Anmerk. Der vorgetragene Beweis dieses wichtigen Satzes, der in alle Theile der Mathematik so viel Einfluß hat, ist der abgekürzte euklidische. Es giebt vier und zwanzigerley Beweisarten, und wir wollen weiter unten noch ein Paar recht kurze anführen, nicht so fast, um mehr Uebersetzung zu bewirken, als um zu erhärten, daß man auf verschiedenen Wegen zur Wahrheit gelangen kann.

S. 118.

*) Die mit Sternchen bezeichneten Dreiecke sind deswegen den unmittelbar vorhergehenden gleich, weil sie mit selbst gemeinschaftliche Grundlinie, und die Parallelweite zur gemeinschaftlichen Höhe haben.

§. 118. Zusatz. Das Quadrat einer Lothe ist demnach so groß als das Quadrat der Hypothenuse, weniger dem Quadrate der andern Lothe. Denn wenn die Hypothenuse = h , und die zweien Perpendikel oder Lothen P und p bezeichnen, so ist

$$\begin{array}{r} h^2 = \quad \quad + p^2 \\ \text{Nun} \quad - p^2 = \quad \quad - p^2 \\ \hline h^2 - p^2 = P^2 \end{array}$$

Oder

$$\begin{array}{r} h^2 = P^2 + p^2 \\ - p^2 = - p^2 \\ \hline h^2 - P^2 = p^2 \end{array}$$

§. 119. Anmerk. Eine Aufgabe hierüber zur Anwendung. Von dem Wetterableiter eines Thurms steigt ein schiefer Drath von 38 Klafter auf die Erde herunter. Das Ort wo er sich in die Erde senkt, ist bepläufig 13 Klafter vom Thurme entfernt; wie hoch mag wohl der Thurm seyn?

Auflösung. Weil der Drath eine Hypothenuse, der Thurm eine Lothe, und die oben bestimmte Entfernung die Grundlinie von einem angeblichen Dreyecke vorstellt, so ist sicher

$$\begin{array}{r} 38^2 = x^2 + 13^2 \\ 1444 = x^2 + 169 \\ -169 \quad \quad - 169 \\ \hline 1275 = x^2 \\ \checkmark \quad \quad 35,9 = x \end{array}$$

Eine zweite Aufgabe. Jemand besitzt ein Haus an einem hart vorbeistießenden Bache. Er möchte sich gern eine Feuerleiter machen lassen, die er auch jenseits des Baches anlehnen könnte. Wie hoch muß sie werden, wenn der Bach 18 Schuh breit, und die daranstoßende Mauer 32 Schuh hoch ist?

Auflösung. Auch hier stellt die Leiter eine Hypothenuse, die Mauer eine Lothe, und der Bach die Basis vor. Daher

$$x^2 = 32^2 + 18^2$$

$$x^2 = 1024 + 324$$

$$x^2 = 1348$$

$$\checkmark \quad x = 37 \text{ Schuh beynähe.}$$

S. 120. Zusatz. Sind die Lothen gleich, das heißt, ist das rechtwinklichte Dreieck gleichschenkligh, so wird eben darum das Quadrat der Hypothenuse gleich dem doppelten Quadrat einer Lothe seyn.

S. 121. Anmerk. Hieher gehört die Aufgabe: Der berühmte de Romas (Bremisches Magaz. B. 2. S. 114) ließ einen großen papiernen Drachen bey der Annäherung einer Gewitterwolke in die Höhe steigen, um elektrische Versuche anzustellen. Er hatte 780 Fuß von der Schnur abgewickelt; und schätzte den Winkel, welchen die Schnur mit dem Horizont machte 45° ; wie hoch mag wohl der Perpendikularabstand des Drachen von der Erde gewesen seyn?

Auflösung. Da der Perpendikel, welcher von dem Drachen auf die Erde fällt, mit der Schnur und einem Theile der Horizontallinie ein rechtwinklichtes Dreieck von der Art bildet, daß ein Winkel an der Hypothenuse 45° hält, so muß nach S. 73. nothwendig dasselbe gleichschenkligh seyn; folglich

$$x^2 + x^2 = 780^2$$

$$2 x^2 = 608400$$

$$\checkmark \quad x^2 = 304200$$

$$x = 551,6'' \text{ Schuh beynähe.}$$

S. 122. Zusatz. Aus diesem pythagorischen Lehrsatz fließt nun eine Anleitung, mehrere Quadrate in eins zu verwandeln. Man darf bloß die Seiten zweyer verschiedner Quadrate unter einem rechten Winkel zusammensetzen, die Hypothenuse ziehen, und quadrieren, so ist das Quadrat so groß, als die beyden gegebenen Quadrate zusamm genommen. Will

D

man

man noch ein Quadrat dazu addieren, so setze man dessen Seite rechtwinklicht auf die Hypothenuse, ziehe eine neue Hypothenuse, so ist ihr Quadrat so groß als die Summe der drey gegebenen Quadrate, u. s. f. Die Sache läßt sich auch algebraisch beweisen. Fig. 60 Nro I Man benenne die Seiten der Quadrate durch einen Buchstaben, und übertrage sie Nro II in der nämlichen Länge

S a t z.

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

B e w e i s.

$$m^2 = x^2 + y^2$$

$$n^2 = m^2 + z^2$$

$$s^2 = n^2 + v^2$$

$$\begin{array}{rcl}
 m^2 + n^2 + s^2 & = & x^2 + m^2 + n^2 + y^2 + z^2 + v^2 \\
 \hline
 m^2 - n^2 & = & m^2 - n^2 \\
 \hline
 s^2 & = & x^2 + y^2 + z^2 + v^2
 \end{array}$$

§. 123. Zusatz. Eben so leicht ist es, Quadrate noch so groß zu machen oder zu verdoppeln. Es darf nur eine Diagonal des Quadrats quadriert werden.

S a t z. Fig. 61

$$a b^2 = 2 a c^2$$

B e w e i s.

$$a b^2 = a c^2 + c b^2$$

Aber

$$a c = c b \text{ als Seite des nämlichen } \square \text{ts}$$

folglich

$$a c^2 = c b^2$$

substit.

$$a b^2 = a c^2 + a c^2$$

abgefürzt

$$a b^2 = 2 a c^2$$

S. 124. Zusatz. Auf eine nicht viel ungleiche Art halbiert man auch Quadrate. Man ziehe zwey sich durchkreuzende Diagonalen, so werden gleiche Seiten mit den darauf liegenden Wechselwinkeln, wo jeder wegen der Theilung 45° hat, 4 gleiche Dreyecke bestimmen, und die 4 Scheitelwinkel werden rechte Winkel seyn. Wenn nun so ein rechtwinklichtes gleichschenklichtes Dreyeck zu einem Parallelogramm komplirt wird, so kann es eben darum kein anders als ein Quadrat geben, folglich ist der

Satz Fig. 62

$$ac^2 = \frac{1}{2} ab^2$$

Beweis.

$$ac^2 + cb^2 = ab^2$$

aber $ac = cb$ und

$$ac^2 = cb^2$$

substit. $ac^2 + ac^2 = ab^2$

abgek. $2ac^2 = ab^2$

$\div 2$ $ac^2 = \frac{1}{2} ab^2$

oder $ac^2 = \frac{1}{2} ab^2$

S. 125. Zusatz. Endlich folgt auch noch aus dem obigen Lehrsatze, wie man ein Quadrat von einem anderen gegebenen abziehen müsse. Man beschreibe auf einer Seite des größern Quadrats einen Halbkreis, trage die Seite des andern Quadrats als Sehne darein, so zwar, daß sie mit dem Diameter einen rechten Winkel macht, so ist die andere Sehne die das Dreyeck schließt, die Seite des restirenden Quadrats. Fig. 63

D 2

Satz.

222
S a t z

$$ab^2 = x - y$$

B e w e i s.

$$ab^2 + ac^2 = bc^2$$

$$\underline{- \quad ac^2 = - \quad ac^2}$$

$$ab^2 = bc^2 - ac^2$$

oder

$$ab^2 = x - y$$

Figurenberechnung.

S. 126. **Erkl.** Eine Flächenfigur messen, oder berechnen, heißt, eine andere zur Einheit angenommene Fläche so oft herum legen in derselben, als es möglich ist.

S. 127. **Zusatz.** Da das Quadrat die schicklichste und regulärste Figur ist, so hat man in jedem Lande ein übliches Quadratmaas angenommen, welches, wenn es ein Quadratschuh ist, einen Schuh in der Länge, und einen in der Breite hält. Bedient man sich aber der Quadratruthen, so muß ein solches Maas eine Ruthe lang und eine Ruthe breit seyn. Ein gleiches versteht sich auch vom Zolle u. s. f.

S. 128. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines Rechteckes ist das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe. Denn die Grundlinie zeigt an, wie viel z. B. Quadratschuhe auf ihr in einer Reihe nebeneinander stehen können, und die Höhe, wie oft diese ganze Reihe von Quadratschuhen in dem Rechteck enthalten sey. Setzen wir, die Grundlinie Fig. 64 sey 4 Schuh lang, also können auf ihr 4 Quadratschuh stehen. Wenn nun ferner die Höhe 3 Schuh hält,

so

so heißt dieß so viel, als, daß diese Reihe von 4 Quadratschuhen 3mal in der ganzen Figur enthalten sey; folglich muß 4 mit 3 multipliciert werden.

S. 129. Zusatz. Indem Quadratschuhe selbst schon Rechtecke sind, so ist der Inhalt eines solchen Quadratmaases ebenfalls das Produkt aus der Länge und Höhe; das ist $10 \times 10 = 100$ Quadratvolle. Eben so viel Linien hält auch ein Quadratvoll.

S. 130. Zusatz. Weil schiefe Parallelograme den Rechtecken von der nämlichen Grundlinie und Höhe gleich sind, wie oben S. 102. erwiesen worden, so erstreckt sich der obige Lehrsatz S. 128. von Rechtecken auf alle Parallelograme; denn ich darf selbe nur zuerst in Gedanken in Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe verwandeln, so ist der Lehrsatz anwendbar.

S. 131. Zusatz. Da Dreyecke Hälften von Parallelogrammen sind, so muß hier das Produkt aus ihrer Grundlinie und Höhe auch nur halb genommen werden. Dieß geschieht aber, wenn entweder ein Faktor oder das ganze Produkt halbiert wird.

S. 132. Lehrsatz. Da die drey Seiten eines Dreyecks das nämliche Dreyeck völlig bestimmen, so läßt sich, auch ohne Perpendickel, der Inhalt eines gleichseitigen Dreyecks aus der gegebenen Seite; der Inhalt eines gleichschenkligen aus der Grundlinie und einem Schenkel, und der eines ungleichseitigen, aus allen drey Seiten zugleich weit natürlicher finden.

S ä t z e.

I. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreyeckes ist demnach, wenn l eine Seite (latus) heißt $= \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$.

II. Der Inhalt eines gleichschenkligen, wenn c einen Schenkel (crus), und b die Grundlinie (basis) bedeutet, $= \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

III. Der Inhalt eines ungleichseitigen, wenn a, b, c, die Seiten vorstellen,
 $= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

Beweis des ersten Satzes. Fig. 65 Nro I

$$\text{Es sey } \begin{aligned} bd &= l = ab = ad \\ bc &= cd = \frac{l}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } \Delta abd = \frac{bd \times ac}{2} \text{ §. 131.}$$

$$\text{Aber } ac^2 = ab^2 - bc^2 \text{ §. 118.}$$

$$\begin{aligned} \text{subst. } ac^2 &= l^2 - \frac{l^2}{4} \\ &= 4 \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4} \\ &= 3 \frac{l^2}{4} \end{aligned}$$

$$\sqrt{ac} = \sqrt{3 \frac{l^2}{4}}$$

$$ac = \frac{1}{4} \sqrt{3} l^2$$

$$\text{substit. } \Delta abd = \frac{l \times \frac{1}{4} \sqrt{3} l^2}{2}$$

$$\Delta abd = \frac{l^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$$

Beweis des zweyten Satzes. Fig. 65 Nro II

$$\begin{aligned} \text{Es sey } ab &= ad = c \\ bd &= b \end{aligned}$$

also

also $bc = cd = \frac{b}{2}$

$ac = p$

Daher ist $\Delta abd = \frac{b \times p}{2}$

allein $p^2 = ab^2 - bc^2$
 $= c^2 - \frac{b^2}{4}$

$\sqrt{p} = \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

$\begin{array}{r} \times b \qquad \qquad \times b \\ \hline b \times p = b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} \end{array}$

$\div 2 \quad \frac{b \times p}{2} = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

Aber $\frac{b \times p}{2} = \Delta abd$

$\Delta abd = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

Beweis des dritten Satzes. Fig. 65 Nro III

Man heiße $ab = a$

$bd = b$

$ad = c$

$bc = x$

so ist $cd = b - x$

$ac = p$

Es ist mehrmal $\Delta abd = \frac{b \times p}{2}$

Also für p einen Werth in bekannten Ausdrücken gesucht.

$ac^2 = ab^2 - bc^2$

$ac^2 = ad^2 - cd^2$

$\frac{ab^2 - bc^2}{ab^2 - bc^2} = \frac{ad^2 - cd^2}{ad^2 - cd^2}$ und substit.

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$$

$$\begin{array}{r} a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2 \\ + x^2 \qquad \qquad \qquad + x^2 \end{array}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

$$a^2 - c^2 + b^2 = 2bx$$

2b:

$$a^2 - c^2 + b^2 = x$$

2 b

Weil nun $ac^2 = ab^2 - bc^2$

oder $p^2 = a^2 - x^2$

so ist $x^2 = a^2 - p^2$

und $x = \sqrt{a^2 - p^2}$

Aber $x = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$

2 b

$$\sqrt{a^2 - p^2} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$$

2 b

$$a^2 - p^2 = \frac{a^4 - 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + c^4 - 2c^2b^2 + b^4}{2b}$$

4 b²

$$p^2 - a^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4}{4b^2}$$

4 b²

$$p^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4}{4b^2} + a^2$$

4 b²

$$p^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4 + 4a^2b^2}{4b^2}$$

4 b²

$$p^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - c^4 - b^4}{4b^2}$$

4 b²

Aber $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - c^4 - b^4$

$$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

subst. $p^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

4 b²

$$\sqrt{p} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2b}$$

x b

2 b

b x p

$$b \times p = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-c+b+c)}}{2}$$

$$\therefore \frac{b \times p}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-c+b+c)}$$

$$(-a+b+c) = \Delta \text{ abd}$$

§. 133. Anmerk. Um ein Beispiel von der praktischen Anwendung dieses Satzes zu geben, so berechne man den Dorfsaum in der Gegend von Chiemssee, der ein Dreieck bildet, wovon die Seiten nach der Angabe des bayerischen Landboten von 1790, 10ten Stück 5830, 7060 und 8246 Fuß halten. Der stigierte Ausdruck wäre also nach der Formel

$$\frac{1}{4} \sqrt{(5830+7060+8246)(5830+7060-8246)(5830-7060+8246)(-5830+7060+8246)} = \frac{1}{4} \sqrt{21136 \times 4644 \times 7016 \times 9476}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{6525738154911744} = \frac{1}{4} \times 80782041$$

$$= 20195510\frac{1}{4}$$

Das ist beynabe 505 Joucharte, das Jouchart zu 40000 Quadratschuhe gerechnet.

§. 134. Zusatz. Wir haben oben gezeigt, daß sich jedes Trapez, jedes Polygon in Dreiecke zerfallen läßt. Alle Dreiecke aber, wenn Höhe und Grundlinie überall bestimmt wird, oder wenn die Seiten derselben bekannt sind, können berechnet werden. Folglich sind wir im Stande jede geradlinichte Figur, wo nicht auf einmal, doch theilweis zu berechnen, und am Ende die gefundenen Resultate zusammen zu addieren.

§. 135. Lehrsatz. Wenn ein Trapez zwei Parallelseiten hat, so ist auch der Inhalt nach einer kürzern Rechnung, gleich dem halben Produkt aus der Summe der Parallelseiten in die Parallelweite.

Satz. Fig. 66

$$abcd = \frac{(ab + cd) bf}{2}$$

Beweis.



B e w e i s.

Man ziehe eine beliebige Diagonal, so entstehen
zwo Dreyecke von einerley Höhe. Es ist nun

$$b c d = c d \times b f$$

$$a b c = a b \times b f$$

$$b c d + a b c = c d \times b f + a b \times b f$$

$$\text{Anders ausgedrückt} = \frac{(a b + c d) \times b f}{2}$$

$$\text{In der Figur } a b c d = \frac{(a b + c d) \times b f}{2}$$

§. 136. Anmerk. Wie allerley krummlinichte Flächen
berechnet werden müssen, gehört theils in die praktische, theils
in die höhere Geometrie. Weiter unten soll auch die Berech-
nung der Zirkelfläche vorkommen.

Aehnlichkeit der Figuren

und

ihre Verhältnisse zu einander.

§. 137. Lehrsatz. Aehnlichkeit hat alles,
was bloß in der Größe unterschieden ist.

§. 138. Zusatz. Da in den Dreyecken, Qua-
draten und regulären Vielecken bey der Größe alles
auf die Seiten ankommt, und die Winkel durchaus
nichts dazu beytragen, so sind sie einander ähnlich,
wenn sie einerley Winkel haben; denn nur in die-
sem Falle sind sie alleinig in der Größe unterschieden.

§. 139. Zusatz. Diesem Begriff zufolge müssen
alle Quadrate, gleichseitige, rechtwinklichtgleich-
schenklichte Dreyecke und gleichnamige Polygone an
und

und für sich schon einander ähnlich seyn; weil die Winkel in solchen Quadraten, in solchen Dreyecken u. s. f. immer die nämlichen sind.

§. 140. **Lehrsatz.** Zwey Parallelelograme von einerley Höhe verhalten sich wie die Grundlinien.

S a t z. Fig. 67.

$$x : y = c b : b d$$

B e w e i s.

$$x = c b \times a b$$

$$y = b d \times a b$$

$$\frac{x}{y} = \frac{c b \times a b}{b d \times a b} \quad : a b$$

$$x : y = c b : b d$$

§. 141. **Lehrsatz.** Zwey Parallelelograme verhalten sich wie die Höhen, im Falle die Grundlinien gleich sind.

S a t z. Fig. 68

$$x : y = a d : a c$$

B e w e i s.

$$x = a d \times a b$$

$$y = a c \times a b$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a d \times a b}{a c \times a b}$$

$$x : y = a d : a c \quad : a b$$

§. 142. **Zusatz.** Weil die Dreyecke Hälften von Parallelelogramen sind, so gelten auch beyde obige Sätze von ihnen; das heißt: Die Inhalte zweyer Dreyecke von einerley Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen:

Höhen: sind aber die Dreyecke von einerley Höhe, wie ihre Grundlinien. Wir wollen den letztern Satz zum Ueberflusse erweisen.

S a t 3. Fig. 69

$$x : y = cd : fg$$

B e w e i s.

$$x = \frac{cd \times ab}{2}$$

$$y = \frac{fg \times ab}{2}$$

$$x : y = \frac{cd \times ab}{2} : \frac{fg \times ab}{2}$$

X 2

$$x : y = cd \times ab : fg \times ab$$

$$x : y = cd : fg$$

: a b

S. 143. Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke, wo man will, mit der Basis eine Parallelinie von einer Seite zur andern zieht, so stehen

- I die Abschnitte unter sich im Verhältnisse;
- II die obern Abschnitte mit den ganzen Seiten;
- III die unteren Abschnitte mit den ganzen Seiten, und

IV ein oberer Abschnitt zum Parallelschnitt wie die dem Abschnitt ähnlich liegende ganze Seite zur Basis. Wir werden eins nach dem andern erweisen.

Erster Satz.

$$ab : bc = af : fd$$

Beweis.

B e w e i s.

Man ziehe im entstandenen Trapez Diagonalen,
so wird wegen gleicher Höhe und Grundlinie seyn
Fig. 70

$$\begin{array}{lcl} \triangle bfc & = & \triangle bdf \\ \text{Ferner} & abf : bfc & = ab : bc \\ \text{und} & abf : bfd & = af : fd \\ \text{substit.} & : (bfc) & \\ \hline & ab : bc & = af : fd \end{array}$$

144. Anmerk. Man kann sich leicht vorstellen, wie
oft sich dieser Satz im Anschreiben, gemäß der Proportionslehre,
modificieren läßt.

Zweyter Satz.

$$ab : bc = af : ad$$

B e w e i s.

Erwiesen ist, daß $ab : bc = af : fd$
folglich auch, daß $ab : (bc + ab) = af : (fd + af)$
in der Figur $ab : ac = af : ad$

S. 145. Anmerk. Dieser zweite Satz, so wie auch
der folgende ließe sich unmittelbar aus der Figur selbst erwei-
sen. Zum Uebersuße wollen wir die Art des Beweises ganz
hersetzen.

$$\begin{array}{lcl} \text{Es ist } \triangle bfc & = & \triangle bfd \\ & abf & = abf \\ \hline bfc + abf & = & bfd + abf \\ \text{in der Figur } \triangle afc & = & \triangle abd \\ \text{Nun } abf : afc & = & ab : ac \\ \text{und } abf : abd & = & af : ad \\ \text{substit.} & : (afc) & \\ \hline & ab : ac & = af : ad. \end{array}$$

Drit-

Dritter Satz.

$$cb : ca = df : da$$

B e w e i s.

$$ab : cb = af : fd$$

oder $cb : ab = fd : af$

Nun ist $cb : (ab + cb) = fd : (af + fd)$

In der Fig. $cb : ca = df : da$

Vierter Satz. Fig. 71

$$ab : ac = bf : cd$$

B e w e i s.

Man ziehe mit der ganzen Seite, die im Satz vorkommt, aus dem gegenüber stehenden Durchschnittspunkte der andern Seite eine Parallellinie, so ist erstens

$$af : ad = ab : ac \quad \text{und wenn}$$

ac die Basis $af : ad = ch : cd$

$$ab : ac = ch : cd$$

aber $ch = bf$ wegen Parallelismus

substit. $ab : ac = bf : cd$

S. 146. Aufgabe. Eine gerade Linie, wie wir oben S. 45. versprochen, in drey, oder auch in mehrere Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe über der gegebenen Linie eine andere damit parallel, schneide durch Hilfe des Handzirkels 3 gleiche Stücke ab, die aber zusammen genommen kleiner als die gegebne Linie seyn müssen; verbinde die Endpunkte der gegebenen und getheilten Linie durch zwei andere, und verlängere diese letzten bis sie sich durchschneiden; so theilen jene Linien, welche

che

Die aus eben diesem Scheitel durch die Theilungspunkte gezogen und gehörig verlängert werden, die gegebene Linie in die verlangten gleichen Theile.

S a t 3. Fig. 72

$$ab = bc = cd$$

B e w e i s.

Weil in jedem der drey entstandenen Dreyecke mit der Grundlinie eine andere Linie parallel gezogen ist, so verhält sich

$$\begin{array}{l} \text{und} \quad kf : kb = lf : ab \\ \quad \quad kf : kb = fg : bc \\ \quad \quad lf : ab = fg : bc \\ \text{aber} \quad lf = fg \quad \text{aus der Konstruktion} \\ \text{substit.} \quad fg : ab = fg : bc \\ \quad \quad bc \times fg = ab \times fg \\ fg : \quad bc = \quad ab \\ \text{Ferner} \quad kg : kc = fg : bc \\ \quad \quad kg : kc = gh : cd \\ \quad \quad fg : bc = gh : cd \\ \text{aber} \quad fg = gh \quad \text{wie oben} \\ \text{substit.} \quad gh : bc = gh : cd \\ \quad \quad gh \times cd = bc \times gh \\ gh : \quad cd = \quad bc \\ \text{Vorher war} \quad bc = ab \\ \text{Folglich auch} \quad bc = cd = ab \end{array}$$

S. 147. Anmerk. Eben so leicht läßt sich auch jede gerade Linie in mehrere gleiche Theile theilen. Gut wird es seyn, wenn die angenommene Linie sehr nahe an der gegebenen parallel gezogen, und wenn die Theile, so groß als thunlich ist, gemacht werden.

S. 148.

S. 148. **Lehrsatz.** Wenn in einem Dreyecke ein Winkel in zween gleiche Theile getheilt und die Theilungslinie bis zur Gegenseite verlängert wird, so verhalten sich die Segmente dieser Seite, wie die daranstößenden übrigen zwey Seiten oder Schenkel.

Satz. Fig. 73

$$ab : bc = ad : dc$$

Beweis.

Man verlängere einen Schenkel um die Größe des andern Schenkels rückwärts, und schliesse den neuentstandenen Winkel zu einem Dreyecke. Es ist demnach $o + m = 2y$ als äußerer Winkel im gleichschenkl. Δ S. 80.

aber $o = m$

substit. $m + m = 2y$

abgek. $2m = 2y$

:2 $m = y$, und weil dieß Wechselw. sind.

bd parallel mit cf

Also in dem Δacf nach S. 143. Nro IV

$$ab : bc = ad : df$$

aber $df = cd$ aus der Konstrukt.

substit. $ab : bc = ad : cd$.

S. 149. **Lehrsatz.** In ähnlichen Dreyecken, das heißt, in solchen, wo die Winkel, überall die nämlichen sind, stehen jene Seiten im Verhältnisse, deren Gegenwinkel gleich sind.

Es sey in den zwey Dreyecken Fig. 74

$$a = f$$

$$d = g$$

und $l = h$ so ist z. B. der

Satz

Satz

$$ad : al = fg : fh$$

Beweis.

Man schneide die zwei Seiten des kleinen Dreyecks, die im Satze begriffen sind, von den zwei ähnlich liegenden Seiten des großen Dreyecks, vom Scheitelpunkte des nämlichen Winkels angefangen, ab, und verbinde die Abschnittpunkte durch eine Linie, so ist

$$\left. \begin{array}{l} ab = fb \\ ac = fh \\ a = f \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Aus der Konstrukt.} \\ \text{aus der Vorausf.} \end{array}$$

Also $\triangle abc \cong \triangle fgh$ und
 $o = g$ wegen gleichen Gegenseiten
 aber $d = g$ aus der Vorausf.

Folgl. $o = d$ Nun ist wegen der Gleichheit des äußern und innern Winkels

bc parallel mit dl also S. 143. Nro II

$$\begin{array}{l} ab : ad = ac : al \\ \text{subst. } fg : ad = fh : al \\ \text{veränd. } ad : fg = al : fh \\ \text{mehrmal } ad : al = fg : fh \end{array}$$

S. 150. Anmerk. Bringt man die übrige Seite in die Proportion, so werden die Abschnitte von jenen zwei ähnlich liegenden Seiten den nämlichen Winkel wie die kleinen Seiten des andern Dreyecks einschließen.

S. 151. Lehrsatz. Auch in ähnlichen Vielecken stehen jene Seiten im Verhältnisse, deren Gegenwinkel gleich sind, oder was eines ist, welche eine ähnliche Lage in beyden Vielecken haben.

Satz. Fig. 75

$$ab : ac = ld : lh$$

Beweis.

Man schneide wie vorher die Seiten des kleinen Polygons, von den ähnlichen Seiten des großen Polygons ab , so ist nach gezogener parallelen Diagonal, auch wie vorher $m = o$; weil nun

$$\text{also } n = m \text{ folglich}$$

$$lk : lf = ld : lh$$

$$\text{substit. } ab : ac = ld : lh$$

S. 152. Zusatz. Eben so leicht ist es zu erweisen, daß auch ähnlich liegende Diagonalen untereinander, oder mit ähnlich liegenden Seiten in Proportion, stehen wenn die Vielecke selbst ähnlich sind.

S. 153. Lehrsatz. In ähnlichen Dreyecken siehet ferner auch jede ähnlichliegende (homologe oder respondierende) Seite mit derley Perpendikel im Verhältnisse.

Sätze. Fig. 76

$$1) ac : lf = ab : lg$$

$$2) cd : fh = ab : lg$$

Beweis.

$$1) \text{ Weil } o = m = 90$$

$$\text{und } c = f \text{ so ist}$$

$$\triangle acb \sim \triangle flg \text{ folglich}$$

$$al : lf = ab : lg$$

$$2) \text{ Es}$$

2) Es ist ohnehin $\Delta acd \sim \Delta lfh$
 also $ac : lf = cd : fh$
 aber $ac : lf = ab : lg$
 Folgl. $cd : fh = ab : lg$

S. 154. Zusatz. Es ist demnach analogisch richtig, daß sich dieser Satz auch auf Polygone ausdehnen läßt.

S. 155. Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Satz. Fig. 77

$$X : Y = ab^2 : cd^2$$

Beweis.

Man fälle auf jene zwei Seiten, welche im Satze vorkommen, Perpendikel, so ist erstens

$$lf : gh = ab : cd$$

$$\text{aber } ab : cd = ab : cd$$

$$\frac{lf \times ab : gh \times cd = ab^2 : cd^2}{:2 \quad \frac{lf \times ab}{2} : \frac{gh \times cd}{2} = ab^2 : cd^2}$$

$$\text{In der Figur } X : Y = ab^2 : cd^2$$

S. 156. Zusatz. Weil in ähnlichen Polygonen durch ähnlich gezogene Diagonalen immer zwey und zwey ähnliche Dreyecke entstehen, so verhalten sie sich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Linien. Wiederholt man demnach die Proportion so oft, als viele Dreyecke da sind, so bestimmt man lauter ähnliche Verhältnisse; wo sich die Summen sämtlicher

Vorberglieder, welches die Polygone selbst sind, wie die einzelnen Glieder eines hintern Verhältnisses verhalten. Z. B. es wäre der.

S a t z Fig. 78

$$acdlb : fghkq = ab^2 : qk^2$$

B e w e i s.

Da zwei ähnliche Dreyecke mit den Quadraten was immer für gleichliegender Linien im Verhältnisse stehen, so ist es hier gleichgültig, mit welchen Seitenquadraten man die übrigen Dreyecke in Proportion stellt, wenn nur die ersten zwey die Satzseiten erhalten.

Es ist also $\Delta acb : \Delta f q k = ab^2 : qk^2$
 Eben so $\Delta cbd : f k g = cd^2 : fg^2$
 und $\Delta dlb : g h k = db^2 : gk^2$ } wes
 gen ähnlich liegenden Linien.

$$(acb + cdb + dlb) : (f q k + f k g + g h k) = ab^2 : gk^2$$

oder $acdlb : fghkq = ab^2 : qk^2$

S. 157. Anmerk. Daraus läßt sich folgende Frage beantworten. Der ganze Plan einer aufgenommenen Gegend faßt genau $3\frac{1}{2}$ Quadratsfuß landesüblichen Maases in sich. Eine gewisse Linie davon, welche auf dem Felde 1000 Fuß gemessen, beträgt hier gerade $\frac{1}{4}$ Fuß. Wie viel Quadratsfuß mag wohl die aufgenommene Landschaft wirklich groß seyn?

Auflösung. Da es eine der Haupteigenschaften jedes Plans seyn soll, die aufgenommene Revier in einer ähnlichen Figur vorzustellen, so muß die Proportion gelten

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^2 : 1000^2 &= 3\frac{1}{2} : x \\ \frac{1}{16} : 1000000 &= \frac{1}{2} : x \\ \frac{x}{16} : 7000000 &= 3500000 \end{aligned}$$

$$x = 3500000 \times 16^2 = 56000090 \text{ Quadratsfuß.}$$

Vom

Vom Zirkel.

S. 158. **Lehrsatz.** In ein und dem nämlichen Zirkel korrespondieren gleichen Sehnen auch gleiche Bögen.

Voraussetzung. Fig. 79

$$hf = ad$$

Satz.

$$hgf = abd$$

Beweis.

Man ziehe Radiusse auf der Sehnen Endpunkte; so ist

$$\begin{array}{lcl} hc = ac & \} & \text{als Radiusse.} \\ cf = cd & \} & \\ \text{und } hf = ad & & \text{aus der Vorausf.} \\ \text{also } \triangle hcf \cong \triangle acd & \text{und} & \\ o = m & \text{folglich auch ihre Maasse} & \\ hgf = abd & & \end{array}$$

S. 159. **Lehrsatz.** In ein und dem nämlichen Zirkel korrespondieren auch umgekehrt gleichen Bögen gleiche Sehnen.

Voraussetzung.

$$fgh = abd$$

Satz.

$$fh = ad$$

Nach gezogenen Radiussen ist wie oben

Beweis.

B e w e i s.

$$\begin{aligned}
 hc &= md \\
 fc &= ca \\
 o &= m \text{ weil ihre Maasse gleich sind} \\
 \text{also } \triangle hcf &\cong \triangle cad \text{ und} \\
 fh &= ad
 \end{aligned}$$

§. 160. Lehrsatz. Jeder Perpendikel, welcher eine Sehne im Zirkel in zween gleiche Theile theilt, wird zum Diameter, wenn man ihn gehörig verlängert.

Voraussetzung. Fig. 80

$$\begin{aligned}
 o &= m \text{ und} \\
 bc &= cd
 \end{aligned}$$

S a t z.

$$\begin{aligned}
 af &= \text{Diameter oder} \\
 albkf &= ahdgf.
 \end{aligned}$$

B e w e i s.

Man verbinde die Endpunkte der Sehnen mit neuen Sehnen, so ist

$$\begin{aligned}
 bc &= cd \\
 ac &= ac \\
 o &= m \\
 \text{also } \triangle abc &\cong \triangle acd \text{ und} \\
 ab &= ad \text{ folglich auch} \\
 bla &= ahd
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ferner} \quad cf &= cf \\
 bc &= cd \\
 x &= y \text{ also wiederum}
 \end{aligned}$$

△

$$\begin{aligned} \triangle bcf &\cong \triangle cdf \text{ und} \\ bf &= df \text{ daher auch} \\ bkf &= dgf \end{aligned}$$

Nun $bla = ahd$, wie erwiesen worden.

$$\text{add. } bkf + bla = dgf + ahd$$

In der Figur $albkf = ahdgf$
oder was eins ist, $af = \text{Diametro.}$

S. 161. Zusatz. Jeder Diameter also, der eine Sehne perpendicularär schneidet, theilet Sehne und Bogen in zween gleiche Theile.

S. 162. Aufgabe. Durch drey gegebene Punkte, die aber nicht in gerader Linie liegen dürfen, einen Zirkel zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Fig. 81 Man verbinde die Punkte durch zwe Linien, oder denke sich wenigst diese Verbindung; theile sie als Sehnen durch Perpendikel in zween gleiche Theile, so werden diese Perpendikel Diameterrichtungen des nämlichen Zirkels seyn. Weil sich aber diese nur in einem einzigen Punkte durchschneiden und zwar im Mittelpunkte, so ist der Durchschnittspunkt dieser verlängerten Perpendikel der Mittelpunkt eines Zirkels, der zu jenen Sehnen gehört, und deren Endpunkte dann nothwendig in der Peripherie liegen müssen.

S. 163. Zusatz. Daraus erhellet von selbst, wie um jedes Dreyeck ein Zirkel beschrieben werden könne, wenn die drey Winkelpunkte als gegebene Punkte betrachtet werden.

S. 164. Lehrsatz. Die Bögen zwischen parallelen Sehnen eines Zirkels sind gleich.

Satz.

Satz. Fig. 82

$$bc = qg$$

Beweis.

