

www.e-rara.ch

Algèbre D'Emile

Veley, Emmanuel de

Genève, 1828

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 21379

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-57598>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

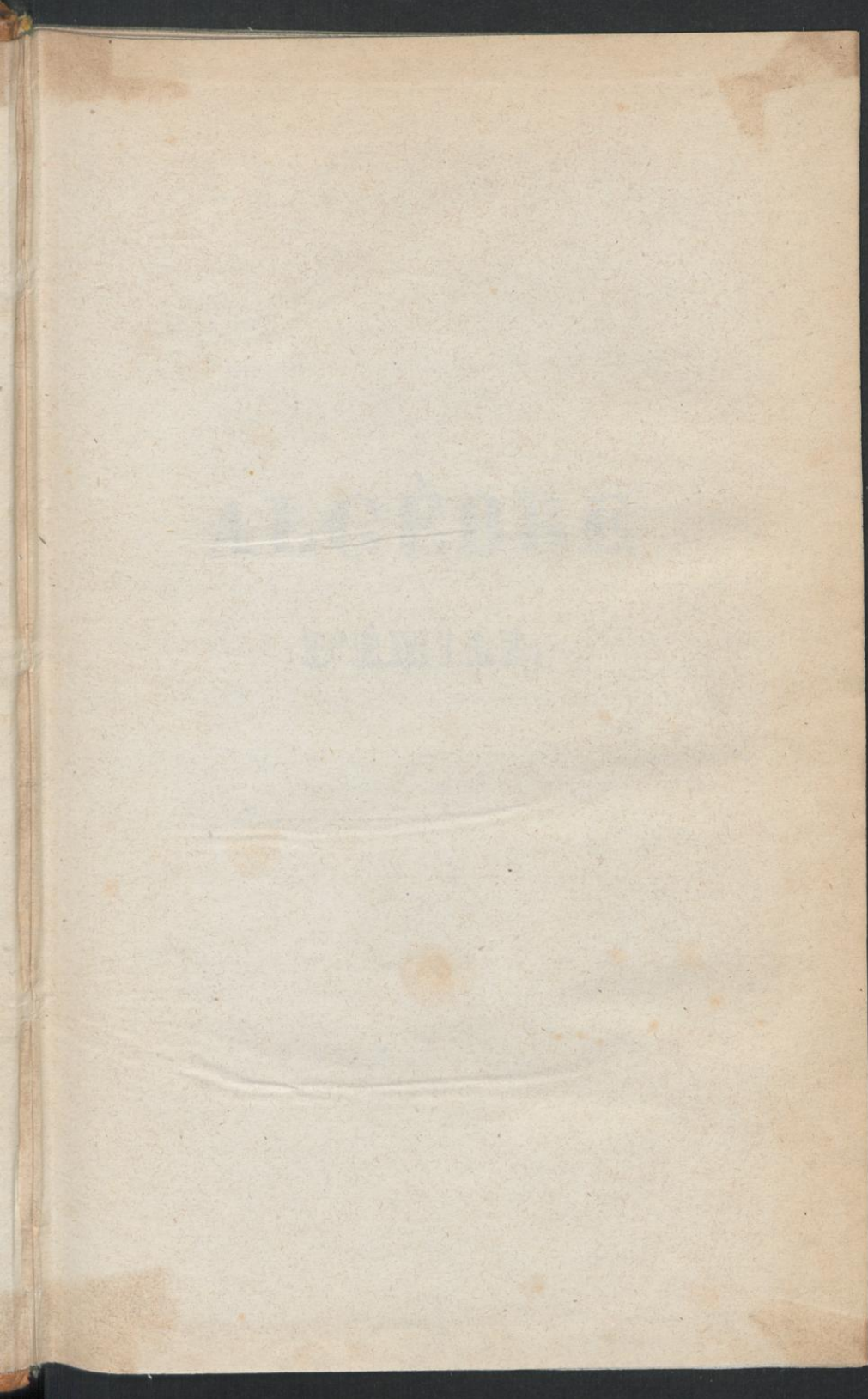
ETHICS ETH-BIB

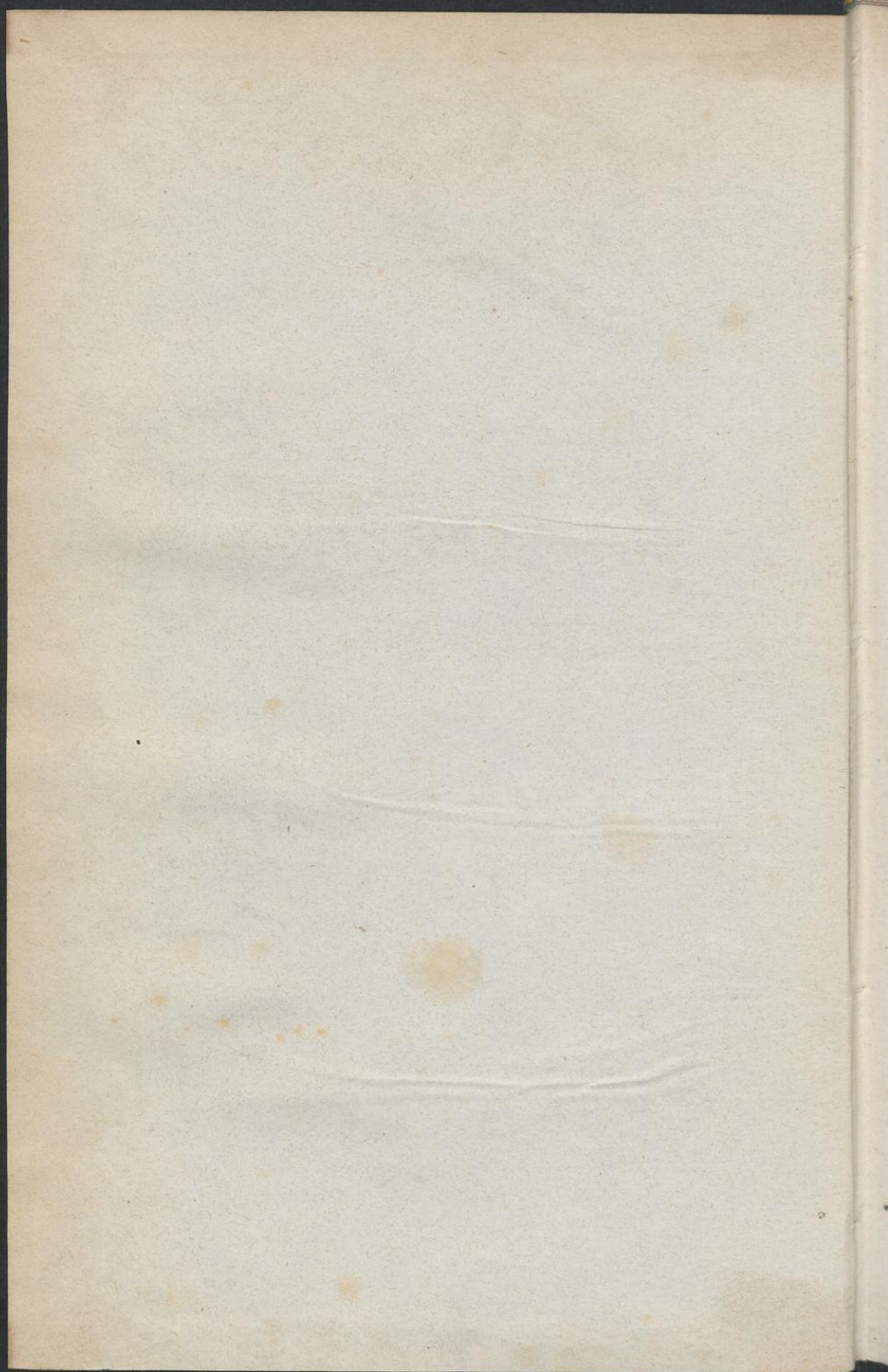


00100003585245

Pa 21379

7584.





ALGÈBRE

D'ÉMILE.

Cet Ouvrage se trouve à Francfort-sur-le-Mein chez M. JÄGER,
et à Stuttgard chez M. STEINKOPF.



On trouve aux mêmes adresses

ARITHMÉTIQUE D'ÉMILE. Troisième édition. Un vol. in-8° : 1823.

MÉTAPHYSIQUE DES QUANTITÉS POSITIVES ET NÉGATIVES. Un vol. in-8° :
1824.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE. Deuxième édition. Un vol. in-8° : 1816.

— Le même Ouvrage, en allemand. Stuttgard : 1818.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE. Deuxième édit. Un vol.
in-4° : 1824.

MÉMOIRE SUR LA MEILLEURE MARCHÉ A SUIVRE DANS L'ENSEIGNEMENT
DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. Brochure in-8° : 1824.

OBSERVATIONS SUR LE LANGAGE DU PAYS DE VAUD. Deuxième édition.
In-8° : 1824.

ALGÈBRE

D'ÉMILE

PAR

EMMANUEL DE VELEY

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES, MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE
IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG, DES ACADÉMIES ROYALES
DE HARLEM ET DE JÉNA, DES SOCIÉTÉS DE MONTAUBAN, DE BORDEAUX, DE
LYON, DE BESANÇON, DE LA SOCIÉTÉ ÉCONOMIQUE DE SAXE, ET DE LA
SOCIÉTÉ HELVÉTIQUE DES SCIENCES NATURELLES.

NOUVELLE ÉDITION

conforme à la précédente pour le plan, perfectionnée dans les détails,
et augmentée.

OUVRAGE APPRUVÉ PAR LE CONSEIL ACADÉMIQUE DU CANTON DE VAUD EN SUISSE,
ET IMPRIMÉ AUX FRAIS DE L'ÉTAT.



7584



GENÈVE.

BARBEZAT ET DELARUE, IMPRIMEURS-LIBRAIRES,
RUE DU RHÔNE, 177.

PARIS. RUE DE GRAMMONT, 7.

1828



ALGÈBRE

D'EMILE

EMMANUEL DE VILLIERS

GENÈVE.

IMPRIMERIE DE BARREZAT ET DELARUE.



GENÈVE

BARREZAT ET DELARUE, IMPRIMERIES LITTÉRAIRES

PARIS, RUE DE GRANDMONT



PRÉFACE.

DEPUIS plus de trente ans, je recommande aux auteurs de livres élémentaires une marche naturelle et logique, que j'ai cherché à suivre moi-même dans mes divers ouvrages sur les mathématiques et sur la physique. En publiant la première édition de mon *Arithmétique* (1795), je l'intitulai *Arithmétique d'Émile*, et je lui donnai pour épigraphe ces mots de J.-J. Rousseau, *Que votre élève n'apprenne pas la science, qu'il l'invente* : c'était assez faire pressentir la marche que je me proposais de suivre. Dès lors j'ai publié la *Physique d'Émile*, l'*Algèbre d'Émile*, et plusieurs autres ouvrages élémentaires, où le nom d'Émile ne paraît plus, mais dans lesquels j'ai cependant toujours suivi la même méthode. L'épigraphe que je viens de citer prouve que j'ai considéré cette méthode comme une méthode d'invention; cependant j'ai déclaré que je ne voulais point lui donner le nom de méthode analytique, parce que les philosophes ne sont point encore d'accord sur le véritable caractère de cette dernière. Mais ce qui est beaucoup plus essentiel, c'est d'envisager cette marche d'invention sous son véritable point de vue. Voici ce que j'ai dit à cet égard, dans un

Mémoire sur la meilleure marche à suivre dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, publié en 1824 :

« Les ouvrages élémentaires, dans chaque genre, sont faits pour les commençants, et leur condition essentielle est, je pense, la clarté. Il faut qu'ils soient clairs, et ils doivent l'être, non-seulement dans les détails, mais encore dans la marche générale. Si le plan sur lequel ils sont tracés peut être saisi d'entrée par le lecteur, la lumière qui en résulte rejaillit nécessairement sur les détails, et augmente l'intérêt de l'ensemble.

« Je suppose un esprit bien fait, capable de réflexion, qui ne connaisse pas la géométrie, qui ne l'ait pas étudiée, mais qui veuille s'imposer la tâche de méditer lui-même sur ce sujet, et d'inventer en quelque sorte la science. Il s'informera d'abord de l'objet dont elle s'occupe, savoir l'étendue, considérée sous le rapport de ses formes et de ses dimensions; et après avoir tiré de là les premières notions de lignes droites et courbes, de surfaces planes et non planes, et de solides de toute espèce, il demandera quelles sont, parmi cette infinité de choses, celles auxquelles on se borne dans les éléments. Avec ces données préliminaires, il s'abandonnera à ses propres forces, se tracera d'avance une route, et la suivra sans s'en départir.

« Cette méthode, qu'on peut appeler *méthode de recherche* ou *d'invention*, est sans doute aussi celle qui convient à l'enseignement, puisque l'élève, en suivant le fil qui le dirige, sent qu'il aurait pu le tendre lui-même, et croit presque ne suivre que sa propre impulsion.

« Mais je dois répéter ici ce que j'ai déjà dit ailleurs :

On a trop confondu la méthode d'invention proprement dite avec la marche supposée des inventeurs; c'est celle-ci que Clairaut a voulu suivre dans ses *Éléments de géométrie*, publiés en 1741, et contre laquelle d'Alembert a fait ensuite, en 1759, quelques objections dans ses *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*. Le hasard a souvent présidé aux découvertes des véritables inventeurs, qui, semblables à l'abeille, butinaient tantôt ici, tantôt là, sans s'astreindre à aucune marche calculée. Lorsqu'on prétend suivre leurs traces, on doit procéder comme si l'on essayait un premier pas, sans avoir l'air de prévoir quels pourront être les suivants; et cette incertitude n'est pourtant pas réelle: il faut bien que l'auteur adopte d'avance un plan; mais il évite de le faire connaître. Ce plan d'ailleurs est tel, qu'il faudrait déjà posséder la science dans son entier pour le saisir, et dès lors il n'est plus propre à servir de guide au commençant.