Man ziehe mit den zwei Sehnen auch noch den Diameter parallel, im Fall keine von den Sehnen selbst ein Diameter ist, fälle von den Endpunkten der Sehnen auf den Diameter Perpendikel, so werden diese halbierte Sehnen seyn, welche gleichen halbierten Bögen entsprechen, folglich weil

$$\begin{array}{l} fc = ig \\ \text{und } db = kq \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} fc = ig \\ db = kq \end{array}} \right\} \text{ als Zwischenparallelen}$$

so ist auch $ac = ig$
und $ab = iq$

$$\text{also } ac - ab = ig - iq$$

In der Figur $bc = qg.$

S. 165. Zusatz. Es sind diesemnach auch jene Bögen in einem Birkel gleich, welche zwischen einer Tangente und einer parallelen Sehne liegen; denn man denke sich Fig. 83 von der Sehne bis zur Tangente lauter parallele Sehnen, so wird die letzte, welche wegen beständigen Abnehmens zum Punkte geworden, in der Tangente selbst liegen, folglich ist $ab = bc$

S. 166. Anmerk. Nun läßt sich jener Satz, daß ein Winkel, den eine Sehne mit der Tangente macht, den Bögen, der zwischen der Tangente und Sehne liegt, zum Maasse habe, nach aller Strenge beweisen. Es wäre also

Satz. Fig. 84

$$x = \frac{bdf}{2}$$

Beweis.

B e w e i s.

Man ziehe aus dem andern Endpunkte der Sehne eine Parallelschne mit der Tangente, so ist

$$\begin{aligned} m &= x \\ m &= \frac{ac b}{2} \\ \hline \text{also } x &= \frac{ac b}{2} \\ \text{aber } ac b &= bdf, \\ \text{subst. } x &= \frac{bdf}{2} \end{aligned}$$

So auch der Satz, daß der Winkel, den zwei Tangenten machen, die halbe Differenz jener Bögen zum Maasse habe, welche die Tangentialpunkte bestimmen; nämlich daß Fig. 85. $m = \frac{bca - ba}{2}$ sey. Denn, wenn aus einem Tangentialpunkte eine Sehne mit der andern Tangente parallel gezogen wird, so ist

$$\begin{aligned} x &= m \\ x &= \frac{ac}{2} \\ \hline m &= \frac{ac}{2} \\ \text{aber } ac &= bca - bc \text{ und weil } bc = ab, \text{ ist} \\ ac &= bca - ab \text{ substit. giebt.} \\ m &= \frac{bca - ab}{2} \end{aligned}$$

S. 167. Lehrsatz. Wenn sich zwei Sehnen innerhalb des Zirkels schneiden, sind die Produkte aus den zwey Segmenten jeder der beyden Sehnen gleich: schneiden sie sich aber außerhalb, so sind die Produkte aus den verlängerten Sehnen in ihre Segmente außer dem Zirkel ebenfalls gleich.

Satz für den ersten Fall. Fig. 86

$$bc \times cd = ac \times cf$$

Beweis.

Man schließe die Vertikalwinkel mit Sehnen,

so ist $\left. \begin{array}{l} b = \frac{1}{2} ad \\ f = \frac{1}{2} ad \end{array} \right\}$ als Peripherialw.

$$\text{also } b = f$$

$$\text{Eben so ist } d = a$$

$$\text{und } o = m \text{ folglich}$$

$$\triangle abc \cong \triangle cdf \text{ und}$$

$$bc : ca = cf : cd \text{ also}$$

$$bc \times cd = ca \times cf.$$

Satz für den zweyten Fall. Fig. 87

$$ad \times ab = af \times ac$$

Beweis.

Man beschreibe durch Hilfe zweier anderer Sehnen ein Trapez im Zirkel, so wird

$$o + n = 180^\circ \text{ seyn §. 96}$$

$$x + o = 180 \text{ als Nebenw.}$$

$$\begin{array}{r} o + n = x + o \\ - o \quad \quad - o \\ \hline \end{array}$$

$$n = x \text{ ferner}$$

$$a = a$$

$$\text{also } m = y \text{ folglich}$$

$$\triangle abc \cong \triangle adf \text{ und}$$

$$ad : af = ac : ab \text{ also}$$

$$ad \times ab = af \times ac$$

S. 168. Zusatz. Geschieht es, daß eine Sehne innerhalb des Kreises die andere im Durchschneidungspunkte halbiert, so ist das Quadrat der halben Sehne gleich dem Produkt der Segmente der andern Sehne.

S a t z. Fig. 88

$$cb^2 = ab \times bh$$

B e w e i s.

$$\begin{array}{lcl} cb \times bd & = & ab \times bh \\ \text{aber} \quad cb & = & bd \\ \text{subst.} \quad cb \times cb & = & ab \times bh \\ \text{abgek.} \quad cb^2 & = & ab \times bh \end{array}$$

S. 169. Anmerk. Dieser ordentlich abgeleitete Zusatz wird fast in allen mathematischen Lehrbüchern gewöhnlich als ein selbstständiger Lehrsatz so vorgetragen: Ein auf den Diameter des Kreises herabgefallene Perpendikel ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameter, und könnte unabhängig von dem vorhergehenden Lehrsatz so erwiesen werden.

S a t z.

$$ab^2 = db \times bf$$

B e w e i s.

Man ziehe aus dem Endpunkte des Perpendikels einen Radius, so ist

$$\begin{array}{lcl} \text{I weil} \quad dc = cf = ac = r & \text{welches } r \text{ den Ra-} & \\ \quad db = r - bc & \text{dius vorstellt.} & \\ \quad bf = r + bc & & \end{array}$$

$$\text{mult. } db \times bf = r^2 - bc^2$$

$$\text{II} \quad ab^2 = r^2 - bc^2 \quad \text{nach pyth. Lehrs.}$$

$$\text{Also} \quad ab^2 = db \times bf.$$

Es wollte Klemm diesen Satz erweisen, obwohl sein Beweis weit gedehnter und verworren ausfiel. Er fügte noch überdies einen Beweis aus der Aehnlichkeit der Dreiecke bey. Alles dieß schadet nichts, um zu zeigen, daß man auf ganz verschiedenen Wegen zur mathematischen Wahrheit gelangen könne: ich sehe aber nicht ab, warum man diesen besondern Fall nicht eben so gut, oder noch richtiger aus dem vorigen allgemeinen Lehrsatz herleiten sollte.

S. 170. Zusatz. Es ist nun leicht jedes Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln; denn es darf nur seine Höhe an die Länge in der nämlichen Richtung gesetzt, über die ganze Linie ein halber Zirkel geworfen, und auf dem Zusammenstoßungspunkte der Höhe und Länge ein Perpendikel errichtet werden, so ist dieß die Seite des verlangten Quadrats.

S a t 3. Fig. 90

$$X = Y$$

B e w e i s.

$$\begin{array}{rcl} ab^2 & = & bc \times bf \\ \text{aber } bd & = & bc \\ \text{substit. } ab^2 & = & bd \times bf \quad \text{oder} \\ X & = & Y \end{array}$$

S. 171. Anmerk. Klemm (in seinem Lehrbuche) verspricht früh vor diesem Satze schon S. 487. ein Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln und baut auf diese Supposition sogar Zusätze, als z. B. §§. 495, 508; leistet es aber nirgends, und wird es auch bis dahin wohl schwerlich zu leisten im Stande seyn.

S. 171. Zusatz. Aus obigem Satze fließt auch die Methode, die Quadratwurzel aus jeder Zahl durch
Zeichn

Zeichnung oder Konstruktion zu finden. Man schneide nämlich von einer Linie so viel gleiche Theile ab, als viele Einheiten die Zahl hat, und noch einen Theil dazu, werfe nun über diese Theile einen halben Zirkel, und richte auf dem ersten Theilungspunkt einen Perpendikel auf, so drückt er die Quadratwurzel von der verlangten Zahl aus. Z. B. es soll aus 5 die Wurzel gezogen werden; so schneide man von einer Linie 6 gleiche Stücke ab, und verfare, wie gesagt worden.

S a t 3. Fig. 91

$$ab = \sqrt{5}$$

B e w e i s.

$$\begin{aligned} ab^2 &= cb \times bd \\ \text{aber } cb &= 1 \\ \text{und } bd &= 5 \\ \text{folgl. subst. } ab^2 &= 1 \times 5 \text{ oder} \\ ab^2 &= 5 \\ \text{also } ab &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

S. 173. Zusatz. Es kann eine Sehne, wie schon öfter erinnert worden, so klein werden, daß sie einem Punkt gleicht, aber doch noch eine Linie bleibt, folglich, wenn man sie verlängert eine Tangente vorstellt, weil sie bloß in die Peripherie, und nicht in die Zirkelfläche fällt. Wenn nun eine andere Sehne von einem ihrer Endpunkte so lange außerhalb fortgezogen wird, bis sie die Tangente schneidet, welche wiederum beyderseits verlängert werden kann, so ist, vorausgesetzt daß die Tangente nicht mit der Sehne parallel läuft, das Quadrat der Tangente

so groß, als das Produkt aus der verlängerten Sehne in das Stück außer der Peripherie.

S a t 3. Fig. 92

$$a c^2 = b d \times b c$$

B e w e i s.

Weil ein einziger Punkt die verlängerte Sehne weder kürzer noch länger macht, so ist

$$a b \times a b = b d \times b c$$

$$\text{Das ist} \quad a b^2 = b d \times b c$$

S. 174. Anmerk. Strenger läßt sich dieser abgeleitete Satz aus der Ähnlichkeit der Dreiecke erweisen; denn man ziehe aus dem Tangentialpunkte Linien an die Endpunkte der Sehne, so ist Fig. 93

$$\triangle a b c \sim a b d$$

$$\text{Denn} \quad x = \frac{b c}{2} \text{ als Sehnenwinkel mit der Tang.}$$

$$\text{auch} \quad d = \frac{b c}{2} \text{ als Peripherialw.}$$

$$\text{also} \quad x = d$$

$$\text{ferner} \quad a = a$$

$$\text{folglich auch} \quad m = (x + y)$$

$$\text{Nun} \quad a b : a c = a d : a b$$

$$a b^2 = a c \times a d$$

S. 175. Anmerk. Klenm schränkt diesen Satz bloß auf den Fall ein, wenn die Tangente mit seinem Diameter verbunden, und aus dem andern Endpunkte desselben, dieser Tangente eine Hypothenuse, wie er sich ausdrückt, entgegen gezogen wird; er beweist zweitens diesen Satz ganz unabhängig vom Hauptsatz; obwohl nichts natürlicheres als dessen Ableitung von selbstem ist. Was seine Gründe hiezu waren, ist mir ein Räthsel.

S. 176. Anmerk. Auf eine ähnliche Art fand ich einen neuen Beweis für den pythagorischen Lehrsatz. Man beschreibe mit einer Lothe aus dem anliegenden schiefen Winkel

fel einen Zirkel durch das Dreyeck, so hat man den obenerwiesenen Fall, wenn die andere Loshe zuvor um den Radius rückwärts verlängert worden.

S a t z. Fig. 94

$$db^2 = ad^2 + ab^2$$

B e w e i s.

$$ad^2 = dc \times df$$

Aber $dc = db + ab$ oder bc] als Radius

und $df = db - ab$ oder fb]

substit. $ad^2 = (db + ab) \times (db - ab)$

$$ad^2 = db^2 - ab^2$$

$$ad^2 + ab^2 = db^2$$

S. 177. Zusatz. Was immer für zwei Tangenten eines Zirkels, die einander durchschneiden, haben, wie schon erwiesen worden, vom Berührungspunkte bis zum Durchschnittspunkt gleiche Länge; denn es ist Fig. 95

$$ab^2 = ac^2$$



$$ab = ac$$

S. 178. Zusatz. Daraus folget eine leichte Art wie in jeden Winkel ein Zirkel beschrieben werden könne, so daß er die beyden Schenkel berühre. Man theile nämlich Fig. 96 den Winkel in zween gleiche Theile o und m, und errichte auf einem gegebenen Punkt, z. B. b, einen Perpendikel bis an die Theilungslinie ac, so ist dieß der Radius welcher auf der Tangente ab perpendicular seyn muß.

S. 179. Aufgabe. In jedes Dreyeck einen Zirkel so hinein zu beschreiben, daß die Seiten des Dreyecks Tangenten dieses Zirkels werden.

Auflös.

Auflösung. Man theile Fig. 97 ein Paar Winkel in zween gleiche Theile, lasse die Theilungslinien einander durchkreuzen und fälle aus diesem Durchschnittspunkte Perpendikel auf jede der Seiten herab, so werden diese Perpendikel gleich, folglich Radiusse ein und des nämlichen Zirkels seyn, und die Seiten werden eben darum S. 93 Tangenten vorstellen.

S a t z.

$$cf = ch = cg$$

B e w e i s.

I	x	=	v	als rechte Wink.
	y	=	z	wegen der Theilung
also	o	=	m	
	cd	=	cd	
folglich	$\triangle fcd$	$\parallel$	$\triangle chd$	
und	cf	$\parallel$	ch	
II	ψ	=	ω	
	s	=	r	
also	ϕ	=	λ	
und weil	ac	$\parallel$	ac	so ist wieder
	$\triangle afc$	$\parallel$	$\triangle agc$	und
	cf	$\parallel$	cg	
aber	cf	=	ch	
folgl.	cf	=	ch = cg	

S. 180. **Lehrsatz.** Ein Quadrat, in welches ein Zirkel beschrieben ist, ist noch einmal so groß als jenes, das sich in den nämlichen Zirkel selbst hinein schreiben läßt.

Erläuterung. Hier werden zwei Auflösungen vorausgesetzt, die also zuerst gezeigt werden müssen.

Das

Das erste zu bewerkstelligen ist nicht schwer: es darsen z. B. Fig. 98 nur die Diagonalen in dem Quadrate gezogen werden, so weiß man, daß sie sich im Mittelpunkte der Figur halbieren. Hier wird also der Handzirkel eingesetzt, und bis zu der Mitte einer Seite eröffnet, so wird dieß der Radius des verlangten Zirkels seyn. Eben so leicht ist die zweyte Konstruktion. Man errichte nämlich auf einem gezogenen Diameter zu beyden Seiten überall ein gleichschenkeliges Dreyeck, dessen Höhe der Radius ist: so hat man mehrmal das verlangte Quadrat. Leichtigkeits halber kann der Diameter des Zirkels mit einer Seite des größern Quadrats parallel laufen.

S a t z.

$$fg^2 = 2 ad^2$$

B e w e i s.

$$ab^2 = ad^2 + db^2$$

aber $ab = fg$ als Parallelen zwischen Parall.

Folglich $ab^2 = fg^2$

so ist auch $ad = db$

und $ad^2 = db^2$

Subst. $fg^2 = ad^2 + ad^2$

abgek. $fg^2 = 2 ad^2$

S. 181. Zusatz. Wenn man die Peripherie in etliche gleiche Theile abtheilt, welches durch Hilfe eines sogenannten Transportärs leicht geschehen kann, und zu diesen Bögen die Sehnen zieht, so erhält man reguläre Polygone: denn gleiche Bogen haben gleiche Sehnen; also sind fürs erste die Seiten alle gleich. Fürs zweyte bilden die Polygonwinkel lauter Peripheriewinkel, wo jeder zum Maaße die halbe Peripherie weniger einen solchen aliquoten Bogen erhält.

§

Satz.

S a t z. Fig. 99

$x = \frac{P}{2} - ad$; wo P die Peripherie und ad den Bogen bedeutet.

B e w e i s.

$$abc = \frac{P}{2} - ad - dc.$$

Aber $ad = dc$. §. 158.

Substit. $abc = \frac{P}{2} - ad - ad = \frac{P}{2} - 2ad.$

$$: 2 \quad \frac{abc}{2} = \frac{P}{2} - ad.$$

Weil auch $\frac{abc}{2} = x$ §. 83.

$$\text{So ist} \quad x = \frac{P}{2} - ad.$$

§. 182. Erkl. Wenn man aus dem Mittelpunkte des Kreises, oder vielmehr des Polygons auf die Endpunkte einer Seite oder Sehne Radiusse zieht, so heißt ein solcher zwischen zween Radiussen eingeschlossener Winkel ein Zentriwinkel, zum Unterschiede der Polygonwinkel, die immer zwei und zwei Seiten des Polygons mit einander bilden.

§. 183. Zusatz. Es hat also jedes Polygon so viele Zentriwinkel als Seiten.

§. 184. Zusatz. Weil die Seiten lauter gleiche Sehnen sind, und gleiche Sehnen gleiche Bögen haben, so müssen nothwendig alle Zentriwinkel einander gleich seyn; indem ihr Maas ebenfalls gleich ist.

§. 185. Zusatz. Da ferner alle Winkel um einen Punkt 360° halten, so findet man den Inhalt eines solchen Zentriwinkels, wenn 360 durch die Anzahl der Seiten dividirt werden: also ist allgemein

$$c = \frac{360}{n}$$

§. 186.

§. 186. **Lehrsatz.** Jeder Polygonwinkel ist gleich zween rechten Winkeln weniger dem Zen-
trwinkel.

S a t z. Fig. 99

$$x = 180 - \frac{360}{n}$$

B e w e i s.

Es ist oben erwiesen worden, daß

$$x = P - dc$$

Aber $dc = \frac{360}{n}$

und $P = 180$

Subst. $x = 180 - \frac{360}{n}$

§. 187. **Anmerk.** Es kann dieß auch aus andern Gründen dargethan werden. Denn oberhalb ist gezeigt worden §. 77. daß die Winkel eines jeden Polygons, es mag regulär oder irregulär seyn, $180(n-2)$ Gerade betragen; folglich, wenn durch die Anzahl aller Seiten oder Winkel dividiert wird, so erhält man einen Polygonwinkel, also allgemein

$$p = \frac{180(n-2)}{n} \text{ wo } p \text{ jeden Polygonwinkel vorstellet.}$$

$$p = \frac{180n - 360}{n}$$

$$p = 180 - \frac{360}{n}$$

§. 188. **Lehrsatz.** Die Seite eines regulären Sechseckes ist dem Radius gleich.

S a t z. Fig. 100

$$ab = r$$

§ 2

Beweis.

B e w e i s.

$$x = \frac{360}{6} = 60 \text{ als Zentriv.}$$

$$\text{also } o + m = 180 - 60 = 120 \text{ §. 70.}$$

$$o = m \text{ §. 48.}$$

$$\text{Subst. } m + m = 120$$

$$\text{abgek. } 2 m = 120$$

$$: 2 \quad m = 60$$

und so auch $o = 60$. Das Dreyeck $a d b$ ist demnach gleichseitig, und daher

$$a d = a b$$

$$\text{Aber } a d = r$$

$$\text{Folglich } a b = r$$

§. 189. Zusatz. Es läßt sich also der Radius sechsmal an der Peripherie herumtragen.

§. 190. Krl. Wenn aus dem Zentrivinkel auf die Seite ein Perpendikel herabgefällt wird, so heißt dieß die Höhe des Polygons.

§. 191. Zusatz. Wenn demnach a die Höhe des Polygons, l eine Seite, und n die Anzahl aller Seiten bezeichnet, so ist der Inhalt oder die Quadratur jedes regulären Polygons oder $q = \frac{n a l}{2}$; denn jeder Zentrivinkel bildet mit seiner Schlußseite ein Dreyeck, dessen Inhalt $\frac{a l}{2}$ ist, da nun so viele solcher Dreyecke im ganzen Polygone sind, als Seiten dasselbe hat, so ist richtig $q = \frac{n a l}{2}$.

§. 192. Lehrsatz. Der Quadratinhalt eines Kreises ist vollkommen gleich dem halben Produkte aus der Peripherie in den Radius.

Satz.

Satz. Fig. 101

$$q = \frac{p r}{2} \quad \text{Wo } p \text{ die Peripherie und } r \text{ den Radius vorstellt.}$$

Beweis.

Jeder Kreis läßt sich als ein reguläres Polygon von unendlich kleinen und vielen Seiten vorstellen. Es müssen also auch die Zentrwinkel unendlich klein seyn. Wenn nun aus selben ein Perpendikel auf die Seite, die ein unendlich kleiner Theil von der Peripherie ist, nämlich $\frac{p}{\infty}$ herabgefällt wird, welche Seite ohne Irrthum für eine gerade Linie angenommen werden kann, so ist der Perpendikel nichts anders als der Radius selbst; folglich ist der Inhalt eines solchen Kleindreiecks $= \frac{p}{\infty} \times \frac{r}{2} = \frac{p r}{2 \infty}$. Da es nun solcher Dreiecke unendlich viel r giebt, so ist

$$q = \frac{\infty \times p r}{2 \infty}$$

Der Bruch durch ∞ verfl.

$$q = \frac{p r}{2}$$

S. 193. **Lehrsatz.** Wenn statt der Polygonhöhe der Radius des Kreises gegeben wird, in welchen das Polygon hineinbeschrieben ist, so läßt sich der Inhalt desselben mehrmal bestimmen. Es ist, wenn alles übrige, wie vorher der

Satz. Fig. 102

$$q = \frac{n l}{2} \sqrt{\frac{r^2 - l^2}{4}}$$

Beweis.

B e w e i s.

Man ziehe die Höhe des Polygons, um den Werth dafür zu finden.

Weil nun $ah = hb = \frac{l}{2}$
 und $ch^2 = ac^2 - ah^2$, so ist
 nach der Substitution $a^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$
 $a = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

beiderseits mit der halben Grundlinie mult. $\frac{al}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Das ist in der Figur $\Delta acb = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$
 Mit der Anzahl aller

Dreiecke mult. $n \Delta acb = \frac{nl}{2} \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Das ist $q = \frac{nl}{2} \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

S. 194. Anmerk. In der ebenen Trigonometrie, wie wir erfahren werden, kann von diesen drei gegebenen Stücken immer eins wegbleiben, und der Inhalt läßt sich dem umgeachtet genauer noch als hier berechnen.

S. 195. Anmerk. Man kann auch jedes reguläre Polygon durch die Figurenwandlung in ein Dreieck verzeichnen, welches ihm völlig am Inhalte gleich kommt. Die Verwirklichung hievon ist diese: Man ziehe Fig. 102 eine unbestimmte gerade Linie von ziemlicher Länge; setze am äußersten Endpunkt, oder auch in der Mitte die Polygonhöhe von Fig. 101, rechtwinklicht darauf; schneide auf dieser unbestimmten Linie, vom Perpendikel aus, alle Polygonseiten nach und nach ab, und ziehe allemal wieder die Hypothenuse, so ist jedes Dreieck einem Zentrwinkel-dreieck dem Inhalte nach gleich; indem sie einerley Grundlinie und Höhe haben, und weil alle am Ende nur ein einziges Dreieck formen, so ist nothwendig dieses Dreieck der Inhalt des Polygons selbst. Es erhellet dann mehrmal daraus, daß, weil die Grundlinie dieses Dreieckes $= nl$ und die Höhe $= a$ ist, der Quadratinhalt d. i. $q = \frac{anl}{2}$ seyn müsse.

Obgleich diese Verzeichnung bey einem Birkel, der ein Polygon von unendlich kleinen und vielen Seiten ist, gar zu mühsam läßt, und weder unsere Sinne, noch unsere Werkzeuge

zeuge dazu fein genug find, so findet doch der Verstand die Sache sehr wohl möglich, und man kann daher mit aller Richtigkeit sagen: Jeder Zirkel sey einem Dreyecke vollkommen gleich, dessen Grundlinie die Peripherie und die Höhe der Radius ist.

S. 196. **Lehrsatz.** Je kleiner eine Sehne im nämlichen Zirkel ist, desto näher kommt sie auch an Länge ihrem Bogen.

B e w e i s .

Man ziehe eine Sehne im Zirkel, wo man will, z. B. Fig. 103 ac , so ist diese der kürzeste Weg zwischen ihren Endpunkten a und c , folglich muß der Bogen, als eine krume Linie, länger seyn als die Sehne. Natürlich muß nun auch der halbe Bogen ab länger als die halbe Sehne ah seyn, wenn beide zuvor durch einen Perpendikel, das ist durch den Radius getheilt worden, wie hier durch fb . Wenn nun für diesen halben Bogen eine Sehne gezogen werden kann, die größer als die vorige halbe Sehne ist, so muß sie nothwendig ihren Bogen an Länge näher kommen, als die erste. Aber ab ist die Hypothenuse und ah eine Kathete im nämlichen Dreyecke; folglich ist sie größer, und eben darum dem Bogen näher an Länge. Wird nun auch diese wieder halbiert und mehrmals eine neue gezogen, so verhält sichs auf gleiche Weise.

S. 197. **Zusatz.** Durch fortgesetzte Halbierungen also, kann man endlich eine Sehne erhalten, die ihrem Bogen an Länge so nahe kommt, als man nur verlangt.

S. 198. **Zusatz.** Daraus nun wird begreiflich, wie in dem nämlichen Zirkel die Anzahl
der

der Seiten des hineinbeschriebnen Polygons verdoppelt werden: das heißt, wie z. B. aus einem Viereck ein Achteck entstehen könne. Es darf nur jede Seite samt dem Bogen auf die vorige Art in gleiche Theile getheilt werden, so geben die Sehnen der halbierten Bögen, weil sie alle gleich sind, die Seiten eines Vieleckes ab, das noch so viel Seiten zählt.

§. 199. **Lehrsatz.** Wenn die Seite eines Polygons = 1, der Radius des Kreises = r, und die Seite des neuen Polygons von noch so vielen Seiten = λ ist, so heißt der

S a t z.

$$\lambda = \sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}l^2}}$$

B e w e i s.

Es sey Fig. 103 $df = fb = 1$ $dm = x$
 $ab = 1$ $fm = 1-x$
 $am = mb = \frac{1}{2}$
 $db = \lambda$

Nun ist

$$\text{I} \quad md^2 = db^2 - mb^2 \quad \text{h. i.}$$

$$x^2 = \lambda^2 - \frac{1^2}{4}$$

$$\text{und } x = \sqrt{\lambda^2 - \frac{1^2}{4}}$$

$$\text{II} \quad fm^2 = fb^2 - mb^2$$

$$(1-x)^2 = 1 - \frac{1^2}{4}$$

$$1-x = \sqrt{1 - \frac{1^2}{4}}$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1^2}{4}} = x$$

III

$$\begin{aligned} \text{III} \quad \sqrt{\lambda^2 - 1^2} &= 1 - \sqrt{1 - 1^2} \\ \lambda^2 - 1^2 &= 1 - 2\sqrt{1 - 1^2} + 1 - 1^2 \\ \lambda^2 &= 2 - 2\sqrt{1 - 1^2} \\ \lambda &= \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - 1^2}} \end{aligned}$$

§. 200. Zusatz. Will man dieß alles dahin anwenden, um zu erforschen, welches Verhältniß der Radius, oder der Diameter eines Zirkels zu seiner Peripherie habe, so darf nur das reguläre Sechseck zum Grunde gelegt werden, weil hier die Seite selbst ein Radius ist. Sucht man nun nach und nach aus selbem andere Polygone von 4, 8, 16 mal so viel Seiten u. s. f., so kömmt man zuletzt auf ein Polygon, das in kleinen Zirkeln beynähe ganz mit der Peripherie übereinfällt, und die man ohne erheblichem Irrthum für die Peripherie selbst annehmen darf. Wird die Rechnung noch weiter fortgeführt, so erhält man auch die Peripherien für größere Zirkel.

Es verwandelt sich demnach die allgemeine Formel $\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - 1^2}}$ für das Zwölfeck, weil $1 = r = 1$, in diese nun

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \\ \lambda &= \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}} \\ \lambda &= \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{3}}{2}} \\ \lambda &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Will man die Seite für das Vierundzwanzigereck so ist $1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, und $1^2 = 2 - \sqrt{3}$.
Daß

Das nun wieder in der allgemeinen Formel substituirt giebt

$$\lambda = \sqrt{2 - 2 \sqrt{\frac{1 - 2 + \sqrt{3}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2 \sqrt{\frac{4 - 2 + \sqrt{3}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Wenn man wieder für 1 in der allgemeinen Formel $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ setzt, so überkömmt man die Seite des Achtundvierzigerecks.

$$\text{Weil nun } 1^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\text{so ist } \lambda = \sqrt{2 - 2 \sqrt{\frac{1 - 2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2 \sqrt{\frac{4 - 2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

So geht die Rechnung nun ohne Ende fort. Mit jeder Verdopplung wächst die Formel um eine positive Wurzel aus 2, und das erste Minuszeichen bleibt immer an seinem Orte. Wird so eine Seite wirklich nach Anweisung der Formel berechnet, zum Bessp. für das Achtundvierzigereck, so erhält man 0,13089, Weil aber in der Peripherie 48 solche Seiten herum liegen, so ist selbe = 0,13089 × 48 = 6,28272. Folglich ist in kleinen Zirkeln das Verhältniß des Radius zur Peripherie wie 1 : 6,282 u. s. f., und weil dieß das halbe Verhältniß zum Diameter

Diameter, einer noch so großen Linie, ist, so muß nothwendig das Verhältniß des Diameter's zur Peripherie wie $1 : \frac{6282}{2} = 1 : 3141$ seyn.

S. 201. Anmerk. Man sieht von selbst, daß dieses Verhältniß immer näher und näher gefunden werden könne, je größer man die Verdopplung annimmt, und jemehr man bey Ausziehung der Wurzeln Decimalen herausbringt. Uns genügt hier bloß den Weg in der Elementargeometrie gezeigt zu haben, worauf Ludolph von Köln diese Verhältniß in 30 Decimalen gefunden. In der höhern Mathematik wollen wir auch andere Wege, die von diesem ganz verschieden sind, versuchen, und wir werden zur nämlichen Wahrheit gelangen.

S. 202. Willkührl. Satz. Wir wollen in der Folge das gefundene Verhältniß des Diameter's zur Peripherie $1 : 3,14$, oder bey größern Zirkeln $1 : 3,1415926$ u. s. f. durch $1 : \pi$ ausdrücken. Wo demnach π in einer Formel oder Beweis vorkommt, bedeutet es allemal die Zahl 3, 14 mit so viel Decimalen, als man will; außer es wird etwas anders dabey erinnert.

S. 203. Lehrsatz. Die Peripherie eines jeden Zirkels dessen Diameter mehr oder weniger als 1 beträgt, ist gleich dem doppelten Produkte, aus dem Radius in die Zahl 3, 14 : oder dem Produkt aus dem Diameter in die obige Zahl.

S a t z

$$p = 2 r \pi = d \pi$$

B e w e i s.

Es ist früher oben S. 152. erwiesen worden, daß in ähnlichen Figuren gleichnamige Linien im Verhältniße stehen: da nun alle Zirkel einander ähnlich sind,

sind, und Radius, Diameter und Peripherie in verschiedenen Zirkeln die nämlichen Namen führen, so ist in zweien Zirkeln, wovon einer die Einheit zum Diameter hat.

$$1 : \pi = 2r : p$$

$$\text{also} \quad p = 2r\pi$$

$$\text{und weil} \quad 2r = d$$

$$\text{auch} \quad p = d\pi$$

S. 204. Anmerk. Diese Art ist kürzer, aus einem gegebenen Radius oder Diameter seine Peripherie zu suchen, als die gewöhnlichen durch die Proportion oder Regel Detri. Denn man darf nichts weiter als die Zahl 3, 14 mit dem gegebenen Diameter multiplicieren. Z. B. wenn er 12 Schuhe ist, so entspricht ihm eine Peripherie von 3, 14 $\times$ 12 = 37,68 Schuhen. Die Rechnung ist also zu Ende, ohne erst eine von den Proportionen 100 : 314 = 12 : x, oder 113 : 355 = 12 : x oder 7 : 22 = 12 : x anschreiben gemüßt zu haben. Zudem ist das zweite Verhältniß 113 : 355, welches Adrian Metius gefunden, etwas unrichtig, und noch unrichtiger des Archimedes seines 7 : 22. Denn löset man sie in Decimalen auf, so weicht jenes in der 7ten, und dieses schon in der 3ten Decimale von dem Ludolphischen Verhältnisse, als dem wahren Probestein aller übrigen, ab.

S. 205. Lehrsatz. Die Fläche eines Zirkels ist gleich dem Produkte aus dem Quadrat des Radius in die Zahl 3, 14

Satz.

$$q = r^2 \pi$$

Beweis.

Es ist dargethan worden, daß im Zirkel

$$q = \frac{r p}{2}$$

$$\text{aber} \quad p = 2r\pi$$

$$\text{substit.} \quad q = \frac{r \times 2r\pi}{2}$$

$$\text{abgek.} \quad q = \frac{2r^2\pi}{2} = r^2\pi$$

§. 206. Zusatz. Will man eine Formel für den Quadratinhalt des Kreises haben, wo statt des Radius, der Diameter in die Rechnung gezogen wäre, so darf man nur bedenken, daß $r = \frac{d}{2}$ folgl. $r^2 = \frac{d^2}{4}$ sey. Dieß nun substituirt giebt $q = \frac{d^2 \pi}{4}$. Oder

soß gar statt dem Radius oder dem Diameter die Peripherie in der Formel erscheinen, so ist

$$\text{weil } p = 2 r \pi$$

$$\text{Dann } p = r$$

$$\text{und endlich } \frac{p^2}{4 \pi^2} = r^2,$$

$$\text{nach der Substitution } q = \frac{p^2 \pi}{4 \pi^2}$$

$$\text{abgef. } q = \frac{p^2}{4 \pi}$$

§. 207. Zusatz. Jeder sieht von selbst, wie auch umgekehrt aus dem Inhalte des Kreises der Diameter oder der Radius gefunden werden könne. Man nehme nur die Gleichung her $q = \frac{d^2 \pi}{4}$, und suche d besonders. Es ist erstens

$$\begin{aligned} 4 q &= d^2 \pi \\ \therefore \pi \quad 4 q &= d^2 \quad \text{und endlich} \\ \pi & \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad 2 \sqrt{\frac{q}{\pi}} = d$$

Eben so läßt sich auch aus dem Inhalte des Kreises seine Peripherie finden. Denn $q = \frac{p^2}{4 \pi}$

$$\begin{aligned} 4 q \pi &= p^2 \\ \text{folglich } 2 \sqrt{q \pi} &= p \end{aligned}$$

§. 208.

§. 208. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweier Zirkel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radiusse oder ihrer Diameter, oder auch ihrer Peripherien. Der Beweis wäre eben nicht nöthig; denn es ist schon oben erhärtet worden, daß sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender, oder gleichnamiger Linien, folglich gilt dieß auch von Zirkeln: allein, weil er sich kurz auch anders vortragen läßt, so wollen wir ihn hieher setzen.

S a t z.

$$\begin{aligned} q : Q &= r^2 : R^2 \\ \text{oder} &= d^2 : D^2 \\ \text{oder} &= p^2 : P^2 \end{aligned}$$

B e w e i s.

$$\text{I } \left. \begin{aligned} q &= r^2 \pi \\ Q &= R^2 \pi \end{aligned} \right\} \text{also } q : Q = r^2 \pi : R^2 \pi \quad \pi;$$

$$q : Q = r^2 : R^2$$

$$\text{II } \begin{aligned} q &= \frac{d^2 \pi}{4} \\ Q &= \frac{D^2 \pi}{4} \end{aligned}$$

$$q : Q = \frac{d^2 \pi}{4} : \frac{D^2 \pi}{4}$$

$$q : Q = d^2 \pi : D^2 \pi$$

$$q : Q = d^2 : D^2$$

4 X

$\pi;$

$$\text{III } q = \frac{p^2}{4 \pi} \quad \text{§. 206.}$$

$$Q = \frac{P^2}{4 \pi}$$

$$q : Q = \frac{p^2}{4 \pi} : \frac{P^2}{4 \pi}$$

$$q : Q = p^2 : P^2$$

4 π X

§. 209.

§. 209. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines Sektors ist das Produkt aus der Gradenzahl des Bogens in das Quadrat des Radius und der Zahl 3, 14, alles dividiert durch 360. Es heiße die Anzahl der Grad = a , so gilt der

S a t z.

$$q = \frac{a r^2 \pi}{360}$$

B e w e i s.

Es sey das Längenmaas des Bogens = x

$$\begin{aligned} a : 360 &= x : p \\ \text{aber} \quad p &= 2 r \pi \\ a : 360 &= x : 2 r \pi \\ 2 a r \pi &= 360 x \\ \frac{2 a r \pi}{360} &= x \end{aligned}$$

Nun läßt sich ein Sektor gerade so dem Verstande nach in ein Dreyeck verwandeln, wie der Zirkel selbst. Die Höhe des Dreyecks wird wieder der Radius seyn, und die Grundlinie der Bogen im Längenmaasse, also ist überhaupt

$$\begin{aligned} q &= \frac{x \times r}{2} \text{ für } x \text{ substit.} \\ q &= \frac{2 a r \pi}{360} \times \frac{r}{2} \\ q &= \frac{2 a r^2 \pi}{2 \times 360} = \frac{a r^2 \pi}{360} \end{aligned}$$

§. 210. **Anmerk.** Segmente können zwar ebenfalls geometrisch berechnet werden; denn man darf nur den ganzen Sektor finden, der dem Bogen entspricht, und dann das Dreyeck, welches von den Radiussen und der Sehne bestimmt wird, abziehen. Allein in der Trigonometrie läßt sich das weit füglicher

licher leisten. Dort ist es genug, wenn ich die Länge der Sehne und die Anzahl der Grade des Bogens weiß: hier muß mir auch nebenher noch der Radius bekannt seyn. Ueberhaupt fodert der Geometer alle drey Stücke als gegeben, da die Trigonometrie was immer für zwey nur von selbst verlangt; denn das dritte bestimmt sich selbst; es kann also gewiß nicht so richtig gegeben als berechnet werden.

S. 211. **Erkl.** Wenn die Flächen verschiedner Zirkel in einander liegen, wenn die Lage auch eben nicht konzentrisch ist, so wird ihre Flächendifferenz ein Ring genannt.

S. 212. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines solchen Ringes ist das Produkt aus der Differenz der quadrierten Radiusse beyder Zirkel in die Zahl 3, 14.

S a t z. Fig. 104

$$\text{annul.} = (R^2 - r^2) \pi$$

B e w e i s.

$$Q = R^2 \pi$$

$$q = r^2 \pi$$

$$Q - q = R^2 \pi - r^2 \pi$$

$$\text{aber } Q - q = \text{annul.}$$

$$\text{also annul.} = R^2 \pi - r^2 \pi$$

$$\text{anders ausgedrückt. annul.} = (R^2 - r^2) \pi$$

S. 213. **Lehrsatz.** Wenn man sowohl auf die Diagonal eines Quadrats, als auf eine ihrer Seiten, Zirkel beschreibt, so läßt sich ein solches mondenförmiges Stück, das bey der Durchschneidung gebildet worden, vollkommen quadrieren: Es ist nämlich dem vierten Theil des Quadrats gleich.

Satz.

Satz.

$$\mathcal{C} = \frac{1}{4} a d^2$$

Beweis.

$$a g^2 = a d^2 + d g^2$$

aber $a d = d g$

folglich $a d^2 = d g^2$

substit. $a g^2 = a d^2 + a d^2$

abgek. $a g^2 = 2 a d^2$

in der Figur Diam. = 2 diam.

über $D^2 : \text{Circ} = d^2 : \text{circ} \S. 208. \times 2$

$$D^2 : C = 2 d^2 : 2 \text{ circ}$$

substit. $2 d^2 : C = 2 d^2 : 2 \text{ circ}$

$$2 d^2 \times 2 \text{ circ} = 2 d^2 \times \text{Circ}$$

$$: 2 d^2 \quad 2 \text{ circ} = \text{Circ}$$

$$: 4 \quad \frac{\text{Circ}}{4} = \frac{2 \text{ circ}}{4} = \frac{\text{circ}}{2}$$

In der Figur $a c d f = a b d m$

aber $a c d m = a c d m$

$$a c d f - a c d m = a b d m - a c d m$$

In der Figur $a d f = \mathcal{C}$

aber $a d f = \frac{1}{4} a d^2$

also $\mathcal{C} = \frac{1}{4} a d^2$

§. 214. Anmerk. Man nennt dieses mondenförmige Stück von dem Erfinder seiner Quadratur, der ein verunglückter Kaufmann, aber ein um so glücklicherer Mathematiker war, Lunulam Hippocratis. So sehr dieser Satz von einem spekulativen Kopfe zeuget, so wenig ist er doch zur Quadratur des Kreises verhilflich; weil man nie berechnen kann, der wievielte Theil so ein mondenförmiges Stück vom ganzen Kreis sey. Indes mag er wohl zu andern Erfindungen Anlaß geben; weswegen ihn auch viele Mathematiker mit in ihre Schriften aufnehmen, um ihn unter der spekulativen Welt fortzupflanzen.

Stereometrie.

§. 215. *Erkl.* Jener Theil der Elementargeometrie, welcher sich mit mathematischen Körpern beschäftigt, wird von dem Worte *Στερεος*, ein Solidum oder Körper, Stereometrie genennet.

§. 216. *Erkl.* Körper können regulär oder irregulär seyn. Regulär sind jene, die in lauter reguläre Flächen, als in Parallelelograme, gleichseitige Dreyecke, und reguläre Polygone eingeschlossen sind, oder höchstens noch, wenn zwei parallellaufende Flächen gleiche Irregulärität haben. Irregulär, wenn sie von irregulären Flächen begrenzt sind. Jene Fläche aber, worauf man sie sich stehend vorstellt, heißt die Grundfläche eines Körpers. Die regulären Körper können ferner von ihrer Grundfläche an immer gleiche Dicke beybehalten, oder sie können sich zuspitzen, oder sich in eine Schneide enden, oder endlich in mehrere Spitzen und Schneiden auslaufen. Zur ersten Gattung gehören Prismen und Walzen; zur zweyten Pyramiden und Kegel; zur dritten Keilartige Körper, die aber, wenn man sie gehörig wendet, allemal wieder Prismen vorstellen, zur vierten Tetraedren, Oktaedren, Ikosaedren und Dodekaedren, ferner abgestuzte Kegel und Pyramiden, und in einem gewissen Sinne auch die Kugel.

Ein von zwei gleichen Grundflächen, und ebenso viel Parallelelogrammen, als jene Seiten haben, eingeschlossener Körper heißt ein Prisma Fig. 106: daher dreyeckichte Prismen, wenn die Grundfläche ein Dreyeck, oder Parallelepipedon, wenn die Grundfläche ein Parallelelogramm ist Fig. 107, oder

Kubus.

Kubusse, wenn alle einschließenden Flächen Quadrate sind Fig. 108; die übrigen heißen fünf- sechs- sieben-eckichte Prismen u. s. f. Sind die Grundflächen Unendlichecke, so hat man Walzen, (Cylinder) Fig. 109. Ein von einer Grundfläche und eben so vielen Dreyecken, als jene Seiten hat, eingeschlossener Körper, heißt eine Pyramide Fig. 110. Hat die Grundfläche unendlich viele Seiten, das heißt, ist sie ein Strikel, so ist der Körper ein Kegels (Conus) Fig. 111. Die übrigen Körper können alle betrachtet werden, als wenn sie aus Pyramiden zusammengesetzt wären; gerade so, wie jedes Polygon aus Dreyecken zusammengesetzt ist.

S. 217. **Erkl.** Ein körperlicher Winkel ist die Zusammenneigung mehrerer geradlinichten Flächen in einem Punkte. Und weil zusammenneigende Flächen, da wo sie sich fügen, durch Linien begränzt sind, welche bey dem nämlichen Punkte in ebne Winkel sich enden, so ist jeder körperliche Winkel eine Zusammensetzung von ebenen Winkeln.

S. 218. **Zusatz.** Ein körperlicher Winkel muß wenigst 3 Flächen haben; denn zwei Flächen, die sich gegen einander neigen, verlieren sich in keinen Punkt, sondern in eine Schneide, sobald aber eine dritte hinzukommt, enden sich die Flächen in einen gemeinschaftlichen Punkt, wie z. B. bey den Ecken eines Zimmers.

S. 219. **Erkl.** Reguläre Körperpolygone sind jene, die lauter gleiche einschließende Flächen, und gleiche Körperwinkel haben. Im widrigen Falle sind sie irregulär. Neben dem Kubus, den wir schon erklärt haben, giebt es

1) Das Tetraedrum Fig. 112, welches von 4 gleichseitigen gleichen Dreyecken eingeschlossen wird, folglich auch für eine gleichseitige Pyramide gelten kann. Weil nun in gleichseitigen Dreyecken jeder Winkel 60° hält, und drey solche Winkel zusammenkommen, so beträgt ein körperlicher Winkel des Tetraedrums $3 \times 60 = 180^\circ$.

2) Das Oктаedrum Fig. 113 Nro I, das von 8 gleichseitigen gleichen Dreyecken eingeschlossen ist. Der Winkel hält überall $4 \times 60 = 240^\circ$.

3) Das Ikosaedrum Fig. 113 Nro II, ist in 20 solche gleiche Dreyecke eingeschränkt. Der Winkel faßt folglich $5 \times 60 = 300^\circ$.

4) Das Dodekaedrum Fig. 114, welches 12 reguläre Fünfecke begränzen. Weil nun ein Fünfeckswinkel $= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108^\circ$ hält, und drey solche ebne Winkel den Körperwinkel geben, so ist dieser $108 \times 3 = 324^\circ$.

S. 220. Zusatz. Mehrere reguläre Körper giebt es nicht. Denn man setze Winkel von regulären Flächenfiguren zusammen, welche man will, so werden sie allemal 360° oder darüber geben. Weil aber bekannt ist, daß 360° um einen Punkt herum in die Ebne fallen, so können diese keinen Körperwinkel geben; und mehr als 360° würden einen unmöglichen Körperwinkel geben.

S. 221. Erkl. Die Kugel, welche entsteht, wenn sich ein Halbzirkel um den Diameter ganz herum bewegt, ist ein Polyedrum von unendlich vielen und kleinen einschließenden Vielecken, welche die runde Oberfläche der Kugel bestimmen.

S. 222.

S. 222. Zusatz. Weil sich alle reguläre Körper, wie wir oben sagten, in Pyramiden, die eine solche einschließende Fläche zur Basis, und den halben Diameter zur Höhe haben, zerfallen lassen, so ist auch die Kugel nichts anders als eine Zusammensetzung von unendlich schmalen Pyramiden, die zur Höhe den Radius haben, und deren Spizen alle sich im Mittelpunkt befinden, folglich ihre sämtlichen Grundflächen die Oberfläche der Kugel geben. Wenn wir nun in Staube gesetzt sind, eine Pyramide zu berechnen, so lassen sich die Leetraedren, Oktoedern u. s. f., ja selbst die Kugel, leicht nach kubischem Maasse bestimmen.

S. 223. Lehrsatz. Parallelepipeden von einerley Höhe und Grundfläche (Basis) sind einander gleich.

B e w e i s.

Man lege die Körper auf jene Parallelogrammseiten, die einerley Höhe und Grundfläche haben, so werden diese gleich seyn. Stelle man sich ferner vor, jeder dieser Körper bestehe aus lauter solchen aufeinander liegenden Flächen oder Lamellen, wie z. B. ein Buch aus aufeinander liegenden Blättern, so werden alle Flächen des Körpers A Fig. 113 den Flächen des Körpers B gleich seyn. Weil nun ferner diese Körper gleiche Höhe haben, so müssen auch bey jedem gleich viel solcher Lamellen seyn; woraus nothwendig folgt, daß selbst die Körper gleich sind.

S. 224. Zusatz. Jedes Parallelepipedium läßt sich durch einen Diagonalschnitt der Grundfläche in zwey gleiche Prismen theilen; denn man kann sich vorstellen, daß das Parallelepipedium aus lauter auf-

ein,

einanderliegenden Parallelogramen bestünde: weil nun diese alle in gleiche Theile getheilt werden, so wird es eben darum auch der Körper, dessen Bestandtheile jene waren. Eben so lassen sich auch vieleckichte Prismen in so viel dreyeckichte, durch solche Diagonalschnitte theilen, die einander nicht durchkreuzen, als die Grundfläche Seiten hat weniger zwey.

S. 225. **Lehrsatz.** Jedes dreyeckichte Prisma läßt sich durch zween schiefe Schnitte von einem Ecke zu zwey andern in drey gleiche Pyramiden zertheilen. Fig. 116. Der Beweis kann am deutlichsten bey der wirklichen Zerschneidung selbst geführt werden. Es werden nämlich bey den drey Pyramiden zwey dabey seyn, die völlig einander gleich und ähnlich sind. Man nehme nun zu der dritten Pyramide eine solche von den zweyen zu Hilfe, die ein und die nämliche diagonalartig zerschnittene Seite miteinander haben, und die sich, wenn man sie beyde auf diese Seitenflächen legt, in eine gemeinschaftliche Spitze enden; so werden auch diese zwey Pyramiden wegen gleicher Höhe und Grundfläche gleichen Inhalt in sich fassen. Sind nun zwey Dinge einem dritten gleich, so sind es alle drey unter sich selbst; also müssen nothwendig die drey Pyramiden einander gleich seyn. Einen schärfern, algebraischen Beweis wollen wir von diesem wichtigen Lehrsatz bey der Differentialrechnung vortragen.

S. 226. **Zusatz.** Eine dreyeckichte Pyramide ist demnach der dritte Theil eines Prismas, das mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat. Ueberhaupt genommen, ist jede Pyramide der dritte Theil jedes Prismas, es mag so viel Ecke in der Grundfläche haben als es wolle, wenn nur der Inhalt dieser
Grund

Grundfläche sammt der Höhe überall die nämliche ist; weil sich gleiche Flächen doch endlich in gleiche Dreyecke verwandeln lassen.

S. 227. Zusatz. Weil Kegel als Pyramiden, und Walzen als Prismen von unendlicheckigten Grundflächen angesehen werden können, so ist auch der Kegel der dritte Theil der Walze von einerley Grundfläche und Höhe.

S. 228. Krl. Ein Körper wird ausgemessen, wenn ein anderer zur Einheit, oder zum Maasse angenommener Körper so oft in dessen Raume herum gelegt wird, als es angeht.

S. 229. Zusatz. Wie bey Flächen das schicklichste Maas ein Quadrat war, so ist es hier der Kubus; das ist, ein Körper, der von sechs Quadratsflächen umschlossen ist.

S. 230. Lehrsatz. Der Inhalt eines jeden Prisma ist das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe.

B e w e i s .

Auf der Grundfläche können gerade so viel Kubikmaas, d. h. Schuhe stehen, als Quadratfüsse dieselbe in sich faßt: folglich ist die Anzahl der Kubikfüsse einerley mit den Quadratschuhen der Grundfläche. Ferner, so viel Längenschuhe das Prisma hoch ist, so oft ist auch diese Schichte der Kubikschuhe in dem ganzen Prisma enthalten, das heißt aber nichts anders, als die Grundfläche mit der Höhe multiplizieren. Was hier zu erweisen war.

§ 231. **Zusatz.** Weil jedes schiefstehende Prisma einem senkrechten Prisma gleicht, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, so wird auch desselben Kubatur gefunden, wenn die Grundfläche mit der Höhe, das ist mit dem Perpendikel multipliciert wird.

§. 232. **Zusatz.** Wir dürfen nimmer erinnern, daß Zylinder auch mit unter die Rubricke von Prismen gehören, folglich ebenfalls so berechnet werden müssen.

§. 233. **Zusatz.** Der Inhalt der Pyramiden, folglich auch der Kegel, wird gleichfalls so gefunden, wenn man Grundfläche mit der Höhe multipliciert, aber am Ende durch 3 das Produkt dividirt; weil sie der dritte Theil von jenen Körpern sind, die mit ihnen Höhe und Grundfläche gemein haben. S. 227.

§. 234. **Anmerk.** Eine hieher gehörige Aufgabe fürs Praktische. Der kleinste von den zu Rom befindlichen 5 ägyptischen Obeliskten, welcher auf dem Plage vor der Minerva steht, hält (nach Ostertags Abhandlung über Roms guomonischen Prachtkegel) $16\frac{1}{2}$ Fuß Höhe, und unten 26 Zoll $= 2\frac{1}{6}$ Fuß (vermuthlich Parisermaas) ins Gevierte. Wie viele Kubitschuh beträgt seine Solidität?

Auflösung. Weil die Basis dieser Pyramide ins Gevierte geht, und eine Seite derselben $2\frac{1}{6}$ Schuh mißt, so hält sie selbst $(2\frac{1}{6})^2 = (\frac{13}{6})^2 = \frac{169}{36}$ Quadratschuh; dieß nun mit dem dritten Theil der Höhe multipliciert giebt $\frac{169}{36} \times \frac{16\frac{1}{2}}{3}$
 $= \frac{169}{36} \times \frac{33}{6} = \frac{169}{36} \times \frac{11}{2} = \frac{1859}{72} = 25\frac{5}{2}$
 oder 25', 819'' Kubikinhalt.

§. 235. **Zusatz.** Bey keilartigen Körpern darf das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe bloß halbiert werden; weil ein Parallelepipedum durch einen Diagonalschnitt sich in zween solche Körper zerfallen

fällen läßt, welche nachher bey der nämlichen beybehaltenen Grundfläche und Höhe, in Rücksicht der Neigung zur gemeldten Grundfläche, verschieden modificiert werden können.

§. 236. **Lehrsatz.** Der körperliche Inhalt eines parallel mit der Grundfläche abgestuften Kegels ist gleich dem Produkt aus der Differenz der kubierten Radiusse in die Höhe und in die Zahl 3, 14, dieß alles durch die dreysfache Differenz der Radiusse dividiert; das ist wenn der körperliche Inhalt (Soliditas) = S, die Höhe = a, die beyden Radiusse = R und r sind, so heist der

S a t z

$$S = \frac{(R^3 - r^3) a \pi}{3 (R - r)}$$

B e w e i s.

Man ergänze den Kegel wirklich, ziehe mit der Achse desselben eine Parallellinie vom Endpunkte des kleinen Diameters bis auf den großen, so ist, wenn Fig. 117 nachher die Verlängerung der Höhe b f = x heist, und, weil h k = c f, für g h = R - r gesetzt wird.

$$g h : g k = c h : b k \quad \text{§. 143.}$$

$$\text{substit. } (R - r) : R = a : (a + x)$$

$$a R + R x - a r - r x = a R$$

$$R x - r x = a r$$

$$x = \frac{a r}{R - r}$$

die Höhe des

mangelnden Kegelstücks

Folgt.

$$\begin{aligned} \text{Folglich} \quad a + \frac{ar}{R-r} &= \frac{Ra-ra+ra}{R-r} \\ &= \frac{Ra}{R-r} \text{ die völlige Höhe des ergänzten} \\ &\quad \text{Regels.} \end{aligned}$$

Wenn nun diese beyden Höhen mit ihren Grundflächen, welche $r^2 \pi$ und $R^2 \pi$ sind, multipliciert, und durch drey dividirt werden, so erhält man beyde Körper; welche, von einander abgezogen, den abgestutzten Regel geben. Es heiße der ergänzte Regel $= C$ und das mangelnde Regelstück $= c$ so wird die Rechnung diese seyn.

$$\begin{aligned} C &= \frac{R^2 \pi \times Ra}{R-r} = \frac{R^3 a \pi}{3(R-r)} \\ c &= \frac{r^2 \pi \times ar}{R-r} = \frac{r^3 a \pi}{3(R-r)} \\ C-c &= \frac{R^3 a \pi - r^3 a \pi}{3(R-r)} = \frac{(R^3 - r^3) a \pi}{3(R-r)} \\ \text{oder} \quad S &= \frac{(R^3 - r^3) a \pi}{3(R-r)} \end{aligned}$$

S. 237. Zusatz. Auf eine ähnliche Art läßt sich auch eine Formel für abgestuzte Pyramiden finden.

S. 238. Lehrsatz. Die Kugel ist zween Drittheilen einer Walze gleich, die mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat. Man versteht aber unter der Grundfläche die größte Zirkularfläche, die nämlich durch den Mittelpunkt der Kugel geht; und unter der Höhe, den Diameter derselben. Wenn wir
die

die Kugel (Sphaera) durch S, und den Zylinder oder Wälze durch C ausdrücken, so heißt der

S a t z

$$S = \frac{2}{3} C$$

B e w e i s.

Man beschreibe ein Quadrat Fig. 118, ziehe eine Diagonal, und aus einem Endpunkte derselben mit der Seite des Quadrats einen Quadranten, so wird eines der rechtwinklichten Dreyecke, der Quadrant selbst, und das Quadrat eine gemeinschaftliche Linie haben. Stellt man sich nun ferner vor, es bewegen sich alle drey Figuren zugleich um diese Linie, als um ihre gemeinschaftliche Achse; so wird das rechtwinklichte Dreyeck einen Kegel, der Quadrant eine halbe Kugel, und das Quadrat einen Zylinder beschreiben, der die Höhe von der halben Kugel hat, folglich auch für einen halben Zylinder zu halten ist: wir wollen ihn $c = \frac{1}{2} C$, so wie den Kegel k nennen. Man ziehe endlich durch die Figur eine Parallellinie mit der Basis des Kegels wo man will, und einen Radius an jenen Punkt hin, wo diese Parallellinie die Peripherie durchschnitten hat; so giebt es folgende Rechnung ab.

$df^2 = gf^2 - dg^2$. S. 118. Für gf^2 und dg^2 andere Werthe gesucht.

I	$gf = gh$	als Radius
	$dc = gh$	wegen Zwischenparalleln
also	$gf = dc$	und
	$gf^2 = dc^2$	

$$\begin{aligned}
 \text{II} \quad dg : dl &= ga : ab \\
 \text{aber} \quad ga &= ab \\
 \text{subst.} \quad dg : dl &= ab : ab \\
 dg \times ab &= dl \times ab \\
 : ab \quad dg &= dl \\
 \text{und} \quad dg^2 &= dl^2
 \end{aligned}$$

In der ersten Hauptgleichung substituiert, so wird
 $df^2 = dc^2 - dl^2$

Es sind aber df , dc und dl nichts anders als Radiusse der Durchschnittslamellen von der Kugel, von dem Zylinder und dem Kegel. Es verhalten sich aber die Quadrate der Radiusse, wie die Zirkel; folglich können statt obigen Ausdrücken die Durchschnittslamellen selbst substituiert werden, also

Kugeldurchschnittslamell = Walzendurchschnittslamell — Regeldurchschnittslamell.

Weil aber diese Durchschnitte überall in der Figur gemacht werden können, und die Gleichung allemal wahr bleibt, so lassen sich endlich alle mögliche Gleichungen abbieren, und geben selbst die Summe:
 $\frac{\text{Kual}}{2} = \frac{\text{Walze}}{2} - \frac{\text{Regl.}}{2}$ oder nach unser angenommenen Benennung

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{2} &= c - k \\
 \text{aber} \quad k &= \frac{1}{3} c \\
 \text{Subst.} \quad \frac{S}{2} &= c - \frac{1}{3} c \\
 \text{abgef.} \quad \frac{S}{2} &= \frac{2}{3} c \\
 \text{Nun ist aber} \quad \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} C \quad \text{nach der Vorausf.} \\
 \text{substit.} \quad \frac{S}{2} &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} C \\
 \frac{S}{2} &= \frac{2}{3} C = \frac{1}{3} C \\
 \times 2 \quad S &= \frac{2}{3} C
 \end{aligned}$$

§ 239. Zusatz. Da der Kegel der dritte Theil einer Walze von gleicher Höhe und Grundfläche ist, und die Kugel zween Drittheile von dieser Walze giebt, so verhalten sich Kegeln, Kugeln und Walzen von gleicher Höhe und Grundfläche, wie 1, 2, 3.

§. 240. Lehrsatz. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gleich dem sechsten Theil des Produkts aus dem Kubus des Durchmessers in die Zahl 3, 14.

S a t z.

$$S = \frac{d^3 \pi}{6}$$

B e w e i s.

Man setze einen Zylinder und eine Kugel von gleicher Grundfläche und Höhe, so ist, weil die Grundfläche $\frac{d^2 \pi}{4}$ und die Höhe = d gesetzt wird.

$$C = \frac{d^2 \pi}{4} \times d$$

$$\text{oder } C = \frac{d^3 \pi}{4}$$

$$\times \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} C = \frac{2 d^3 \pi}{12} = \frac{d^3 \pi}{6}$$

$$\text{aber } \frac{2}{3} C = S$$

$$\text{Also } S = \frac{d^3 \pi}{6}$$

§. 241. Zusatz. Wollte man lieber den Radius als den Diameter in dieser Formel wünschen, so darf nur ein Aequivalent in Radiussen statt d^3 substituiert werden. Es ist aber $d = 2 r$

$$d^3 = 8 r^3 \text{ folgl. } S = \frac{8 r^3 \pi}{6}$$

$$S = \frac{4 r^3 \pi}{3}$$

S. 242. Zusatz. Eben so leicht ist es, statt dem Radius, oder dem Diameter, die Peripherie in die Rechnung zu bringen. Wir wissen daß $p = d \pi$, also $\frac{p}{\pi} = d$ und $\frac{p^3}{\pi^3} = d^3$. Dieß nun substituirt giebt

$$S = \frac{p^3 \pi}{6 \pi^3} = \frac{p^3}{6 \pi^2}$$

S. 243. Zusatz. Diese Formeln dienen nun, aus dem gegebenen Inhalt einer Kugel, den Radius oder den Diameter, oder auch die Peripherie derselben unmittelbar zu finden. Denn weil im ersten Fall

$$S = \frac{4 r^3 \pi}{3}$$

$$\text{so ist } 3S = 4 r^3 \pi$$

$$\text{dann } \frac{3S}{4\pi} = r^3$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{3S}{4\pi}} = r$$

Weil im zweyten Falle diese Gleichung nur doppelt darf genommen werden,

$$\text{so ist } 2 \sqrt[3]{\frac{3S}{4\pi}} = 2r = d$$

Und endlich im dritten Falle

$$S = \frac{p^3}{6 \pi^2}$$

$$6 \pi^2 S = p^3$$

$$\sqrt[3]{6 \pi^2 S} = p$$

S. 244. **Lehrsatz.** Die kubischen Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die Kubusse der Radiusse, oder der Diameter oder auch der Peripherien.

S ä t z e.

- 1) $f : S = r^3 : R^3$
- 2) $= d^3 : D^3$
- 3) $= p^3 : P^3$

B e w e i s.

Es ist zwar analogisch richtig, daß zweien ähnliche Körper sich verhalten wie die Kubusse ähnlich liegender oder gleichnamiger Linien in selben, welches sich auch leicht erweisen läßt; folglich wäre es von Kugeln ausgemacht, weil sie alle einander ähnlich sind: indeß ist hier im besondern Falle von Kugeln die Sache bald dargethan.

$$\text{I} \quad f = \frac{4 r^3 \pi}{3}$$

$$S = \frac{4 R^3 \pi}{3}$$

$$\begin{aligned} f : S &= \frac{4 r^3 \pi}{3} : \frac{4 R^3 \pi}{3} && \times 3 \\ &= 4 r^3 \pi : 4 R^3 \pi && : 4 \pi \\ f : S &= r^3 : R^3 \end{aligned}$$

$$\text{II} \quad f = \frac{d^3 \pi}{6}$$

$$S = \frac{D^3 \pi}{6}$$

$$\begin{aligned} f : S &= \frac{d^3 \pi}{6} : \frac{D^3 \pi}{6} && \times 6 \\ &= d^3 \pi : D^3 \pi && : \pi \\ f : S &= d^3 : D^3 \end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad f &= \frac{p^3}{6\pi^2} \\
 S &= \frac{p^3}{6\pi^2} \\
 \hline
 f : S &= \frac{p^3}{6\pi^2} : \frac{p^3}{6\pi^2} \\
 f^* : S &= p^3 : P^3 \quad \times 6\pi^2
 \end{aligned}$$

S. 245. Anmerk. Kugelausschnitte lassen sich weit leichter und richtiger in der sphärischen Trigonometrie als hier berechnen: wir wollen sie also bis dorthin versparen.

S. 246. Erkl. Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die ganze Begrenzung desselben von allen Seiten.

S. 247. Lehrsatz. Die Oberfläche eines dreyeckichten rechtwinklichten Prisma, dessen Seitenflächen nämlich alle rechtwinklicht auf der Grundfläche stehen, ist, wenn Fig. 119 a, b und c die Seiten der Grundfläche vorstellen, und p die Höhe des Prisma bedeutet $= (a+b+c) p + \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

B e w e i s.

Die Seitenflächen als Rechtecke geben

$$ap + bp + cp = (a+b+c) p$$

Da ferner die Grundflächen zwey gleiche Dreyecke sind von den nämlichen Seiten, so machen sie

$$2 \times \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Das ist, weil } 2 \times \frac{1}{4} &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}
 \end{aligned}$$

Folg.

Folglich giebt die Summe der Seiten und Grundflächen

$$S = (a+b+c) p + \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

S. 248. Zusatz. Wenn das Prisma schief ist, so geben zwar die Grundflächen ebenfalls das nämliche Resultat; aber die Seitenflächen müssen nach den Gesetzen der schiefen Parallelogramen berechnet, das heißt auf die Seitenlinien, deren eine wir, weil sie gleich sind, p nennen wollen, Perpendikel gefällt werden, wenn nun Fig. 20 diese α, β, γ heißen, so ist wiederum

$$\text{Superf.} = (+\alpha + \beta + \gamma) p + \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

S. 249. Zusatz. Steht das Prisma auf einem gleichseitigen Dreiecke, so erhält man zur Oberfläche

$$S = 3lp + 2 \times \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$$

$$\text{abgek. } S = 3lp + \frac{1}{2} l^2 \sqrt{3}$$

S. 250. Zusatz. Ist das Prisma ein Kubus, und nennt man eine Seitenlinie a , so erhält man für
 $\text{Sup.} = 6 a^2$.

S. 251. Zusatz. Ist es ein rechtwinkliges Parallelepipedum, und heißen die zwei verschiedenen Seiten der Grundfläche a und b , so wird die Sup. $= 2(a+b)p + 2ab$ seyn. Schiefe Parallelepiden können mehrmal nicht anders, als durch Perpendikel bestimmt werden.

S. 252. Zusatz. Für Prismen, deren Grundfläche reguläre Polygone sind, verwandeln sich deren Ausdruck in diesen

$nlp + nl\sqrt{r^2 - l^2}$ wie Jedermann
aus S. 193 leicht begreift. Für irreguläre hingen-
gen, wenn P den Ummesser (Perimeter) und B die
Grundfläche selbst bedeutet

$$\text{Sup.} = Pp + 2B$$

S. 253. Zusatz. Weil Zylinder Unenblichecke,
nämlich Zirkel zur Grundfläche haben, deren Peris-
meter die Peripherie $d\pi$ ist, so gilt hier die Formel

$$\text{Sup.} = d\pi p + \frac{2d^2\pi}{4}$$

$$\text{abgek.} = d\pi p + \frac{d^2\pi}{2}$$

$$\text{anders gef.} = (p + \frac{d}{2}) d\pi$$

S. 254. Anmerk. Um sich sinnlich davon zu über-
zeugen, darf man nur einen kleinen hölzernen Zylinder mit
Papier umwickeln, und es so zu rechte schneiden, daß es ihn
außer den beyden Grundflächen ganz bedeckt, so wird, wenn
man das Papier wieder davon los macht, und gehörig aus-
breitet, dasselbe ein Rechteck vorstellen, dessen Höhe, die Höhe
des Zylinders, und die Grundlinie, die Peripherie vorstellt;
folglich ist der erste Ausdruck der Formel $d\pi \times p$ richtig, das
übrige erhellet von sich selbst.

S. 255. Zusatz. Schiefstehende Zylinder gehö-
ren nicht hieher, sondern in die höhere Geometrie;
weil ihre Grundflächen keine Zirkel mehr, sondern
Ellipsen sind.

S. 156. Lehrsatz. Die Oberfläche einer
dreyeckichten geradestehenden Pyramide ist, wenn
Fig. 121 alles wie vorher, $= \frac{1}{2} p (a + b + c) +$
 $\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

B e w e i s .

Die Seitendreyecke lassen sich alle in eines ver-
zeichnen, wo der Perpendikel an einer der Seiten
herun-

Herunter, die Höhe, und der Ummesser die Basis giebt;
also sind diese $= \frac{p}{2} (a+b+c)$. Die Grundfläche
ist ohnehin $= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}$ u. s. f.

$$\text{also Sup.} = \frac{1}{2} p (a+b+c) + \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)} \\ (a-b+c) (-a+b+c)$$

§. 257. Zusatz. Schiefstehende Pyramiden ha-
ben drey verschiedene Perpendikel, das übrige ist das
nämliche.

§. 258. Zusatz. Ist die Grundfläche bey ge-
radstehenden Pyramiden ein gleichseitiges Dreyeck,
so bekommt man mehrmal, wenn die Seite 1 heißt
 $\frac{3}{2} p + \frac{1}{4} 1^2 \sqrt{3}$

§. 259. Zusatz. Steht die Pyramide auf ei-
nem regulären Polygone, so ergibt sich die Gleichung

$$S = \frac{n-1}{2} p + \frac{n-1}{4} \sqrt{r^2 - 1^2}$$

§. 260. Zusatz. Steht sie aber auf einem ir-
regulären Polygon, und heißt die Grundfläche wie-
der B, so wie der Ummesser P, so ist

$$\text{Sup.} = \frac{Pp}{2} + B$$

§. 261. Zusatz. Die Oberfläche des Kegels,
wo der Ummesser $= d\pi$ und die Grundfläche $d^2\pi$,
ist demnach $= \frac{d\pi p}{2} + \frac{d^2\pi}{4} = (2p+d) \frac{d\pi}{4}$

§. 262. Zusatz. Man kann bey Kegeln auch
sehr bequem aus ihrer wahren Höhe die schiefe Höhe
finden; denn es ist Fig. 122

$$ad^2 = ac^2 + dc^2$$

$$\text{substit. } p^2 = a^2 + d^2$$

$$p = \sqrt{a^2 + d^2}$$

§ 2

Wenn

Wenn nun in der obigen Formel statt p substituirt wird, so giebt dieß

$$\text{Sup.} = (2\sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}} + d) \frac{d\pi}{4}$$

S. 263. Zusatz. Aus den Begriffen von Polyedern kann es auch gar nicht schwer seyn, ihre Oberflächen zu bestimmen; weil sie von lauter regulären Figuren eingeschlossen sind. Wer sieht z. B. nicht, daß bey'm Tetraedrum, wenn die Seite eines Dreys $= 1$, folglich der Inhalt jedes solchen Dreys $\frac{1}{4} 1^2 \sqrt{3}$ ist, die Oberfläche $= 4 \times \frac{1}{4} 1^2 \sqrt{3} = 1^2 \sqrt{3}$ seyn müsse, und so von andern zu reden.

S. 264. Lehrsatz. Die Oberfläche jeder Kugel ist gleich vier größten Zirkelflächen, das ist solcher, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen; oder was eins ist, dem Produkt aus dem Quadrat des Diameters in die Zahl 3,14.

S a t z.

$$4C = \text{Sup.} = D^2 \pi$$

B e w e i s.