« Je l'ai dit aussi: Il me paraît que la véritable méthode de recherche doit, moins que toute autre, avoir l'air de procéder arbitrairement et comme au hasard: elle doit se proposer un but, et y marcher d'un pas assuré; elle doit répandre sans cesse une lumière si vive, que l'élève ne soit jamais incertain de sa route, qu'il découvre d'un coup d'œil le chemin qu'il a fait, et celui qu'il doit faire encore. »

A peu près dans le temps que je publiai mon premier ouvrage, le *Traité analytique de la Méthode* (1794), l'illustre et malheureux Lavoisier professait la même doctrine, et l'un et l'autre nous citions Condillac

comme en ayant un des premiers donné le précepte et l'exemple. J'ai dès lors acquis une longue pratique de l'enseignement, et j'ai vu souvent ces développements logiques exciter l'enthousiasme des jeunes élèves favorisés par la nature; mais ils ont peu d'influence sur les lecteurs qui savent déjà, et qui tiennent à leurs habitudes. Peut-être aussi n'y a-t-on pas donné assez d'attention; j'en trouverais la preuve dans un certain nombre d'ouvrages élémentaires qui ont paru dès lors.

Si l'on a présent à l'esprit ce que nous venons de dire à l'occasion de la géométrie, on comprendra que nous avons dû distribuer les matières que nous nous proposons de faire entrer dans cette Algèbre sur un plan qui pût être saisi par les commençants lorsqu'ils auraient acquis les notions fondamentales. Nous allons donner ici une légère esquisse de ce plan.

On y trouve d'abord une Introduction divisée en trois chapitres. Dans le premier, on fait naître les caractères généraux et l'algèbre au moyen de problèmes arithmétiques. Dans le second, en appliquant les formules générales à quelques cas particuliers, dans lesquels telle ou telle quantité a passé de l'addition à la soustraction, et réciproquement, on voit arriver les quantités dites positives et négatives, que nous avons nommées *directes* et *inverses*. Dans le troisième enfin, on fait observer que le but de toute opération de calcul est de déterminer des quantités inconnues au moyen de certaines relations qu'on leur sait avoir avec des quantités connues. On fait observer aussi que ces rapports fournissent des équations qui servent à les exprimer. On dit alors ce que

c'est que résoudre une équation, et l'on fait voir que toute équation, ou se trouve résolue dès qu'elle est posée, ou n'est pas ainsi immédiatement résolue.

Toute l'algèbre étant comprise dans ces deux classes d'équations, le corps de l'ouvrage se trouve naturellement divisé en deux *parties*, la première traitant des équations qui sont résolues dès qu'elles sont posées, la seconde des équations à résoudre.

Cela posé, voyons les détails de la première partie, qui porte, dans le fait, sur les opérations fondamentales. Elle est de nouveau divisée en deux sections: la première, qui s'occupe des opérations sur les quantités simples, conduit aux lois des signes, aux définitions des coefficients, des exposants, des puissances et des racines, et enfin à la composition des formules algébriques, soit comme monomes, soit comme polynomes.

La seconde section traitant des quantités composées, considère successivement leur addition, leur soustraction, leur réduction, puis leur multiplication et leur division. A l'occasion de la soustraction, on dit un mot des équidifférences et des progressions par différences, déjà examinées en détail dans l'arithmétique. A l'occasion de la division, on dit un mot, soit des fractions, soit des proportions et progressions par quotients, et même des logarithmes, tous sujets développés dans l'arithmétique.

Enfin, la division conduit encore aux séries qui naissent de la division, et celles-ci conduisent aux fractions continues. Mais la règle par laquelle on réduit une fraction ordinaire en fraction continue, est la même que

celle du plus grand commun diviseur, en sorte que ce dernier sujet vient succéder au précédent. Cependant on ne peut s'occuper du plus grand commun diviseur sans parler de la plus grande commune mesure de deux nombres, et des quantités incommensurables ou irrationnelles. Or, ces quantités sont représentées par des racines à extraire, et elles conduisent par conséquent aux élévations aux puissances, aux extractions de racines, et au calcul des radicaux. Alors la première partie est terminée. On y a joint cependant une appendice sur les permutations et combinaisons.

Nous avons dit que la seconde partie traitait des équations à résoudre. Elle est aussi divisée en deux sections: dans la première, on pose les généralités relatives aux équations, et on examine les changements préparatoires qu'on peut leur faire subir. On les décompose en facteurs du premier degré; on examine la forme de leurs coefficients, et on traite des fonctions symétriques de leurs racines.

La seconde section s'occupe de la résolution effective des équations. On y traite d'abord des problèmes qui fournissent autant d'équations que d'inconnues, et ensuite des problèmes qui fournissent plus ou moins d'équations que d'inconnues. Voyons plus en détail le premier cas, celui où l'on a autant d'équations que d'inconnues.

Dans une première sous-division, on cherche à ramener le cas de plusieurs équations et autant d'inconnues, à celui d'une équation et une inconnue, c'est-à-dire qu'on s'occupe de l'élimination pour tous les degrés.

Dans une seconde sous-division, qui traite d'une équation avec une inconnue, on a d'abord le cas le plus simple, celui des équations à deux termes, qui non-seulement comprend toutes les équations du premier degré, mais encore les racines réelles et imaginaires des nombres, et en particulier les racines de l'unité pour tous les degrés.

Les équations à deux termes conduisent à l'évanouissement des termes et à la résolution des équations générales du second, du troisième, du quatrième degré, et de quelques équations de degrés supérieurs qui se rattachent à celles-là. Du reste, la résolution des équations générales des quatre premiers degrés, a été traitée encore d'une manière très-développée par la méthode de Lagrange, fondée sur la considération des fonctions des racines.

On a ensuite, comme méthodes propres à tous les degrés, soit pour les équations numériques, soit pour les équations algébriques, la méthode des racines égales, puis celle des racines rationnelles, puis enfin quelques mots sur les racines irrationnelles et sur les racines imaginaires.

On voit par cette analyse que l'ouvrage pourrait être considéré comme terminé là, puisqu'on a passé en revue les matières qui doivent essentiellement entrer dans les éléments. Cependant on y a joint une appendice annexée à la seconde partie, appendice dans laquelle on s'est proposé, 1^o d'expliquer quelques méthodes plus particulières que celles du corps de l'ouvrage, qui toutes sont tout-à-fait générales; 2^o de proposer aux commen-

çants un certain nombre d'exercices de calcul. Ces procédés particuliers et ces exercices ne devaient pas entrer dans le corps de l'ouvrage pour ne pas en ralentir la marche. Dans cette appendice donc, on expose en premier lieu quelques méthodes d'élimination, d'abord pour le premier degré, et ensuite pour tous les degrés; et l'on s'exerce à résoudre des problèmes déterminés du premier et du second degré, puis des problèmes indéterminés du premier. Après avoir ensuite traité assez au long des racines irrationnelles des équations numériques, on fait l'application de toutes les méthodes à des équations de degrés supérieurs. On y résout entre autres complètement une équation numérique du dixième degré, qui a des racines de tous les genres.

Enfin, on a ajouté à cette nouvelle édition un chapitre sur les séries, dans lequel on explique la méthode des coefficients indéterminés, et un sur l'intérêt composé.

Cependant nous pensons, avec M. Lacroix, que la matière des séries ne devrait pas être morcelée comme on le fait ordinairement; et nous n'avons eu pour but que d'en développer avec quelque soin les premiers principes, pour qu'on eût ensuite plus de facilité à lire les ouvrages où la matière est traitée dans son ensemble.

Je dois maintenant parler de quelques dénominations nouvelles introduites dans cet ouvrage.

1° J'avais proposé, dans mon *Introduction à l'Algèbre*, publiée en 1799, d'appeler *directes* les quantités positives, et *inverses* les quantités négatives. Je remis cet ouvrage au célèbre Carnot, en 1800, à son passage pour Marengo;

et un an après, en 1801, parut la *Corrélation des figures de géométrie*, où les mêmes dénominations sont employées. Cependant Carnot distingue les véritables quantités qui sont absolues, directes, ou inverses, des valeurs ou formules algébriques, qu'il continue de nommer positives ou négatives. J'ose dire qu'il n'y a aucun avantage dans cette distinction. Renoncerons-nous à dire les nombres 1, 2, 3, 4, parce que ces caractères ne sont pas réellement des nombres, mais les chiffres qui les représentent? Ne dirons-nous plus que $\sqrt[n]{a^m}$ est une quantité radicale, parce qu'à la rigueur cette expression n'est que la valeur ou la forme algébrique de cette quantité même? Les ouvrages de tous les mathématiciens répondent à cette question. Ainsi donc, d'un côté on est en quelque sorte forcé d'appeler quantités les formules algébriques, et de l'autre on a paru sentir assez généralement les avantages des dénominations que j'avais proposées. Pourquoi donc continue-t-on de nommer positives les quantités directes, et négatives les quantités inverses?

Du reste, la théorie de Carnot ne me paraît guère propre à entrer dans des éléments, d'autant plus qu'elle est fondée sur des considérations géométriques dont on n'est pas toujours supposé s'être occupé lorsqu'on commence l'algèbre. Je crois d'ailleurs que la règle que j'ai donnée aux n^{os} 25, 26 et 35 de cet ouvrage, pour l'interprétation des valeurs inverses, suffit pour tous les cas (Voyez, par exemple, dans mon *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, les n^{os} 53 à 65 et les n^{os} 197 et 198, outre les différents cas particuliers examinés dans cette *Algèbre*

même). Cette règle, en outre, est remarquable, soit par son extrême simplicité, soit parce qu'elle renferme les règles des signes pour les quatre opérations principales, ce qui donne la facilité de démontrer immédiatement ces règles sans y revenir à deux fois, comme l'ont fait quelques auteurs. (*Voyez les pages 32, 33 et 34.*)

2° Il y a aussi en algèbre une expression généralement usitée, et qui me paraît tout-à-fait impropre: c'est celle de *racine*, employée comme désignant la valeur de l'inconnue dans une équation. On nomme cette valeur la racine de l'équation; mais cette prétendue racine n'en est pas une, et n'en serait pas même une quand l'équation serait une puissance; à plus forte raison quand elle ne l'est pas. Il n'y a qu'un seul cas où les valeurs de x soient des racines, c'est dans l'équation à deux termes. J'ai proposé, depuis 1799, de remplacer le mot de *racine* par celui de *soluteur*; et cette dénomination paraît très-convenable. En effet, quand une équation donne $x = a$, cette valeur a est un nombre qui, mis à la place de x dans l'équation, satisfait à cette équation ou la *résout*: a est donc un *soluteur* de l'équation? Pourquoi employer un même mot dans deux sens très-différents, quand il est si facile de faire autrement? Plus on perfectionnera la langue des mathématiques, plus la science fera de progrès.

3° Enfin, depuis long-temps on sentait l'abus des épithètes d'*arithmétique* et de *géométrique*, données aux rapports de soustraction et de division. En 1795, dans la première édition de l'*Arithmétique d'Émile*, je proposai de les remplacer par d'autres, et de dire *rapport sous-*

tractif, et *rapport quotitif*. Mais en 1802, dans la seconde édition du même ouvrage, je me fixai aux expressions suivantes : *rapport excédentif*, *rapport quotitif*, *proportion excédentive*, *proportion quotitive*, *progression excédentive*, *progression quotitive*.

Ces dénominations n'ont pas été adoptées : on pourrait même croire, d'après les expressions qui sont actuellement admises, qu'il n'existe plus qu'un seul rapport et qu'une seule proportion, quoiqu'on ait encore deux progressions. Cependant, je dois l'avouer, il me semble que le résultat d'une comparaison est toujours un rapport. Et comme on peut comparer deux nombres donnés sous deux points de vue différents, ou sous deux rapports différents, en se demandant, 1° de combien l'un excède l'autre, 2° quel est le quotient de l'un par l'autre, les résultats de ces deux comparaisons sont nécessairement deux rapports, qui doivent être distingués par deux épithètes différentes, avec le nom générique commun.

Puissé-je avoir convaincu quelques-uns de mes lecteurs de l'importance de la méthode dans tout traité élémentaire d'un genre quelconque ! Puissent-ils penser désormais que la marche d'invention, *telle que je l'ai caractérisée*, est la plus convenable à l'enseignement ! et puissent les ouvrages élémentaires devenir en général plus méthodiques !

N. B. J'ai marqué d'un astérisque *, dans le courant de l'ouvrage, les numéros que les commençants peuvent omettre dans une première lecture ; et j'ai d'ailleurs

donné, outre la table générale, une table particulière de numéros qui, lus dans l'ordre que j'ai indiqué, forment un cours élémentaire ne passant pas les équations du second degré. Cette table est surtout destinée à Messieurs les étudiants en belles-lettres dans l'académie de Lausanne; mais elle pourra servir aussi à tous les lecteurs qui voudront se contenter d'un cours très-élémentaire, ou qui voudront du moins commencer par là.

Je ne terminerai point cette Préface sans offrir tous mes remerciments à M. Louis Cuénoud, instituteur de mathématiques à Lausanne, qui a bien voulu me donner ses avis sur les perfectionnements dont mon ouvrage était susceptible. Presque tous les changements avantageux qu'on pourra remarquer dans cette nouvelle édition, m'ont été suggérés par lui; et je n'ai pu qu'applaudir à sa perspicacité et à la justesse de son esprit. Cette preuve d'attachement qu'il a bien voulu me donner m'a été d'autant plus sensible, que je lui ai voué moi-même dès long-temps l'affection la plus sincère et la plus vive.

FAUTES ESSENTIELLES

A CORRIGER D'AVANCE.

N. B. Comme le papier boit, servez-vous d'une plume bien fine, et d'encre ordinaire, où vous ajouterez de la gomme en quantité suffisante.

PAGE 6, ligne 13 en remontant, $60x + 660$, lisez $60x + 600$.

10, au dénominateur de la 1^{re} formule, — 50, lisez $60 - 50$.

14, ligne 21, $a + b$, $a + b$, lisez $a + b$, $a - b$.

20, note, démonstrations, lisez dénominations.

32, ligne 9 en remontant, pouvons, lisez pourrons.

40, ligne 2, $(a^m + b^n + c^p)^r$, lisez $(a^m + b^n + c^p)^r$.

— ligne 16, 4, 3, lisez 4.3.

43, ligne 5, $4cd$, lisez — $4cd$.

45, ligne 9 en remontant, $1(7a^2b^5 - m^4n + \text{etc.})$, lisez
 $1(7a^2b^5 - m^4n + \text{etc.})'$.

47, ligne 9, $\frac{3}{-} = 3$, lisez $\frac{3}{1} = 3$. Ligne 11 en remontant,

ajoutez au bas de la page, et sous la forme de note, ces mots : Si, au lieu de prononcer *moins par moins fait plus*, ce qui choque toujours les commençants, on prononçait *l'inverse de l'inverse est le direct*, ou *l'inverse pris inversement devient direct*, le sens de la phrase serait beaucoup plus clair. Voilà un avantage de nos dénominations de quantités directes et de quantités inverses.

50, note, double signe +, lisez double signe $\pm$.

51, ligne 13, ap , lisez a^{-p} .

95, formule 4, $\frac{a}{\frac{1}{1000}}$, lisez $\frac{a}{\frac{1}{1000}}$.

97, 98. Assurez-vous qu'un carton fait pour ces deux pages a bien été placé dans votre exemplaire.

PAGE 130, lignes 18 et 19, s'ils n'ont point de diviseur commun,
lisez si les coefficients n'ont point de diviseur commun.

136, ligne 3, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n$, lisez $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$.

145, ligne 3, $B \frac{p}{m}$, lisez $B^{\frac{p}{m}}$.

146, ligne 8 en remontant, $4d\sqrt[3]{c^5e}$, lisez $4cd\sqrt[3]{c^2e}$.

151, ligne 2 en remontant, a'' , lisez a^m .

152, ligne 8 en remontant, $\gamma^q\gamma^r$, lisez $\gamma^q\delta^r$.

154, lignes 1 et 3 en remontant, $\left(\sqrt[n]{-a}\right)_n$, lisez $\left(\sqrt[n]{-a}\right)^n$.

155, dernière formule avant la note, $+$, lisez $\times$.

— note, ligne 1, $\sqrt{a} - 1$, lisez $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$.

185, ligne 3, $(1 + n\gamma) +$, etc), lisez $(1 + n\gamma + \text{etc.})$.

— ligne 3 en remontant, $(1 + \gamma)^h$, lisez $(1 + \gamma)^h$.

195, ligne 2 en remontant, $\frac{n^{n+1}-n^2}{n-1}$, lisez $\frac{n^{n+1}-n^2}{n-1}$.

217, ligne 9, (Voyez la note), lisez (Voyez la note, pag. 216).

234, dernière formule, $-(m-T)$, lisez $-(m-1)T$.

237, ligne 15, mettez une parenthèse devant $\alpha^n\beta^p$, après le
signe $+$.

250, ligne 17, $S^2 =$, lisez $S_2 =$.

260, ligne 12, 1. C es, lisez 481. Ces.

325, ligne 11 en remontant, $-\beta\delta$, lisez $+\beta\delta$.

357, ligne 13 en remontant, $pz^2(q-3)z$, lisez $pz^2 + (q-3)z$.

361, ligne 11 en remontant, à moins que ces valeurs, etc.....

La phrase serait peut-être plus claire si on disait : mais
dans telle ou telle série, deux valeurs peuvent tomber sur
les limites mêmes.

368, ligne 18, ces membres, lisez ces nombres.

369, ligne 11 en remontant 2, lisez - 2.

403, ligne 12, $4x + 3z$, lisez $4x + 5z$.

407, ligne 7, formule du milieu, ajoutez au bas de la page, et
sous la forme de note, ces mots : On aurait pu, au lieu
de $-\frac{7}{2}$, écrire $-3 - \frac{1}{2}$; cela aurait simplifié les calculs,
sans cependant changer le résultat.

PAGE 471, ligne 5, la formule doit être

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - x^{11} + \text{etc.}$$

471, ligne 6, $+x^2$, $+x$; lisez $-x^2$, $-x$.

— lignes 5, 6, 7, en remontant, lisez ces lignes ainsi : jusqu'à ce qu'on eût un reste dans lequel la plus haute puissance de x fût moindre que celle du diviseur. Ce serait alors ce reste qui formerait le numérateur de la fraction à développer en série, après avoir etc.

472, au milieu, *Exemple du 4^{me} cas*, lisez *Exemples au pluriel*.

473, ligne 10, $-\frac{n^2x^2}{m}$, $+\frac{2nx}{m^2}$, lisez $-\frac{n^2x^2}{m^2}$, $+\frac{2nx}{m}$.

474; ligne 6 en remontant, les différences des différences, lisez les différences des différences des différences.

477, Assurez-vous qu'un carton de quatre pages a bien été placé ici dans votre exemplaire.

485, ligne 7 en remontant, dont, lisez donc.

FAUTES MOINS GRAVES QUE LES PRÉCÉDENTES.

PAGE 182. Dans la formule du n° 330, le chiffre 3, qui est au-dessus du signe radical, dans les dénominateurs des quatre derniers termes, appartient au signe radical lui-même. Ainsi

$\frac{\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$, par exemple, signifie β divisé par $\sqrt[3]{\alpha^2}$, etc.

220, ligne 3, ôtez la parenthèse qui commence la ligne.

257, ligne 1, ses, lisez ces.

259, ligne 9, dans cas, lisez dans ce cas.

356, ligne 3, o n, lisez son.

357, ligne 3 en remontant, et dernier, lisez et du dernier.

368, ligne 12, binome, lisez trinome.

— ligne 24, $\frac{\Lambda}{7}$, lisez $\frac{(\Lambda)}{7}$.

PAGE 394, lignes 15, 16, obtiendrons, lisez obtiendrions.

397, ligne 2 en remontant, d'où conclut, lisez d'où l'on conclut.

463, ligne 4, n, p, q , etc. lisez p, q , etc.

485, lignes 8, 10, 11 en remontant. Ici et dans les pages suivantes, on a employé, d'après Euler, le mot *exposant* comme synonyme de *raison*. C'est la raison de la progression.

492, formule cinquième, mettez x au premier membre.

496, ligne 10 en remontant, 453, ôtez ce nombre de cette ligne, et mettez-le à la ligne au-dessus.



TÂCHE

DE MM. LES ÉTUDIANS EN BELLES-LETTRES DANS L'ACADÉMIE
DE LAUSANNE.

N. B. Cette tâche est aussi celle des aspirants aux places de *commissaires - arpenteurs*. On y a joint, à la fin, trois articles que les aspirants aux places d'*officiers d'artillerie* doivent connaître, outre les précédents. Quant aux *officiers du génie*, ils doivent être prêts sur l'ouvrage entier.

Observation générale.

Les élèves feront bien de suivre les numéros dans l'ordre de cette table, quoique ce ne soit pas celui du cours complet.

N^{os} 1 à 44 inclusivement, puis n^{os} 50 à 112, et enfin n^{os} 114 à 126.

N^{os} 345 à 355, puis 357 à 369; puis encore 441 à 449, toujours inclusivement.

N^o 679 les premières lignes, puis les n^{os} 680 à 684.

N^{os} 691 à 712, en omettant, dans ce dernier numéro, les Problèmes XII et XIV.

N^{os} 157, 158, 159.

N^{os} 212 à 228, puis 234 à 253, puis encore 255 à 264.

N^{os} 265 à 286, puis n^{os} 299 à 324; puis encore 337 à 343.

N^{os} 725 à 740, toujours inclusivement.

POUR MM. LES OFFICIERS D'ARTILLERIE,

Outre tout ce qui précède, encore les numéros suivants,

N^{os} 189 à 211.

N^{os} 344, ou l'*Appendice à la Première Partie*.

N^{os} 713 à 720.

ALPHABET

POUR FACILITER LA LECTURE DES CALCULS OÙ L'ON FAIT
USAGE DE LETTRES GRECQUES.

A α..... Alpha.

B β..... Bêta.

Γ γ..... Gamma.

Δ δ..... Delta.

E ε..... Epsilon.

Z ζ..... Zêta.

H η..... Êta.

Θ θ..... Thêta.

I ι..... Iota.

K κ..... Cappa.

Λ λ..... Lambda.

M μ..... Mu.

N ν..... Nu.

Ξ ξ..... Xi.

O ο..... Omicron.

Π π..... Pi.

P ρ..... Rho.

Σ σ..... Sigma.

T τ..... Tau.

Υ υ..... Upsilon.

Φ φ..... Phi.

Χ χ..... Chi.

Ψ ψ..... Psi.

Ω ω..... Oméga.

ALGÈBRE D'ÉMILE.

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

Naissance des caractères généraux et de l'Algèbre.

1. ON n'a point fait usage en arithmétique des caractères généraux et des lettres de l'alphabet, avant d'avoir senti qu'il était possible d'employer de semblables caractères, et qu'il y aurait de l'avantage à le faire.

Nous allons voir comment on a pu être conduit à cette espèce de calcul, et pour cela nous essaierons de résoudre quelques problèmes.

Cependant, avant d'aborder ces problèmes, il sera bon de rappeler ici quelques définitions, qui ont été données dans l'arithmétique, et qu'il importe d'avoir présentes à l'esprit (Voyez l'Arithmétique d'Emile, 3^e édit., chapitre I :

1^o. *En mathématiques, on nomme GRANDEUR ou QUANTITÉ, tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution, comme l'étendue, le mouvement, la lumière, les sons, le poids des corps, etc. etc.*

Le mot quantité n'est donc pas pris ici dans le sens de *multitude*

ou d'abondance, qu'on lui donne souvent dans l'usage ordinaire de la langue.

2°. *Le rapport d'une grandeur quelconque à celle de même espèce qu'on a choisie pour unité s'appelle NOMBRE; et les nombres se représentent ordinairement par les différentes combinaisons des chiffres.*

Ces rapports pouvant augmenter ou diminuer avec les quantités comparées, sont aussi des quantités, et en prennent souvent le nom. Ainsi l'on peut dire, la quantité 25 ou le nombre 25, au lieu de dire, les chiffres qui représentent le nombre 25.

3°. *Les nombres 8 aunes, 9 aunes, 8 écus, 9 écus, etc. qu'on énonce en désignant l'espèce des quantités comparées, se nomment NOMBRES CONCRETS; et les nombres 8, 9, etc. qu'on énonce généralement, sans désigner l'espèce des quantités comparées, sont dits NOMBRES ABSTRAITS, parce qu'on les sépare, en quelque sorte, de la chose nombrée, pour les considérer à part.*

4°. Je suppose du reste que l'on connaît la signification et l'usage ordinaire des signes $+$ plus, $-$ moins, $\times$ multiplié par, $:$ divisé par, $=$ égale. Je rappellerai cependant que ces signes, placés entre deux quantités, désignent communément le premier l'addition de ces quantités, le second leur soustraction, le troisième leur multiplication, le quatrième leur division, et le cinquième leur égalité.

La multiplication s'indique aussi quelquefois par un point mis entre deux nombres, comme $3 \cdot 4$, ce qui vaut 12; et la division par un trait horizontal placé entre le dividende, qui est au-dessus, et le diviseur, qui est au-dessous, à la manière des fractions, comme $\frac{12}{3}$, ce qui vaut 4.

D'ailleurs, si deux lignes parallèles $=$ marquent, par leur équidistance, l'égalité des quantités placées à gauche et à droite, en revanche deux lignes qui se rencontrent $>$ ou $<$, désignent l'inégalité des quantités qu'elles séparent. Le plus grand nombre est à l'ouverture de l'angle, le plus petit à la pointe. Pour lire ces expressions, $12 > 4$, $4 < 12$, on prononcera, 12 est plus grand que 4, et 4 est plus petit que 12.

Enfin, quand on parle d'une manière absolue du signe d'une quantité, on entend toujours, ou le signe $+$, ou le signe $-$, qui

se trouve au devant de cette quantité. Par exemple, dans la quantité $12 + 5 - 3$, qui vaut évidemment 14, le signe de 5 est $+$, et le signe de 3 est $-$. Dans $3 \times 4 - \frac{2 \times 6}{4}$, qui a pour valeur 9, le signe de $\frac{2 \times 6}{4}$ est $-$, et 3×4 n'a point de signe.

Cela posé, venons aux problèmes ou aux questions dont nous avons parlé, et faisons-les porter sur des nombres concrets.

2. PREMIÈRE QUESTION : *Vingt personnes, hommes et femmes, mangent dans une auberge : l'écot d'un homme est de 8 décimes ; l'écot d'une femme est de 6 décimes, et la dépense totale est de 130 décimes. On demande le nombre des hommes, et celui des femmes.* (Algèbre d'Euler, n° 567.)

A. Nous observerons d'abord que, si le nombre des hommes était connu, celui des femmes le serait aussi, puisqu'il est dit qu'il y a en tout 20 personnes.

B. Ainsi donc, comme nous avons appelé x , dans l'arithmétique, le terme inconnu d'une proportion, nous appellerons ici x le nombre inconnu des hommes.