Man bilde sich neben der Kugel einen Zylinder ein, der zur Grundfläche einen größten Zirkel der Kugel, und zur Höhe den Diameter davon hat, so ist, wenn Z den Zylinder und K die Kugel vorstellt,

$$\begin{array}{rcl} & CD & = Z \\ \times \frac{2}{3} & \frac{2}{3} CD & = \frac{2}{3} Z \\ \text{aber} & K & = \frac{2}{3} Z \\ \hline & \frac{2}{3} CD & = K \end{array}$$

Weil

Weil sich ferner die Kugel als ein Aggregat von unendlich vielen und dünnen Pyramiden, die zur Höhe den halben Diameter haben, betrachten läßt, so können diese alle in eine einzige Pyramide verwandelt werden, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel seyn wird. Folglich ist ihr Inhalt

$$\text{Sup.} \times \frac{1}{2} D = \frac{1}{6} \text{Sup.} \times D$$

$$\text{Also } \frac{1}{6} \text{Sup.} \times D = K; \text{ und oben hieß es}$$

$$\frac{2}{3} C \times D = K$$

$$\frac{2}{3} C D = \frac{1}{6} \text{Sup.} D$$

D:

$$\frac{2}{3} C = \frac{1}{6} \text{Sup.}$$

6x

$$\frac{1}{3} C = 4 C = \text{Sup.}$$

Das erste, was zu erweisen war. Weil endlich

$$C = \frac{D^2 \pi}{4}$$

und $4 C = D^2 \pi$ ist, so kann mehrmal substituiert werden, und dann ist auch

$$\text{Sup.} = D^2 \pi$$

S. 265. **Satz.** Man erhält demnach den Inhalt der Kugel auch durch Berechnung, wenn man sie pyramidenartig betrachtet. Die Grundfläche dieser Pyramide wäre also $d^2 \pi$ oder vier größte Zirkel, diese nun durch den dritten Theil der Höhe multipliciert, das ist durch $\frac{1}{3}$, giebt $\frac{d^3 \pi}{6}$ die obige Formel für Kugeln.

S. 266. **Anmerk.** Zum Beschluß noch eine Aufgabe von solchen Kugelberechnungen. Wenn des Mondes Durchmesser nach de la Lande 1785306 Toisen (Französische Klafter zu 6 Schuhe) hält; wie viel beträgt sein körperlicher Inhalt in Kubittoisen; vorausgesetzt, daß er eine wahre Kugel sey?

Auf.

Auflösung. Man setze in der Formel $d^3 \pi$ statt den Buchstaben die gehörigen Zahlen, und nehme π in etwas mehr Decimalen, so giebt dieß $(1785306)^3 \times 3,1415$

$$= 5690337090993326,6 \times 3,1415$$

$$= 17876193971364403413,164 = 2979365661895733902,194.$$

Kubiktoisen.

Körperwandlung.

S. 267. Krl. Körper verwandeln, heißt ihre Oberfläche, des kubischen Inhalts unbeschadet, in eine andere reguläre Figur umändern.

S. 268. Anmerk. Diese Arbeit zu erleichtern, dürfen nur die Ausdrücke für die Kubaturen der Körper in Bereitschaft gehalten werden. Die vornehmsten sind, wie oben gezeigt worden 1) für Prismen aB , wo B die Grundfläche bedeutet, 2) für Cylinder $\frac{a^2 \pi}{4}$, 3) für Pyramiden $\frac{aB}{3}$

4) für Kegel $\frac{a^2 \pi}{12}$ und 5) für Kugeln $\frac{d^3 \pi}{6}$

S. 269. Aufgabe. Ein Parallelepipedum, das zur Grundfläche ein Quadrat hat, wovon die Seite a heißt, und dessen Höhe noch so groß als diese Seite ist, in einen Kubus zu verwandeln, oder was eins ist, einen Kubus zu verdoppeln.

Auflösung. Die Seite des Kubus, ist x , folglich sein Inhalt $= x^3$. Weil nun der Inhalt eines Parallelepipedums durch das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe bestimmt wird, so giebt dieß hier $a^2 \times 2a = 2a^3$; also die Gleichung

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

$$\text{oder } x = a\sqrt[3]{2}$$

S. 270.

§. 270. Anmerk. Dieß war eigentlich jenes berühmte Problem von Verdopplung des Kubusses, welches die Alten so lange nicht auflösen wußten, ungeachtet ihnen viel daran lag, und dessen Aufschluß sie endlich auf einem mühsamen Umweg fanden. Hypocrates und Eratostenes kamen nämlich auf den Gedanken, die Seite eines noch so großen Kubusses müsse die erste von zwei mittleren geometrischen Proportionalgrößen seyn, die zwischen eine und zwei Seiten des einfachen Kubusses hineinsallen, und fanden diesen Gedanken auch wirklich gegründet. Es läßt sich dieß auch algebraisch zeigen. Die Progression, welche obnehin nichts anders ist, als eine fortgesetzte stätige Proportion, wird demnach so aussehen:

$a, x, y, 2a$ Folglich ist nach der Progressionslehre

$$I \quad ay = x^2 \quad II \quad 2ax = y^2$$

$$y = \frac{x^2}{a}$$

$$\text{und} \quad y^2 = \frac{x^4}{a^2}$$

III

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

$$\frac{x^3}{a^2} = 2a$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

$$\text{oder} \quad x = a\sqrt[3]{2}$$

Aber wer sieht nicht, daß die obige arithmetische Art ungleich simpler und kürzer gewesen wäre, dieses Problem aufzulösen, als diese letztere, die gewiß für die Alten sehr schwierig seyn mußte, weil sie die Algebra nicht zu Hilfe rufen konnten.

§. 271. Aufgabe. Einen Zylinder von gegebenem Durchmesser d , und die Höhe a in eine Kugel zu verwandeln: wie groß wird der Radius oder der Diameter derselben werden.

Auf:

Auflösung. Es ist demnach in der Formel $\frac{d^3 \pi}{6}$ das $d = x$ folglich

$$\frac{a d^2 \pi}{4} = \frac{x^3 \pi}{6}$$

$$\frac{a d^2}{4} = \frac{x^3}{6}$$

$$\frac{6 a d^2}{4} = x^3$$

oder $\frac{3 a d^2}{2} = x^3$

also $\sqrt[3]{\frac{3 a d^2}{2}} = x$

§. 272. Aufgabe. Einen abgestuften Kegel, dessen Höhe $= a$, und die Radiusse R und r sind, soll in einen Zylinder verwandelt werden, der nur p hoch seyn darf, wie groß wird dessen Durchmesser seyn?

Auflösung. Antwort $d = x$. Mithin wird der Ausdruck des Zylinders $\frac{a d^2 \pi}{4}$ in diesen umgeändert $\frac{p x^2 \pi}{4}$

Also die Gleichung

$$\frac{(R^3 - r^3) a \pi}{3 (R - r)} = \frac{p x^2 \pi}{4} \quad \S. 236.$$

$$\frac{(R^3 - r^3) a}{3 (R - r)} = \frac{p x^2}{4}$$

$$\frac{4 (R^3 - r^3) a}{3 (R - r)} = p x^2$$

$$\frac{4 a (R^3 - r^3)}{3 p (R - r)} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{4 a (R^3 - r^3)}{3 p (R - r)}} = x$$

$$\sqrt[2]{\frac{a (R^3 - r^3)}{3 p (R - r)}} = x$$

§. 273.

S. 273. Aufgabe. Eine Kugel, deren Diameter d ist, in ein Prisma zu verwandeln, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreyeck, und die Höhe gleich m werden soll, wie groß wird eine Seite der Grundfläche ausfallen?

Auflösung. Da der Ausdruck für ein Prisma $= a B$ ist, und B in unserm Fall ein gleichseitiges Dreyeck bezeichnet, so muß $\frac{1^2}{4} \sqrt{3}$ dafür substituirt werden. Endlich weil eben 1 als unbekannt gesucht wird, so setze man an dessen statt x , und man erhält $\frac{x^2}{4} \sqrt{3}$ folglich

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \pi}{6} &= \frac{x^2}{4} \sqrt{3} \times m \\ \text{oder} \quad \frac{d^3 \pi}{6} &= \frac{m x^2}{4} \sqrt{3} \\ \frac{4 d^3 \pi}{6} &= m x^2 \sqrt{3} \\ \frac{2 d^3 \pi}{3} &= m x^2 \sqrt{3} \\ \frac{2 d^3 \pi}{3 m \sqrt{3}} &= x^2 \\ \sqrt{\frac{2 d^3 \pi}{3 m \sqrt{3}}} &= x \end{aligned}$$

S. 274. Anmerk. Um die Sache begreiflicher zu machen, wollen wir ein Paar praktische Beispiele der Verwandlung anführen.

I Aufgabe. Wie lange müßte ein Haarröhrchen, d. i. ein gläserner Zylinder seyn, dessen Durchmesser eine Linie beträgt, um einen Kubitzoll Wassers zu fassen?

Auflösung. Die Basis eines solchen Haarröhrchens ist nach dem Ausdrucke $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{1 \times 3,14}{4} = \frac{3,14}{4}$.

Weil nun die Höhe unbekannt ist, so heisse sie x , und weil ein Kubizfoll 1728 Kubiklinien hält, so ist

$$\begin{aligned}\frac{3,14 \times}{4} &= 1728 \\ 3,14 \times &= 6912 \\ x &= \frac{6912}{3,14} = 2201 \text{ Linien} = 183 \\ &\quad \frac{3,14}{3}\end{aligned}$$

Zolle 5 Linien = 15 Schuh 3 Zoll 5 Linien, die Höhe des Har Röhrchens.

II Aufgabe. Ein Böttcher soll ein Faß von 24 Eimer verfertigen, welches nicht länger als 12 Schuhe werden darf, und dessen Bodenhöhe sich zur Spundhöhe wie 4 : 5 verhalten soll; welche Gestalt wird es bekommen?

Auflösung. Wenn man Crusens Kontoristen mit H. Prof. Westenrieder (Beschreibung der Stadt München) vergleicht, so hält der bairische Eimer genau 2 Pariserkubikfüße, folglich 24 Eimer 48 Kubikfüße. Setze man nun die Bodenhöhe = x , so wird nach der Proportion 4 : 5 = x : $\frac{5x}{4}$ die Spundhöhe $\frac{5x}{4}$ seyn. Weil sich nun jedes Faß als ein doppelter abgestufter Keg. betrachten läßt, so kann hier die allgemeine Gleichung $S = \frac{(R^3 - r^3)}{3(R - r)} a \pi$ für den besondern Fall angewendet werden.

Es ist demnach für den doppelten Keg. wo $\frac{5x}{2 \times 4} = R$ und $\frac{x}{2} = r$, und a endlich = 12 gilt.

$$48 = \frac{\left(\left(\frac{5x}{8} \right)^3 - \left(\frac{x}{2} \right)^3 \right) \times 12 \times 3,14}{3 \left(\frac{5x}{8} - \frac{x}{2} \right)}$$

$$48 = \frac{\left(\frac{125 x^3}{512} - \frac{x^3}{8} \right) \times 12 \times 3,14}{3 \left(\frac{5x}{8} - \frac{x}{2} \right)}$$

$$48 = \frac{\left(\frac{125 x^3}{512} - \frac{64 x^3}{512} \right) \times 12 \times 3,14}{3 \left(\frac{5x - 4x}{8} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 48 &= \frac{61x^3 \times 12 \times 3,14}{3 \times 512} : \frac{x}{8} \\
 &= \frac{61x^3 \times 12 \times 3,14}{3 \times 512} \times \frac{8}{x} \\
 &= \frac{61x^3 \times 12 \times 3,14 \times 8}{3 \times 512}
 \end{aligned}$$

$$48 = \frac{61x^3 \times 4 \times 3,14 \times 8}{512} = \frac{6129,28x^2}{512}$$

$$24576 = 6129,28x^2$$

$$x^2 = \frac{24576}{6129,28} = 4$$

$x = 2$ Schuh beynähe Bodenhöhe. Dieß in $\frac{5x}{4}$ für x substituirt giebt $\frac{5 \times 2}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ Schuh Spundhöhe im Parisermaasse.

§. 275. Anmerk. Aus diesen wenigen Aufgaben läßt sich leicht auf die Verfahrensart verschiedner anderer Probleme dieses Faches schließen.





Ebene Trigonometrie.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Wissenschaft aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, worunter doch wenigst eine Seite seyn muß; die übrigen drey Stücke durch Rechnung zu finden.

§. 2. Zusatz. Warum aus drey gegebenen Winkeln eines Dreyeckes nichts bestimmt werden könne, erhellet daraus, weil es unendlich viele ähnliche Dreyecke geben kann, die die nämlichen Winkel haben.

§. 3. Zusatz. Neben den geometrischen Linien hat man in der Trigonometrie noch andere nöthig, mit welchen man sich also bekannt machen muß. Die nöthigsten sind: Sinus, Kosinus, Tangente; und wenn man noch will: Kotangente, Sekante, Kossekante, Quersinus, und Koquersinus.

§. 4. Erkl. Wenn zu einem Winkel sein Bogen, den er zum Maasse hat, aus dem Scheitel beschrieben wird, oder zu einen Bogen die Radiusse gezogen werden, die ihn begränzen, so ist der Sinus dieses Bogens oder Winkels der Perpendikel, welcher von dem Ende des einen Radius auf den
andern

andern herabgefällt wird. Es versteht sich von selbst, daß in manchen Fällen ein Radius rückwärts verlängert werden muß; um diesen Perpendikel, wie bey überhängenden Dreyecken, fallen zu können. Die Tangente ist zwar aus der Geometrie bekannt, sie muß aber hier für jeden Bogen eine bestimmte Länge haben, und sich von dem Endpunkte des einen Radius bis zu dem verlängerten Radius erstrecken. Dieser verlängerte Radius nun wird die Sekante (von secare) genennt, weil diese Linie so lang außer der Peripherie fortgezogen werden muß, bis sie die Tangente schneidet.

Wenn man diese Linien bey einem Winkel oder Bogen wirklich zieht, und dann zu selbem die Ergänzung zu einem rechten Winkel sucht, so werden der Sinus, Tangente, Sekante dieses Ergänzungswinkels, der Kosinus, Kotangente, Kossekante des ersten Winkels genennt, und so auch wechselweise. So ist in Fig. 123 $f d$ der Sinus des Winkels m , und $f k$ sein Kosinus, $a b$ die Tangente, $g h$ die Kotangente; $a c$ die Sekante, und $g c$ die Kossekante. Umgekehrt kann man eben sowohl sagen, daß $f k$ der Sinus von n und $f d$ sein Kosinus sey u. s. f.

S. 5. Anmerk. Von besonderer Brauchbarkeit sind aber nur unter diesen Linien der Sinus, Kosinus, und höchstens noch die Tangente. Die übrigen Linien dienen mehr zur spekulativen, als zur ausübenden Trigonometrie. Zum Ueberflusse wollen wir noch den Quersinus (Sinus versus) das Segment des Radius welches zwischen dem Bogen und dem Sinus liegt, als ein solches Geschöpf anführen, um doch seine Bedeutung zu wissen. Es ist Fig. 124 die Linie $f d$.

S. 6. Zusatz. Weil Paralleln zwischen Paralleln gleich sind, so ist der Kosinus $a b$ allemal gleich dem Radius $f c$ weniger dem Quersinus $f d$; denn es sind Fig. 124 bey $b c$ und d rechte Winkel, also
mas

machen allemal zween innere Winkel 180° aus, und die Linien sind demnach parallel. In Zukunft wird daher allemal der Radius, weniger dem Quersinus, den Kosinus bedeuten müssen.

S. 7. Zusatz. Zween Nebenwinkel haben einley Sinus; denn nehme man Fig. 125 einen stumpfen Winkel an, ziehe den Sinus, so wird nach der Definition für den spizigen Nebenwinkel kein anderer Sinus mehr möglich seyn, als der, den man eben gezogen hat.

S. 8. Erkl. Linien sind negativ, wenn sie zu andern, die man positiv heist, eine Gegenrichtung nehmen, oder in entgegengesetzte Lagen der Figur begriffen sind. Z. B. wenn jene Linie die ich von oben herab, oder von der Rechten zur Linken, ziehen muß, positiv sind, so werden die anderen negativ genannt, die ich von unten herauf, oder von der Linken zur Rechten ziehen soll.

S. 9. Zusatz. Man sieht bey näherer Untersuchung ferner, daß Fig. 126 die Sinusse von Anfang bis 90° wachsen, daß der Sinus von 90° selbst dem Radius gleich ist, daß sie von da bis 180° abnehmen, und hier $= 0$ sind, daß sie ferner in der untern Hälfte des Kreises wieder wachsen, aber im negativem Werthe, daß endlich bey 270° der Sinus dem negativen Radius gleich wird, und daß sie dann wieder bis 360 Grad abnehmen, und zum zweytenmal 0 werden.

S. 10. Zusatz. Bey einer gleichen Betrachtung des Kosinus wird man ebenfalls gewahr, wie er im ersten Quadranten mit positiven Werthe abnimmt, im zweyten mit negativen Werthe wächst, im

im dritten eben so abnimmt, und im vierten wieder positiv wachsend wird. Es erhellet ferner, daß allemal der Kosinus wachse, wenn der Sinus abnimmt, und wechselseitig.

S. 11. Zusatz. Eben so einleuchtend ist es Fig. 127, wie die Tangente von 90° unendlich groß werden kann, weil da der Radius, oder vielmehr die werdensollende Sekante, mit der Tangente parallel läuft; und wie ferner auch die Tangente nach dem Beispiele des Sinus in gewissen Lagen sich positiv, in andern wieder negativ denken läßt, und ebenfalls mit dem Sinus zunimmt.

S. 12. Lehrsatz. Wenn man den Sinus eines Bogens so lange verlängert, bis er eine Sehne wird, so ist dieser Sinus die Hälfte davon. Die Richtigkeit dieses Satzes fließt zwar schon aus der Zirkellehre, wo dargethan worden, daß jeder Radius, der eine Sehne perpendicular schneidet, dieselbe auch halbieret; doch läßt sich die Sache sehr kurz auch auf einem andern Weg erweisen.

S a t z. Fig. 128

$$a d = \frac{1}{2} a f$$

B e w e i s.

Man verlängere den Radius, worauf der Sinus gefällt ist, zum Diameter, so ist

$$a d^2 = b d \times d g$$

Aber auch $d f^2 = b d \times d g$

$$a d^2 = d f^2$$

$$\text{und } a d = d f$$

Allein

Allein	$ad + df = af$
substit.	$ad + ad = af$
abgek.	$2 ad = af$
	$ad = \frac{af}{2} \text{ oder } \frac{1}{2} af$

§. 13. Zusatz. Die Sinusse sind also nichts anders, als halbe Sehnen, und weil keine halbe Sehne größer werden kann, als der Radius, so sind sie alle eigentliche Brüche von selbstem. Man setzt daher wirklich in der Trigonometrie durchaus den Radius $= 1$ und sucht daraus die Werthe der Sinusse in Decimalen.

§. 14. Lehrsatz. Der Sinus eines Bogens oder Winkels von 30° ist dem halben Radius gleich.

S a t z. Fig. 129

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} r$$

B e w e i s.

Man ziehe in einem Zirkel den Radius, verbinde eine Sehne damit, die eben so groß als er selbst ist, und schließe das Dreyeck, so wird es aus dreyen Radiussen bestehen, folglich gleichseitig seyn, und ein Winkel 60° halten. Man theile nun ferner Bogen und Sehne durch einen andern Radius in zween gleiche Theile, so wird nach der Definition

	$fb = \sin x$ seyn
allein	$x = df = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
und	$fb = ab = \frac{af}{2} = \frac{r}{2}$
substit.	$\frac{r}{2} = \sin 30^\circ \text{ oder}$
	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} r$

§. 15.

§. 15. Zusatz. Wenn nun $r = 1$, so ist $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$. Der einzige Sinus unter allen, der sich rational finden läßt; weil nur von der Sehne, die dem Radius gleicht, bekannt ist, daß man sie genau einigemal, nämlich 6mal, an der Peripherie herumtragen kann; folglich ihr der sechste Theil der Peripherie, das ist 60° , und ihrer Hälfte der Sinus von 30° als Bogen entsprechen.

§. 16. Anmerk. Wie aber aus diesem einzigen rationalen Sinus alle übrige gefunden worden, wollen wir am Ende der Trigonometrie etwas ausführlicher zeigen. Genug, daß wir einsehen wissen, daß sie zu unserm Gebrauche bereits alle, so genau als möglich, berechnet sind, und nur in den sogenannten Sinustafeln nachgeschlagen werden dürfen.

§. 17. Anmerk. Wolf in seinen Elementen zeigt zwar auch, wie man aus einem gegebenen Radius ein reguläres Fünfeck, Achteck, Zehneck u. s. f. beschreiben könne; aber es sind schon lauter Irrationalgrößen zum Grunde gelegt, folglich erhält man wieder für solche Sehnen Irrationalzahlen, die wir für Sinusse leichter auf andern Wegen erhalten. Wir werden vielleicht am Ende ein solches Beispiel theils zur Probe unsers Verfahrens, theils zur Vergleichung anführen.

§. 18. Lehrsatz. Aus dem Sinus kann auch sein Kosinus berechnet werden. Es ist nach trigonometrischen Sinne der

S a t z. Fig. 130

$$\cos. = \sqrt{1 - \sin^2}$$

B e w e i s.

Weil, wie wir oben sagten, der Kosinus ad immer $= cb$ ist, und

$$cb^2 = ab^2 - ac^2$$

$$cb = \sqrt{ab^2 - ac^2}$$

so kann substit. werden $\cos. = \sqrt{1 - \sin^2}$

§

§. 19.

§. 19. Zusatz. Es ist also $\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$
 $= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§. 20. Zusatz. Weil nun der Sinus von 60° gleich ist dem Cosinus von 30° , so ist eben darum
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

§. 21. Lehrsatz. Die Tangente von 45° ist so groß als der Radius selbst.

S a t z. Fig. 131

$$\text{tang } 45^\circ = r$$

B e w e i s.

Man ziehe einen Radius, errichte auf demselben eine Tangente, die ebenfalls so groß ist, und schließe den rechten Winkel durch die Sekante, so hat man ein rechtwinkliges gleichschenkliches Dreieck, wo jeder Winkel an der Hypothenuse 45° hält; also

	$db = \text{tang } c$
abe.	$db = r$
also	$\text{tang } c = r$
	$\text{aber } c = 45^\circ$
subst.	$\text{tang } 45^\circ = r$

§. 22. Zusatz. Alle Tangenten also, welche größern Bögen als 45° zukommen, sind größer, als der Radius, und wachsen bis 90° ins Unendliche fort.

§. 23. Zusatz. Weil $dc = \sqrt{db^2 + bc^2}$ so wird in diesem Fall nach der Substitution $\sec 45^\circ = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ seyn.

§. 24.

S. 24. Lehrsatz. Wird die Tangente und Sekante allgemein mit Zuziehung des Sinus und Kosinus bestimmt, so ist die erste $= \frac{\sin}{\cos}$; die zweyte $= \frac{1}{\cos}$

B e w e i s. Fig. 132

I Wegen ähnlichen $\triangle \triangle$ II

$$ad : dc = bf : fc$$

$$ac : bc = dc : fc$$

$$\text{tang} : 1 = \sin : \cos$$

$$\sec : 1 = 1 : \cos$$

$$\text{tang} \times \cos = \sin$$

$$\sec \times \cos = 1$$

$$\text{tang} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\sec = \frac{1}{\cos}$$

S. 25. Zusatz. Es ist richtig, daß der Kosinus von $90^\circ = 0$, der Sinus $= 1$ die Tangente unendlich werde. Folglich ist hier nach aller Strenge erwiesen, daß, wenn dieß alles in dem Ausdruck $\text{tang} = \frac{\sin}{\cos}$ substituiert wird, $\frac{1}{0} = \infty$ sey.

S. 26. Zusatz. Wenn in beyden Ausdrücken statt $\cos$ sein Äquivalent $\sqrt{1 - \sin^2}$ substituiert wird, so bekommt man folgende Formeln:

$$\text{tang} = \frac{\sin}{\sqrt{1 - \sin^2}}; \sec = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2}}$$

S. 27. Zusatz. Es lassen sich auch in der Formel $\text{tang} = \frac{\sin}{\cos}$ der Sinus und Kosinus, wie jeder sieht, sogleich allein finden; Es ist nämlich

$$\sin = \text{tang} \times \cos \text{ und } \cos = \frac{\sin}{\text{tang}}$$

S. 28. Zusatz. Weil der Komplementswinkel oder Bogen von 45° ebenfalls 45° beträgt, so folgt

folgt daraus, daß in diesem Falle Sinus und Kosinus, Tangente und Sekante u. s. f. einander gleich sind. Folglich ist gemäß dem Ausdrücke $\sec = \frac{1}{\cos}$

auch $\sec 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ}$ aber es ist

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\text{also } \sqrt{2} = \frac{1}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin 45^\circ \times \sqrt{2} = 1$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

§. 29. **Lehrsatz.** Die Kotangente wird aus dem Sinus und Kosinus, und die Kossekante aus dem Sinus allein bestimmt.

S ä t z e. Fig. 133

$$\cot = \frac{\cos}{\sin}, \quad \operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$$

B e w e i s.

I $\triangle abc \sim fgc$ wegen rechten und Wechselw., m und n

$$ab : bc = gc : fg$$

$$\cot : 1 = \cos : \sin$$

$$\cot \times \sin = \cos$$

$$\cot = \frac{\cos}{\sin}$$

II In eben diesen Dreyecken

$$ac : bc = fc : fg$$

$$\operatorname{cosec} : 1 = 1 : \sin$$

$$\operatorname{cosec} \times \sin = 1$$

$$\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$$

§. 30.

S. 30. Zusatz. Weil der Ausdruck der Kotangente gerade der umgekehrte von der Tangente ist, so erhellet, daß sich auch die Tangenten zweyer Bögen umgekehrt verhalten, wie ihre Kotangenten.

S. 31. Zusatz. Da es richtig ist, daß in ähnlichen Figuren gleichnamige Linien in Verhältniß stehen, so ist dieß auch von allen trigonometrischen Linien untereinander wahr, wenn sie ähnlichen Bögen zugehören. Es sind aber die Bögen dann ähnlich, wenn die Anzahl ihrer Grade gleich groß ist, oder was auf eines hinausläuft, wenn sie kongruent sind, und zwischen zwei Radienrichtungen liegen. Die Wahrheit dieses Satzes fällt auch gleich beim Anblick der Figur in die Augen, wo nichts als ähnliche Dreyecke von trigonometrischen Linien angetroffen werden. So z. B. ist Fig. 134

$$ab : bc = fd : dc \text{ u. s. f.}$$

$$\text{substit. } \text{tang} : R = \text{tang} : r$$

S. 32. Erkl. Der Sinus von 90° , welcher dem Radius gleich ist, und daher ein ganzes gilt, da alle übrige nur Brüche davon sind, heißt der Sinus totus.

S. 33. Anmerk. Man sieht aus allen diesem, wie viele Formeln durch Zuziehung anderer Linien: dann auch durch die Vergleichung der Ausdrücke selbst, die spekulative Trigonometrie zu fernern Schlüssen erobern könnte: uns dünkt genug zu seyn, nur die Bahn dazu eröffnet zu haben.

S. 34. Lehrsatz. In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel; oder auch umgekehrt: Es verhalten sich die Sinusse der Winkel, wie ihre Gegenseiten.

Satz.

S a t z. Fig. 135

$$ae : ad = \sin d : \sin i.$$

B e w e i s.

Man beschreibe um das Dreyeck einen Zirkel, theile die gegebenen Seiten, und ihre entsprechenden Bögen in zween gleiche Theile durch Perpendikularradiusse, so werden die halben Seiten zu Sinussen von Bögen, die das Maas der entgegengesetzten Peripherialwinkel sind. Es ist nun, wenn auch zuvor vom dritten Winkel ein Radius herangezogen wird.

$$\begin{array}{l} ag = \frac{1}{2} ai \\ \text{und } af = \frac{1}{2} ad \end{array} \quad \text{Ferner}$$

$$\begin{array}{l} o = ah \\ \text{und } d = ah \end{array} \quad \text{nach S. 83. Geom. daher}$$

$$o = d \quad \text{Eben so}$$

$$m = i$$

$$\text{Endlich } ag = \sin o$$

$$af = \sin m \quad \text{In Proportion gesetzt.}$$

$$ag : af = \sin o : \sin m$$

$$\text{Substit. } \frac{1}{2} ai : \frac{1}{2} ad = \sin d : \sin i$$

$$\times 2 \quad ai : ad = \sin d : \sin i$$

S. 35. Zusatz. Kommen zwei andere Seiten in den Satz, so müssen diese statt jenen getheilt werden, und der Beweis ist der nämliche.

S. 36. Anmerk. Dieser Lehrsatz muß wohl gemerkt werden, denn er ist die Grundlage der ganzen praktischen Trigonometrie. Wir werden bemüht seyn, alle Fälle auf diesen Satz zu gründen, und uns anderer Linien z. B. der Tangenten so wenig als möglich bedienen.

S. 37. Lehrsatz. Wenn in einem Dreyecke, wo man will ein Winkel in zween beliebige Theile getheilt,

getheilt, und die Theilungslinie bis zur Gegenseite verlängert wird, so verhalten sich die Sinusse der Winkeltheile, ordentlich wie die Abschnitte dieser Gegenseite, und umgekehrt, wie die angränzenden Seiten.

S a t 3. Fig. 136

$$\sin y : \sin x = \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad}$$

B e w e i s.

$$\sin y : \sin m = bc : ab$$

$$\sin o : \sin x = ad : cd$$

$$\sin x \times \sin o : \sin m \times \sin x = bc \times ad : ab \times cd$$

Aber $\sin m = \sin o$ Als Sinus von Nebenw. daher substit.

$$\sin y \times \sin m : \sin m \times \sin x = bc \times ad : ab \times cd$$

$$(:\sin m) \quad \sin y : \sin x = bc \times ad : ab \times cd$$

$$\sin y : \sin x = \frac{bc \times ad}{ab \times ad} : \frac{ab \times cd}{ab \times ad}$$

$$\text{oder } \sin y : \sin x = \frac{bc}{ab} : \frac{cd}{ad}$$

S. 38. Lehrsatz. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreyecke der Winkel am Scheitel in zweien gleiche Theile getheilt, und vom Theilungspunkt eine gerade Linie an die Grundlinie hin gezogen wird, so ist die halbe Grundlinie nach trigonometrischen Ausdrücken gleich dem Produkte aus einem Schenkel in den Sinus des halben Scheitelwinkels, und folglich die ganze Grundlinie einem doppelten solchen Produkte.

S a t.

S a t z. Fig. 137

$\frac{1}{2} b = c \times \sin \frac{1}{2} v$, wo c einen Schenkel (crus), und v den Scheitelwinkel (vertex) bezeichnet.

B e w e i s.

$$d f = \sin o$$

$$v d = r$$

$$\frac{d f : v d}{=} = \frac{\sin o : r}{=}$$

substit. $\frac{1}{2} b : c = \sin \frac{1}{2} v : r$

$$\frac{1}{2} b = c \times \sin \frac{1}{2} v$$

oder $b = 2 c \times \sin \frac{1}{2} v$

§. 39. Zusatz. Wird nun c oder $\sin \frac{1}{2} v$ nach der Transpositionslehre allein gesucht, so erhält man

$$c = \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2} v}$$

und $\sin \frac{1}{2} v = \frac{b}{2 c}$

§. 40. Lehrsatz. Die ganze Grundlinie in einem solchen Dreyecke ist auch gleich dem Produkt einer Seite in den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Cosinus desselben halben Winkels dividirt.

S a t z. Fig. 138

$$b = \frac{c \times \sin v}{\cos \frac{1}{2} v}$$

B e w e i s.

Man mache den Schenkel zum Radius, und ziehe den Sinus des ganzen Scheitelwinkels, so ist

△

$\triangle aed \sim \triangle bhd$ wegen gemeinschaftlichen
und rechten Winkel

also $ad : ac = bd : bh$

oder $c : \cos \frac{1}{2} v = b : \sin v$

$$\cos \frac{1}{2} v \times b = c \times \sin v$$

$$b = \frac{c \times \sin v}{\cos \frac{1}{2} v}$$

§. 41. Zusatz. Will man den Sinus des ganzen Winkels in lauter trigonometrischen Größen bekommen, so substituirt man so in obiger Proportion:

$$ad : ac = bd : bh$$

$$1 : \cos \frac{1}{2} v = 2 \sin \frac{1}{2} v : \sin v$$

$$\sin v = 2 \sin \frac{1}{2} v \times \cos \frac{1}{2} v$$

§. 42. Zusatz. Eben dieß erhält man auch, wenn man die beyden Werthe von b , welche oben gefunden worden, in eine Gleichung setzt und fort kalkuliert, bis man $\sin v$ allein hat. Es ist demnach

$$1) \quad b = 2 c \times \sin \frac{1}{2} v$$

$$2) \quad b = \frac{c \times \sin v}{\cos \frac{1}{2} v}$$

$$2 c \times \sin \frac{1}{2} v = \frac{c \times \sin v}{\cos \frac{1}{2} v}$$

:c

$$2 \sin \frac{1}{2} v = \frac{\sin v}{\cos \frac{1}{2} v}$$

$$2 \sin \frac{1}{2} v \times \cos \frac{1}{2} v = \sin v$$

§. 43. Anmerk. Diese und andere dergleichen Ausdrücke werden uns bey Berechnung der Polygone sehr gut zu Statten kommen.

§. 44. Lehrsatz. Der Sinus eines halbirten solchen Winkels ist auch gleich der Quadratur:

wurzel aus dem halben Sinusversus des ganzen Scheitelwinkels, oder auch weniger dem Kosinus halbiert.

S a t 3. Fig 138

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

B e w e i s.

$$ad : cd = bd : bh$$

subst. $1 : \sin \frac{1}{2} v = 2 \sin \frac{1}{2} v : (1 - \cos v)$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} v = 1 - \cos v$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} v = \frac{1 - \cos v}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

§. 45. Anmerk. Ob ich gleich wegen Vermeidung der Weitläufigkeit nicht gesinnet war, von diesem Satze Gebrauch zu machen, so konnte ich doch nicht umhin, selben den übrigen Lehresätzen der Trigonometrie einzuverleiben; um zu beweisen, wie kurz und faßlich sich diese mathematische Wahrheit erhärten läßt; da doch Klemm in seinem Lehrbuche §. 735 eine so unnöthige Länge und Schwierigkeit dabei affektiert.

Berechnung der Dreyecke.

§. 46. Eintheilung. Sämmtliche Aufgaben der ebenen Trigonometrie können füglich in drey Klassen abgetheilt werden. Zur ersten gehören jene Fälle, wo eine Seite und zweyen Winkel, folglich auch mittelbar der dritte, gegeben sind. Zur zweyten, wenn zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind. Und zur dritten gehört ein einziger Fall, wenn nämlich alle Seiten bekannt sind, man soll die Winkel bestimmen.

Erste

Erste Klasse.

S. 47. Zusatz. Weil bey den Aufgaben dieser Klasse jeder zu bestimmenden Seite ein Winkel entgegenesetzt ist, so lassen sich alle Aufgaben derselben aus dem obigen Lehrsatz vom Verhältnisse der Seiten zu den Sinussen der Gegenwinkel auflösen.

S. 48. Aufgabe. Es halte in dem Dreyecke Fig. 139 abc der Winkel $a = 36^{\circ}, 19'$ der Winkel $b = 44^{\circ}, 5'$, und die Seite $bc = 126$; wie groß ist die Seite ab ?

Auflösung. Weil ab dem Winkel c entgegensteht, so muß erst c bestimmt werden. Es ist aber $c = 180^{\circ} - (36^{\circ}, 19' + 44^{\circ}, 5') = 180^{\circ} - 80^{\circ}, 24' = 99^{\circ}, 36'$. Allein stumpfe Winkel haben in den Tafeln keine Sinusse, also muß der Nebenwinkel von $99^{\circ}, 36'$ gesucht werden, folglich $180^{\circ} - 99^{\circ}, 36' = 80^{\circ}, 24'$; weil zween Nebenwinkel einen Sinus geben.

Nun ist ferner $ab : \sin c = bc : \sin a$

substit. $x : \sin 80^{\circ}, 24' = 126 : \sin 36^{\circ}, 19'$

In den Tafeln $x : 0,9859960 = 126 : 0,5922476$

$x \times 0,5922476 = 0,985996 \times 126$

$= 124,235496$

$x = 124,235496$

$0,5922476$

$x = 209,7''$

S. 49. Anmerk. Ungleich kürzer fallen aber dergleichen Rechnungen aus, wenn man sich der Logarithmen bedient, die in den Tafeln allemal daneben zu stehen pflegen. Man sieht aus der Proportion also gleich, wessen Logarithmen zusamm addiert, und was für einer abgezogen werden müsse.