C. En retranchant le nombre des hommes du nombre total, nous aurons le nombre des femmes, qui sera par conséquent représenté par $20 - x$.

D. Maintenant, l'écot d'un homme étant de 8 décimes, s'il y avait 4 hommes, l'écot de tous les hommes serait de 8 décimes multipliés par 4, ou, ce qui reviendrait au même, il serait de 4 décimes multipliés par 8 (Arithmétique d'Émile, troisième édition, n° 431), ce qui serait toujours 32 décimes.

E. Mais le nombre des hommes est x , et par conséquent l'écot de tous les hommes est de x fois 8 décimes, ou, ce qui revient au même, il est de 8 fois x décimes (n° 2, D).

Et comme la quantité 8 fois x peut évidemment être représentée par $8x$, on aura l'écot de tous les hommes égal à $8x$ décimes.

F. De même, le nombre des femmes étant représenté par $20 - x$, (n° 2, C), et la dépense de chacune étant de 6 décimes, l'écot de toutes les femmes sera égal à 6 décimes multipliés par $20 - x$, nombre abstrait; ou, ce qui revient au même, cet écot sera égal à $20 - x$ décimes multipliés par 6, nombre abstrait (n° 2, D).

Voyons donc comment on peut multiplier $20 - x$ par 6.

Si, au lieu de $20 - x$, nous avons le nombre 20 tout entier à multiplier par 6, il est clair que le produit serait 6 fois 20, ou 120.

Mais ce produit est trop grand, parce que le multiplicande devait, avant l'opération, être diminué de x .

Ayant donc pris 6 fois le nombre 20 tout entier, nous avons pris 6 fois x de trop.

Il n'y a donc, pour corriger l'erreur, qu'à retrancher 6 fois x , ou $6x$ de 120; et nous aurons alors $120 - 6x$ pour le produit de $20 - x$ par 6.

Et par conséquent l'écot de toutes les femmes sera égal à 120 décimes $- 6x$ décimes; ou, ce qui revient au même, à $120 - 6x$ décimes.

c. La dépense des hommes ($n^o 2, E$), jointe à celle des femmes, ($n^o 2, F$), sera donc de $8x$ décimes plus $120 - 6x$ décimes, ce qu'on pourra écrire ainsi, $8x + 120 - 6x$.

II. Mais la dépense des hommes, jointe à celle des femmes, fait la dépense totale; et nous savons d'ailleurs que cette dépense totale est de 130 décimes.

Nous avons donc deux expressions pour la dépense totale; et ces deux expressions ne pouvant appartenir qu'à un seul et même nombre, il est clair qu'elles ont la même valeur. Ainsi

$$8x + 120 - 6x = 130.$$

Voilà ce qu'on appelle l'*ÉQUATION* du problème, du mot latin *aequare*, qui signifie *égaler*. En sorte qu'on nomme *ÉQUATION* une expression qui indique l'égalité de valeur de deux quantités, ordinairement de forme différente.

D'ailleurs, les deux quantités comparées constituent ce qu'on appelle LES DEUX MEMBRES DE L'ÉQUATION. Celle qui est à gauche du signe d'égalité forme LE PREMIER MEMBRE; et celle qui est à droite forme LE SECOND MEMBRE.

Enfin, on nomme TERMES d'une quantité, prise dans une équation ou non, les parties de cette quantité qui n'ont point de signe, ou qui sont séparées les unes des autres par les signes $+$ et $-$.

Ici le premier membre de l'équation a trois termes, $8x$, 120, et x ; et le second n'en a qu'un, 130.

Le mot *terme* a donc alors un sens un peu différent de celui

qu'il a dans les rapports, proportions et progressions. (Voyez l'Arithmétique d'Emile, 3^e édit., nos 533, 540, 543).

1. Pour réduire le premier membre à sa plus simple expression, il faudrait retrancher $6x$ de 120, et joindre le reste avec $8x$.

Mais il est clair qu'on obtiendra le même résultat en retranchant $6x$ de $8x$, et en ajoutant le reste avec 120.

Or, la différence de $8x$ et de $6x$ est manifestement $2x$, ce qui fait que notre première équation se change en celle-ci :

$$2x + 120 = 130.$$

κ. Maintenant nous approchons du but ; car s'il faut ajouter 120 à $2x$ pour faire 130, en n'ajoutant rien à $2x$, on n'aura que $130 - 120$, ou 10, pour la valeur de $2x$.

Nous aurons donc ainsi une troisième et une quatrième équation, qui seront :

$$2x = 130 - 120.$$

$$2x = 10.$$

1. Or, puisque $2x$ valent 10, il est manifeste qu'un seul x vaut 5, ce qu'on trouvera en divisant par 2 chacun des membres de la dernière égalité.

Afin de représenter cette opération finale, on écrira :

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5.$$

μ. Il y a donc, dans l'auberge, 5 hommes, et par conséquent 15 femmes.

Les 5 hommes dépensent 5 fois 8 décimes, ou 40 décimes, et les 15 femmes dépensent 15 fois 6 décimes, ou 90 décimes, ce qui fait bien 130 décimes pour la dépense totale.

3. Rapprochons maintenant nos différentes opérations, pour en saisir mieux la suite. Nous avons eu d'abord

Le nombre des hommes... x

Celui des femmes..... $20 - x$.

La dépense des hommes.. $8x$.

Celle des femmes..... $120 - 6x$.

Nous avons alors formé successivement les équations suivantes, qui nous ont conduits à la valeur de x .

$$8x + 120 - 6x = 130.$$

$$2x + 120 = 130.$$

$$2x = 130 - 120.$$

$$2x = 10.$$

$$x = \frac{10}{2}.$$

$$x = 5.$$

4. Tout ceci n'est pas encore de l'algèbre ; car on ne voit là qu'un caractère étranger au calcul arithmétique ; et les opérations que nous avons faites pour connaître la valeur de ce caractère , ne sont que de simples opérations en chiffres.

Il faut , avant d'arriver à notre but , résoudre encore quelques problèmes analogues à celui-là.

5. SECONDE QUESTION : *Douze personnes , hommes et femmes , mangent dans une auberge : l'écot d'un homme est de 60 décimes ; l'écot d'une femme est de 50 décimes ; et la dépense totale est de 660 décimes. On demande le nombre des hommes et celui des femmes.*

Cette question ne diffère de la précédente que par les nombres. Nous suivrons donc , pour la résoudre , la marche que nous avons suivie pour résoudre la première ; et nous aurons

Le nombre des hommes... x .

Le nombre des femmes... $12 - x$.

La dépense des hommes... $60x$.

La dépense des femmes... $600 - 50x$.

Cela nous donnera les équations suivantes , qui nous conduiront à la valeur de x :

$$60x + 600 - 50x = 660.$$

$$10x + 600 = 660.$$

$$10x = 660 - 600.$$

$$10x = 60.$$

$$x = \frac{60}{10}.$$

$$x = 6.$$

Il y a donc 6 hommes , et par conséquent 6 femmes.

Les hommes dépensent 6 fois 60 décimes , ou 360 décimes , et les femmes 6 fois 50 décimes , ou 300 décimes , ce qui fait bien 660 décimes pour la dépense totale.

6. TROISIÈME QUESTION : *Trente-deux ouvriers français et espagnols travaillent ensemble à un même ouvrage ; on donne 20 décimes par jour à chaque français , et 15 à chaque espagnol ;*

et la dépense journalière est de 540 décimes. On demande le nombre des ouvriers français et celui des espagnols.

Cette question, quoique différente, pour le fond, des deux précédentes, a cependant avec elles un si grand rapport, que nous suivrons encore pour la résoudre la marche que nous avons suivie pour résoudre les autres. Nous aurons donc

Le nombre des ouvriers français..... x .

Celui des espagnols..... $32 - x$.

La journée de tous les français.... $20 x$.

Celle de tous les espagnols..... $480 - 15 x$.

Ce qui nous donnera les équations suivantes :

$$20 x + 480 - 15 x = 540.$$

$$5 x + 480 = 540.$$

$$5 x = 540 - 480.$$

$$5 x = 60.$$

$$x = \frac{60}{5}.$$

$$x = 12.$$

Il y a donc 12 français, et par conséquent 20 espagnols.

La journée de tous les français est de 12 fois 20 décimes, ou de 240 décimes, et la journée de tous les espagnols est de 20 fois 15 décimes, ou de 300 décimes, ce qui fait bien 540 décimes pour la dépense totale.

7. QUATRIÈME QUESTION : *Huit tuyaux de fontaine, les uns de fer, les autres de fonte, coulent ensemble dans un même réservoir ; chaque tuyau de fer donne 12 hectolitres d'eau, pendant que chaque tuyau de fonte en fournit 10 : alors le réservoir est plein, et contient 86 hectolitres. On demande le nombre des tuyaux de fer, et celui des tuyaux de fonte.*

Encore ici la question varie ; et cependant elle a, avec les autres, un rapport qu'il sera facile d'apercevoir sans que je m'y arrête, et qui nous obligera de suivre, pour la quatrième fois, la marche que nous avons suivie. Nous aurons donc

Le nombre des tuyaux de fer x .

Celui des tuyaux de fonte... $8 - x$.

La dépense de tous les tuyaux de fer, pendant que le réservoir se remplit, exprimée en hectolitres $12 x$.

Celle des tuyaux de fonte..... $80 - 10 x$.

Ce qui donnera

$$12x + 80 - 10x = 86.$$

$$2x + 80 = 86$$

$$2x = 86 - 80.$$

$$2x = 6.$$

$$x = \frac{6}{2}.$$

$$x = 3.$$

Il y a donc 3 tuyaux de fer, et par conséquent 5 tuyaux de fonte.

Tous les tuyaux de fer donnent donc 36 hectolitres d'eau, pendant que les tuyaux de fonte en fournissent 50. Alors le réservoir est plein, et contient en effet 86 hectolitres d'eau.

8. Si nous réfléchissons maintenant sur ce qu'il nous a fallu faire pour résoudre nos quatre questions, nous verrons que nous avons été forcés de répéter un même calcul quatre fois de suite : du moins la marche des quatre opérations s'est-elle toujours trouvée la même, et cela à cause du rapport qu'il y avait entre les problèmes qu'il fallait résoudre. Ces opérations n'ont absolument différé entre elles que par les nombres, qui ont en effet varié d'une question à l'autre.

Cela bien saisi nous fera penser que la solution du premier problème aurait pu nous conduire à la solution des autres, si dans les différentes égalités successives par lesquelles nous avons passé pour arriver au résultat final de celui-là, nous n'eussions fait qu'indiquer les opérations, au lieu de les effectuer; car alors les calculs à faire pour résoudre chacun de ces problèmes, auraient paru dans le résultat du premier; et ils auraient été réduits là au plus petit nombre possible.

En reprenant notre première question (n° 2), j'expliquerai plus clairement mon idée.

9. Nous avons d'abord représenté le nombre des hommes par x (n° 2, B). Alors celui des femmes a eu pour expression $20 - x$ (n° 2, c), et la dépense de tous les hommes $8x$ (n° 2, E).

A. Pour désigner celle de toutes les femmes, nous avons multiplié $20 - x$ par 6 (n° 2, F), ce qui nous a donné $120 - 6x$.

Maintenant, au lieu de faire cette multiplication, je me bornerai à l'indiquer, afin qu'elle paraisse dans le résultat final. J'aurai donc pour la dépense de toutes les femmes $20 \times 6 - 6x$, ou, ce qui revient au même, $6 \times 20 - 6x$.

b. En réunissant alors les deux dépenses, j'aurai l'équation

$$8x + 6 \times 20 - 6x = 130.$$

c. Parvenu là, je devrais retrancher $6x$ de $8x$; mais, au lieu de faire cette soustraction, je me contenterai de l'indiquer, et je la représenterai par $8x - 6x$, ou par $(8 - 6)x$.

On doit très bien comprendre le sens de cette dernière expression: elle montre que le nombre 6 doit être retranché du nombre 8, et que le reste 2 de cette soustraction doit être écrit devant la lettre x , comme son multiplicateur. Cette expression a donc pour valeur $2x$, comme il faut que cela soit.

Les parenthèses ont là leur utilité, car si on les ôtait, et qu'à la place de $8x - 6x$ on voulût écrire $8 - 6x$, sans parenthèses, cela signifierait alors que la quantité $6x$ devrait être retranchée du nombre 8, ce qui aurait une tout autre valeur, comme il est facile de le voir.

Notre première équation se changera donc en celle-ci,

$$(8 - 6)x + 6 \times 20 = 130;$$

d. D'où nous tirerons ($n^o 2$, κ),

$$(8 - 6)x = 130 - 6 \times 20.$$

e. Mais, l'inconnue x étant ici multipliée par $8 - 6$, nous divisons les deux membres de l'équation par $8 - 6$, et nous aurons enfin

$$x = \frac{130 - 6 \times 20}{8 - 6} \quad (*)$$

résultat final qui donne toujours 5 pour la valeur de x , mais qui a l'avantage de montrer les opérations qu'il faut nécessairement faire pour trouver cette valeur.

(*) Il faut faire ici plusieurs observations.

D'abord il est clair que quand deux quantités sont égales, si on les divise par un même nombre, les quotients sont égaux.

Il n'est pas moins évident que lorsqu'on divise un produit par un de ses facteurs, on a pour quotient l'autre facteur (*Arith.* n^os 69, 161, 164). Ainsi, en divisant le produit $(8 - 6)x$ par le facteur $(8 - 6)$, on a pour quotient l'autre facteur x .

Enfin, comme il est permis, pour indiquer une division, d'écrire le diviseur sous le dividende, en les séparant par un trait (n^o 1), nous pouvons représenter, comme nous l'avons fait, la division du second membre de notre dernière équation par $8 - 6$. Du reste, on peut, pour lire cette équation, dire x égale $130 - 6$ fois 20 divisé par $8 - 6$, ou $130 - 6$ fois 20 sur $8 - 6$.

10. En considérant ce dernier résultat, nous observerons que le nombre 130 représente la dépense totale, le nombre 6 l'écot d'une femme, le nombre 20 toutes les personnes, et le nombre 8 l'écot d'un homme.

11. En sorte que, pour trouver la valeur de x , il faut retrancher de la dépense totale l'écot d'une femme, multiplié par le nombre des personnes, et diviser le reste par la différence de l'écot d'un homme avec celui d'une femme.

12. Appliquons cela à nos autres questions, en assimilant d'ailleurs les hommes aux ouvriers français et aux tuyaux de fer, et les femmes aux ouvriers espagnols et aux tuyaux de fonte, en raison de l'ordre observé entre ces choses dans nos quatre questions; nous aurons tout d'un coup, sans mettre ces questions en équation, et sans passer par les détails intermédiaires,

Pour la seconde (n° 5),

$$x = \frac{660 - 50 \times 12}{60 - 50} = 6.$$

Pour la troisième (n° 6),

$$x = \frac{540 - 15 \times 32}{20 - 15} = 12.$$

Pour la quatrième (n° 7),

$$x = \frac{86 - 10 \times 8}{12 - 10} = 3.$$

13. On comprendra donc, par cet exemple, comment la solution d'un problème peut conduire à la solution d'une foule d'autres problèmes analogues au premier.

Il faut pour cela, quand on résout le problème original, ne pas effectuer les opérations qui se présentent à faire, et se contenter de les indiquer dans les différentes égalités successives par lesquelles on passe (n° 8).

14. Mais ce n'est pas tout : pour aller plus facilement de la solution de notre premier problème à la solution des autres, nous avons déduit de cette première solution une espèce de règle que nous avons énoncée au n° 11.

Or, il est facile de voir que cette règle serait abrégée, simplifiée, qu'elle deviendrait du moins plus saillante, et se lirait en quelque sorte d'un coup d'œil, si on lui donnait la forme suivante :

$$x = \frac{\text{Dép. tot.} - \text{L'écot d'une fem.} \times \text{Le nomb. des pers.}}{\text{L'écot d'un hom.} - \text{L'écot d'une fem.}}$$

15. D'ailleurs on sentira facilement l'avantage, soit de la règle du n° 11, soit de l'équation dans laquelle nous venons de la changer; car, dans l'une et dans l'autre, les mots *Dépense totale*, par exemple, ne signifient pas plus 130 que 660, que 540, que 86 (n° 12) : la valeur de ces mots dépend de la question; et il en est de même des autres mots employés dans la règle et dans l'équation : en sorte que cette règle et cette équation peuvent s'appliquer à tous les problèmes analogues au problème original.

Pour résoudre ces problèmes, il faudra substituer aux mots de la règle ou de l'équation, les nombres qu'ils sont destinés à représenter dans chaque question particulière.

16. Mais un premier pas conduit à un second, et nous ne tarderons pas à voir que cette équation peut se simplifier beaucoup encore : car, au lieu d'écrire *Dép. tot.*, on peut se contenter d'écrire *d. t.*, et même tout simplement *d*, en ne mettant que la première lettre du mot dépense; et cela n'aura pas d'inconvénient si l'on n'oublie pas quelle est la signification de ce *d*.

En partant de là, nous pourrions représenter l'écot d'un homme par *h*, première lettre du mot homme; l'écot d'une femme par *f*, première lettre du mot femme; et enfin le nombre des personnes par *n*, première lettre du mot nombre.

Notre équation prendra alors cette forme très simple :

$$x = \frac{d - f \times n}{h - f.}$$

Et de cette manière nous en saisissons bien mieux l'ensemble; nous y lisons plus facilement les opérations à faire pour résoudre tous les problèmes analogues au problème original.

17. D'ailleurs, il est bien clair qu'au lieu de ces lettres nous aurions pu en mettre d'autres, en convenant d'avance de ce que nous voulions leur faire représenter.

Ainsi l'écot d'un homme aurait tout aussi bien pu être exprimé par a que par h , l'écot d'une femme par b que par f , et ainsi de suite.

18. Il n'est pas moins évident que puisque nous avons trouvé une équation finale qui peut résoudre nos quatre questions, et bien d'autres encore qu'il serait facile d'imaginer, et que, dans ce résultat, les différentes quantités sont représentées par des lettres, on aurait pu nous proposer une question dans laquelle les quantités auraient été immédiatement représentées par des lettres. Et sans doute que du problème ainsi présenté nous aurions pu descendre à l'équation finale. C'est ce que nous allons essayer de faire.

19. QUESTION GÉNÉRALE : *Un certain nombre connu de personnes, hommes et femmes, mangent dans une auberge, et ce nombre est représenté par n ; l'écot d'un homme est de a décimes, l'écot d'une femme est de b décimes, et la dépense totale est de d décimes. On demande le nombre des hommes et celui des femmes.*

Nous avons

Le nombre des personnes.	n .
L'écot d'un homme.	a .
L'écot d'une femme.	b .
La dépense totale.	d .
Nous serons le nombre des hommes.	x .
Celui des femmes, égal au nombre total moins le nombre des hommes, sera par conséquent.	$n - x$.

La dépense de tous les hommes est égale à a décimes multipliés par le nombre abstrait x , ou, ce qui revient au même, elle est égale à x décimes multipliés par le nombre abstrait a .

Mais pour multiplier x par a , nous avons écrit ax ; et par conséquent pour multiplier x par b , nous pourrions écrire bx , en nous souvenant que quand deux lettres seront ainsi écrites l'une à côté de l'autre, sans aucun signe entre deux, les nombres qu'elles représentent devront être multipliés l'un par l'autre.

Ceci mérite qu'on s'y arrête un peu. Sans la convention, faite en arithmétique, qu'un second chiffre placé à la gauche d'un premier prendra une valeur dix fois plus grande que sa valeur propre ou intrinsèque, le nombre 65, par exemple, se lirait *six cinq*, ou *six fois cinq*, et vaudrait *trente*, et ainsi pour d'autres cas. Mais, par la con-

vention indiquée, on lit : *soixante-cinq*, ou *six fois dix plus cinq* ; en sorte que l'on fait, et souvent sans s'en douter, une multiplication et une addition. Cette convention n'ayant point lieu pour les lettres, ni pour un mélange de chiffres et de lettres, nous prenons tout naturellement $8x$ pour 8 fois x , et ax pour a fois x , ce qui peut s'étendre à un plus grand nombre de lettres et de chiffres.

La dépense de tous les hommes sera donc ax .

Pour avoir la dépense de toutes les femmes, il faudra multiplier l'écot d'une femme, ou b décimes, par un nombre abstrait égal au nombre des femmes, ou par $n-x$; ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier $n-x$ décimes par b , nombre abstrait. Il est clair que cela nous donnera, d'après ce que nous avons vu précédemment (n^{os} 2, F; 9, A), $bn-bx$.

Ainsi la dépense de toutes les femmes sera $bn-bx$.

Nous aurons donc alors cette équation (n^o 9, B),

$$ax + bn - bx = d;$$

D'où nous tirerons d'abord (n^o 9, C),

$$(a-b)x + bn = d,$$

Et ensuite (n^o 9, D),

$$(a-b)x = d - bn.$$

Divisant enfin de part et d'autre par $a-b$ (n^o 9, E), nous trouvons

$$x = \frac{d - bn}{a - b},$$

résultat qui ne diffère de celui du n^o 16, que par les lettres que nous avons substituées à h et à f .

Du reste, pour énoncer ce problème d'une manière encore plus générale, et pour le faire porter sur des nombres abstraits, il faudrait poser ainsi la question :

Partager le nombre n en deux parties, telles que la première étant multipliée par a , et la seconde par b , la somme des deux produits soit d .

Nommant la première partie x , la seconde serait $n-x$, le produit de la première par a serait ax , et celui de la seconde par b serait $bn-bx$, ce qui donnerait, comme ci-devant, l'équation

$$ax + bn - bx = d.$$

20. Voilà ce que c'est que l'ALGÈBRE : c'est une arithmétique qui sert à résoudre des questions générales au moyen de signes généraux.

On a choisi pour ce calcul les lettres de l'alphabet, qui n'ayant par elles-mêmes aucune valeur numérique, sont, comme nous venons de le voir, susceptibles de représenter toutes sortes de quantités.

Lorsqu'au moyen de ces signes généraux on a résolu une question générale, l'équation finale qui en est le résultat, mène en quelque sorte tout d'un coup à la solution de toutes les questions particulières qu'on peut concevoir renfermées dans la question générale. Il ne s'agit pour cela que de substituer aux caractères généraux du résultat les valeurs numériques particulières qui leur sont attribuées par la question particulière, et d'effectuer les opérations, qui ne sont, au fond, qu'indiquées dans l'équation finale, quoiqu'elles y soient réduites au plus petit nombre possible.

D'ailleurs, cette équation (n^{os} 14, 16, 19) peut se désigner par le nom de *formule* ; car on appelle FORMULE toute quantité algébrique qui représente un calcul à faire, et qui en donne en quelque sorte la forme.

Le célèbre Euler étend même cette expression jusqu'aux quantités numériques : suivant lui, non-seulement $a + b$, $a \div b$, etc. sont des formules ; mais il en est de même de $8 + 5$, $8 - 5$, etc. (Voyez son *Algèbre*.)

NOTE

Relative aux questions contenues dans ce chapitre.

Je voudrais engager les commençants à réfléchir sur les transformations que subissent ordinairement dans le calcul les nombres concrets (n^o 1), qui deviennent, ou des nombres abstraits, ou des nombres concrets d'une autre espèce, suivant ce qu'exige la marche raisonnée des opérations. L'arithmétique fournit de nombreux exemples de ces changemens, dont le calculateur ne se doute pas tou-

jours, ce qui heureusement ne l'empêche point de parvenir à son but, s'il obéit aux règles que prescrit la science. Mais pour ceux qui veulent avoir des idées nettes de ce qu'ils font, il importe d'examiner les choses de plus près.

Prenons pour exemple notre première question (n° 2), et rappelons-nous bien, 1°. qu'on ne peut faire d'additions et de soustractions qu'en opérant sur des quantités homogènes ou de même nature, qu'on ne peut ajouter des hommes avec des arbres; que d'une somme d'écus on ne peut ôter des aunes d'étoffe, etc. etc.; 2°. que, dans toute multiplication, le multiplicateur est toujours abstrait; et que le produit est de même nature que le multiplicande. (*Arit.* n° 429, 430.)

En appelant donc x le nombre des hommes, et en prenant $20 - x$ pour le nombre des femmes, nous pouvons dire que ces trois nombres, x , 20 , et $20 - x$, sont homogènes, si nous les considérons comme exprimant des personnes, qui sont des hommes ou des femmes, mais qui sont toujours des personnes. Sous ce point de vue, la soustraction indiquée par $20 - x$ est légitime.

Mais quand, pour avoir l'écot de tous les hommes, nous disons qu'il est égal à x fois 8 décimes, nous faisons de x un multiplicateur abstrait; et en ajoutant qu'on peut aussi représenter cet écot par 8 fois x décimes, 8 devient alors nombre abstrait, et x exprime des décimes. Dans les deux cas, le produit équivaut à $8x$ décimes.

On peut faire les mêmes observations sur la manière de calculer l'écot de toutes les femmes, exprimé en décimes par $120 - 6x$ (n° 2, E, F).

Enfin, il est bien évident que l'équation $8x + 120 - 6x = 130$, ne porte que sur des décimes, puisqu'elle exprime que la dépense des hommes, plus celle des femmes (tant de décimes pour les uns, tant pour les autres), forment la dépense totale de 130 décimes. Or, cette équation, après plusieurs simplifications, qui ne changent point sa nature, se réduit enfin à celle-ci: $x = 5$ (n° 2, L); ce qui signifie proprement que x décimes égalent 5 décimes.

Mais, comme tout le calcul a été fait dans la supposition que x , quelque transformation qu'il pût subir pendant l'opération, était un nombre égal au nombre des hommes, il est clair que la quantité x hommes égale 5 hommes.

CHAPITRE II.

Naissance des Quantités directes et des Quantités inverses.

21. IL est un moyen assez simple de faire rentrer dans une question générale certaines questions particulières qui sembleraient d'abord ne pouvoir pas s'y rapporter. Nous allons expliquer cela par l'exemple suivant :

22. CINQUIÈME QUESTION : *Dix tuyaux de fontaine, les uns de fer et les autres de fonte, communiquent avec un même réservoir ; chaque tuyau de fer FOURNIT 8 hectolitres d'eau, pendant que chaque tuyau de fonte en ABSORBE 5 ; alors le réservoir est plein, et contient 41 hectolitres. On demande le nombre des tuyaux de fer, et celui des tuyaux de fonte.*

On voit bien que cette question a beaucoup de rapport avec les précédentes ; mais elle en diffère en ce que les tuyaux de fonte absorbent de l'eau au lieu d'en fournir.

En la généralisant comme nous avons généralisé les autres dans le n° 19, et en employant les mêmes caractères, on trouverait qu'au lieu d'ajouter à ax la valeur $bn - bx$, il faudrait de ax retrancher cette même valeur $bn - bx$, qui exprime ici l'eau absorbée.