Die Rechnung sieht nun so aus.

$$\text{Log. sin } 80^\circ = 9,9938752$$

$$\text{Log. } 126 = 2,1003705$$

$$12,0942457$$

$$\text{Log. } 36^\circ 19' = 9,7725033$$

$$2,3217424$$

Weil dieser Logarithm einer Seite entsprechen muß, so wird er bey den natürlichen Zahlen aufgeschlagen, wo ihm die obige Zahl 209,7 zugehört.

S. 50. Anmerk. Von der Natur und dem Gebrauche der Logarithmen ist zwar schon in der Algebra unter seinem Artikel umständlich geredet worden. Doch muß hier noch hie und da etwas von den Logarithmen trigonometrischer Linien erinnert werden. Die Grundlage oder Basis derselben ist die Eintheilung des Radius in 10000000000 gleiche Theile, wie es Pitagoras in seinem großen Kanon gethan. Daher hat der Logarithm des Sinus totus zum Kennziffer 10. In den gemeinen Tafeln, wie in Blafs oder Wolfs seinen, ist der Radius zwar nur in 10000000 Theile getheilt, folglich müßte der Logarithm vom Sinus totus zum Kennziffer die Zahl 7 haben, aber er hat dem ungeachtet 10; und alle Kennziffer durchaus sind um 3 zu groß, weil sie aus den obbemeldten Kanon ausgeschrieben worden. Es bringt indeß diese Unrichtigkeit keinen Fehler in die Rechnung; da bey Proportionen, wenn grosse Kennziffer addiert und dann wieder abgezogen werden, immer das nämliche bleibt. Es sind ferner Blafs, Wolfs, u. a. dgl. Tafeln so eingerichtet, daß man mit jedem aufgeschlagenen Blatte zweyen Winkel oder Bögen antrifft, den einen dießseits, den andern jenseits, welche miteinander 90° machen: folglich wenn auf der einen Seite Sinusse und Tangenten sind, so befinden sich auf der andern Seite die Kosinusse und Kotalgenten, und so auch umgekehrt. Z. B. man schlägt den Sinus von 20° auf, so steht gerade über auch der Sinus von 70° , das ist sein Kosinus, u. s. f. Die Sekanten und Sinusversus sind wegen ihrer Entbehrlichkeit ganz weggelassen worden. Im Fall man aber ihrer nöthig hätte, so sind sie und ihre Logarithmen bald gefunden. Es davi nur, gemäß der Formel $\sec = \frac{1}{\cos}$ und $\sinvers = 1 - \cos$ verfahren werden.

Endlich für stumpfe Winkel ist kein Sinus anzutreffen. Weil aber bekannt ist, daß zweyen Nebenwinkel einerley Sinusse haben, so muß also allemal des stumpfen Winkels Komplement zu 180° genommen und aufgesucht werden.

S. 51. Zusatz: Bey den Aufgaben der ersten Klasse kann also trigonometrisch nur um eine Seite des Dreyeckes gefragt werden; denn der dritte Winkel bestimmt sich schon arithmetisch.

Zweite Klasse,
wenn zwei Seiten und ein Winkel gegeben ist.

S. 52. Eintheilung. Entweders befindet sich der gegebne Winkel nicht zwischen den gegeben Seiten: oder er ist von selben eingeschlossen.

Erster Fall.

S. 53. Anmerk. Hier wird allemal etwas vom Gegebenen und Gesuchten nach S. 34 gegeneinander stehen. Es muß aber oft vorher ein anders Stück gefunden werden, um das Verlangte zu erhalten. Z. B. Es soll ein Winkel gefunden werden, dem gerade keine gegebne Seite entgegen steht. Man suche also allererst den andern Winkel, dem gewiß eine bekannte Seite opponiert ist, so wird der dritte als Komplement zu 180° auch bekannt seyn.

S. 54. Aufgabe. Es sey Fig. 140 in dem Dreyeck abc

$$\begin{aligned} ab &= 250' \\ c &= 76^\circ 19' \\ bc &= 184' \text{ und } a = x \end{aligned}$$

Auflösung. Weil hier alles einander gegenübersteht, so ist

$$ab : bc = \sin c : \sin a$$

substit. $250 : 184 = \sin 76^\circ 19' : \sin x$

$$\text{Log. } 184 = 2,2648178$$

$$\text{Log. } 76,^\circ 19 = 9,9874955$$

$$\hline 12,2523133$$

$$\text{Log. } 250 \quad 2,3979400$$

$$\hline 9,8543733 = \text{Log. } x \text{ Welchem}$$

die Größe $45^\circ, 32'$ entspricht.

S. 55. Aufgabe. In dem Dreyed b d f Fig. 141
 sey $b = 133^{\circ}20'$
 $bf = 300'$
 $fd = 514'$
 $bd = x$

Auflösung. Weil der Seite bd auch ein un-
 bekannter Winkel entgegensteht, so muß allererst der
 andere Winkel gefunden werden. Man bestimme zu-
 vor den Nebenwinkel von $133^{\circ}20'$. Er ist 180°
 $- 133^{\circ}20' = 46^{\circ}40'$.

Es ist demnach

$$fd : bf = \sin b : \sin d$$

$$\text{substit. } 514' : 300' = \sin 46^{\circ}40' : \sin x$$

$$\text{Log. } 300 = 2,4771213$$

$$\text{Log. } \sin 46^{\circ}40' = 9,8617576$$

$$12,3388789$$

$$\text{Log. } 514 = 2,7109631$$

$$\text{Log. } x = 9,6279158$$

Die entsprechende Zahl dafür ist $25^{\circ}7' = d$
 Es machen nun die beyden Winkel $133^{\circ}20' + 25^{\circ}7'$
 $= 158^{\circ}27'$; folglich der dritte Winkel $180^{\circ} -$
 $158^{\circ}27' = 21^{\circ}33' = f$. Nun ferner

$$bd : fb = \sin f : \sin d$$

$$x : 300 = \sin 21^{\circ}33' : \sin 25^{\circ}7'$$

$$\text{Log. } 300 = 2,4771213$$

$$\text{Log. } \sin 21^{\circ}33' = 9,5650363$$

$$12,0421576$$

$$\text{Log. } \sin 25^{\circ}7' = 9,6278397$$

$$\text{Log. } bd = 2,4143179 \text{ dessen}$$

zugehörige Zahl 259,6" ist.

Zweiter Fall.

S. 56. Zusatz. In Aufgaben von Dreyecken, wo zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel gegeben sind, weiß man zwar die Summe der übrigen zween Winkel, aber ihre Differenz nicht. Hätte man auch diese, so würde nach der Algebra die halbe Summe sammt der halben Differenz den größern Winkel von beyden geben; und die halbe Summe weniger der halben Differenz den kleinern Winkel.

S. 57. Lehrsatz. Die halbe Differenz der übrigen zween Winkel läßt sich in diesem Fall allemal bestimmen; denn es verhält sich die Summe der gegebenen Seiten zu ihrer Differenz; wie die Tangente der halben Summe der übrigen beyden unbekannten Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Satz 3. Fig. 142

$$(a+d+a-b) : (a+d-a-b) = \tan \frac{b+d}{2} : \tan \frac{b-d}{2}$$

Beweis.

Man beschreibe mit der kleinern gegebenen Seite aus dem Scheitelpunkt des gegebenen Winkels einen Zirkel, verlängere die größere von den gegebenen Seiten um die Größe des Radius rückwärts, verbinde immer zween Radiusse mit Sehnen und ziehe mit einer der Sehnen vom Endpunkt der größern Seite eine Linie parallel, bis die andere verlängerte Sehne sie schneidet, so ist

$$\begin{aligned} m &= o + n \\ \text{auch } m &= b + d \\ \hline o + n &= b + d; \text{ aber } o = n \end{aligned}$$

also

$$\begin{array}{lcl}
 \text{also} & 2n = b + d \text{ und } n = r + d & \\
 \text{subst.} & 2(r + d) = b + d & \\
 :2 & r + d = \frac{b + d}{2}; \text{ der halben Summe} & \\
 \times 2 & 2r + 2d = b + d & \\
 & 2r = b - d & \\
 :2 & r = \frac{b - d}{2} \text{ der halben Differenz.} &
 \end{array}$$

Nun ist wegen dem Parallelschnitt in dem Dreys-
ecke gfd

$$\begin{array}{lcl}
 & gd : cd = gf : bf \text{ oder} & \\
 (ad + Rad) : (ad - Rad) = \text{tang}(r + d) : \text{tang } r & & \\
 \text{subst. } (ad + ab) : (ad - ab) = \text{tang}\left(\frac{b + d}{2}\right) : \text{tang}\left(\frac{b - d}{2}\right) & &
 \end{array}$$

Anwendung. Es sey

$$\begin{array}{lcl}
 ad = 540 & & \\
 ab = 320 & & \\
 a = 57^{\circ} 34' & &
 \end{array}$$

Folglich

$$\begin{array}{lcl}
 b + d = 180 - 57^{\circ} 34' & & \\
 = 122^{\circ} 26' & &
 \end{array}$$

Proportion

$$\begin{array}{lcl}
 (540 + 320) : (540 - 320) = & & \\
 = \text{tang } \frac{122^{\circ} 26'}{2} : \text{tang } x & &
 \end{array}$$

abgek. $960 : 220 = \text{tang } 61^{\circ} 13' : \text{tang } x$

Log. 220 = 2,3424227

Log. tang $61^{\circ} 13' = 10,2601304$

12,6025531

Log. 960 = 2,9822712

Log. tang $x = 9,6202819$, welchen ein

Bogen von $22^{\circ} 38'$ entspricht, der die halbe Differenz der beyden unbekannten Winkel ausdrückt. Wird dieß nun zur halben Summe $61^{\circ} 13'$ addiert, nämlich $61^{\circ} 13' + 22^{\circ} 38' = 83^{\circ} 51'$ so hat man den größern Winkel; zieht man sie aber von einander ab $61^{\circ} 13' - 22^{\circ} 38' = 38^{\circ} 35'$ so wird dieß der kleine Winkel d seyn.

§. 58. Zusatz. Sind einmal die Winkel da, so ist nichts leichters, als auch die dritte Seite zu finden.

§. 59. Zusatz. Bey rechtwinklichten Dreyecken darf dieser Fall nicht so mühsam berechnet werden; denn es läßt sich allemal aus zwey gegebenen Seiten die dritte durch den pythagorischen Lehrsatz finden; und ist diese einmal da, so hat es keine Mühe mehr, auch die Winkel zu bestimmen.

§. 60. Zusatz. Indesß kann die Sache auch bey schiefwinklichten Dreyecken durch lauter Sinusse abgethan werden. Man fälle vom Endpunkte der kleinern gegebenen Seite auf die größere einen Perpendikel herab, so entstehen zwey Dreyecke, nämlich Fig. 143 abc und aed . Man ziehe ferner den bekannten Winkel von 90° ab, so ist auch der Winkel o gefunden. Nun um ac und bc zu finden, dienen folgende Proportionen $ac : ab = \sin b : \sin tot.$ Dann $bc : ab = \sin o : \sin tot.$ Es sind also, wenn das gefundene bc von bd abgezogen wird in dem rechtwinklichten Dreyeck aed zwey Seiten sammt dem eingeschlossnen rechten Winkel bekannt, wo dann alles übrige leicht zu finden ist.

Dritte Klasse.

§. 61. Lehrsatz. In Dreyecken, wo alle Seiten bekannt sind, ist der Cosinus des mittleren Winkels gleich der Summe der Quadraten von der größten und kleinsten Seite, weniger dem Quadrat der mittleren Seite, dieß alles dividiert durch das doppelte Produkt der kleinsten und größten Seite. Wenn demnach Fig. 144 a die größte, b die mittlere, c die kleinste Seite, und m den mittleren Winkel bedeutet, so ist der

§

Satz

Satz.

$$\cos m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Beweis.

Man beschreibe mit der kleinsten Seite aus dem größern anliegenden Winkel derselben einen Zirkel durch das Dreyeck, verlängere die mittlere Seite um den Radius, damit sie sammt der größten Seite Sehnen werden, die sich außer der Peripherie durchschneiden. Es ist also nach S. 167 Geom.

$$kb \times bg = bi \times bf$$

$$\text{aber } kb = ab + \text{Rad}$$

$$\text{oder } = ab + ai$$

$$\text{und } bg = ab - \text{Rad}$$

$$\text{oder } = ab - ai$$

$$\text{substit. } (ab + ai) \times (ab - ai) = bi \times bf$$

$$\text{oder } (b + c)(b - c) = ax$$

$$b^2 - c^2 = ax$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a} = x = bf$$

Wenn nun bf vom ganzen bi abgezogen, und der Rest als Sehne halbiert wird, so hat man den Werth des Kosinus von i in einem Ausdrucke, wo der Radius die kleinste Seite bedeutet. Daher $a - \frac{b^2 + c^2}{a} = fi$

$$a - \frac{b^2 + c^2}{a} = fi$$

$$\text{oder } \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a} = fi$$

$$\div 2 \quad \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = fi = di = \cos m$$

weil a der Sinus von m ist.

Will

Will man nun, daß der Radius nicht die ganze kleinste Seite, sondern eine Einheit bedeuten soll, so gilt folgende Proportion

$$\begin{array}{l} R : \text{Cos } m = r : \text{cos } m \quad \text{§. 31.} \\ \text{substit.} \quad c : \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = 1 : \text{cos } m \end{array}$$

$$\text{cos } m \times c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$\text{cos } m = \frac{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}}{2ac}$$

Anwendung. Es sey in dem Dreyeck abc

$$bi = 76 = a$$

$$ab = 68 = b$$

$$ai = 52 = c$$

$$\begin{aligned} \text{also cos } i &= \frac{76^2 - 68^2 + 52^2}{2 \times 76 \times 52} \\ &= \frac{5776 - 4624 + 2704}{7904} \\ &= \frac{3856}{7904} = 0,48784 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Wird nun dieß in den Sinustabellen nachgeschlagen, so findet man gerade gegenüber den Kosinus von $60^\circ 48'$ als des ihm nächst entsprechenden Winkels.

§. 62. Zusatz. Indes scheint die Rechnung immer kürzer und leichter zu seyn, wenn man mit dem Beweise auch gleich die Auflösung mit einflechtet. Z. B. wenn das Segment bf Fig. 144 durch Logarithmen gefunden ist, und nach Abzug desselben von bi , mit der Hälfte und den darauf gefällten Perpendikel folgende Proportion angestellt wird.

$$\begin{array}{l} ai : di = \sin r : \sin o \quad \text{oder} \\ \text{weil} \quad \sin o = \text{cos } m \quad \text{ist} \end{array}$$

$$ai : di = \sin 90 : \text{cos } m$$

R 2

§. 63.

S. 63. Zusatz. Obige Formel fällt stark zusammen, wenn das Dreyeck gleichschenkligh ist. Denn bey spizwinklichten wird die Seite $a = b$ und bey stumpfwinklichten $b = c$ seyn; folglich ist im ersten Fall

$$\cos m = \frac{a^2 - a^2 + c^2}{2ac} = \frac{c^2}{2ac} = \frac{c}{2a}$$

Im zweyten Fall

$$\cos m = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{2ac} = \frac{a^2}{2ac} = \frac{a}{2c}$$

Anwendung der Trigonometrie auf Polygone und Birkelabschnitte.

S. 64. Lehrsatz. Die Seite eines regulären Vieleckes läßt sich aus dem Zentralwinkel und dem Polygonradius trigonometrisch bestimmen. Es ist, wenn der Polygonradius $= a$, der Zentralwinkel $= c$, und die Seite $= l$ heißt, der

Satz

$$l = 2a \sin \frac{1}{2}c$$

Beweis.

Es ist S. 38 erhärtet worden, daß in jedem gleichschenklighen Dreyeck $b = 2c \times \sin \frac{1}{2}v$. Da aber hier b die Polygonseite, c den Polygonradius und v den Zentralwinkel bedeutet, so ist nach der Substitution der Satz vollkommen erwiesen.

S. 65. Zusatz. Wird statt c die Anzahl der Seiten gegeben, so ist, weil $c = \frac{360}{n}$, mehrmal

$$l = 2a \sin \frac{1}{2} \times \frac{360}{n} = 2a \sin \frac{180}{n}$$

§. 66. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines regulären Polygons ist gleich dem halben Produkte des Sinus vom Zentralwinkel in das Quadrat des Polygonradius durch die Anzahl der Seiten multipliciert.

S a t z.

$$Q = \frac{n a^2 \sin c}{2}$$

B e w e i s.

Die Basis eines Zentraldreiecks ist der Seite gleich also

$$b = 2 a \times \sin \frac{1}{2} c$$

der Perpend. $p = a \cos \frac{1}{2} c$ denn Fig. 145 ist

$$cg : cd = \sin d : \sin 90 \text{ oder}$$

$$p : a = \cos \frac{1}{2} c : 1 \text{ d. i. } p = a \cos \frac{1}{2} c$$

$$\text{mult. } bp = 2 a^2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$$

Aber es ist oben §. 41 erwiesen worden.

$$\text{daß } 2 \sin \frac{1}{2} c \times \cos \frac{1}{2} c = \sin c$$

$$\text{substit. } bp = a^2 \sin c$$

$$: 2 \quad \Delta \frac{bp}{2} = \frac{a^2 \sin c}{2} \text{ Es sind aber beim Poly-}$$

$$\times n \quad n \Delta = \frac{n a^2 \sin c}{2}$$

$$\text{oder } Q = \frac{n a^2 \sin c}{2}$$

§. 67. Zusatz. Weil $c = \frac{360}{n}$, so wird eben
daraus auch allgemein $Q = \frac{n a^2 \sin \frac{360}{n}}{2}$ seyn.

§. 68. Zusatz. Will man diese Ausdrücke logarithmisch berechnen, so wird am Ende vom Kenn-
ziffer

ziffer allemal 10 weggestrichen; weil der Sinus totus überall = 1 gesetzt, das heißt, ausgelassen worden.

§. 69. Anmerk. Man vergleiche unsern Satz mit Klemms Lehrbuche S. 764, wende sie auch beide praktisch an, und sehe dann, welcher richtiger ist. Klemm hat darinn geirrt, daß er den Polygonradius mit dem trigonometrischen Radius verwechselte. Anfangs bezeichnete er zwar jenen mit a , und diesen durch r ; allein mitten im Beweise sängt er wieder an: ist nun $r = a$, so ist u. s. f. Dieß kann aber nicht statt finden; weil der trigonometrische Radius immer einen beständigen Werth bebehält, da ihn der andere nach Belieben verändern kann, ohne die Allgemeinheit des Satzes zu stören. Nichts wundert mich mehr, als jene neue Auflage des Klemms, die Remigius Döttler, Priester der frommen Schulen in Wien 1786 veranstaltet, wo alle Fehler desselben, deren es doch mehrere giebt, wieder getreulich abgedruckt wurden. Vielleicht hätte ich das nämliche Schicksal, wenn ich mir begeben ließ, irgend ein hebräisches Werkchen von neuem heraus zu geben. Döttler verspricht überdieß auf dem Titelblatte Anmerkungen und Erläuterungen, wovon ich aber fast gar keine fand, obwohl sie dem Studierenden an manchen Orten sehr willkommen gewesen wären.

§. 70. Lehrsatz. Das Segment eines Kreises ist, wenn r den Radius, c die Grade des Bogens, und π die Zahl 3,14 bedeutet, dem Ausdrucke: $\left(\frac{c\pi}{360} - \frac{\sin c}{2}\right)r^2$ gleich.

B e w e i s.

Der Sektor ist, wie §. 209. Geom. gezeigt worden, wenn statt a das c substituiert wird $= \frac{cr^2\pi}{360^\circ}$.

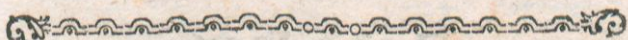
Ferner, wie wir eben gefunden, ist der Inhalt jenes gleichschenkligen Dreieckes, das davon abgezogen werden muß, wenn r den Schenkel bedeutet $\frac{r^2 \sin c}{2}$.

Folglich der Rest oder das Segment $\frac{cr^2\pi}{360} - \frac{r^2 \sin c}{2}$
 $= \left(\frac{c\pi}{360} - \frac{\sin c}{2}\right)r^2$

§. 71.

S. 71. Zusatz. Ist der Bogen 180° , so wird der Sinus = 0 und der Ausdruck ändert sich in diesen um: $\left(\frac{180^\circ \pi}{360} - 0\right) r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ welches die halbe Zirkelfläche ausdrückt.

S. 72. Anmerk. Es wäre noch ein weites Feld übrig, wie aus verschiedenen gegebenen Stücken eines Dreiecks, Vierecks u. s. f. der Inhalt derselben, oder andere Größen gefunden werden können; doch, um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir sie weglassen.



Von Erfindung der Sinusse n facher Bögen, als ein Anhang zur ebenen Trigonometrie.

Man versteht unter dieser Anweisung die Lehre, wie aus dem bekannten Sinus eines Bogens z. B. des Bogens von 30° die Sinusse aller übrigen Bögen gefunden werden können. Darüber sind mir zwei Methoden bekannt; eine vom Wolf, die andere von Klemm. Erstere ist zwar richtig, aber nicht aus der Natur der Sache selbst; sondern durch einen Umweg hergeholt. Letztere beruht auf chimerischen Größen, und ist überaus mühsam. Ich wollte daher keinen dieser Wege einschlagen, sondern mir eine neue Bahn eröffnen, wo dieß Geschäft eine weit natürlichere Wendung bekommen soll; allein ich erblickte eine geraume Zeit nachher fast die nämliche Verfahrensgart bey Hrn. v. Segner, welches mich natürlich theils erfreuen, theils auch böse machen mußte.

Ein

Ein Paar Lehrsätze müssen wir voraus schicken, und dann läßt sich die Sache einleiten. Hier sind sie sammt ihren Beweisen.

S. 73. **Erster Lehrsatz.** Der Summsinus zweener Bögen, deren Radius eins gelten soll, ist die Summe der wechselweise in einander multiplierten Sinusse und Cosinusse der einzelnen Bögen. Es heiße der Winkel eines Bogens m , des andern o , die Summe derselben s , so ist der

S a t z Fig. 146

$$\sin s = \sin o \times \cos m + \sin m \times \cos o$$

B e w e i s.

Man ziehe die Winkel, Bögen und Sinusse wirklich, so wird, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke folgendes Paar Verhältnisse statt haben.

$$fa : fs = df : cf \text{ oder}$$

$$\sin s - cf : \cos o - df = df : cf$$

Aber cf und df zu finden ist auch

$$cf : cd = bs : hs \text{ oder}$$

$$cf : \sin o = 1 : \cos m \text{ also}$$

$$cf = \frac{\sin o}{\cos m}$$

Und $cd : df = hs : bh \text{ oder}$

$$\sin o : df = \cos m : \sin m$$

$$df = \frac{\sin o \times \sin m}{\cos m}$$

Diese Werthe nun in der erstern Gleichung substituirt, so erhält man

$$\sin s$$

$$\left(\sin s - \frac{\sin o}{\cos m} \right) : \left(\cos o - \frac{\sin o \sin m}{\cos m} \right)$$

$$= \frac{\sin o \sin m}{\cos m} : \frac{\sin o}{\cos m}$$

abgek. $\left(\sin s - \frac{\sin o}{\cos m} \right) : \left(\cos o - \frac{\sin o \sin m}{\cos m} \right)$

$$= \sin m : 1$$

$$\sin s - \frac{\sin o}{\cos m} = \sin m \cos o - \frac{\sin o \cos m^2 m}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \frac{\sin o - \sin o \sin^2 m}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \frac{(1 - \sin^2 m) \sin o}{\cos m}$$

aber $1 - \sin^2 m = \cos^2 m$ substit.

$$\sin s = \sin m \cos o + \frac{\cos^2 m \sin o}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \cos m \sin o$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \cos m \sin o$$

S. 74. Zusatz. Wären nun die beyden Bögen der Winkel o und m gleich, so würde $s = 2m = 2 \times o$ seyn; also $\sin 2m = \sin m \cos m + \sin m \cos m$ oder $\sin 2m = 2 \sin m \cos m$

S. 75. Zusatz. Geze man ferner o wäre noch so groß als m , das ist $o = 2m$, so würde $s = 3m$ seyn. Wenn nun in der obigen Formel

$\sin s = \sin m \cos o + \cos m \sin o$ subst. wird, so giebt es

$$\sin 3m = \sin m \cos 2m + \cos m \sin 2m$$

Allein der Kosinus vom doppelten Winkel ist noch unbekannt, ob wir gleich den Sinus desselben wissen: ihn zu finden dient aber folgender Lehrsatz.

S. 76. Zweyter Lehrsatz. Der Summkosinus zweener Bögen ist das Produkt der Kosinüsse

nüsse einzelner Bögen, weniger dem Produkt ihrer Sinusse. Es sey alles wie vorhin, so ist der

S a t z

$$\cos s = \sin o \sin m - \cos o \cos m$$

B e w e i s.

$$\begin{aligned} as : fs &= cd : fc \quad \text{oder} \\ \cos s : \cos o - df &= \sin o : cf \\ \text{aber} \quad cf : cd &= bs : hs \quad \text{oder} \\ cf : \sin o &= 1 : \cos m \\ \text{also} \quad cf &= \frac{\sin o}{\cos m} \\ \text{Und} \quad df : cd &= bh : hs \\ df : \sin o &= \sin m : \cos m \\ \text{also} \quad df &= \frac{\sin o \sin m}{\cos m} \end{aligned}$$

Man substituïre nun die beyden gefundenen Werthe für df und cf in der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} \cos s : \cos o - df &= \sin o : cf \\ \cos s : \left(\cos o - \frac{\sin o \sin m}{\cos m} \right) &= \sin o : \frac{\sin o}{\cos m} \\ \cos s &= \left(\sin o \cos o - \frac{\sin^2 o \sin m}{\cos m} \right) : \frac{\sin o}{\cos m} \\ &= \left(\sin o \cos o - \frac{\sin^2 o \sin m}{\cos m} \right) \times \frac{\cos m}{\sin o} \\ &= \frac{\sin o \cos o \cos m}{\sin o} - \frac{\sin^2 o \sin m \cos m}{\cos m \sin o} \quad \text{abgef.} \\ \cos s &= \cos o \cos m - \sin o \sin m \end{aligned}$$

§. 77. Zusatz. Setze man, nun wie vorhin, $o = m$ so ist $s = 2m$ und $\cos o = \cos m$; $\sin o = \sin m$. Folglich

$$\cos 2m = \cos m \cos m - \sin m \sin m$$

$$\cos 2m = \cos^2 m - \sin^2 m$$

§. 78. Zusatz. Nun sind wir auch im Stande in der obigen Formel $\sin 3m = \sin m \cos 2m + \cos m \sin 2m$ sowohl für $\sin 2m$, als für $\cos 2m$ die Werthe zu substituieren. Es entsteht

$$\sin 3m = \sin m \times (\cos^2 m - \sin^2 m) + \cos m \times (2 \sin m \cos m)$$

$$\sin 3m = \sin m \cos^2 m - \sin^3 m + 2 \cos^2 m \sin m$$

$$= 3 \sin m \cos^2 m - \sin^3 m$$

§. 79. Zus. Nimmt man ferner wie zuvor an, daß o noch so groß als m sey, so ist $s = 3m$ und es läßt sich in der Formel $\cos s = \cos o \cos m - \sin o \sin m$ wieder substituieren. Denn weil erstens $o = 2m$, so ergiebt sich

$$\cos 3m = \cos 2m \cos m - \sin 2m \sin m$$

Weil zweytens $\cos 2m = \cos^2 m - \sin^2 m$

$$\text{und} \quad \sin 2m = 2 \sin m \cos m$$

so ist $\cos 3m = (\cos^2 m - \sin^2 m) \times \cos m - (2 \sin m \cos m) \times \sin m$

$$\cos 3m = \cos^3 m - \cos m \sin^2 m - 2 \sin^2 m \cos m$$

$$= \cos^3 m - 3 \cos m \sin^2 m$$

§. 80. Zus. Wenn nochmal angenommen wird, daß $o = 3m$, so ist $s = 4m$ und die Formel $\sin s = \sin o \cos m + \cos o \sin m$ metamorphosiert sich erstens in $\sin 4m = \sin 3m \cos m + \cos 3m \sin m$ §. 80, und nachher durch die Substitution der gefundenen Werthe für $\sin 3m$ und $\cos 3m$ wird

$$\sin 4m = (3 \sin m \cos^2 m - \sin^3 m) \times \cos m + (\cos^3 m - 3 \cos m \sin^2 m) \times \sin m$$

$$\sin 4m = 3 \sin m \cos^3 m - \cos m \sin^3 m + \sin m \cos^3 m - 3 \cos m \sin^3 m$$

$$\sin 4m = 4 \sin m \cos^3 m - 4 \sin^3 m \cos m$$

Zus. §. 81. Führt man fort, so auch für den Kosinus des 4fachen Bogens zu substituieren, so erhält man

$$\cos 4m = \cos^4 m - 6 \sin^2 m \cos^2 m + \sin^4 m$$

Zus. §. 82. Die Tabelle für die vielfachen Sinusse wäre demnach, wenn wir statt Sinus nur schlechtweg f , und für Kosinus c setzen wollen, folgende

$$1) f$$

$$2) 2 f c$$

$$3) 3 f c^2 - f^2$$

$$4) 4 f c^3 - 4 f^3 c$$

$$5) 5 f c^4 - 10 f^3 c^2 + f^5$$

$$6) 6 f c^5 - 20 f^3 c^3 + f^5 c$$

$$7) 7 f c^6 - 35 f^3 c^4 + 21 f^5 c^2 - f^7$$

Hält man demnach die Wörden von $(c + f)$ in steigender Ordnung gegen diese Tabelle, so läßt sich die allgemeine Formel für den Sinus des n fachen Bogens leicht abziehen. Denn man betrachte die steigenden Wörden hier

$$(c+f)^1 = c+f$$

$$(c+f)^2 = c^2 + 2cf + f^2$$

$$(c+f)^3 = c^3 + 3c^2f + 3f^2c + f^3$$

$$(c+f)^4 = c^4 + 4c^3f + 6c^2f^2 + 4cf^3 + f^4$$

$$(c+f)^5 = c^5 + 5c^4f + 10c^3f^2 + 10c^2f^3 + 5cf^4 + f^5$$

$$(c+f)^6 = c^6 + 6c^5f + 15c^4f^2 + 20c^3f^3 + 15c^2f^4 + 6cf^5 + f^6$$

$$(c+f)^7 = c^7 + 7c^6f + 21c^5f^2 + 35c^4f^3 + 35c^3f^4 + 21c^2f^5 + 7cf^6 + f^7;$$

So wird man finden, daß immer das zweyte, vierte, sechste Glied u. s. f. jeder Würde mit abwechselnden Zeichen die Formel für den nämlichen vielfachen Sinus geben. Da nun die nte Würde von $(c + f)$ nach dem Binomium des Newtons, diese Reihe giebt:

$$c^n + n c^{n-1} f + \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2} c^{n-2} f^2 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} f^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} c^{n-4} f^4 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} f^5 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} c^{n-6} f^6 \text{ u. s. f.,}$$

$$\text{so ist klar, daß der Sinus des nfachen Bogens} = \frac{n c^{n-1} f - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} f^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} f^5 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} c^{n-6} f^6 + \dots}{1}$$

$$c^{n-3} f^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} f^5 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} c^{n-6} f^6 + \dots$$

$$c^{n-6} f^6 \text{ u. s. f., so ist klar, daß der Sinus des nfachen Bogens} = \frac{n c^{n-1} f - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} f^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} f^5 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} c^{n-6} f^6 + \dots}{1}$$

$$c^{n-3} f^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} f^5 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} c^{n-6} f^6 + \dots$$

$$c^{n-5} f^5 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} c^{n-6} f^6 + \dots$$

$$\times (n-6) c^{n-7} f^7 \text{ u. s. f.}$$

Zus. S. 83. Auf eben diese Art läßt sich auch eine allgemeine Formel für den Kosinus des nfachen Bogens ausfindig machen. Denn, wenn man die obigen zerstreuten 4 ersten Kosinusse sammelt, und zu kalkulieren fortfährt, so ergiebt sich folgende Tabell, woraus sich wieder leicht eine allgemeine Formel für den Kosinus des nfachen Bogens abziehen läßt.

1) c

2) $c^2 - f^2$

3) $c^3 - 3 c f^2$

4) $c^4 - 6 f^2 c^2 + f^4$

5) $c^5 - 10 c^3 f^2 + 5 c f^4$

6) $c^6 - 15 f^2 c^4 + 5 f^4 c^2 - f^6$

7) $c^7 - 21 c^5 f^2 + 35 c^3 f^4 - 7 c f^6$

§. 84.

§. 84. Zus. Vergleicht man diese Abstammung der Ausdrücke voneinander mit der obigen Würdentabelle, so erhellet offenbar, daß die ungeraden Glieder mit abwechselnden Zeichen für den Kosinus des nämlichen vielfachen Bogens die Formel abgeben. Es ist demnach allgemein der $\cos$ des n -fachen Bogens $= c^n - \frac{n(n-1)}{1 \times 2} c^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} c^{n-4} - \dots$

$$c^n - \frac{n(n-1)}{1 \times 2} c^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} c^{n-4} - \dots$$

§. 85. Aufg. Um eine von diesen zweien allgemeinen Formeln in einem besondern Falle anzuwenden, wollen wir durch die erstere den Sinus eines Bogens z. B. von 10 Graden finden.

Auflösung. Weil nur der Sinus von 30° allein rational ist nach §. 14 Trig. so wollen wir denselben als den Sinus eines einfachen Bogens zur Basis annehmen. Es wird demnach ein Bogen z. B. von 60° der zweifache Bogen, der von 90° der dreifache Bogen u. s. f. seyn. Geht man von 30° rückwärts, so erhellet, daß ein Bogen (setzen wir von 15°) um sich nach einer ähnlichen Art auszudrücken, der halbfache, also von 10° der drittelfache Bogen von obiger Basis seyn müsse.

In unser Formel:

$$\sin n = n c^{n-1} f - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} f^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} f^5 \text{ u. s. f.}$$

$$\text{ist nun } n = \frac{1}{3}$$

$$f = \frac{1}{2}$$

$$\text{und } c = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{§. 20. Trig.}$$

Deutlichkeits halber wollen wir jedes Glied der Generalformel besonders berechnen, und, weil ihre unend.

unendliche Reihe schnell zusammen fällt, und mit 2 oder 3 Glieder begnügen. Das erste Glied giebt nach der Substitution $\frac{1}{3} \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$

$$= \frac{1}{6 \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}} =$$

$$6 \times 0,0909 = 0,5454 = 0,18335 \dots$$

Auf die nämliche Weise muß auch das zweite Minusglied nach gehöriger Substitution berechnet, und von dem eben gefundenen abgezogen werden. Es ist demnach

$$\frac{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} - 1) \times (\frac{1}{3} - 2) \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} - 3 \times (\frac{1}{2})^3}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times -\frac{2}{3} \times -\frac{5}{3} \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{-\frac{8}{3}} \times \frac{1}{8}}{6}$$

$$= \frac{\frac{10}{27} \times \frac{1}{8}}{6 (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{8}{3}}} = \frac{10}{216 \times 6 (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{8}{3}}}$$

$$= \frac{108 \times 6 \sqrt[3]{(\frac{3}{4})^4}}{5} = \frac{648 \sqrt[3]{\frac{81}{256}}}{5}$$

$$= \frac{648 \times 4,31}{5} = \frac{2792,88}{5} = 6,35$$

$$= \frac{5}{440} = 0,0114$$

Wird diese Zahl von der obigen abgezogen: $0,18335 - 0,0114 = 0,17195$, so hat man den Sinus schon in Hunderttheilen, wie aus der Vergleichung mit den Tafeln erhellet, wo selber auf 0,1736482 angesetzt ist. Wenn nun auch das dritte Glied gesucht und addiert würde, so hätte man den Sinus in Tausendtheilen u. s. f.

Indeß

Zuf. S. 86. Indesß ist man nicht benöthigt, alle Sinusse so mühsam zu bestimmen; denn hat man den Sinus von 10° einmal so genau als möglich berechnet, so kann der Sinus von 80° als sein Kosinus ungemein leichter durch die Formel $\cos = \sqrt{1 - \sin^2}$ gefunden werden. Will man ferner den Sinus von 20° oder 30° u. s. f. so lasse man den eben gefundenen als den Sinus des einfachen Bogen gelten, und substituiere in der allgemeinen Formel für n die Zahl 2, so verwandelt sich die ganze Reihe in den simplen Ausdruck $2c^{2-1}/ = 2c/$; weil in allen nachfolgenden Gliedern der Faktor $n - 2$ das ist $2 - 2 = 0$ vorkömmt, folglich alle verschwinden müssen.

Eben so ist begreiflich, daß, wenn beym 3fachen Bogen für n die Zahl 3 substituiert wird, alle jene Glieder wieder wegsfallen, wo sich der Faktor $n - 3 = 3 - 3 = 0$ einfindet. Es ist auch zugleich aus diesen Verfahren ersichtlich, wie inzwischen auf eine eben so compendiöse Art die allgemeine Formel für Kosinusse n facher Bögen genutzt werden könne.





Praktische G e o m e t r i e.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Fertigkeit, von den Sätzen der Geometrie, auf dem Felde, das ist, bey wirklichen Vermessungen, Gebrauch zu machen.

§. 2. Anmerk. Die Werkzeuge, welche man hiezu nöthig hat, lernt man weit leichter durch ihre wirkliche Vorzeigung kennen, als durch weitläufige, unbefriedigende Beschreibungen und kostspielige Kupfer, welche dieß Werkchen unnöthig vergrößern, und den Preis desselben erhöhen würden. Ich werde mich also hier mit Erklärungen derselben nicht aufhalten, sondern die Kenntnisse der gewöhnlichen Instrumente, als des Meßtischchens, der Dioptern, des Astrolabiums, des Transportärs u. d. gl. voraussetzen.

§. 3. Zusatz. Weil sich aus zureichenden Linien und Winkeln alle geometrischen Größen bestimmen lassen, so hat man auf dem Felde nichts weiter nöthig, als Linien und Winkel zu messen.

§. 4. Erklär. Eine Fläche in der Natur verjüngen, oder aufnehmen, heißt dieselbe etliche-mal beträchtlich kleiner machen, und doch ihre Figur beybehalten. Wenn also z. B. die Linien einer Gegend, einer Revier, die aufgenommen wird, 4000mal kleiner gemacht werden, als sie wirklich
sind,

sind, so wird die Fläche, wozu sie gehören, 16 millionenmal kleiner als die Gegend in der Natur; weil sich ähnliche Flächen verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender Linien.

S. 5. Zusatz. Einige Linien kann man auf dem Felde durch Stangen, Schnüre oder Ketten, die eine gewisse Länge von etlichen Schuhen haben, unmittelbar messen, andere hingegen müssen erst durch Hilfe gemessner Linien gefunden werden; ja oft wäre bey einer Linie dieß Geschäft überflüssig, da sie sich schon aus andern bekannten Linien und Winkeln bestimmen läßt.

S. 6. Anmerk. Stangen vom Holze haben die Unbequemlichkeit, daß sie bey langen Linien allzu eist angeschlagen werden müssen, und daß die Richtung aller Stangenlagen selten gerade ausfällt. Auf die Schnüre hat die nasse und trockne Witterung allzu beträchtlichen Einfluß, indem sie im ersten Falle merklich verkürzt werden. Folglich bleiben Ketten, wovon jedes Glied einen landüblichen Schuh mißt, und aus 200 solchen Gliedern besteht, das dienlichste Meßwerkzeug.

S. 7. Aufgabe. Eine gerade Linie auf dem Felde zwischen zween Punkten abzustecken, von denen einem man zum andern sehen und gehen kann.

Auflösung. Man stecke in diese Endpunkte Meßfahnen senkrecht in die Erde ein; lasse die Kette von einer dieser Fahne so lange gegen die andere fortziehen, bis das letzte Glied an die erste gehalten werden kann; bringe dann das Aua hinter dieser Fahne in eine solche Lage, daß die letzte Meßfahne von dieser bedeckt werde, und lenke den Kettenzieher durch rechts und links Winkeln so lange, bis auch sein in die Erde gesenkter Stab zugleich mit der letzten Fahne bedeckt werde. Wird nun dieß nach
jeden

jedem Kettenzug wiederholt, so ist am Ende die gerade Linie abgesteckt.

Der Beweis dieser Verfahrensart gründet sich auf die Lehre der Optik, wo erwiesen wird, daß jeder Sehstrahl in gerader Linie fortgepflanzt werde; da nun zwischen den beyden Meßfahnen eigentlich nur eine gerade Linie möglich ist, so werden alle Punkte der Absteckstäbe in der nämlichen geraden Linie liegen; weil durch selbe kein einziger Nebenstrahl des Auges verhindert wird; folglich können sie sich in keiner andern, als obbemeldter Linie befinden.

S. 8. Zusatz. Sind die beyden Endpunkte der Linie weiter von einander entfernt, als daß einer aus dem andern bequem gesehen werden kann, so mag zwischen ihnen noch eine solche Meßfahne in die Erde gesenkt werden; geht dieß auch nicht wohl an, z. B. durch Wälder, so muß zu andern Kunstgriffen, als zur Bouffole (Magnetnadel) u. d. gl. die Zuflucht genommen werden.

S. 9. Aufgabe. Einen rechten Winkel auf dem Felde durch Hilfe der Meßkette zu schlagen, oder, was auf eines hinausläuft, einen Perpendikel auf irgend einer Linie zu errichten.

Auflösung. Es ist aus dem pythagorischen Lehrsatz bekannt, daß drey Seiten, deren eine 3, die andre 4, und die dritte 5 Schuh hält, oder (doppelt genommen) von 6, 8 und 10 Schuhen, ein rechtwinklichtes Dreyeck bilden; wenn demnach 18 Schuhe von der Kette angezogen werden, ohne die Lage der Kettenrichtung, worauf man den Perpendikel fallen soll, zu verändern, wie z. B. Fig. 147 die Richtung nach der Linie $a b$, und befestiget das End
 2 2 dieses

dieses Kettenstückes 6 Schuhe rückwärts, wie hier in *c*, spanet dann den zehnten Kettenring so lange an, bis es ein Dreyeck giebt, so wird die Linie *b d* perpendicular auf *a b* seyn; weil es unmöglich ist, auf diese Art ein anders, als ein rechtwinklichtes Dreyeck zu errichten.

S. 10. Aufgabe. Eine gerade Linie durch Hindernisse, wie z. B. einer kleinen Grube, Pflüge, Dickicht, Weiher, Rinnsalbeugung eines Flusses, u. d. gl. durchzumessen oder abzustrecken.

Auflösung. Es soll Fig. 48 die Linie *a b* gemessen werden. Setzen wir, es sey in *y* eine solche Pflüge, so messe man vom ersten Endpunkte aus, bis an das Hinderniß, d. i. bis *c*; hier werde ein rechter Winkel nach S. 9 geschlagen, und die Kette so lange in gerader Richtung fortgezogen, bis wieder bey *d* unter einen andern rechten Winkel fortgemessen werden kann. Sieht man endlich bey *f*, daß sich ein Perpendicular auf die wahre Linie fällen läßt, so schlage man mehrmals in *f* und dann in *g* rechte Winkel, so wird man in der vorigen Richtung, und $fd = gc$ seyn. Denn wegen rechten Winkeln ist *fd* parallel mit *gc*, und *cd* mit *gf*; da nun Paralleln zwischen Paralleln gleich sind, so ist $fd = gc$, was zu erweisen war.

Von Weitenmessungen.

S. 11. Eintheilung. Es giebt in allem dreyerley Weiten zu bestimmen, welche sich unmittelbar nicht wohl messen lassen.

I Wenn

I Wenn man zwar von einem Orte zum andern nicht kommen kann, wohl aber von einem dritten willkürlich gewählten Orte zu allen beyden.

II Wenn zwey Derter so liegen, daß man aus einen willkürlich gewählten Orte zu einem von beyden gelangen kann.

III Wenn zwey Derter durchaus unzugänglich sind, oder wenigst dafür angenommen werden.

§. 12. Aufgabe. Es soll eine Weite von der ersten Art 1) ohne Meßriß, 2) mit Meßriß geometrisch, 3) trigonometrisch gemessen werden.

Erste Auflösung. Es seyen x und y die Derter, deren Entfernung bestimmt werden soll. Man suche demnach einen dritten Ort c , woraus man zu beyden Dertern sehen und in gerader Linie gehen kann, messe mit der Kette wirklich überall hin, nämlich von c nach x und y und trage diese Distanzen auch rückwärts im nämlichen Maasse und Richtung, so werden die Endpunkte a und b gerade so weit von einander entfernt seyn, als x und y . Fig. 149.

B e w e i s .

$$\left. \begin{array}{l} cb = cx \\ ca = cy \end{array} \right\} \text{ aus deren Bedingung.}$$

$$m = o \text{ als Vertikalw.}$$

$$\text{also } \triangle acb \cong \triangle cxy$$

$$\text{folglich } ab = xy$$

§. 13. Zusatz. Verstattet es der Platz nicht, die ganzen Linien zurück zu tragen, oder man will sich das Geschäft erleichtern, so dürfen nur die Hälften genommen werden, und diese Abschnittspunkte, sie mögen

mögen rückwärts oder vorwärts geschehen, um die Hälfte der gesuchten Weite von einander entfernt seyn; denn weil sich die Ganzen wie die Hälften verhalten, so ist

$$ca : cb = dc : cf$$

folglich ist nach S. 143 Geom. df parallel mit ab . Daher auch

$$cd : ca = df : ab$$

aber

$$cd = \frac{1}{2} ca$$

substit. $\frac{1}{2} ca : ca = df : ab$

; ca $\frac{1}{2} : 1 = df : ab$

$$\frac{1}{2} ab = df$$

und weil $ab = xy$

so ist auch $\frac{1}{2} xy = df$.

S. 14. Zusatz. Der nämliche Beweis gilt auch von der Linie kh , wenn die Abschnitte vorwärts geschehen. Ueberhaupt darf man nur beyderseits gleiche aliquote Theile vom Scheitelpunkte c aus abschneiden, so erhält man auch einen solchen aliquoten Theil der zu bestimmenden Weite: das ist, nimmt man Dritteile, so ergiebt sich auch der dritte Theil der gesuchten Distanz u. s. f.

Zweite Auflösung. Man suche sich zu Stellung des Meßtrisches einen solchen Standpunkt, wo man sowohl zu beyden Oertern sehen, als auch in gerader Linie vom Tische weg, dahin messen kann, visiere durch die Dioptern nach einem der beyden Oerter, und ziehe mit einem feinen Bleystift eine Linie von unbestimmter Länge an dem Lineal der Dioptern auf das Meßtrischen. Das nämliche bewerkstellige man auch bey dem zweyten Orte, doch so, daß die beyden Linien miteinander einen Winkel bilden, lasse die entsprechenden Linien des Feldes wirklich messen, und schneide sie aus dem Scheitelpunkt
im

im verjüngten Maasse, z. B. 4000 mal kleiner ab, so wirkt die Entfernung der beyden Abschnittspunkte nach verjüngtem Maassstabe das nämliche aus, was die zu suchende Weite in wahren Schuhen oder Ruthen hält. Der Beweis hat viel Aehnlichkeit mit dem vorigen; denn es sey Fig. 150 $ac = \frac{cx}{4000}$

$$\text{und } cb = \frac{cy}{4000}, \text{ so ist der}$$

Satz

$$ab = \frac{xy}{4000}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} cx : cy &= cx : cy \\ &= \frac{cx}{4000} : \frac{cy}{4000} \end{aligned} \quad :4000$$

In der Fig. $cx : cy = ac : cb$
Folglich ist wieder ab parallel mit xy .

Daher auch $ac : cx = ab : xy$
substit. $\frac{cx}{4000} : cx = ab : xy$

$$:cx \quad \frac{1}{4000} : 1 = ab : xy$$

$$\text{und} \quad ab = \frac{xy}{4000}$$

§ 15. Anmerk. Daß statt 4000 allgemein m oder ein anderer Buchstab gesetzt werden könne, braucht eben nicht zu erinnern. Mir schien die Sache so für Anfänger sinnlicher zu werden.

Dritte Auflösung. Man ist hier nichts benöthigt, als einer Winkelscheibe, um an einem Standpunkte, der die obigen Eigenschaften haben muß, den Winkel in Graden, und wenn es seyn kann, auch in

in Minuten u. s. f. zu bestimmen, welchen die beyden Linien, die ebenfalls wie vorher mit der Kette gemessen werden müssen, mit einander machen. Man hat dann den Fall in der Trigonometrie, wo zwey Seiten und der dazwischen liegende Winkel bekannt sind, woraus sich nach dortiger Anweisung S. 57 leicht das übrige durch Hilfe der Logarithmen finden läßt.

S. 16. Zusatz. Sind die zwey Derter, deren Distanz bestimmt werden soll, von der Beschaffenheit, daß man von einem zum andern sehen kann, so mag man auch von einem Orte an eine Standlinie annehmen, und aus den Endpunkten nach den Dertern visiren, um die beyden Winkel zu messen, welche an der Standlinie anliegen. Hat man nun die Länge der Standlinie durch die Kette bestimmt, so tritt der trigonometrische Fall ein, wo zwey Seiten und alle Winkel bekannt sind; weil der dritte Winkel das arithmetische Komplement zu 180° ist.

S. 17. Aufgabe. Eine Weite von der zweyten Art durch die nämliche dreyfache Methode zu messen.

Erste Auflösung, ohne Nestrich. Man suche, Fig. 151 in einiger Entfernung von dem zugänglichen Orte, einen Punkt, der mit den beyden Dertern in gerader Linie steht, z. B. a wo nämlich ein Ort das andere deckt. Von diesem Punkte messe man durch die Kette eine Linie von beliebiger Länge rechts oder links hinweg, wie es die Umstände der Gegend erlauben; hier von a nach c, und trage diese Linie im gleichem Maasse und Richtung noch weiter fort, d. i. mache $ac = cb$. Ferner messe man vom

vom zugänglichen Objekte gleichfalls bis an den Halbierungspunkt der vorigen Linie, und trage eben so auch diese Distanz in ihrer Richtung fort, wie hier von y nach c , wo nachher $cy = cd$ geworden. Es müssen aber auf dem Felde alle diese Punkte theils durch Absteckstäbe oder theils auch durch Meßfahnen, welche man perpendicular in die Erde senkt, sichtbar gemacht werden. Endlich suche man den Punkt der sowohl mit den beyden Endpunkten der verdoppelten Linien, als mit dem Halbierungspunkt und dem unzugänglichen Objekte in gerader Linie steht. Dieß kann auf dem Felde wieder daraus abgenommen werden, wenn die Absteckstäbe in jeder Richtung dem Auge sich decken. In unsrer Figur stellt diesen Punkt das f vor; weil er sowohl mit b und d , als mit c und x in einer Linie liegt. Die Linie nun vom Endpunkte der letzten Doppellinie bis dahin, nämlich df ist die Entfernung des zugänglichen Objekts vom unzugänglichen.

S a t z

$$df = xy$$

B e w e i s .

$$\begin{array}{rcl}
 ac & = & cb \\
 yc & = & cd \\
 o & = & m
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Aus der Bedingung} \\ \text{als Vertikalw.} \end{array}$$

Also $\Delta acy \cong \Delta cbd$: Folglich

$$\begin{array}{rcl}
 s & = & r \\
 n & = & z \\
 yc & = & cd \\
 \phi & = & \lambda
 \end{array}
 \begin{array}{l} \text{und als Komplement zu } 180^\circ \\ \text{Da nun ohnehin} \\ \text{und} \\ \text{so muß auch} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \Delta cxy & = & \Delta cdf \\
 \text{auch } xy & = & df
 \end{array}$$

Und eben darrum

§. 18. Anmerk. Geht der Vortheil an, daß sich Fig. 152 irgend bey einem der beyden Objekte, wie bey y ein rechter Winkel schlagen, und der Perpendikel y c formessen läßt, so errichte man unterhalb an einem geeigneten Orte in b einen andern Perpendikel auf die Linie y c von beliebiger Länge, senke im Endpunkt a einen Absteckstab, und gehe so lange gegen c fort bis ein dritter Absteckstab sowohl die Objekte b und y, als a und x deckt. Weil nun c b, a b und c y gemessen werden kann, und a b mit x y wegen rechten Winkeln parallel läuft, so ist nach §. 143 Nro IV Geom.

$$\begin{array}{rcl}
 & c b : a b & = c y : x y \\
 \text{Gesezt es wäre} & c b & = 20 \\
 & a b & = 15 \\
 & c y & = 44 \\
 \text{so ist} & 20 : 15 & = 44 : x y \\
 \text{oder abgef.} & 4 : 3 & = 44 : x y \\
 \text{nochmal} & 1 : 3 & = 11 : x y \\
 \text{und} & x y & = 33
 \end{array}$$

Zweyte Auflösung, (mit dem Meßfische).
 Man messe sich vom zugänglichen Orte aus eine Standlinie, stelle auf dem Endpunkte a Fig. 153 das Meßfischchen, visiere nach beyden Orten und schneide die gemessene Standlinie im verjüngten Maasse a c von der Richtungslinie a y ab. Uebertrage nun, sobald eine Meßfahne eingesenkt worden, den Tisch nach dem zugänglichen Orte y und drehe ihn so lange, bis man durch die Dioptern, deren Lineal an der abgeschnittenen verjüngten Linie anliegt, die Meßfahne erblickt, lasse den Tisch unverrückt stehen, und visiere aus dem Abschnittspunkte nach dem unzugänglichen Objekte, so wird die Schlußlinie des Dreyecks auf dem Tische die Entfernung der beyden Derter im verjüngten Maasse sein.

Beweis. Denn das Dreyeck auf dem Tische und das auf dem Felde, welches die Visierlinien bestimmen, sind wegen Gleichheit der Winkel einander ähnlich; also stehen die gleichnamigen Seiten im Verhältnisse. Sezen wir nun, es sey eine von den
 Seiten

Seiten des verjüngten Dreyecks 4000 mal kleiner, als die gleichnamige des Felddrecks, so muß es auch die andere seyn; da aber die Schlussseite mit der Entfernung der beyden Derter gleichnamig ist, so muß sie auch 4000 mal kleiner, als dieselbe seyn; folglich wirkt sie die Entfernung der Derter in verjüngtem Maasse aus, das was zu erweisen war.

Dritte Auflösung, (trigonometrisch) Es lassen sich durch die Winkelscheibe füglich an den Endpunkten der nach voriger geometrischer Art willführlich angenommenen Standlinie die Winkel messen, folglich ist auch der dritte Winkel bekannt. Man kann nun gar leicht folgern: Die Seiten verhalten sich wie die Sinusse der opponierten Winkel. Nehmen wir an, es sey in der vorigen Figur

$$ay = 62'$$

$$a = 51^{\circ}12'$$

$$y = 80^{\circ}29'$$

$$\text{so ist } x = 180^{\circ} - 51^{\circ}12' - 80^{\circ}29' \\ = 180 - 131^{\circ}41' = 48^{\circ}19'$$

Da nun der Winkel x der gemessenen Seite ay ; und der Winkel a der unbekannten Entfernung xy übersteht oder opponiert ist, so hat die Proportion statt.

$$\sin x : ay = \sin a : xy$$

$$\text{oder } \sin 48^{\circ}19' : 62' = \sin 51^{\circ}29' : xy$$

Logarithmisch berechnet

$$\text{Log. } 62 = 1,7923917$$

$$\text{Log. } \sin 51^{\circ}29' = 9,8905026$$

$$11,6828943$$

$$\text{Log. } \sin 48^{\circ}19' = 9,8710735$$

$$1,8118208 \text{ Log } xy$$

denn die Zahl 66' am nächsten entspricht, welche die Entfernung der beyden Derter ausdrückt.

§. 19. Aufgabe. Eine Weite von der dritten Gattung auf dreyerley Art zu messen.

§. 20. Anmerk. Da die Ausmessung dieses Falles ohne Nestisch gar zu vielen Schwierigkeiten und Fehlern auch bey der größten Akuratesse ausgesetzt ist, so wollen wir lieber davon schweigen, und statt dessen nützlichere Sätze anführen.

Zwote Auflösung. Man wähle Fig. 154 eine Standlinie $a b$, von deren Endpunkte sich zu beyden Orten visieren läßt. Stelle das Tischchen in a , visiere nach x , b und y , zeige die Richtungen durch unbestimmte Linien aus dem nämlichen Punkte an, lasse $a b$ messen, und schneide sie im verjüngten Maasse aus a ab. Man überseze den Nestisch nach b , und drehe ihn so, daß wenn nach a visiert wird, das Dioptenlineal dicht an der abgeschnittenen Richtungsline fortläuft. Man visiere mehrmal aus b nach x und y , ziehe diese Linien wirklich so lange, bis gegen x und y Durchschnitte erfolgen. Die Entfernung dieser Durchschnittpunkte ist die verjüngte Entfernung der Objekte auf dem Felde.

B e w e i s .

Da eine Seite und die darauf liegenden beyden Winkel ein Dreyeck völlig bestimmen, so sind eben darum auch die $\triangle a b x$ und $a b y$ bestimmt, welche jenen auf dem Felde wegen Gleichheit der Winkel ähnlich sind. Da ferner die Grundlinie $a b$ worauf sie stehen, die nämliche ist, und eben so wenig als die darauf liegenden Winkel geändert werden kann, so bleibt auch die Lage ihrer Spitze unveränderlich und steht, weil alles ähnlich ist, mit der Entfernung der beyden unzugänglichen Seiten im Verhältnisse; weil sie gerade das im Kleinen vorstellt, was die Felddreyecke im Großen sind.

Dritte

Dritte Auflösung. (trigonometrisch) Es wird hier mehrmals eine bequeme Standlinie erfordert, so wie in der vorigen geometrischen Auflösung. Man zeichne sich irgend auf einem Papiere beyläufig die Stellung der obigen Dreyecke, die die Visierlinien des Winkelinstruments bestimmen, schreibe die gemessnen Winkel m, n, s und o sonderheitlich auf, so gilt erstens, weil die Winkel bey x und y als Komplemente ebenfalls bekannt sind, in dem Δaxb die Proportion

$$\sin x : ab = \sin s : ax$$

Ist nun die Linie ax gefunden, so ist zweytens in dem Δayb

$$\sin y : ab = \sin (o+s) : ay$$

Wenn auch dieses ay bestimmt worden, so hat man ferner in dem Δxya den Fall, wo zwei Seiten nämlich ax und ay nebst dem dazwischenliegenden Winkel m bekannt ist; daher drittens nach §. 57 Trig.

$$(ay + ax) : (ay - ax) = \text{Tang} \left(\frac{(x + v) + r}{2} \right) \\ \text{Tang} \left(\frac{(x + v) - r}{2} \right)$$

Nach gehöriger Berechnung der Winkel v und r ist es endlich gar leicht entweder aus dem Δaxy oder Δbxy die Seite xy zu folgern; denn man setze im ersten Falle z. B. die Proportion an

$$\sin r : ax = \sin m : xy$$

§. 21. Anmerk. So mühsam und weitläufig auch diese trigonometrische Meßmethode zu seyn scheint; so sehr lohnt es doch der Mühe, selbe der geometrischen Art, besonders bey beträchtlichen Weiten, wegen ihrer ungleich größern Genauigkeit vorzuziehen; vorausgesetzt, daß man mit Winkelmeßern versehen sey, welche auch neben den Graden die Minuten, oder gar noch die Sekunden angeben. Daß dazu auch Tafeln gehören, wo dergleichen Sinusse und Tangenten mit Sekunden

den nachgeschlagen werden können, versteht sich von selbst. Es ist dazu Johann Carl Schulze neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer u. a. Tafeln, zween Bände, Berlin 1778 wegen ganz besonderer Brauchbarkeit zu empfehlen; indem selbe durchgehends nach der so kostbaren Eberwinschen Ausgabe der Mathematical Tables veransaltet worden.

Von Höhenmessungen.

§. 22. Eintheilung. Höhen können entweder von Natur aus unzugänglich seyn, wie die Perpendikel der Berge auf die runde Oberfläche der Erde; oder zugänglich, wie Bäume, Thürme, u. d. gl.; oder sie verlangen wegen andern Umständen aus der Ferne gemessen zu werden, wie z. B. wegen unebnen Zugängen, allzugroßen Entfernungen u. s. w.

§. 23. Aufgabe. Eine zugängliche Höhe, z. B. einen Baum, 1) Ohne Meßinstrument, 2) mit Meßinstrument (geometrisch) 3) trigonometrisch zu bestimmen.

Erste Auflösung. Dieß kann so wohl durch Hilfe zweener Stäbe, als durch den Schatten geschehen.

I Durch Hilfe zweener Stäbe. Man nehme Fig. 155 zween Stäbe, deren einer ab 5 Schuh, und der andere df (wir wollen setzen) 8 Schuh hoch ist, senke diesen letztern in einiger Entfernung vom Baume perpendicular in die Erde, so daß er außerhalb noch immer 8 Schuh mißt (folglich muß seine Länge um so viel größer seyn, als nöthig ist, ihn in der Erde befestigen zu können) dann gehe man mit dem erstern Stabe ab so weit zurücke, bis das auf dem Endpunkte a aufgesetzte Aug den Endpunkt d des andern Stabes und den Wipfel des Baumes

in

in einer Linie erblickt — es versteht sich, daß auch der Stab $a b$ perpendicular gehalten werden müsse, — so entsteht, wenn die Entfernung der Stäbe von einander, und die Entfernung des kürzern Stabes vom Baume selbst gemessen worden, weil $d c$ mit $h y$ parallel läuft, nach §. 143 Nro IV Geom. folgende Proportion $a c : d c = a h : h y$. Da aber wegen Parallelismus $a c = f b$, und $a h = b x$; ferner $d c = d f - c f$, und weil mehrmal $c f = a b$ folglich $d c = d f - a b$ und endlich $a h = b x$ ist so kann substituiert werden. Also $f b : (d f - a b) = b x : h y$. In Worten ausgedrückt heißt demnach die Proportion so: Die Distanz der Stäbe von einander verhält sich zu ihrer Längendifferenz: wie der Abstand des kleinern Stabs vom Baume, zur Höhe des Baumes selbst, wozu aber noch am Ende $\frac{1}{2}$ Schuh addiert werden müssen; weil die ganze Höhe des Baums $= h y + h x$ und $h x = a b$ ist. Setzen wir der größere Stab halte 8 Schuh, sie stehen 10 Schuh von einander, und der $\frac{1}{2}$ Fuß hohe Stab sey 150 Schuh vom Baum entfernt; so ist

$$10 : 3 = 150 : z$$

$$10 z = 450$$

$$z = 45, \text{ und } 45 + \frac{1}{2} = 45\frac{1}{2} \text{ der}$$

Höhe des Baumes.

§. 24. Anmerk. Auf diese Methode gründet sich die Einrichtung des sogenannten Dendrometers (Baummesser) welchen Hr. Prof. Jung in seinem Lehrbuche, und nach ihm Hr. Prof. Grünberger in dem Lehrbuche für churpfälz-bayerische Förster §. 229 I Th. beschrieben hat.

II Durch den Schatten. Man senke beym Sonnenschein einen Stab von gewisser Länge perpendicular in die Erde, und messe sowohl den Schatten des Stabes, als den des Baumes oder Thurmes
auf

auf einer Horizontalebne zur nämlichen Zeit, so kann man folgern: Wie sich der Schatten des Stabes zum Stabe selbst verhält; so verhält sich ebenfalls auch der Schatten des Baums zum Baume selbst. Denn der Schatten bildet zwischen dem Baum oder Thurme, zwischen der Horizontallinie und zwischen der Lichtgränze ein rechtwinklichtes Dreyeck. Weil nun alle Perpendikulärobjekte, wegen der allzugroßen Entfernung des leuchtenden Körpers zur nämlichen Zeit einen gleichen Winkel mit dem letzten aufsteigenden Sonnenstrahl machen, so sind sich diese Schattendreyecke ähnlich; folglich stehen die gleichnamigen Seiten im Verhältnisse, welches in unsern Falle die Horizontallinien, in so weit sie der Schatten begränzt, und die Höhenobjekte selbst sind. Um diesmal nicht ohne Beyspiel zu bleiben, so sey der Stab außerhalb der Erde 9 Schuh hoch, und werfe einen Schatten von $7\frac{1}{2}$ Schuhe; zur nämlichen Zeit messe der Schatten des Thurms $83\frac{1}{4}$ Schuh, so ist demnach

$$\begin{array}{rcl} 7\frac{1}{2} : 9 & = & 83\frac{1}{4} : x \\ \frac{15}{2} : 9 & = & \frac{333}{4} : x \\ \frac{15x}{2} & = & \frac{2997}{4} \\ 60x & = & 5994 \\ x & = & 99\frac{9}{10} \text{ Schuh} \end{array}$$

S. 25. Anmerk. Es giebt noch zwei Arten, Höhen ohne Meßinstrument zu bestimmen. Z. B. bey Thürmen oder auch beträchtlichen Vertiefungen, als Brünnen, unterirdischen Höhlen u. d. gl. durch den freyen Fall eines schweren Körpers, wie etwa eines Steins oder einer Bleifugel. Läßt sich aber bey Höhen, die man besteigen kann, kein Perpendikulärfall anbringen, so thut das Barometer treffliche Dienste, ihre Größe so ziemlich genau ausfindig zu machen. Wir wollen die praktische Verfahrensart beyder Methoden am gehörigen Orte hier einrücken.

Erstens

Erstens. Durch den freyen Körperfall.

Es ist aus der Physik bekannt, daß in unsrer Atmosphäre die Körper der schwerern Art, während des freyen Falles, in der ersten Sekunde 15,6 rheinländische Schuhe, in der zweiten 45,6, in der dritten 75,6 u. s. f. durchlaufen: daß überhaupt, wenn S den Raum (Spatium) T die Zeit (Tempus) und g die Zahl 15,6 bedeutet, gemäß der Progreßionslehre $S = g T^2$ sey. Ist daher die Zeit nach Sekundenuhren, oder noch besser, nach Tertienuhren, vergleichen man zu Göttingen auf dem Observatorium hat, während des Falls beobachtet worden, so kann der Raum (das ist, z. B. die Tiefe des Brunnens) leicht nach der Formel berechnet werden. — Nehmen wir an, einen Stein, der in eine unterirdische Vertiefung geworfen worden, habe man erst nach $4\frac{1}{4}$ Sekunden fallen gehört; wie groß ist diese Tiefe?

Wenn der Fall des Steins in dem nämlichen Augenblicke gehört würde, in welchem er wirklich geschehen ist, so hätte man weiter nichts zu thun, als nach obigem allgemeinen Ausdrucke das Quadrat der Zeit $4\frac{1}{4}$ mit 15,6 zu multiplicieren. Allein es ist mehrmal aus der Physik bekannt, daß der Schall in jeder Sekunde 1040 Pariserfüße oder 1076 rheinländische Schuhe durchläuft; folglich ist in der Zeit $4\frac{1}{4}$ Sekunden auch jene mit begriffen, die der Schall des Steines brauchte, bis er durch die Tiefe herauf kam. Nenne man deswegen die unbekannte Schallhenanzahl der Tiefe $= x$, und bestimme allgemein die Zeit, welche der Schall gebraucht, durch folgende Proportion

$$1076 \text{ Sch. : } 1 \text{ Sek.} = x : \frac{x}{1076},$$

und ziehe den gefundenen Werth von $4\frac{1}{4}$ Sekunden ab, so bleibt die wahre Zeit für den Fall. Folglich $T = 4\frac{1}{4} - \frac{x}{1076}$ Dieß nun in der Gleichung

$S = g T^2$ substituiert, giebt

$$x = 15,6 \times \left(4\frac{1}{4} - \frac{x}{1076}\right)^2$$

Um die Sache noch allgemeiner zu machen, wollen wir einweilen für $1076 = a$, $15,6 = b$ und $4\frac{1}{4} = c$ setzen, so entsteht die Gleichung

$$x = b \left(c - \frac{x}{a}\right)^2 \quad \text{Nun fortalkuliert}$$

$$x = b \left(c^2 - \frac{2cx}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$x = bc^2 - \frac{2bcx}{a} + \frac{bx^2}{a^2}$$

$$a^2 \times -bc^2 = \frac{bx^2}{a^2} - \frac{2bcx}{a} - x$$

$$-a^2 bc^2 = bx^2 - 2abcx - a^2 x$$

$$b: -a^2 c^2 = \frac{x^2}{b} - 2acx - \frac{a^2 x}{b}$$

$$-a^2 c^2 = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)x; \text{komplirt}$$

$$\frac{a^2 c^2}{b} + \frac{a^3 c}{4b^2} + \frac{a^4}{4b^2} = \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\frac{a^3 c}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)x + \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\frac{4a^3 bc + a^4}{4b^2} = x^2 - (2ac + \frac{a^2}{b})x + \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\frac{a^2}{4b^2} (4abc + a^2) = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)$$

$$x + \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$+ \frac{a}{2b} \sqrt{4abc + a^2} = x - \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)$$

$$ac + \frac{a^2}{2b} + \frac{a}{2b} \sqrt{(4bc + a)a} = x$$

Für den besondern Fall wieder substituiert, so erhält man

$$\frac{1076 \times 4\frac{1}{4} + \frac{(1076)^2}{2 \times 15,6} + \frac{1076}{2 \times 15,6} \sqrt{(4 \times 15,6 \times 4\frac{1}{4} + 1076) \times 1076}}{4} = x$$

$$\frac{1076 \times 17 + \frac{1157776}{31,2} + \frac{1076}{31,2} \sqrt{(265,2 + 1076)}}{4} = x$$

$$\times 1076 = x$$

$$4573 + 37108,2 + 34,487 \sqrt{1341,2 \times 1076} = x$$

$$41681,2 + 34,487 \sqrt{1443131,2} = x$$

$$41681,2 + 34,487 \times 1201,3 = x$$

$$41681,2 + 41429,4 = x$$

$$251,8 = x \text{ die wahre Tiefe.}$$

Hätte man hier auf den Weg des Schalles keine Rücksicht genommen, so wäre die Rechnung nach der Formel $S = gT^2$ folgende gewesen

$$x = 15,6 \times (4\frac{1}{4})^2$$

$$x = \frac{15,6 \times 289}{16} = \frac{4508,4}{16}$$

$$x = 281. \text{ Und diesernach würde die}$$

Tiefe gegen 30 Schuhe zu groß angesetzt worden seyn.

Zweytens. Durch Hilfe des Barometers.