Or, si de ax on retranche bn , on a $ax - bn$; mais en retranchant bn on a trop retranché, puisqu'il ne fallait retrancher que $bn - bx$: c'est donc bx qu'on a retranché de trop ; il faut donc remettre cette valeur dans le résultat de la soustraction, afin d'avoir le véritable reste, qui se trouve ainsi exprimé par

$$ax - bn + bx = d.$$

De là on tirera d'abord (n° 9, c),

$$(a + b)x - bn = d.$$

Ajoutant bn dans les deux membres, on aura

$$(a + b)x = d + bn.$$

Divisant enfin de part et d'autre par $(a + b)$ (n° 8, e), on trouvera

$$x = \frac{d + bn}{a + b}.$$

23. Dans le cas particulier dont il s'agit ici, cette formule donne

$$x = \frac{41 + 5 \times 10}{8 + 5} = 7$$

24. D'ailleurs, elle ne diffère de la formule du n° 19, qu'en ce que les termes qui contiennent b ont ici un signe opposé à celui qu'ils ont là.

En y réfléchissant, ce changement de signe paraîtra très naturel, puisque le symbole b (*) exprimait d'abord *de l'eau fournie*, et qu'il exprime actuellement *de l'eau absorbée*; or, l'effet de l'une ne peut qu'être contraire à l'effet de l'autre, du moins relativement aux additions et aux soustractions de ces quantités.

Quand les tuyaux de fonte versaient de l'eau dans le réservoir, cette eau s'ajoutait à celle des tuyaux de fer : il y avait là *addition*. Maintenant les tuyaux de fonte absorbent de l'eau; cette eau sort donc du réservoir, et il y a dans ce cas *soustraction*. Ainsi donc l'eau des tuyaux de fonte est une quantité qui, en allant de la première question à la seconde, passe de l'addition à la soustraction, et qui, en allant de la seconde à la première, passerait de la soustraction à l'addition.

Mais nous avons appelé *termes* les quantités séparées par les signes $+$ et $-$, qui sont les signes d'addition et de soustraction. Donc ces signes doivent changer quand les quantités contenues dans ces termes changent de l'addition à la soustraction, et réciproquement; le $+$ devient $-$, et le $-$ devient $+$. Sur quoi il faut bien remarquer que ce ne sont pas toujours tous les signes d'une formule qui doivent changer, mais seulement ceux des termes qui contiennent les quantités qui ont passé de l'addition à la soustraction, et réciproquement. Ainsi, dans notre exemple, les termes $-bn$ et $-b$ ont changé de signe, et sont devenus $+bn$ et $+b$; tandis que les termes a et d n'ont point varié, et qu'ils n'auraient subi aucun changement lors même qu'ils auraient été précédés d'un signe.

Il faut encore observer que, dans le terme $-bn$, le symbole n n'a eu aucune influence sur le changement de signe, parce que

(*) J'appelle *Symbole* la lettre qui représente une quantité.

la quantité qu'il représente, savoir le nombre total des tuyaux, n'a point passé de l'addition à la soustraction, ni de la soustraction à l'addition : dans les deux questions, le symbole n est pris tout-à-fait dans le même sens. Dans le terme bn , l'eau des tuyaux de fonte b est prise autant de fois qu'il y a de tuyaux en tout, c'est-à-dire n fois. Or, si une fois b se prend en sens contraire (*), n fois b doivent aussi se prendre en sens contraire, ce qui peut s'appliquer à tous les cas du même genre.

Il faut observer enfin que, dans le cas d'une quantité qui se présente d'abord comme additive, la marche du calcul peut cependant amener des termes soustractifs contenant cette quantité; c'est ce qu'on voit au n° 19; et que, dans le cas d'une quantité qui se présente d'abord comme soustractive, le calcul peut amener des termes additifs contenant cette quantité, comme au n° 22. Or, dans ce cas-là même, lorsqu'une quantité a passé de l'addition à la soustraction, ou réciproquement, les signes de tous les termes qui contiennent cette quantité doivent changer, c'est-à-dire que toute addition de cette quantité doit devenir une soustraction, et que toute soustraction de la même quantité doit devenir une addition.

25. Ces observations font voir qu'on aurait pu, dans le cas actuel, tirer immédiatement la valeur de x de la formule du n° 19, et qu'il aurait suffi pour cela de changer dans cette formule les signes des termes qui contiennent b , ce qui peut s'appliquer à tous les cas semblables à celui-ci. Et voilà l'artifice que nous avons annoncé au n° 21, et qui donne aux formules algébriques une généralité qu'elles n'auraient pas sans lui.

26. Mais il faut observer, à cet égard, que s'il se trouvait dans un terme d'une formule deux symboles multipliés ou divisés l'un par l'autre, comme tv ou $\frac{t}{v}$, et que dans tel ou tel cas particulier il fallût (la chose étant supposée possible) prendre ces deux symboles tous deux dans un sens contraire à celui qu'ils étaient supposés avoir en établissant la formule, alors le signe de ce terme devrait

(*) Quand nous parlerons, dans cette matière, de *sens contraire*, de *sens opposé*, on voudra bien se souvenir qu'il s'agit toujours d'addition et de soustraction : le sens contraire de l'addition, c'est la soustraction, et réciproquement.

rester le même; car après l'avoir changé pour l'une des quantités, il faudrait le changer de nouveau pour l'autre, ce qui le ramènerait à ce qu'il était d'abord.

La même règle s'observera si, au lieu de deux symboles de cette espèce, il y en a quatre dans le même terme, ou six, ou huit, etc. en un mot si ces symboles sont en nombre pair.

Cependant, remarquons-le bien, il ne faut faire entrer dans ce compte des lettres paires ou impaires, que celles qui se rapportent aux quantités qui ont changé de l'addition à la soustraction, et réciproquement, et point du tout les autres lettres qui pourraient se trouver avec celles-là. Ainsi, le terme $-bn$ de notre première formule est devenu $+bn$ par le changement de b , et de b seulement (n° 24). Le nombre des symboles *influentes* de ce terme est impair, puisqu'on n'en compte qu'un seul de ce genre.

Observons encore que, s'il fallait faire varier une formule qui contient quelque terme composé, comme $-(g+hk)$, ou $-\frac{g-h}{p}$, il faudrait, pour ne point courir le risque de se tromper, opérer les changemens sur les signes des termes partiels, et non sur le signe général du terme composé. Par exemple, dans ces deux formules, si la quantité h variait, on les écrirait ainsi: $-(g-hk)$, et $-\frac{g+h}{p}$; et si la quantité g variait seule, sans que h variât, on aurait $-(-g+hk)$, et $-\frac{-g-h}{p}$, etc. Mais les connaissances que nous allons bientôt acquérir, nous mettront à l'abri de toute erreur possible.

27. Du reste, il est bien évident que si la question du n° 22 eût été

la question originale, et que de la formule $x = \frac{d+bn}{a+b}$ relative à

cette question, on eût voulu tirer une formule immédiatement applicable au problème du n° 7, il eût aussi suffi de changer

dans la formule $x = \frac{d+bn}{a+b}$ supposée primitive, les signes des

termes qui contiennent b , ce qui aurait donné $x = \frac{d-bn}{a-b}$.

28. Il résulte de tout cela que les quantités en algèbre peu-

vent être comparées, non-seulement sous le rapport de leur grandeur, mais encore sous le rapport de leur influence sur les signes $+$ et $-$ d'une formule considérée comme primitive, et que l'on veut rendre applicable à tel ou tel cas particulier. Toute quantité qui est prise dans le sens primitif de son symbole, comme de l'eau fournie lorsque le symbole exprime de l'eau fournie, ne change rien aux signes de la formule primitive; mais toute quantité qui est prise dans un sens opposé au sens primitif de son symbole (n° 24, note), comme de l'eau absorbée quand le symbole exprime de l'eau fournie, change les signes des termes qui contiennent ce symbole, c'est-à-dire le $+$ en $-$, et le $-$ en $+$.

29. On peut donc dire que l'effet de ces secondes quantités est inverse de l'effet des premières, ou que ces quantités elles-mêmes sont *inverses* des autres, qui par opposition pourront être nommées *directes*.

Ainsi, quand un symbole représentera de l'eau fournie, toute eau fournie, considérée comme valeur particulière de ce symbole, sera une quantité directe; et toute eau absorbée, considérée aussi comme valeur particulière de ce symbole, sera une quantité inverse.

En revanche, quand un symbole exprimera de l'eau absorbée, toute eau absorbée, considérée comme valeur particulière de ce symbole, sera une quantité directe; et toute eau fournie, considérée aussi comme valeur particulière de ce symbole, sera une quantité inverse.

La même chose se dira des biens et des dettes, des gains et des pertes, d'un chemin fait dans un sens et d'un rebroussement en sens contraire, etc. etc.

La même chose se dira aussi, dans les calculs de nombres abstraits, des quantités additives et des quantités soustractives.

30. *En général, toute quantité prise dans le sens primitif de son symbole est DIRECTE, et toute quantité prise dans un sens contraire au sens primitif de son symbole est INVERSE. (Voyez la note du n° 24 (*).*

(*) J'ai le premier proposé ces démonstrations dans mon *Introduction à l'Al-*

31. Mais après avoir considéré les quantités inverses parmi les connues d'un problème, il importe de les considérer parmi les inconnues; c'est ce que nous allons voir dans la question suivante:

Un joueur, ayant d'abord n francs dans sa bourse, perd m parties valant chacune b francs; combien lui reste-t-il alors?

En nommant x la quantité que l'on cherche, ou le bien du joueur après les m parties, il est évident qu'on aura l'équation générale

$$x = n - mb.$$

32. Maintenant il est bien clair que ce cas en renferme encore plusieurs autres: car si mb est plus petit que n , il restera quelque chose au joueur; si mb est égal à n , il ne lui restera rien; et si mb est plus grand que n , le joueur aura perdu tout son avoir, et se trouvera encore chargé d'une dette.

Examinons cette dernière supposition, et posons en fait que la quantité mb surpasse n de la quantité c , ou que l'on ait $mb = n + c$.

Au lieu de retrancher mb , on pourra retrancher n et c , et la formule deviendra $x = n - n - c$, ou, parce que $n - n$ se réduit à zéro, elle deviendra

$$x = 0 - c.$$

Ce résultat serait absurde si on voulait le considérer comme indiquant une soustraction, parce qu'il est impossible de retrancher quelque chose de rien. Mais il faut observer qu'on ne l'a obtenu qu'en appliquant à une formule dans laquelle x était supposé exprimer un bien réel, un cas particulier dans lequel x devait exprimer une dette, c'est-à-dire une quantité inverse.

Ce dernier résultat indique donc que le joueur, au lieu de posséder c , n'a rien et doit encore c .

33. En d'autres termes, l'expression $0 - c$ fait voir que la question qui demande le bien du joueur après les m parties, est mal

gèbre, publiée en 1799. Carnot, à qui j'avais remis mon ouvrage, les adopta dans sa *Corrélation des figures de géométrie* qui parut en 1801. Dès lors elles sont généralement attribuées, de même que toute la théorie qui s'y rattache, et qui en est, à ce qu'il me semble, une conséquence assez immédiate. (Voyez la préface de cette *Algèbre*.)

posée relativement à la double supposition que les m parties sont perdues, et que $mb = n + c$: en sorte que cette question, dans ce cas, aurait dû être énoncée en *sens inverse*, et qu'on aurait dû demander ce que redevait le joueur après les m parties.

On aurait eu alors $x = mb - n$; car il est évident que le joueur redoit ce qu'il a perdu, moins ce qu'il a payé, c'est-à-dire moins ce qu'il avait en commençant de jouer.

Et en mettant dans cette équation, à la place de mb , sa valeur supposée $n + c$ (n° 32), on aurait trouvé

$$x = n + c - n = 0 + c = c.$$

34. Il faut observer ici que notre question s'est facilement rectifiée, parce que nous savions d'avance que le joueur, dans la supposition que nous avons faite, devait être chargé d'une dette : cette rectification ne serait peut-être pas dans tous les cas aussi facile ; mais on peut comprendre qu'en général lorsqu'on arrivera à une expression comme celle-ci,

$$x = 0 - a,$$

cette expression ne pourra être considérée comme une véritable équation, parce qu'il faudrait pour cela admettre une chose absurde, c'est-à-dire qu'il est possible de retrancher quelque chose de rien.

On peut d'ailleurs faire sentir d'une autre manière l'absurdité de ce résultat pris à la lettre, c'est en ajoutant a aux deux membres de la prétendue équation ; car elle deviendra ainsi :

$$a + x = 0.$$

Or, il est impossible que la somme proprement dite de deux quantités soit nulle.

Mais comme on suppose qu'on ne s'est point trompé dans le calcul, la dernière équation étant absurde, il faut que la première le soit. J'entends par première équation celle qui est immédiatement tirée de l'énoncé du problème.

Si donc on rend exacte la première équation, toutes celles que l'on en tirera jusqu'à la dernière seront exactes aussi ; et réciproquement, si l'on commence par rectifier la dernière équation, en corrigeant d'après celle-ci les précédentes, on n'aura que des équations vraies.

Or, il est manifeste que pour rectifier la dernière équation, il

faut, au lieu de $x = 0 - a$,
 écrire $x = 0 + a$,
 d'où l'on tirera, en retranchant de part et d'autre a , $x - a = 0$.
 Or, cette équation supposant a égal à x , elle ne diffère pas de celle-ci

$$a - x = 0,$$

qui, comparée avec l'équation fautive $a + x = 0$, montre qu'il fallait simplement changer le signe de x dans cette dernière.

Mais, au lieu de changer le signe de x dans le résultat, on aurait pu le changer dans l'équation primitive.

35. C'est donc là ce qu'il faut faire lorsqu'on est conduit à des expressions comme celles que nous venons d'examiner; il faut changer le signe de l'inconnue dans l'équation primitive, c'est-à-dire que si cette inconnue est ajoutée, il faut la retrancher, et que si elle est retranchée, il faut l'ajouter: bien entendu qu'on fera ce changement dans tous les termes qui renfermeront l'inconnue, et que s'il se trouve des termes qui contiennent un nombre pair d' x multipliés ou divisés les uns par les autres, comme xx , $xxxx$, $\frac{xxx}{x}$, $\frac{x}{xxx}$, etc. on ne changera point les signes de ces termes (n° 26).