Man hat aus wiederholten Versuchen wahrgenommen, daß, je höher man mit dem Barometer in die obere Luftgegend hinauf steigt, je mehr das Quecksilber in selbem falle. Da es ist sogar ein erwiesenes Gesetz: *) daß sich, bey der nämlichen Lufttemperatur, die Höhen über der Horizontalfläche gegen einander verhalten, wie die Logarithmen der Quotusse, welche entstehen, wenn man den Barometerstand der Horizontalfläche durch die Barometerstände dieser Höhen dividirt. Wenn demnach die Höhen = A und a, der Barometerstand auf der Horizontalfläche = b, die andern hingegen = m und M gesetzt werden, so sieht die Proportion so aus

$$a : A = \log \frac{b}{m} : \log \frac{b}{M}$$

Nun lege man ferner folgende Erfahrung zum Grunde: Wenn in einer Station, die man für die Horizontalfläche annehmen kann, der Barometerstand 29 Pariserzoll oder $29 \times 12 = 348$ Linien beträgt, welcher demnach durch b ausgedrückt werden muß, und man sich mit dem Barometer um 12,497 Toisen erhöht, welche Höhe = a gesetzt wird, so sinket das Quecksilber um eine ganze Linie, das heißt, der Barometerstand ist hier 347 Linien = m. Diese Größen nun in obiger Proportion substituirt, so wird sie bald zur näheren Brauchbarkeit geschikt werden.

12,

*) Der strenge Beweis dieses Satzes gehört in die Physik. Er kann indeß mit seiner Vollständigkeit bey Tobias Maier in dessen gründlichem Unterrichte zur praktischen Geometrie nachgesehen werden.

$$12,497 : A = \text{Log } \frac{348}{347} : \text{Log } \frac{348}{M}$$

$$\text{Da aber } \text{Log } \frac{348}{347} = \text{Log } 348 - \text{Log } 347 = 0,0012497$$

$$\text{ist, und eben so } \text{Log } \frac{348}{M} = \text{Log } 348 - \text{Log } M$$

so giebt dieß

$$12,497 : A = 0,0012497 : (\text{Log } 348 - \text{Log } M)$$

$$A = \frac{12,497 \times (\text{Log } 348 - \text{Log } M)}{0,0012497}$$

$$A = 10000 (\text{Log } 348 - \text{Log } M)$$

Es läßt sich also durch diese Formel immer berechnen, wie weit zwei Stationen von der angenommenen Horizontalfläche entfernt sind. Zieht man diese Entfernungen von einander ab, so hat man offenbar die Höhe, um welche die beyden Stationen von einander unterschieden sind. Es sey daher

$$\text{die höhere Station} = x$$

$$\text{dessen Barometerstand} = c$$

$$\text{die kleinere Höhe} = y$$

$$\text{dessen Barometerstand} = d$$

so erhält man folgende Rechnung

$$x = 10000 (\text{Log } 348 - \text{Log } c)$$

$$y = 10000 (\text{Log } 348 - \text{Log } d)$$

$$x - y = 10000 (\text{Log } 348 - \text{Log } c - \text{Log } 348 + \text{Log } d)$$

$$x - y = 10000 (\text{Log } d - \text{Log } c);$$

und die allgemeine Regel ist bereits auf den einfachsten Ausdruck gebracht. Sie heißt nun so: Man multipliciere die Logarithmendifferenz der Barometerstände an zweyen Orten mit 10000, so zeigt das Produkt die Toisen an, um wie viel ein Ort höher, als das andere liegt. Zu einem Beyspiel dient folgende Aufgabe.

Der

Der Barometerstand auf der mittleren Meeres-
höhe soll nach meiner Erkundigung $28''6''' = 342'''$;
hingegen in Quito $20'' = 240'''$ seyn; um wie
viel Toisen läge Quito höher als die mittlere Meer-
eshöhe? vorausgesetzt, daß sonst nichts weiter auf
das Steigen oder Fallen des Barometers Einfluß
gehabt, als die natürliche Abnahme der Luftschwere
in der Entfernung von der Horizontalfläche.

$$\text{Log } 342 = 2,5340261$$

$$\text{Log } 240 = 2,3802112$$

$$\text{Differenz} = 0,1538149$$

Diese Differenz mit 10000 multipliciert

$$0,1538149$$

$$\underline{10000}$$

$$1538,1490000$$

Folglich läge Quito 1538,149 Toisen höher als die
mittlere Meereshöhe.

S. 26. Anmerk. Indeß mag man sich leicht einbil-
den, daß es manche Umstände geben könne, die eine solche
Messung unrichtig machen, z. B. die plötzliche Veränderung
des Drucks der Luft in der Atmosphäre, während an beyden
Orten die Barometerstände observiert worden; die Wärme-
grade, welche das Quecksilber mehr oder weniger ausdehnen
u. d. gl. Doch hat man wieder Mittel auffindig gemacht,
wie man auch diese Fehler corrigieren müsse. Herr Hofrath
Kästner spricht in seiner Abhandlung, Höhen durch's Ba-
rometer zu bestimmen, weitläufiger darüber. Ferner sind
als hieher gehörige Schriften zu empfehlen: De Luc sur les
modifications de l'Atmosphaere, Michaeli du Crest's kleine
Schriften, vom Therm. und Barom. aus dem Französischen von
J. C. Chenn, Augsb. 1770 u. d. gl.

Zweite Auflösung; zugängliche Höhen näm-
lich durch Hilfe eines Instruments zu bestimmen.

Man wähle sich in einer Entfernung einen
Standpunkt, bringe das Blatt des Meßröschens
über

über dem Stativ in eine vertikale Stellung, so, daß ein Rand desselben mit dem Horizonte parallel zu stehen kommt, welches sich mittels einer Weywage leicht verrichten läßt, visiere alsdann nach dem Endpunkte des Höhenobjekts, ziehe an der Alhidade Regel oder Diopternlineal eine Linie auf das Tischchen, durchschneide diese Linie wo immer durch eine andere, die mit obbemelbtem Rande parallel läuft, lasse ferner die Entfernung des Tisches von dem Höhenobjekte wirklich messen, und trage sie verjüngt aus dem Durchschnittspunkte auf die Parallelinie, errichte auf dem Endpunkt dieser verjüngten Linie einen Perpendikel, der den Winkel zu einem rechtwinklichten Dreyeck schließt, so ist dieser Perpendikel die Höhe des Objekts im verjüngten Maasse, wenn die Höhe des Stativs dazu addiert wird, weil Fig. 156 selbe $= ah$ ist. Der Beweis ist mehrmal, wie S. 17 zweyte Auflöf.

S. 27. Anmerk. Es kann der Winkel auch mit einem Astrolabium oder Quartanten gemessen, und dann auf einem Papier durch Hülf eines geradlinlichten Transportärs über der Entfernung aufgetragen, und das Dreyeck durch einen Perpendikel geschlossen werden, so ist dieser gleichfalls wie oben die verlangte Höhe, weniger dem Stativ. Es wird aber bey diesen Auflösungen durchgehends voraus gesetzt, daß die Ebne mit dem Höhenobjekt einen rechten Winkel formieren.

Dritte Auflösung. (trigonometrisch) Wenn der Winkel sammt der Entfernung gemessen worden, so gilt Fig. 156, weil $x + c = 90$ also $x = 90 - c$, die Proportion

$$\cos c : ac = \sin c : ax$$

Es sey z. B. $c = 38^{\circ} 19'$

und $ac = 112'$

Folglich $\cos 38^{\circ} 19' : 112 = \sin 38^{\circ} 19' : ax$

Logarithmisch berechnet

$$\text{Log sin } 38^{\circ}19' = 9,7923968$$

$$\text{Log } 112 = 2,0492180$$

$$11,8416148$$

$$\text{Log cos } 38^{\circ}19' = 9,8946461$$

$$1,9469687 = \text{Log } 88'5''$$

und wenn das Stativ $4\frac{1}{2}$ Schuh hoch ist, so beträgt die ganze Höhe $88,5 + 4,5 = 93'$

S. 28. Aufgabe. Eine unzugängliche Höhe
1) geometrisch 2) trigonometrisch zu erforschen.

Erste Auflösung. (geometrisch) Man wähle sich auf einer Ebne eine Standlinie, von deren Endpunkten man das Höheobjekt erblicken kann, messe die beyden Winkel, die die Visirlinien mit der Standlinie machen, und ihre Entfernung von einander, bringe sie wie oben zu Papier, und ziehe die Schenkel so lange fort, bis sie ein überhängendes Dreyeck schließen. Der Perpendikel davon ist wieder unter vorigen Umständen die verlangte Höhe; welches sich auch eben sowohl auf dem vertikal gestellten Meßstische bewerkstelligen läßt, wie Fig. 157. Der Beweis hievon läuft immer auf das nämliche hinaus, was weiter oben S. 17 zwote Aufl. erwiesen worden.

Zwote Auflösung. (trigonometrisch) Man mache sich auf irgend ein Papier Fig. 158 ein kleines Brouillon (Entwurf), und messe alles wie vorhin, so ergiebt sich folgende Rechnung

Weil o und m gemessen worden, so muß auch s bekannt seyn. Es ist nämlich $s = 180 - o - m$. Man hat demnach die erste Proportion.

$$1 \sin s : bc = \sin m : b x$$

Ist nun bx gefunden, so folgere man in dem rechtwinklichten Nebendreieck bxy , wo sich n als anliegender Winkel von o bestimmen läßt:

$$\text{II sin tot. : } bx = \sin n : xy$$

Nehmen wir wieder an, es sey

$$bc = 48'$$

$$m = 33^\circ 11'$$

$$o = 124^\circ 30'$$

$$\text{folgl. } s = 180 - 124^\circ 30' - 33^\circ 11' = 180 -$$

$$157^\circ 41' = 22^\circ 19'$$

$$\text{und } n = 180 - 124^\circ 30' = 55^\circ 30'$$

so heißt nach der Substitution die erste Proportion

$$\sin 22^\circ 19' : 48 = \sin 33^\circ 11' : bx$$

Und in Logarithmen

$$\text{Log } 33^\circ 11' = 9,7382412$$

$$\text{Log } 48 = 1,6812412$$

$$11,4194824$$

$$\text{Log } 22^\circ 19' = 9,5794695$$

$$1,8400129 \text{ Log} = bx$$

Die zweite Proportion

$$\sin 90^\circ : bx = \sin 55^\circ 30' : xy$$

Nach den logarithmischen Tafeln behandelt

$$\text{Log } bx = 1,8400129 \text{ wie eben gefun-}$$

$$\text{Log } \sin 55^\circ 30' = 9,9159937 \text{ den worden.}$$

$$11,7560066$$

$$\text{Log sin tot} = 10,0000000$$

$$1,7560066 = \text{Log } 57'$$

Folglich ist die gesuchte Höhe, wenn auch das Stativ in Anschlag gebracht wird

$$57' + 4\frac{1}{2} = 61\frac{1}{2} \text{ Schuh}$$

S. 29. Zusatz. Macht die Ebne mit dem H^obenobjekt einen schiefen Winkel, z. B. Thürme auf Bergen, so muß sowohl der Berg selbst, als auch der Thurm sammt dem Berge besonders gemessen und die Resultate von einander abgezogen werden, welches dann die wahre Höhe des Thurmes giebt.

Von Aufnehmung der Gegenden.

S. 30. Eintheilung. Gegenden oder Reviere lassen sich sowohl ohne Meßtisch, als mit dem Meßtische (geometrisch) als auch trigonometrisch aufnehmen, wie wohl nicht mit gleicher Akkuratess und Mühwaltung.

S. 31. Aufgabe. Ein Feld, Wiese, Garten oder anders kleine Bezirk ohne Meßtisch aufzunehmen.

Auflösung. Formirt eine aufzunehmende Fläche genau ein Dreieck oder Parallelogram, so ist freylich nichts leichters, als eine solche Figur nach verjüngtem Maßstabe in Grund zu legen: hat sie aber die Form eines Trapezes (auch dieß ist nicht schwer) oder eines irregulären Vielecks, dann fodert das Geschäft mehr Weitläufigkeit. — Ferner entsteht noch die Frage, ob man diese Fläche durchgehen kann oder nicht. Im ersten Fall werden alle Seiten sammt den Diagonalen gemessen, und diese Dreiecke auf dem Papier gerade so im verjüngten Maasse durch Hilfe des Zirkels auf einander gesetzt, wie man sich selbe auf dem Felde im Großen mittels dieser Diagonale vorstellen muß. Läßt sich die Revier nicht durchgehen, wie Pflügen, Seen, auch dichte Wälder u. d. gl. so müssen die Seiten von außen gemessen, und die Winkel auf folgende Art bestimmt

bestimmt werden. Man verlängere die Schenkel der Winkel rückwärts nach Verstattung der Gegend um 10, 20 oder 30 Schuhe, und messe die Entfernung der Endpunkte, so werden diese kleinen Dreyecke Fig. 159 abc, dfg, wenn man sie auf dem Papiere sammt der dazu gehörigen Seite verjüngt aufträgt die Vertikalwinkel vollkommen bestimmen; und wenn dieß mit allen Winkeln geschieht, so muß sich das Polygon bey der letzten Seite k a von selbst schließen.

Sieht es in der Figur gar zu viele Ecke und Krümmungen, so ist es besser, man beschreibt selbst ein willkürliches Viereck oder Polygon darum, wie Fig. 160, und mißt auf die vornehmsten Biegungen Perpendikel hinein, als ab, cd u. s. f. Gut wird es seyn, davon ein Drouillon in Händen zu haben, damit man sich zu Hause, wenn all dieß im verjüngten Maasse zu Papier nachgemacht wird, die Lage noch beyläufig vorstellen kann.

S. 32. Aufgabe. Eine Nevier durch Hilfe des Meßtisches aufzunehmen.

Auflösung. Wenn man in sie hinein kommen, und darinn ein oder mehrere Standpunkte ausfindig machen kann, von wo aus sich die ganze Gegend übersehen läßt, vorzüglich aber die Winkelpunkte, die durch Meßfahnen und Absteckstäbe müssen sichtbar gemacht werden, so stelle man (wir wollen dießmal nur einen Standpunkt annehmen) den Meßtisch dahin, ziehe allererstens mittels der Boussolle eine Mittagelinie, damit der Plan auch die Lage der Nevier gegen die vier Weltgegenden anzeigt, und visiere nach allen Winkelpunkten, ziehe unbestimmte Linien dahin; lasse alle diese Visierlinien messen und
schneide

schneide sie verjüngt aus ihrem Mittelpunkt ab. Werden nun diese Abschnittspunkte durch Linien verbunden, so ist der Plan fertig.

B e w e i s.

Denn die Dreyecke Fig. 161 oab und oAB , oba und oBC sind alle ähnlich, wegen den gemeinschaftlichen Winkeln bey o und den 3. B. 4000 mal kleineren Seiten, folglich ist auch wegen Aehnlichkeit der Theile das Ganze selbst einander ähnlich.

S. 33. Zusatz. Läßt sich die aufzunehmende Gegend nur umgehen, so stelle man den Meßtisch auf einen Winkelpunkt derselben, visiere nach den zweien nächsten Winkeln, und trage die gemessenen zwei Seiten auf. Mit diesen verführe man sich zu einem der nächsten Winkel, und stelle den Meßtisch so, daß, wenn das Diopternlineal an der gehörigen verjüngten Seite liegt, sich nach jenen Winkel visieren läßt, der gerade vorher aufgetragen worden; drehe dann das Diopternlineal um, und visiere nach dem nächstfolgenden Winkel, verjünge die zwischenliegende Seite, und fahre so fort, bis man ganz herumgekommen, so wird sich das Polygon bey der letzten Seite, wenn recht gemessen worden, vollkommen schließen.

S. 34. Aufgabe. Eine Gegend trigonometrisch aufzunehmen.

Auflösung. Man gehe zuerst durch oder um das Nivelir, zeichne sich davon ein Brouillon, zerfalle selbes auf die geschickteste und thunlichste Art in Dreyecke, messe die benötigten Winkel und Seiten, und bringe das trigonometrisch Berechnete allemal
sogleich

sogleich wieder zu Papier, so wird man am Ende erhalten, was man wollte.

S. 34. Anmerk. Weitläufigere Anweisungen zur praktischen Geometrie verstatet der Raum dieses Werthens nicht. Wer Lust hat, sich hierinnfalls mehr anzusehen, kann oben erwähntes treffliches Werk von Tobias Mayer benutzen, so auch Vollinhans, Selsenrieders Geodäsie, Unterberger u. a. d. gl.

Ueber die Reduzierung der in verschiedenen Ländern üblichen Schuhe oder Füße.

Der Pariserfuß ist so zu reden die Basis der übrigen Fußmaasse, weil er fast durchgehends unter allen übrigen Landschuhen der größte ist. Er wird in 14400 gleiche Theile getheilt, und alle andern Füße werden in einer bestimmten Anzahl solcher Theile ausgedrückt. Nimmt man z. B. 13918 Theile davon, so hat man den rheinländischen Fuß. Folglich ist dieser ein Bruch von dem Pariserfuß und heißt $\frac{13918}{14400}$. So geht es auch bey andern Fußmaassen. Wie viele Theile man aber bey jedem Lande nehmen müsse, enthalten die vorhandenen Tabellen. Ich will hier nur einige der vornehmsten hersetzen.

Amsterdamer	12570
Anspacher	13200
Augsburger	13129
Berliner	13730
Baierischer	12938
Braunschweiger	12650
Breslauer	12600

Brüss.

Brüßler	12900
Kölnner	12190
Dänische	14034
Danziger	12751
Franckfurter	12700
Königsberger	13640
Leipziger	12520
Londner	13511,54
Manheimer	12865
Rheinländische	13913
Wiener	14011,7

Man ersieht aus dieser Tabelle, wie sich die Füße anderer Dertter untereinander verhalten. So z. B. zeigt es sich, daß der Amsterdamerfuß 12570 Theile vom Pariserfüße habe; der Berliner hingegen 13730. Weil diese Theile gleich sind, so kann ich mir vorstellen, als wenn der Berlinerschuh in 13730 gleiche Theile getheilt würde; wenn ich nun davon 12570 Theile nehme, so habe ich den Amsterdamerfuß, und es gilt die Gleichung

$$\frac{12570}{13730} \text{ Berlinersch.} = 1 \text{ Amsterdamerfch.}$$

Da bekannt ist, daß die Gleichung bleibt, wenn man beyderseits mit gleichen Zahlen multipliciert, so wird es leicht seyn, eine gegebne Zahl von Berlinerschuhen, in Amsterdamer zu verwandeln; denn man darf nur beyderseits mit dieser Zahl multiplicieren. Wir wollen setzen, es soll gefunden werden, wie viel Amsterdamerfchuh 340 Berlinerschuh geben. Ich schreibe also die obige Gleichung an;

$$\begin{array}{r}
 12570 \text{ Berl.} = 1 \text{ Amst.} \\
 13730 \\
 \times 340 \qquad \qquad \times 340 \\
 \hline
 12570 \times 340 \text{ B.} = 340 \text{ Amst.} \\
 13730
 \end{array}$$

Wenn nun wirklich multipliciert und dividirt wird, so ist die Auflösung fertig, und man erhält 311,2 Berl. = 340 Amst. was zu suchen war.

Wollte man umgekehrt finden, wie viel z. B. Berlinerfuß, 620 Amsterdamerfuß auswerfen, so muß man zuerst die Gleichung so ordnen, daß beyrn Berlinerfuß die Einheit in der Gleichung zu stehen komme, entweder durch Versetzung der Gleichung, oder durch ein neues Raisonnement. Man theile nämlich den Amsterdamerfuß in Gedanken in seine 12570 Theile und nehme 13730 Theile davon, so hat man den Berlinerfuß in einem Bruch des Amsterdamerfußes, das heißt

$$\frac{13730}{12570} \text{ Amst.} = 1 \text{ Berl.}$$

X 620

$$\frac{13730 \times 620}{12570} \text{ Amst.} = 620 \text{ Berl.}$$

$$\frac{8512600}{12570} \text{ Amst.} = 620 \text{ Berl.}$$

$$677,2 \text{ Amsterd.} = 620 \text{ Berl.}$$

Nicht viel unähnlich ist auch die Verwandlung zwischen dem Dezimal- und Duodezimalmaasse. Es ist bekannt, daß die Geometer wegen der Bequemlichkeit im Kalkulieren den landüblichen Schuh nur in 10 Zolle, den Zoll in 10 Linien u. s. f. eintheilen,

theilen, im bürgerlichen Leben hingegen der nämliche Schuh nach althergebrachter Gewohnheit 12 gleiche Theile bekomme, die ebenfalls Zolle heißen, so wie auch die Zwölfttheile eines Zolles Linien geben. Wie hat es man demnach anzugehen, wenn ein Maas in das andere verwandelt werden soll?

Wir wollen den Dezimalzoll, weil er natürlicher Weise größer seyn muß als der Duodezimalzoll, mit 3 und den andern durch 3, so auch die Linien durch 12 und 1 bezeichnen. Es ist nun richtig, daß

$$10 \text{ 3} = 12 \text{ 3}; \text{ folglich}$$

$$3 = \frac{12}{10} \text{ 3} = \frac{6}{5} \text{ 3}$$

$$\text{oder auch } \frac{10}{12} \text{ 3} = 3$$

$$\text{verkl. } \frac{5}{6} \text{ 3} = 3$$

Eben so ist auch $10 \text{ 12} = 12 \text{ 1}$, oder bey Scrupeln

$$10 \text{ S} = 12 \text{ f u. s. f.}$$

Ist also 3 oder 3 unbekannt, so läßt sich dieß leicht aus der Gleichung finden. Z. B. Man soll 7 Dezimalzoll in Duodezimalzoll verwandeln. Sohin die erste Gleichung durch 7 multipliciert, giebt

$$7 \text{ 3} = \frac{7 \times 6 \text{ 3}}{5}$$

$$7 \text{ 3} = \frac{42 \text{ 3}}{5} = 8 \frac{2}{5} \text{ 3}$$

Man kann sich also in dergleichen Fällen leicht helfen. Weitläufiger schreibt hievon der schon öfter angerühmte Tobias Mair, erster Theil S. 18.





Etwas zur Geschichte der G e o m e t r i e.

Tiefer zurück in die Vorzeit wird sich der spähenbe Blick der geometrischen Geschichte schwerlich mit einiger Zuverlässigkeit wagen dürfen, als bis auf Thales von Milet, jenen ersten der sieben Weisen, welcher zwischen den 590sten und 460sten Jahr vor Christi Geburt lebte; obgleich Laertes von einem gewissen phrygischen Euphorbus Meldung thut, welcher bey der Zusammensetzung verschiedner Linien auf die Konstruktion eines ungleichseitigen Dreyeckes gekommen seyn sollte; eine Erfindung, auf die ein jeder anderer bey so einem Geschäfte leicht von selbst verfallen mußte. Thales hat schon größere Verdienste um die Geometrie. Ihm haben wir die Lehrsätze von der Gleichheit der Vertikalwinkel, und der Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreyeckes zu verdanken; ferner nach Proklus Zeugnisse von der gleichen Theilung des Zirkels durch den Diameter, und endlich den Lehrsatz, daß jedes Dreyeck, welches ein Peripherialwinkel mit dem Diameter schließt, rechtwinklicht sey. Von dem wichtigen Einflusse dieses Satzes in die übrigen Theile der Mathematik war er so sehr überzeugt, daß er dem Jupiter für diese Erfindung auf der Stelle einen Ochsen zum Opfer schlachtete.

es anbey wahr ist, was die alten Schriftsteller von ihm behaupten, daß er nämlich die runde Gestalt der Erde, die Ursache der Verfinsterungen der Sonne und des Mondes gelehret, daß er sogar Sonnenfinsternisse vorausgesagt, die eingetroffen sind, daß er den Kalender berichtigt, und zur Verbesserung der Schiffahrt den kleinen Varen zu benutzen gerathen, so kann dieser Mann nichts weniger als ein mittelmäßiger Geometer gewesen seyn; denn dieß zu leisten, werden keine gemeine Fortschritte in der Elementargeometrie erfordert. Man darf also mit Recht behaupten, daß er der erste war, der den Grund zu unsrer heutigen Geometrie gelegt. Ob es lediglich vor ihm auf der ganzen weiten Erde keine Mathematiker, folglich auch keinen Geometer gab, ist eine Frage, die sich bloß mit der Möglichkeit, oder höchstens einiger Wahrscheinlichkeit bejahen läßt; denn es bleibt immerhin eine sehr gedenkbare Sache, daß es so manche blühende Reiche vor der Epoche Griechenlandes gegeben; deren Wissenschaften sammt ihren Namen von einem unseligen Verhängniß wie immer aus der Welt weggetilget wurden; da aber ohne Mathematik kein vollkommener Flor eines Landes statt haben kann, so bleibt es auch eben so denkbar, daß es vor dem Thales schon Gelehrte gegeben, die als Meister in diesem Fache gelten konnten. So viel ist indessen wahr, daß die Egyptier schon vor demselben einige Kenntnisse der praktischen Geometrie gehabt haben müssen, wozu sie ganz natürlich die jährliche Ueberschwemmung des Nilflusses zwang, um einem jeden wieder seinen Antheil von Fluren, im Falle die Gränzen zweifelhaft geworden, zurückzustellen. Indesß mag es mit ihrer Theorie elend ausgesehen haben, weil Thales, der
doch

doch in seinem Alter mit der Absicht dahin gereist war, um sich von den dasigen Priestern in dieser Wissenschaft unterrichten zu lassen, nichts weiter als einige praktische Kunstgriffe, z. B. die Höhen der Pyramiden durch Hilfe ihres Schattens zu messen, gelernt hat, und sich am Ende gezwungen sah, selbst hierin falls etwas zu erfinden; denn sonst könnten ihm obige Lehrlänge nicht als eigne Erfindungen zugeschrieben werden.

Nach ihm kommt Pythagoras, ein Mann, dessen Name allenthalben bekannt und aus mehr als einer Ursache unsterblich ist. Allein über sein Geburtsort sind die Meinungen der Gelehrten so getheilt, daß sich am Ende gar nichts zuverlässiges, geschweigen etwas gewisses davon behaupten läßt. Nach dem Urtheile der meisten soll er von Samos oder Sydon gebürtig seyn, und obigen Thales von Milet zum Lehrer gehabt haben. Seine Lebenszeit fällt um die Regierungsjahre des letzten Römerkönigs Tarquin des Stolzen. Er war der erste, der dieses Studium von *Μαθημα* (wissenschaftliche Lehre) Mathematik nannte, indem ihm diese Benennung vorzugsweise zukömmt. Seine jugendlichen Jahre widmete er in Egypten den Wissenschaften und kehrte von da weg, nach einem zwanzigjährigen Aufenthalt, in vierzigsten Jahre seines Alters nach Italien, wo er seine gesammelten Kenntnisse durch eignes Nachdenken erweiterte, durch die wichtigsten Erfindungen bereicherte, seinen lehrbegierigen Zeitgenossen davon mittheilte, durch Schriften, die uns aber der mißgünstige Zahn der Zeit schon längst entrißen, auf die Nachwelt fortpflanzte, und sich dafür den Lohn der Unsterblichkeit seines Namens einärndete.

Ihm haben wir den wichtigsten und anwendbarsten Lehrsatz zu verdanken, der in alle Theile der Mathematik den namhaftesten Einfluß hat, daß nämlich in rechtwinklichten Dreyecken das Quadrat der größten Seite gleich sey den Quadraten der beyden übrigen Seiten zusamm genommen. Er vermiste diesen Lehrsatz vorher sehr hart, und fand überall unausfüllbare Lücken, so wohl in der theoretischen als angewandten Mathematik. Daher die übergroße Freude ob dessen Erfindung, daß er seinen Gottheiten sogar eine Hekatombe geopfert haben soll, welche Hekatombe entweder 100 Ochsen, oder nach Plutarch nur einen Ochsen bedeutet, oder was wahrscheinlicher ist, weil Pythagoras die Schlachtung der Thiere für unerlaubt ansah, 100 silberne Münzen, auf welchen das Gepräge eines Ochsen befindlich war; obwohl Plutarch unter diesen feyerlichen Opfer einen künstlichen von Mehl, und Porphyrius sogar einen aus Thon gemachten Ochsen versteht. Es sey dem, wie ihm wolle. Die Erfindung ist und bleibt unschätzbar. Von ihm wurde auch die allgemeine Eigenschaft jedes geradlinichten Dreyecks, daß alle Winkel zusamm zween rechten gleich sind, zuerst entdeckt. Er starb im 80sten Jahre seines Alters.

Nach ihm trat Sokrates und Plato auf, welche zwar die Geometrie fortpflanzten, aber eben keine namhaften Erfindungen machten. Ersterer verbot sogar, sich nicht zu viel auf diese Wissenschaft zu verlegen, weil vielleicht die Vorliebe zur Weltweisheit bey ihm zu groß seyn mochte. Indes hatte er in einem gewissen Verstande auch Recht; denn wahre Gelehrsamkeit kann unmöglich auf einem
einzig

einzigem Fache beruhen; und eben die angewandte Mathematik ist es, die die hellsten Kenntniße von allen Dingen und Sachen voraussetzt. Plato besaß sich mehr Gönner unsrer Wissenschaft. Tagtäglich wurde bey seinen Vorlesungen zu Athen ein geometrisches Problem aufgelöst, und er nahm keinen Zuhörer oder Schüler in seine Klasse auf, die Fremdlinge in der Geometrie waren. Beweise der Fortschritte auf eben genannter Schule in diesen Studium sind die Verdoppelung des Würfels, und die Quadratur des mondenförmigen Zirkelausschnittes durch Menechmus und Hippokrates von Chios.

Etwa 300 Jahre vor Christi Geburt sammelte Euklides von Alexandrien die bisher bekanntgewordenen Lehrsätze und Aufgaben der Geometrie in ein Handbuch, welches wir noch heut zu Tage in verschiedne Sprachen übersetzt besitzen, und gleichsam das Normal der Strenge geometrischer Beweise bleibt. Nach Pappus Schilderung war Euklides ein freundschaftlicher lebenswürdiger Mann. Auf die Frage des Königs Ptolomäus, ob es keine leichtere Methode gäbe, jemand diese Wissenschaft beizubringen, als die seinige, soll er geantwortet haben: Non est regia ad Mathematicam via. Ein Denkspruch, den sich heut zu Tage so manche schöne Geister und fassende Romanenseelen zu merken haben, die immer gerne solide Kenntniße erwerben möchten, ohne sich Mühe geben zu dürfen. Dieser Euklides von Alexandrien muß aber wohl von jenem sauerdöppischen Philosophen von Niagara unterschieden werden, der ebenfalls diesen Namen führt, aber nichts mathematisches geschrieben hat, wie sich dieß aus dem Diogenes

nes Laertius abnehmen läßt, der alle dessen Schriften anführt, und ihn ziemlich unvortheilhaft schildert.

Archimedes von Syrakus, der 287 Jahre vor Christi Geburt auf der Insel Sicilien geboren wurde, wagte sich über die Berechnung des Zirkels und der Kugel. Plutarch macht ihn zum nahen Anwandten des Königs Hiero. Konon von Samos, gleichfalls ein Mathematiker, war sein Freund, dem er auch in seiner präf. ad quad. parab. das Zeugniß giebt, daß er ein überaus geschickter Geometer gewesen. Archimedes soll manchmal so vertieft in den göttlichen Wahrheiten der Mathematik gewesen seyn, daß er Essen und Trinken darüber vergaß, und sich seine Bedienten oft gezwungen sahen, ihn darauf zu erinnern. Seine Bemühungen verrathen auch wirklich einen der scharfsichtigsten Köpfe, da ihm Aufschlüsse durch Synthetik gelangen, die die neuern großen Geister nur auf den Weg der höheren Analyse gewinnen konnten. Wallis, jener brittische Mathematiker, der die Bahn zu dieser Analytik oder Rechnung des Unendlichen eröffnete, sagt vom Archimedes: Vir stupendae sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promouendis aetas nostra gloriatur. Ohne von seinen übrigen großen Erfindungen etwas zu sagen, entdeckte er ein sehr simples Verhältniß des Diameters zur Peripherie im Zirkel, nämlich 7 : 22. Obgleich die neuern Geometer durch schärfere Rechnungen, wie wir am gehörigen Orte schon erwähnten, es in etwas fehlerhaft fanden; so war selbes doch für die Bedürfnisse damaliger Zeiten ein wichtiges Geschenk, und überdies auch ein großer Beweis des Tieffinns dieses alten Mathematikers. Bon noch

noch größerer Schärfe aber zeugt sein erfundner Lehr-
 satz: daß die Kugel zween Dritttheilen einer Walze
 gleicht, die Höhe und Grundfläche mit der Ku-
 gel gemeinschaftlich hat. Der Beweis dieses Satzes,
 oder eigentlich wieder der synthetische Weg zur Er-
 findung, hat die größte Aehnlichkeit mit der Rech-
 nung des Unendlichen, weil die Durchschnittsla-
 mellen des Kegels und der Kugel so unendlich dünne
 gedacht zu werden verlangen, daß sie ganz jenen
 Lamellen gleich geschätzt werden dürfen, die die Walze
 giebt. Wirklich gefiel er sich auch selbst in dieser
 Erfindung sowohl, daß er sie auf sein Grabmal zu
 meißeln befahl. Man befolgte auch seinen Willen.
 Denn Cicero war ein Augenzeuge von diesem Mo-
 numente, wie er sich als Quästor in Sicilien befand;
 und weil hohes Gebüsch dasselbe bereits ganz unsicht-
 bar gemacht hatte, so ließ er den Ort reinigen, und
 rief so dessen Andenken auf ein neues aus der undank-
 baren Vergessenheit der Mitbürger desselben hervor.

Von den Griechen müssen wir noch den Ar-
 chitas nennen, der von seiner Geschicklichkeit durch
 die Auflösung der Frage: wie zwischen zweo Linien
 zweo andere Proportionallinien zu finden sind,
 hinlängliche Proben gegeben. Die Römer haben
 nicht viel Geometer aufzuweisen. Der einzige Man-
 lius, oder wie andere wollen, Manilius zeichnete
 sich dadurch aus, daß er zu Augusts Zeiten auf dem
 Marsfelde einen Prachtkegel errichtete, wodurch er
 die Aequinoctien und Solstitien zu bestimmen suchte,
 welcher aber nach 30 Jahren, wie Plinius versichert,
 unbrauchbar geworden. Sein Verfahren dabey ver-
 räth viel geometrische und astronomische Kenntniß.

Wie

Wie nun alle Wissenschaften nach der Erbschung des griechischen und römischen Flores tief schlummerten, so gieng es auch der Geometrie und den übrigen mathematischen Wissenschaften. Nur einzelne Köpfe hie und da beschäftigten sich mit ihr. So z. B. brachte Campanus von Navarra im eilften Jahrhundert den Euklides aus Arabien mit, und suchte ihn durch seine Uebersetzung gemeinnützig zu machen. Er schrieb auch von der Quadratur des Kreises etwas.

In diese Zeit fällt auch jener persische Mathematiker Nassir Eddin, welcher unter der Regierung des Hologu, von dem bekannt ist, daß er um das Jahr 1254 Persien eroberte, im ausgebreiteten Ruhme stand. Verschiedene Werke, die wir von ihm noch besitzen, beweisen hinlänglich, daß er der größte Geometer seiner Zeit gewesen seyn müsse. Auch er schrieb einen Kommentar über den Euklid, wo er sehr strenge Beweise dieser Sätze auf die Bahn bringt. Dieses Werk wurde 1590 in der Medizaischen Druckerey im Original herausgegeben.

Im dreyzehnten Jahrhundert reiste Althelard, ein Mönch und englischer Mathematiker, nach Spanien und Egypten, und brachte ebenfalls des Euklides Geometrie mit sich, die auch er in seine Muttersprache übertrug. Nicht lange nach ihm kommentierte Barlaam, ein griechischer Mönch, über eben dieselbe. Im fünfzehnten Jahrhunderte las Franziskus Maurolykus zu Messina über die Sphäre und die Elemente des Euklides. Gegen Anfang des sechzehnten Jahrhunderts machte sich vorzüglich Ludolph van Ceulen (von Köln) ein holländischer Gelehrter und Professor der Mathematik zu Leiden, durch das
beste

beste Verhältniß des Diameters zur Peripherie bekannt. Hilbersheim war seine Vaterstadt. Im Jahre 1682 gab Thomas Sautet de Lagni einen Traktat von der Quadratur des Kreises heraus, der sehr wohl aufgenommen worden.

Um die nämliche Zeit fand ein anderer holländischer Mathematiker Peter, oder wie andere wollen, Adrian Metius ebenfalls ein ziemlich gutes Verhältniß des Diameters zur Peripherie. Er setzte selbes wie 113 : 355 an. Die Veranlassung hiezu war die vermeinte Quadratur des Kreises eines gewissen Simon von Wick. In wie fern obiges Verhältniß richtig sey, haben wir schon am gehörigen Orte S. 204 gezeigt.

In Frankreich blühten dazumal bereits schon die Wissenschaften, und unter andern auch die Geometrie, so wie alle anderen Theile der Mathematik. Die großen Männer Pitard, de la Hire, Cassini, l'Hospital, der schon in seinem zwölften Jahre 32 Sätze vom Euklid, so wie de la Caille ihn ganz ohne Lehrer und Bücher verstand, Richer, Desagulier, Bouguer, de Luc u. m. a. haben zu unterschiedne Verdienste um die Geometrie, vorzüglich durch geographische Vermessungen, als daß sie nicht eine Epoche in dieser Geschichte machen sollten.

Endlich kommen wir auf Christian Wolff, welcher der erste war, der sowohl in der Philosophie als Mathematik, und mit ihr auch der Geometrie eine andere Gestalt im Deutschlande gab. Er leistete in diesem Fache gerade das, was Gottsched in der deutschen Sprache und Dichtkunst geleistet hat.

D

sich

sich gleich seine Elemente bey weiten nicht mit den Werken der heutigen Mathematiker, eines Kästners, Eulers, u. d. gl. messen dürfen, so zündeten sie doch Licht in unserm deutschen Vaterlande an, und trugen zur Aufnahme der Geometrie und übrigen Mathematik sehr vieles bey. Wolf war eines Lohgerbers Sohn in Breslau, und wurde 1679 daselbst geboren. In Sturms *Mathesi enucleata*, und nachher in dessen *Tabulis in vniuersam Mathesin* fand er seine ersten Anfangsgründe zur Geometrie. Der große Leibniz wurde sein Freund. Er bekleidete zuerst eine öffentliche Lehrstelle der Mathematik in Halle, wo ihn aber Fanatismus vertrieb, von da gieng er nach Marburg und ward Hofrath und Professor der dasigen hohen Schule, wurde aber wieder von Friedrich den zweyten, König in Preussen, durch ein eigenhändiges Schreiben nach Berlin gerufen; als er aber lieber in Halle zu seyn wünschte, so bewilligte ihm der König auch dahin zu reisen, wo er neben einem jährlichen Gehalt von 2000 Rthl. den Titel eines geheimen Raths und Vicekanzlers, und noch anbey die Freyheit erhielt, alles zu lehren, was und wie er wollte. Hier verlebte er seinen übrigen Rest der Jahre in Ruhm und Friede.

Seine lateinischen Anfangsgründe wurden eine geraume Zeit unter die nützlichsten und gelehrtesten Werke in dieser Fache gerechnet. Auch seine deutschen Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften blieben sehr lang das beste und gründlichste Vorlesbuch auf hohen Schulen; bis endlich selbe durch bessere, z. B. durch die Schriften eines Hausens, durch Segners Lehrbuch, durch Karsten, Kästner, und zum Theil auch durch Klemm verdrängt wurden.

Abt Friderich Häfeler hat seit den Jahren 1776 bis 1790 Anfaßgründe in 4 Bänden geliefert, welchen, mit Wahrheit zu reden, wegen Deutlichkeit, Solidität und Vollständigkeit, (vorzüglich wenn man sie aus dem Gesichtspunkte betrachtet, für wen er eigentlich schrieb) wenige Lehrbücher an die Seite gesetzt werden können.

Der blühende Zustand der Geometrie in unsern Tagen darf nicht erst durch Lobsprüche erhoben werden. Die besten Schriften dieser Wissenschaft, welche bereits in den Händen eines jeden Gelehrten sind, die bewunderungswürdige Akkuratess und Gelenksamkeit, die der erfinderische Kunstfließ eines unvergänglichen Branders verschiedenen Meßwerkzeugen zu geben wußte; vorzüglich die Erfindung des Verniers, welche (im Vorbeygehen gesagt) fälschlich einem gewissen Nonius zugeeignet wird, haben neben der Theorie auch überdies die praktische Geometrie zum höchsten Gipfel der Vollkommenheit erhoben.

Das Alter der Trigonometrie zählt nicht so viele Jahrhunderte als die Geometrie. Die ersten Spuren ihrer Erfindung treffen wir bey Klaudius Ptolemäus an. Dieser hatte einen Auszug aus des Hipparchus 12 Büchern, die von lauter Dreyecken handelten, in seinem Almagest gemacht, von welchem Hipparch auch Theon (in Comment. Almag. Lib. I. c. 9. eine Schrift anführt, welche von den Chorden oder Sehnen handelte. Hipparch soll nach einiger Meynung ein Zeitgenosse des obgenannten Ptolemäus, welchen sie ebenfalls mit ihm zwischen die 153ste und 164ste Olympiade setzen, gewesen seyn. Andere hingegen trennen den Ptole-

mäus mehr als brennhundert Jahre von Hipparchus. Genug, sie sind die beyden ersten, die uns Winke zur Erfindung der Trigonometrie gegeben.

Hundert Jahre nach Christi Geburt beschäftigte sich Menelaus von Alexandrien mit der Astronomie, und vorzüglich mit trigonometrischen Rechnungen. Auch von ihm besaß man einst ein Werk, worinn die Lehre von den Sehnen abgehandelt war. Es ist aber bekannt, daß die Alten statt den halben Chorden oder Sinussen die ganzen Chorden in ihre Trigonometrie aufnahmen. Menelaus schrieb auch 3 Bücher von den sphärischen Dreyecken, die noch vorhanden sind, und wo sein tiefer Forschungsgeist sattem hervorblickt.

So nun in diesem rohen Zustande blieb die Trigonometrie bis in das fünfte Jahrhundert, wo endlich Georg Purbach, Professor der Mathematik in Wien, statt den Sehnen die Sinusse einführte, und den Radius oder Sinus totus in 600000 Theilen dabey zum Grunde legte. Sein Schüler aber Regiomontanus, eigentlich Johann Müller von Königsberg, der auch unter der gelehrten Travestierung seines Namens Molitor, oder Joh. Germanus, oder auch Joh. Frankus vorkömmt, sah das Nützliche bey diesem Kalkül bald ein, und nahm statt 60000 vielmehr 1000000 Theile des Radius an. Er berechnete auch wirklich nach diesem Systeme einen Quadranten des Zirkels von Minuten zu Minuten, und war nebenher der Erste, welcher die Tangenten in der Trigonometrie zu benützen lehrte, und gleichfalls Tafeln dafür, wie bey den Sinussen bearbeitete.

Unge-

Ungeachtet dieser großen Erleichterung blieben doch die trigonometrischen Rechnungen immer noch eine verdrüßliche mühsame Arbeit. Aber bald brach ein glücklicherer Zeitpunkt in Britannien für die Trigonometrie und andere Theile der Mathematik an. Es wurden dort durch Johann Neper die Logarithmen zur größten Wohlthat der mathematischen Welt erfunden. Kepler schreibt diese Erfindung dem Jost Bürgi, Hofmechanikus von Hessenkassel, zu. Indes scheint es, daß Neper und Bürgi, jeder für sich, diese Entdeckung gemacht, und keiner von den andern etwas gewußt habe. Erfand ja auch Leibniz und Newton, wie wir bey der Geschichte der höhern Mathematik hören werden, jeder für sich die Differentialrechnung; folglich ist auch dieser Fall sehr wohl möglich. Prof. Tanzer will sogar Grafen Herwart von Hohenburg zur Ehre der baierischen Nation als den ersten Erfinder dieser Logarithmen angeben. Seine Beweise sind auch in der That nicht so unerheblich, als daß man die Wahrscheinlichkeit läugnen könnte. Wenigst ist gewiß, daß Herwarts Tafeln, die eine gewisse Art von Logarithmen enthalten, 4 Jahre vor der Ausgabe der neperischen Tafeln im Drucke erschienen. Wir lassen die Sache dahin gestellt seyn, und merken dabey an, daß die Logarithmen welche man dermal besitzt, weder von Neper noch von Bürgi, noch auch von Herwart, sondern von Heinrich Briggs, Prof. zu Oxfort berechnet worden sind, welcher sie 1624 in seiner Arithmetica logarithmica bis auf 20000 herausgegeben, wozu aber Ursinus und Vlacq mit der Zeit Nachträge gemacht; da ersterer die Logarithmen von 10 zu 10 Sekunden, und letzterer die der Ordnungszahlen von 20000 bis 90000 hinzugesetzt hat.

Wir

Wir wollen uns mit Neper und Briggs diesen großen Wohlthätern etwas näher bekannt machen. Letzterer ward zu Warleywood in der Grafschaft York beyläufig um das Jahr 1680 von armen Eltern geboren: ersterer aber sein Zeitgenosß in Schottland, und schrieb sich Baron von Merchiston. Briggs reiste im siebenzehnten Jahre seines Alters nach Cambridge, und widmete sich auf dasigen Schulen ganz seinem Lieblingsstudium der Mathematik. Er brachte es hierin so weit, daß, als im Jahr 1596 zu London das berühmte Greshams-Collegium gestiftet wurde, er in selben als erster Professor der Geometrie aufgestellt wurde, wo er bald das Glück hatte, mit dem nachherigen Erzbischof Usser in geheime Freundschaft zu treten. Seine ersten Bemühungen der Nebenstunden schenkte Professor Briggs der Astronomie. Er versuchte es, aus den Prutenischen Tafeln eine Tabelle künftiger Finsternisse zu berechnen; aber Keplers Theorie des Planetensystems, welche gerade damals bekannt wurde, machte einen kleinen Strich durch seine Rechnungen. Indes fuhr er doch fort andere nützliche Tafeln für die Astronomie zu verfertigen. Als Neper's Logarithmen erschienen, erregte diese Erfindung Briggs ganze Aufmerksamkeit. Er schrieb an Nepern und entdeckte ihm seine Gedanken hierüber, worunter hauptsächlich die Bemerkung war, daß das Logarithmensystem weit mehr Bequemlichkeit gewänne, wenn der Log. 1 = 0 und Log. sin. tot. = 1000 angesetzt würde. Worüber ihm Neper, zu welchen jener den Sommer darauf gereist war, und sich ein ganzes Monat mit ihm unterhielt, auch Dank wußte, mit dem Versage, daß er selbst schon diese Meynung geheget; aber wegen Krankheit und
anderen

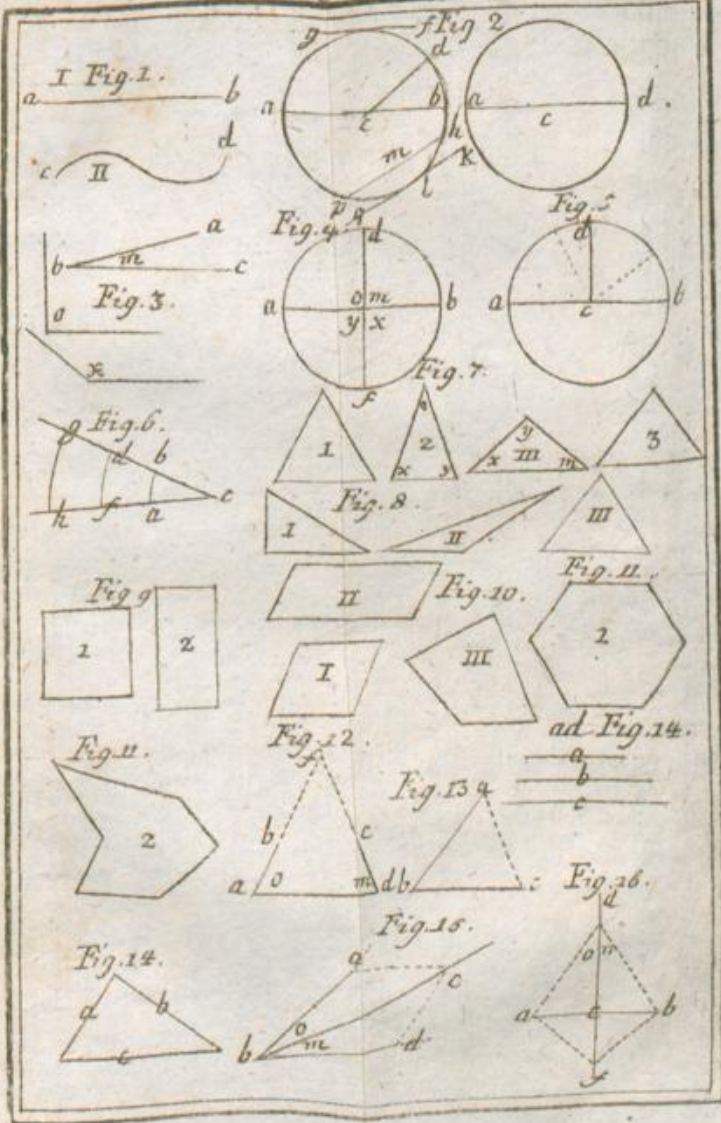
anderen Geschäften vom Belange keine Müsse habe dazu finden können.

Als Briggs wieder nach Hause gekehrt war, fieng er das mühsame Werk der Logarithmenberechnung bereits an. Ein gewisser Eduard Wright übersetzte seine Arbeiten in's Englische, unterwarf es Neper's Prüfung, und wollte sie zum Drucke befördern. Allein weil jener darüber starb, ward dieß seinem Sohne vorbehalten, der es auch 1616 zu London wirklich that, wozu Briggs eine Vorrede schrieb. Das Jahr darauf stattete Briggs Nepern einen zweyten Besuch ab, und es würde vielleicht noch öfter geschehen seyn, wenn Neper nicht 1618 mit Tod abgegangen wäre. Briggs wurde nachher erster Professor der Geometrie zu Oxford, wo Savile zwei Lehrämter gestiftet, nachdem er bereits 23 Jahre an dem Gresham-Kollegium geglänzt hatte. Hier gab er 1620 die ersten 6 Bücher vom Euklid, und 4 Jahre darnach seine *Arithmetica logarithmica* heraus. Er starb den 26. Jänner 1630, zwölf Jahre nach seinem Freund Neper.



Berichtigungen.

Seite	Linie	statt	lies
28	10	rechtwinklichten	rechtwinklichten gleichschen-
			lichten
29	16	Fig. 8. Nro II	Fig. 7. Nro 2.
32	29	Grundlinie	Grundlinie und Höhe
46	21	sowohl zum be-	sowohl zu eben diesem Paral-
		nachbarten u.	elogram, als das ganze
		f. f.	Dreieck selbst zu jedem Qua-
			drate der Lothen hinzudeutet.
			u. f. f.
47	14	$bc = bq$	$bc = cq$
48	25	35.9	35.7
51	27	rechten Winkel	Winkel
63	10	fb	fg
66	6	ab	ab,
—	27	al	ac
78	4	ac^2	ab^2
—	8	$ab + ab$	$ab \times ab$
82	3	$\frac{P}{2}$	P
—	4	lc	dc
85	15	viel r giebt	viele giebt
—	23	Fig. 102	Fig. 100
86	5, 9 u. 10	c	d
90	14	$\sqrt{2-2\sqrt{2}} \&c.$	$\sqrt{2-\sqrt{2}} \&c.$
101	18	Grundfläche	Grundlinie
110	21	$\sqrt[3]{\pi^2 S}$	$\sqrt[3]{6 \pi S}$
133	18	$\text{tang} : R =$	$\text{Tang} : R =$
134	1	ae	ai
135	9, u. 10	o	n
—	9	x	y
138	2	oder auch weniger	oder auch 1, weniger
144	12 u. 17	54°	59°
—	13 u. 17	32°	37°
146	15	$X(ab+ai)bi \times bf$	$X(ab-ai) = bi \times bf$
—	18	$x \times bf$	$x = bf$
162	31	Winkeln	Winken
S. 190 L. 24 u. 28 so auch S. 191 L. 8 lese man Amstere-			
damerschuh statt, Berlinerschuh, und wechselweise.			



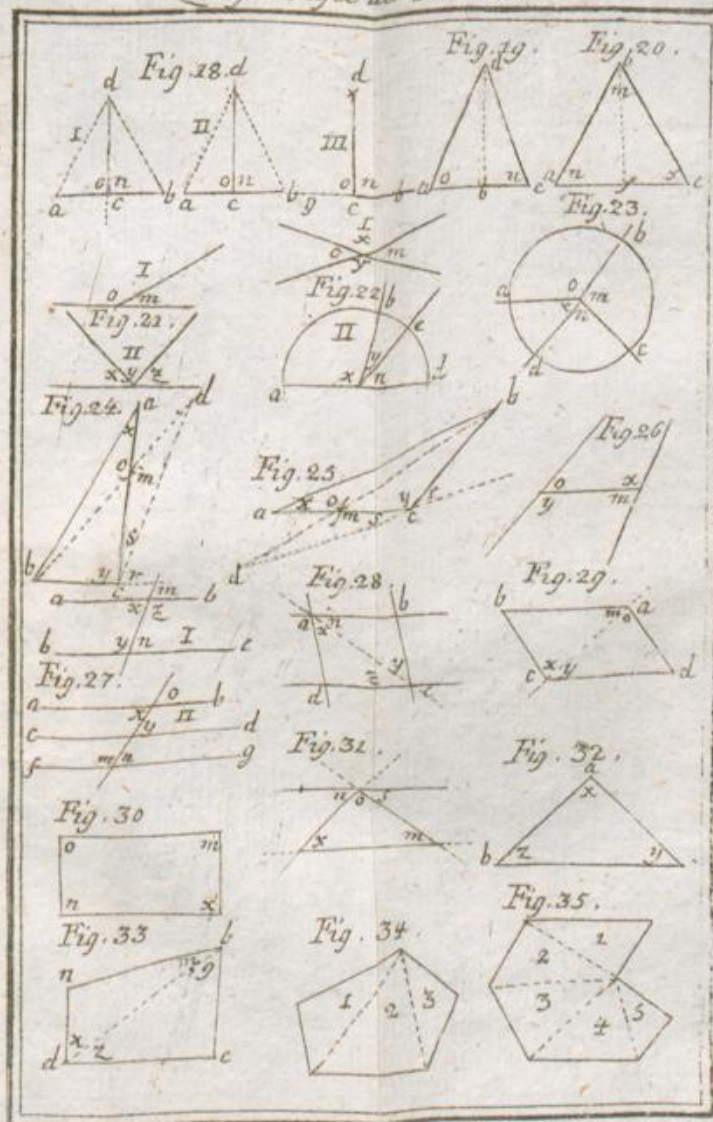


Fig. 36.

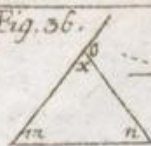


Fig. 37.



Fig. 38.



Fig. 39.



Fig. 40.

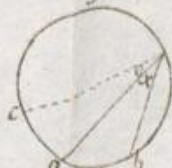


Fig. 41.



Fig. 42.



Fig. 43.



Fig. 44.



Fig. 45.

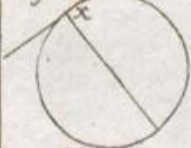


Fig. 46.

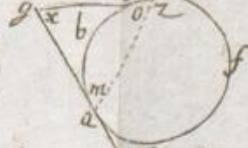


Fig. 47.

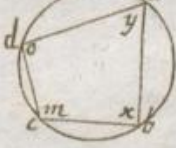


Fig. 48.

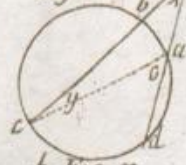


Fig. 49.



Fig. 50.

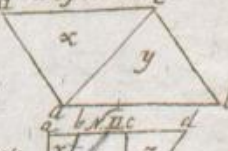


Fig. 51.

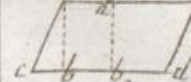


Fig. 52.

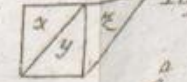


Fig. 53.

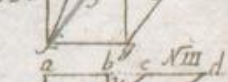


Fig. 54.

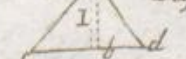
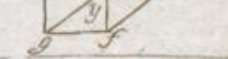
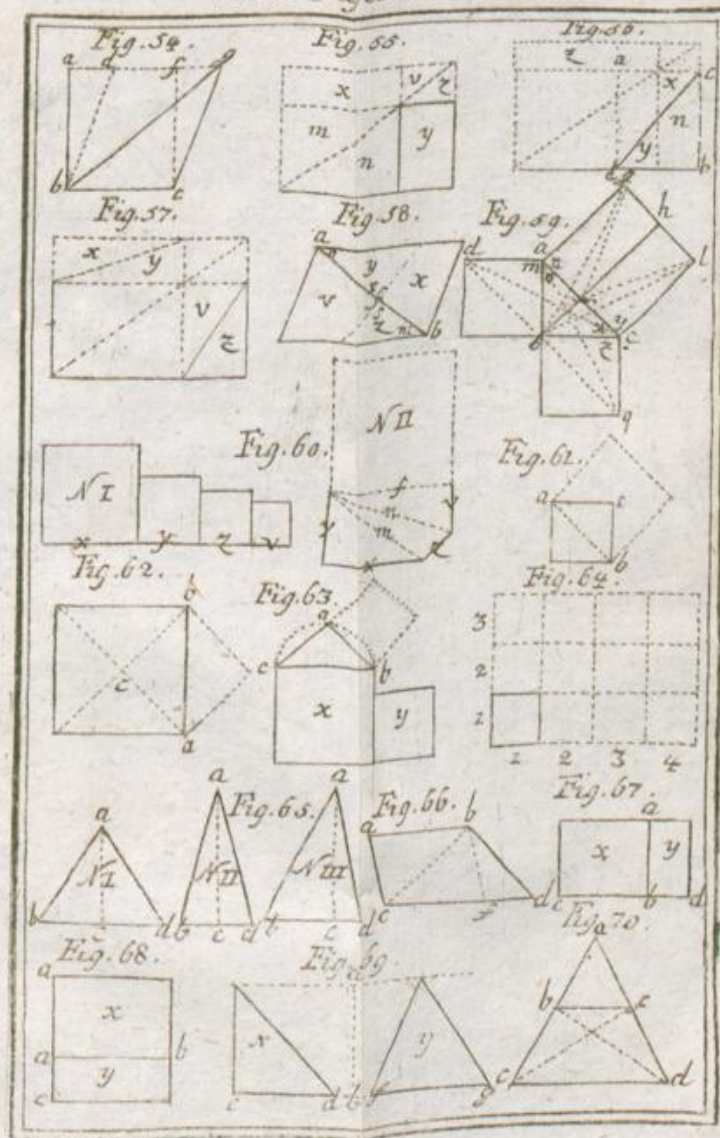


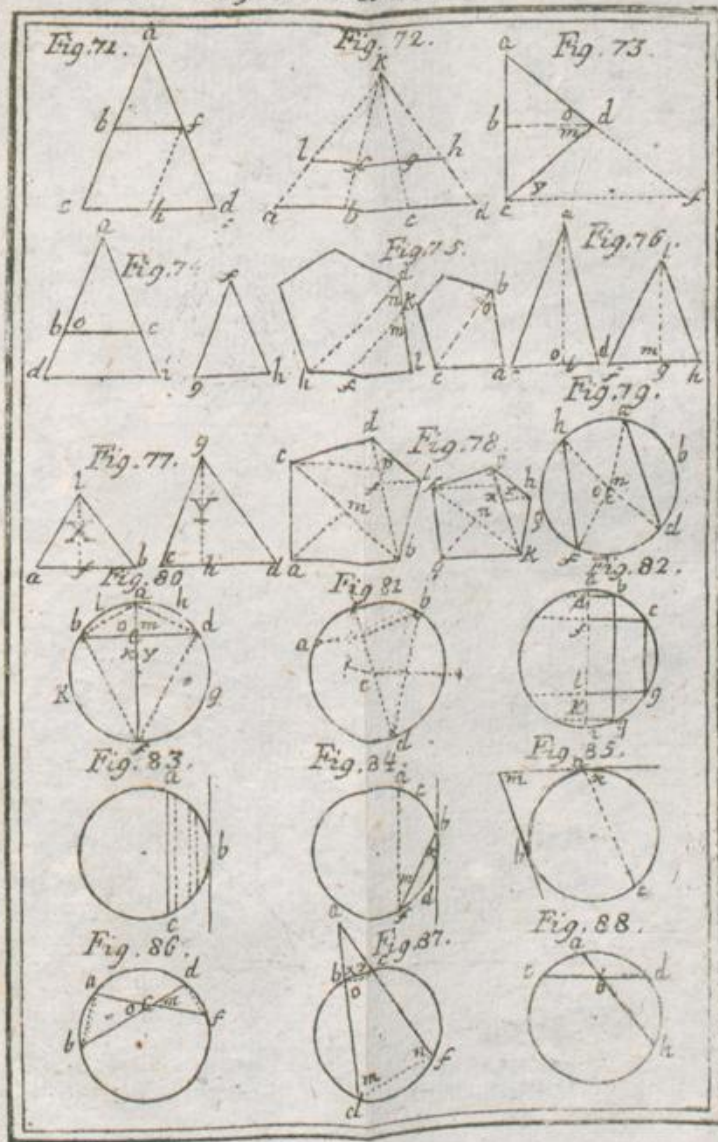
Fig. 55.

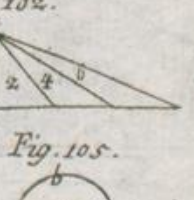
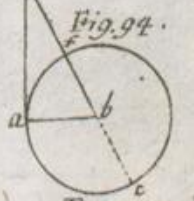
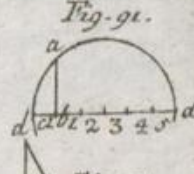
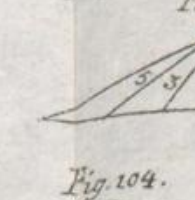
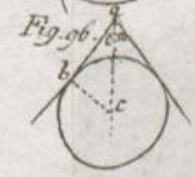
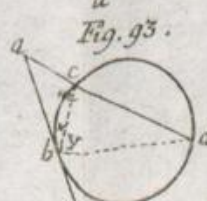
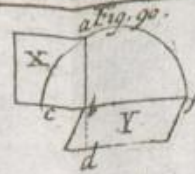
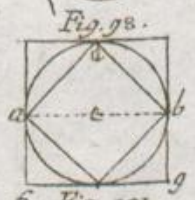
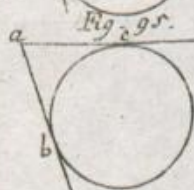
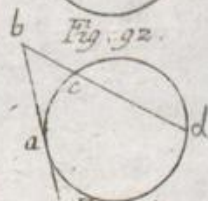
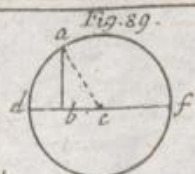


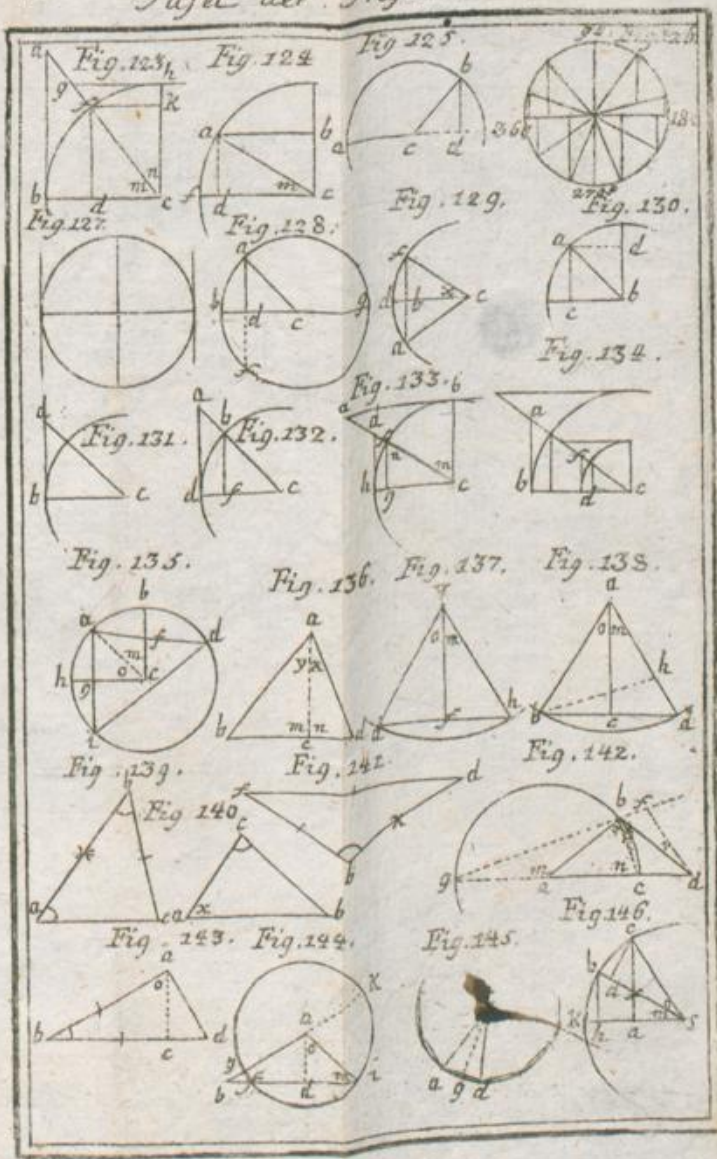
Fig. 56.

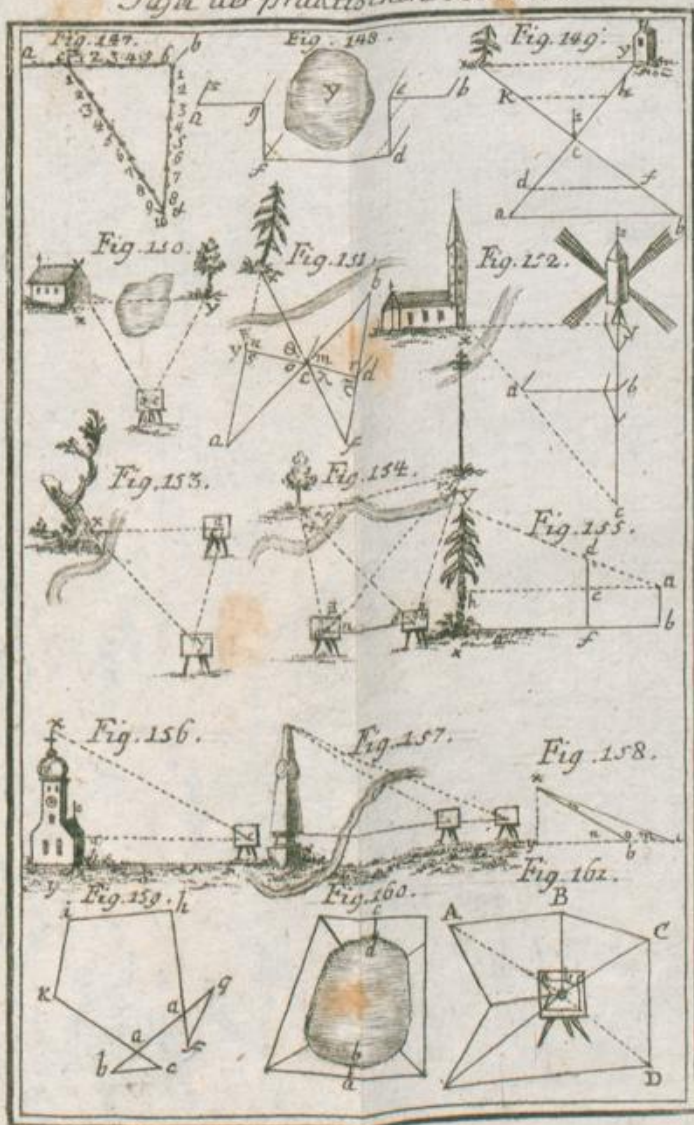


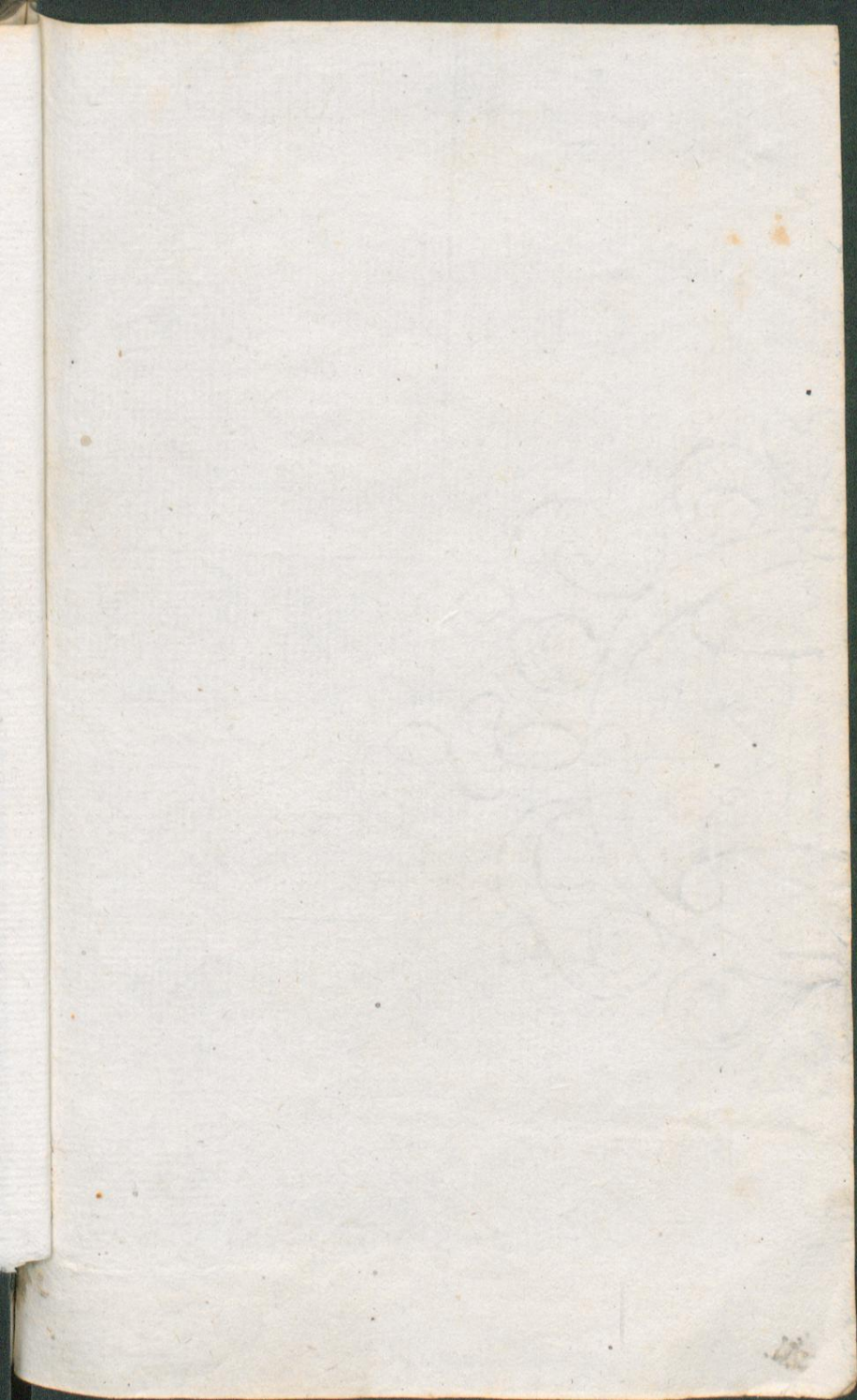












Haven Lurgbye 11