L'équation primitive étant ainsi modifiée, fera voir si l'on peut modifier la question d'où cette équation était dérivée, et quelle doit être dans ce cas cette modification.

36. Par exemple, l'équation de la question précédente était $x = n - mb$, qui revient à $mb + x = n$, comme on le voit en ajoutant de part et d'autre mb .

Or, cette équation

$$mb + x = n,$$

en y supposant $mb = n + c$, nous a conduits au résultat absurde

$$x = 0 - c;$$

changeant donc le signe de x dans l'équation primitive $mb + x = n$, elle deviendra

$$mb - x = n;$$

ce qui nous apprend que si l'on retranche x de la perte du joueur, on a pour reste un nombre égal au bien qu'il possédait d'abord; d'où il résulte que sa perte excède de x ce bien, et que par conséquent il redoit x .

Nous verrions donc par là, lors même que nous ne le saurions pas déjà, que la question, au lieu de demander quel était dans ce cas le bien du joueur après les m parties, aurait dû demander quelle était sa dette.

Prenons encore un exemple, et supposons qu'on nous propose cette question particulière, portant sur des nombres abstraits (n° 1) :

Trouver un nombre tel qu'ajoutant son triple à 68, la somme soit égale à 40 diminué du nombre cherché.

Soit ce nombre x , on aura l'équation

$$68 + 3x = 40 - x.$$

Ajoutant x dans les deux membres, on obtiendra

$$68 + 4x = 40.$$

Divisant tous les termes par 4, pour simplifier l'équation, elle deviendra

$$17 + x = 10.$$

Enfin, retranchant 17 des deux côtés, on trouvera

$$x = 10 - 17,$$

$$x = 10 - 10 - 7 \text{ (Arith. n°s 119, 120, 121),}$$

$$x = 0 - 7.$$

Ce résultat étant inverse, nous remonterons à l'équation primitive, et nous lui appliquerons la règle du n° 35. Elle sera changée en celle-ci :

$$68 - 3x = 40 + x;$$

et elle nous apprendra que le nombre 7 répond à la question, ainsi modifiée :

Trouver un nombre tel que retranchant son triple de 68, le reste soit égal à 40 augmenté du nombre cherché.

Et en effet $68 - 21 = 40 + 7$, comme on le voit facilement.

D'ailleurs, pour résoudre l'équation modifiée, écrivons-la d'abord ainsi :

$$40 + x = 68 - 3x.$$

Ajoutant alors $3x$ des deux côtés, puis divisant tout par 4, et retranchant 10 à droite et à gauche, nous aurons successivement

$$40 + 4x = 68,$$

$$10 + x = 17,$$

$$x = 7.$$

37. Quel que soit pour une question l'effet du changement de

signe de x dans les équations résultantes de cette question, ce changement, lorsqu'il devient nécessaire, prouve que la quantité x ou sa valeur a , est inverse relativement à ce qu'on l'avait supposée.

Or, comme la nécessité de ce changement est indiquée par le signe — de l'expression $x = 0 - a$, on peut dire que ce signe indique, dans ce cas, que la quantité qu'il précède est inverse.

Je dis la quantité qu'il précède, car de $x = 0 - a$, on tire, en ajoutant a de part et d'autre, $a + x = 0$, comme nous l'avons déjà vu, et de $a + x = 0$, on tire encore en retranchant x de part et d'autre, $a = 0 - x$; en sorte que le signe — précède a ou précède x .

Si, au lieu de $x = 0 - a$, on avait $x = 0 + a$, ou, ce qui est la même chose, $x = a$, ces deux dernières expressions indiqueraient comme la première que x a pour valeur a ; mais tandis que la première expression conduit à changer le signe de x , les deux dernières conduisent à laisser subsister ce signe tel qu'il est; c'est pourquoi l'on peut dire que, dans ces circonstances, une quantité qui n'a point de signe ou qui a le signe + est directe.

38. On voit par là qu'en algèbre les signes + et — ont un usage double. Ils peuvent dans cette science, comme dans l'arithmétique, indiquer l'addition et la soustraction; mais dans ce cas ils ne sont jamais placés qu'entre deux quantités dont il faut trouver la somme ou la différence. Ils peuvent aussi dans l'algèbre servir à désigner les quantités directes et inverses, et se trouver par conséquent au devant de quantités qui n'ont qu'un seul terme. Ainsi les quantités $0 + a$, $0 - a$, n'ont qu'un seul terme: car, si l'on supprime le zéro, qui n'a aucune valeur, ces quantités se réduisent à $+a$ et à $-a$; c'est du moins ainsi qu'on les écrit ordinairement.

Nous appellerons le signe +, lorsqu'il sera pris dans cette acception, *signe de direction*, et le signe —, dans les mêmes circonstances, *signe d'inversion*.

39. D'après tout ce que nous venons de dire, on doit se faire une idée nette de ce qu'il faut entendre par quantités directes et inverses. Ces quantités, considérées en elles-mêmes, ne sont point distinctes les unes des autres, et elles ne le deviennent que rela-

tivement au point de vue sous lequel on les envisage, ou au rôle qu'on leur fait jouer.

Plusieurs quantités homogènes étant données, on peut les ajouter les unes avec les autres, ou retrancher les plus petites des plus grandes, et l'on aura ainsi des quantités que l'on pourra nommer additives et soustractives, mais qui n'auront point dans le fait changé de nature.

Cela posé, qu'une partie de celles qui étaient additives deviennent soustractives, et qu'une partie de celles qui étaient soustractives deviennent additives, toutes les quantités qui auront subi cette espèce de changement seront inverses de ce qu'elles étaient, et toutes celles qui ne l'auront pas subi seront directes; mais ce seront toujours les mêmes quantités, remplissant tantôt une fonction, tantôt une autre, et étant toujours par le fait ou ajoutées ou retranchées.

40. Il faut encore observer qu'une formule étant donnée, si on voulait se contenter d'y rapporter des cas où les quantités qu'elle contient ne changeraient point de l'addition à la soustraction, et réciproquement, on n'aurait aucun besoin de parler de quantités directes et de quantités inverses. C'est ainsi que les questions des n^{os} 2, 5, 6 et 7, peuvent se résoudre par la formule du n^o 19, sans qu'elle ait subi aucune modification, et sans qu'il soit question de quantités directes et inverses. Mais, si on ne voulait pas sortir de ce cercle, on ne donnerait pas à l'algèbre toute la généralité dont elle est susceptible (n^o 21).

41. Dès qu'on admet la possibilité qu'une formule s'étende à des cas où les quantités qu'elle contient changeraient de l'addition à la soustraction, et réciproquement, on est conduit à la considération des quantités directes et inverses. Toutes celles qui ne sont pas inverses sont alors directes par opposition aux autres. Ainsi toutes les quantités qui entrent dans les questions des n^{os} 2, 5, 6 et 7, étant rapportées à une même formule, c'est-à-dire à celle du n^o 19, se trouvent directes du moment où nous avons admis qu'elles auraient pu être inverses; tandis qu'avant cette supposition, ces quantités étaient absolues, comme en arithmétique (n^o 40).

42. Il n'est pas moins essentiel de remarquer que, quoique dans les quantités d'un seul terme les directes soient sans signe ou aient

le signe $+$ et les inverses le signe $-$, cela n'est pas nécessairement ainsi dans les quantités de plusieurs termes; tout dépend de la formule qui est considérée comme primitive.

Ainsi, dans la question du n° 19, d'où on tire la formule

$$x = \frac{d - bn}{a - b}, \text{ cette formule étant considérée comme primitive,}$$

toutes les quantités qu'elle contient sont directes, quoique la quantité b ait le signe $-$. Et si l'on rapporte à cette formule le cas n° 22, la quantité b est alors inverse, et prend cependant le signe $+$.

43. Mais, dans le calcul des nombres abstraits, on a trouvé moyen de rendre directes toutes les quantités sans signe ou avec le signe $+$: pour cela une formule, ou une quantité algébrique étant donnée, on la rapporte à une formule semblable, dont tous les termes sont additifs, et que l'on considère comme primitive.

D'où il résulte alors que dans la formule proposée tous les termes additifs sont directs, et tous les termes soustractifs sont inverses.

44. Cependant, dans les différentes applications des principes abstraits de l'algèbre, on ne peut guère éviter de regarder comme primitive telle ou telle formule qui a des termes soustractifs.

* 45. Tout cela posé et bien compris, voici quelques conséquences auxquelles ces principes pourront quelquefois conduire, et différents points de vue sous lesquels les quantités peuvent être envisagées en algèbre :

$$\text{Formule (X) } a + b + c + d.$$

$$\text{Formule (Y) } a - b + c - d.$$

$$\text{Formule (Z) } a + b - c - d.$$

Étant donnée la formule (Y), si on la rapporte à la formule (X) considérée comme primitive, les termes a et c de la formule (Y) seront directs, et les termes b et d inverses. Étant donnée la formule (Z), si on la rapporte à la formule (Y), considérée comme primitive, les termes a et d de la formule (Z) seront directs, et les termes b et c inverses.

Mais si on rapporte la formule (Z) à la formule (Y), en rapportant en même temps celle-ci à la formule (X), on verra :

1°. Qu'un terme comme a , qui, pris dans la formule (Z), sera direct relativement au terme a déjà direct dans la quantité (Y), sera aussi direct relativement au terme correspondant de (X) : ce que l'on pourra exprimer ainsi, *le direct du direct est direct* ;

2°. Qu'un terme comme b , qui, pris dans la formule (Z), sera inverse relativement au terme b déjà inverse dans la quantité (Y), sera direct relativement au terme correspondant de (X) : ce que l'on pourra exprimer ainsi, *l'inverse de l'inverse est direct* ;

3°. Qu'un terme comme c , qui, pris dans la formule (Z), sera inverse relativement au terme c direct dans la quantité (Y), sera inverse relativement au terme correspondant de (X) : ce que l'on pourra exprimer ainsi, *l'inverse du direct est inverse* ;

4°. Qu'un terme comme d , qui, pris dans la formule (Z), sera direct relativement au terme d inverse dans la quantité (Y), sera inverse relativement au terme correspondant de (X) : ce que l'on pourra exprimer ainsi, *le direct de l'inverse est inverse*.

* 46. Voici encore quelques points de vue différents sous lesquels une même formule, comme $a + b - c - d$, peut être envisagée.

1°. Si le cas permet que l'on mette de côté la considération des quantités directes et inverses, la formule $a + b - c - d$ sera composée de quantités absolues additionnées et soustraites, et les signes écrits seront ceux d'addition et de soustraction.

2°. Si l'on veut considérer les quantités a, b, c, d , comme des quantités directes ajoutées et retranchées, on écrira ou l'on supposera écrit à la place de b , $o + b$, à la place de c , $o + c$, et à la place de d , $o + d$ (n° 37), la formule en question prendra alors cette forme,

$$a + (o + b) - (o + c) - (o + d),$$

dans laquelle les signes qui sont immédiatement avant les lettres, sont signes de direction (n° 38), et les autres sont signes d'addition et de soustraction.

3°. Si l'on veut considérer les signes écrits comme signes de direction ou d'inversion, on mettra ou l'on supposera qu'on a mis un zéro précédé du signe d'addition $+$ au devant de chaque signe de la formule, qui prendra ainsi cette forme,

$$a + (o + b) + (o - c) + (o - d),$$

dans laquelle les signes qui sont immédiatement au devant des lettres sont signes de direction ou d'inversion (n° 38), et les autres sont signes d'addition.

* 47. Du reste, sous ce dernier point de vue, quand les signes écrits dans la formule sont les uns $+$ et les autres $-$, on est conduit à des opérations mal présentées ou inexécutables; car, rigoureusement parlant, on ne peut ajouter le direct avec l'inverse ou l'inverse avec le direct, tout comme on ne pourrait retrancher l'un de l'autre.

Dans tous les cas, il faut passer de ce point de vue qui conduit à des choses impraticables, à un autre point de vue où le même inconvenient ne se rencontre pas.

J'appliquerai cela à un exemple;

* 48. En considérant la formule du n° 19, $x = \frac{d - bn}{a - b}$ comme in-

diquant quelques opérations sur des quantités absolues, on trouve que le dénominateur du second membre se forme en retranchant de la quantité a la quantité b .

Or, si en appliquant à cette formule le cas du n° 22, dans lequel la quantité b est inverse, on veut suivre la règle que nous venons d'indiquer, on sera conduit à retrancher d'une quantité directe a une quantité inverse b , ce qui est impossible en soi-même, et rigoureusement parlant (n° 47).

Mais nous savons d'ailleurs (n° 25) qu'il faut dans ce cas changer le signe de b , en sorte que le dénominateur au lieu d'être $a - b$, doit devenir dans cette occasion $a + b$, ce qui est une véritable addition de b avec a .

On peut donc dire que soustraire l'inverse du direct, c'est ajouter le direct au direct. Il n'y a là qu'une seule et même opération désignée de deux manières différentes, mais dont l'une est impropre, et l'autre exacte.

* 49. Tous les cas semblables d'opérations mal présentées, se rectifieront de même au moyen des principes que nous avons posés aux n°s 25 et 26, relativement au changement de signe des quantités qui deviennent inverses. (Voyez du reste la *Métaphysique des quantités positives et négatives*, ou *Introduction à l'Algèbre*, 1 vol. in-8°.)

CHAPITRE III.

Notions préliminaires sur le but de toute opération de calcul, et sur les équations.

50. Le but de tout calcul, comme on le sentira d'abord, est de déterminer telles ou telles quantités inconnues, au moyen de certaines relations qu'on leur sait avoir avec des quantités connues; ainsi lorsqu'on nous demande la somme de deux nombres, ou leur différence, ou leur produit, ou leur quotient, etc. cette somme, cette différence, ce produit, ce quotient, etc. sont des quantités inconnues; les nombres sur lesquels il faut opérer sont des quantités connues, et les opérations à faire montrent quelle relation il y a entre les connues et les inconnues. Cette relation est telle, par exemple, que l'inconnue sera égale à la somme, ou à la différence, ou au produit, ou au quotient, etc. des quantités connues.

51. Ces rapports des quantités connues aux quantités inconnues, fournissent toujours des équations qui servent à les exprimer.

Si l'on demande, par exemple, la somme, ou la différence, ou le produit, ou le quotient, etc. de deux quantités a et b , que l'on suppose connues, on pourra désigner l'inconnue par x , et l'on aura $x = a + b$, ou $x = a - b$, ou $x = ab$, ou $x = \frac{a}{b}$, etc.

52. On remarquera que, dans toute équation, lorsqu'une inconnue sera seule dans un membre (n° 2, H), et qu'il n'y aura dans l'autre que des quantités connues, il ne restera plus, pour trouver la valeur de l'inconnue, que d'effectuer les opérations sur les connues qui seront indiquées dans le second membre. Dès que l'inconnue est ainsi seule dans un membre de l'équation, on dit que l'équation est résolue.

Quelquefois l'équation est résolue dès qu'elle est posée, et nous en avons eu un exemple au n° 31; quand on prévoit cela, on ne s'attache pas même à représenter l'inconnue par un caractère, et à poser l'équation; on se contente de faire immédiatement les opérations qui doivent donner la valeur de l'inconnue.

D'autres fois, lorsque l'équation est posée, il faut tirer de cette première équation une seconde équation, puis une troisième, etc. pour parvenir enfin à n'avoir plus qu'une inconnue seule dans un membre de l'équation, et des connues dans l'autre : c'est ce que l'on appelle résoudre l'équation. Nous en avons eu des exemples dans le premier chapitre de cet ouvrage.

Mais dans ce cas-là, soit pour établir les équations, soit pour les résoudre, il faut en général savoir opérer par addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, et extraction de racines, sur des quantités algébriques quelconques.

Et d'ailleurs il faut souvent, dans l'un et l'autre de ces cas, connaître les calculs algébriques, pour pouvoir déterminer la valeur d'une inconnue lorsqu'elle est seule dans un membre, et que les quantités connues qui sont dans l'autre sont exprimées par des caractères généraux.

Nous allons nous occuper d'abord de ces opérations fondamentales, sans nous arrêter à faire découler chacune d'elles de telle ou telle question particulière.

Si l'on veut des problèmes, nous en choisirons un qui renfermera tous ceux qui pourraient se présenter dans cette matière, et nous l'énoncerons ainsi : *Étant données des quantités algébriques quelconques, trouver les sommes, les différences, les produits, les quotients, les puissances et les racines qu'elles peuvent donner.*

PREMIÈRE PARTIE.

DÈS ÉQUATIONS QUI SONT RÉSOLUES DÈS QU'ELLES SONT
POSÉES, OU DES OPÉRATIONS FONDAMENTALES.

SECTION PREMIÈRE.

Des opérations sur les quantités simples.

53. J'appelle *QUANTITÉ SIMPLE* une quantité algébrique qui n'a qu'un seul terme et qu'une seule lettre, comme $+a$, $-b$, etc. Toutes les autres quantités algébriques sont *COMPOSÉES*, comme $+a + b$, $+a - b - c$, $+ab$, $-aa$, $+\frac{a}{b}$, etc.

D'ailleurs, pour savoir faire en arithmétique toutes les opérations de calcul sur des nombres concrets, on apprend à les faire sur des nombres abstraits. Nous suivrons la même marche pour l'algèbre, et d'après l'observation du n° 43, nous appellerons dès à présent *DIRECTE* toute quantité abstraite qui n'aura point de signe ou qui aura le signe $+$, et *INVERSE* toute quantité du même genre qui aura le signe $-$.

Il résultera de là qu'étant donnée une quantité directe isolée, nous pouvons à volonté, ou lui ôter son signe $+$, si elle l'a déjà, ou le lui donner, si elle ne l'a pas. (Consultez encore les nos 37 et 38.)

54. Cela posé, ajouter $+b$ avec $+a$, c'est ajouter b à a pour avoir $a + b$, ou $+a + b$.

Retrancher $+b$ de $+a$, c'est retrancher b de a pour avoir $a - b$, ou $+a - b$.

Multiplier $+a$ par $+b$, c'est multiplier a par b pour avoir ab , ou $+ab$.

Diviser $+a$ par $+b$, c'est diviser a par b pour avoir $\frac{a}{b}$ ou $+\frac{a}{b}$.

55. Nous aurons donc quatre formules générales pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division de deux quantités directes proposées $+a$ et $+b$.

Formule générale pour l'addition, $x = +a + b$.

Formule générale pour la soustraction, $x = +a - b$.

Formule générale pour la multiplication, $x = +ab$.

Formule générale pour la division, $x = +\frac{a}{b}$.

56. En supposant ensuite, 1°. que a et b deviennent tous deux inverses comme quantités proposées, 2°. que a reste direct, et que b devient inverse; 3°. que a devient inverse, et que b reste direct, et changeant convenablement dans nos formules générales les signes des termes qui contiennent les quantités devenues inverses, et cela d'après les règles des n°s 25 et 26, nous obtiendrons les résultats suivants:

	1°.	2°.	3°.
Quantités proposées,	$-a \quad -b$	$+a \quad -b$	$-a \quad +b$
Addition,	$-a \quad -b$	$+a \quad -b$	$-a \quad +b$
Soustraction,	$-a \quad +b$	$+a \quad +b$	$-a \quad -b$
Multiplication,	$+ab$	$-ab$	$-ab$
Division,	$+\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$

57. En comparant les signes des quatre additions (n°s 55, 56) avec ceux des quantités proposées, on verra que dans cette opération les signes ne changent point.

En comparant ceux des quatre soustractions avec ceux des quantités proposées, on verra que les signes des quantités à soustraire ont été changés.

58. En comparant ceux des quatre multiplications avec ceux des quantités proposées, on verra que le produit s'est trouvé direct lorsque le multiplicande et le multiplicateur avaient le même signe, et qu'il s'est trouvé inverse lorsque le multiplicande et le multiplicateur avaient des signes contraires.

Enfin, on trouvera pour la division la même loi que pour la multiplication.

59. On pourra donc poser les règles suivantes, relatives à l'emploi des signes dans les principales opérations de calcul sur les quantités

d'un seul terme, les quantités qui n'ont point de signe étant supposées avoir le signe $+$:

Pour additionner les quantités algébriques, il faut les écrire de suite avec leurs signes (n° 57).

Pour soustraire les quantités algébriques les unes des autres, il faut les écrire de suite en changeant les signes de celles qui sont à soustraire (n° 57).

Pour multiplier ou diviser l'une par l'autre deux quantités algébriques, il faut, lorsqu'elles ont le même signe, donner au produit ou au quotient le signe $+$, et lorsqu'elles ont des signes contraires, donner au produit ou au quotient le signe $-$ (n° 57, 58).

N. B. Souvent les quantités qu'on veut additionner ou soustraire, se placent les unes sous les autres dans des colonnes verticales.

60. Il est d'ailleurs facile de voir que, de cette manière, ce que l'on présente comme une addition sera souvent une véritable soustraction, et que ce que l'on présente comme une soustraction sera souvent une véritable addition; car rigoureusement parlant, l'inverse ne saurait ni s'ajouter avec le direct ni s'en retrancher, tout comme le direct ne saurait ni s'ajouter avec l'inverse, ni s'en retrancher (n° 47).

Ces opérations mal présentées proviennent de l'application que l'on fait des formules générales à certains cas particuliers qui ne s'y rapportent point directement, mais seulement à la faveur d'un changement de signe; en sorte qu'il est tout naturel que ce qui était addition devienne soustraction, et réciproquement (nos 24, 25, 48).

Du reste, on peut toujours, avec un peu d'attention, découvrir quel est le véritable état de la question, et quelles sont les opérations rigoureuses qu'elle demande (n° 49 (*)).

61. Si les deux quantités sur lesquelles on doit opérer sont égales entre elles, et qu'on les désigne par a , on obtiendra,

Pour leur somme, : $a + a$;

Pour leur différence, : $a - a$;

Pour leur produit, : aa ;

Pour leur quotient, : $\frac{a}{a}$

(*) Ceux qui voudront connaître plus à fond cette matière, pourront lire la *Métaphysique des quantités positives et négatives*, ou *Introduction à l'Algèbre*, ouvrage que j'ai déjà cité dans la note du n° 30, et dans le n° 49.

Mais on voit d'abord que $a - a = 0$, et que $\frac{a}{a} = 1$, quelle que soit la valeur de a .

62. Si l'on continuait d'ajouter des a , de retrancher des a , de multiplier par des a , de diviser par des a , on aurait ces résultats,

Par addition, $a + a + a + a + a + \text{etc.}$;

Par soustraction, $a - a - a - a - a - \text{etc.}$;

Par multiplication, $aaaaa \text{ etc.}$;

Par division, $\frac{a}{aaa \text{ etc.}}$

63. En examinant ces opérations algébriques, on voit bientôt qu'elles peuvent être simplifiées.

Il est évident, par exemple, qu'au lieu de $a + a$, on peut écrire $2a$; qu'au lieu de $a + a + a$, on peut écrire $3a$; qu'au lieu de $a + a + a + a$, on peut écrire $4a$, et ainsi de suite.

De même au lieu de $-a - a$, on peut mettre $-2a$; au lieu de $-a - a - a$, on peut mettre $-3a$, et ainsi de suite. (*Arith.* nos 119, 120, 121.)

Cette espèce de simplification s'appelle *réduction*, parce qu'elle réduit plusieurs termes à un seul.

64. Quant aux expressions aa , aaa , $aaaa$, etc. on doit bien pouvoir les représenter au moyen de la lettre a et des chiffres 2, 3, 4, etc.; mais, si l'on plaçait ces chiffres comme les précédents, on confondrait alors des choses qui ne doivent pas être confondues; car il est évident que $a + a + a$, par exemple, n'est pas la même chose que aaa , ou que $a \times a \times a$. Si a vaut 2, $a + a + a$ ou $3a$ vaut $2 + 2 + 2$ ou 3×2 ou 6, tandis que aaa vaut $2 \times 2 \times 2 = 8$.

On ne peut donc pas à la place de aa écrire $2a$; et l'on ne pourrait pas non plus écrire $a2$, parce qu'il est convenu que toutes les quantités qui s'écriront de suite sur une même ligne et sans interposition de signe, seront multipliées les unes par les autres; en sorte que $a2 = a \times 2 = 2 \times a = 2a$.

Ne pouvant donc écrire pour aa , ni $2a$ ni $a2$, on est convenu d'écrire a^2 , en mettant le chiffre à droite de la quantité, mais un peu plus haut. En sorte que $aaa = a^3$, que $aaaa = a^4$, et ainsi de suite.

65. Il faut bien observer que ma désigne que la quantité a est ajoutée à elle-même, et qu'elle est m fois dans la somme, ou en d'autres termes qu'elle est multipliée par m , tandis que a^m désigne

que la quantité a est multipliée par elle-même, et qu'elle est m fois facteur dans le produit, ou en d'autres termes qu'elle est élevée à la puissance m (*Arith.* n^{os} 76, 77) : aussi prononce-t-on alors a élevé à m .

N. B. Pour lire les formules suivantes, a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , etc. on peut donc dire a élevé à deux, a élevé à trois, a élevé à quatre, a élevé à cinq, etc.; mais ordinairement, quand l'exposant est un nombre, on simplifie l'expression en disant a deux ou a carré, a trois ou a cube, a quatre, a cinq, etc. Mais pour lire a^m , on ne pourrait prononcer a emme, parce qu'il y aurait équivoque, et qu'on confondrait a^m avec am ; tandis qu'un chiffre ne se place guère à la droite d'un autre sans être exposant: a deux ne peut pas être pris pour a^2 ; car cette dernière quantité se prononcerait a multiplié par deux, et vaudrait $2a$.

66. Parce que $ma = am$, ou parce qu'on obtient le même résultat en prenant a m fois, ou en prenant m a fois (*Arith.* n^o 79), on considère la quantité m comme entrant dans le produit de même que la quantité a , ou comme concourant avec elle à le former, et on dit en conséquence que m est le coefficient de a .

La même chose n'ayant pas lieu dans l'expression a^m , qui n'est point en général égale à ma , on ne considère pas la quantité m comme entrant dans le produit, ou comme concourant à le former, et on désigne cette quantité m dans ce cas par le nom d'exposant (*).

67. On appelle donc COEFFICIENT d'une quantité algébrique simple ou composée (n^o 53), une autre quantité souvent numérique, placée au devant de la première sur la même ligne, et que l'on considère comme son multiplicateur;

Et l'on nomme EXPOSANT d'une quantité algébrique simple ou composée, une autre quantité souvent numérique, placée à droite de la première sur une ligne un peu supérieure, et qui indique la puissance à laquelle elle est élevée.

Quelquefois on donne un exposant aux quantités numériques, comme nous allons le voir dans le numéro suivant.

(*) Coefficient vient de *cum*, avec, et d'*efficere*, faire. Exposant vient de *ex* pour *extra*, en dehors, et de *ponere*, poser, placer, mettre.

68. Du reste, on ne saurait trop inviter les commençants à bien distinguer les coefficients des exposants, car ils sont portés à les confondre. Les quantités ma et a^m sont toutes deux des produits; mais dans le premier de ces produits m est lui-même facteur, dans le second m indique simplement combien de fois a est facteur.

Tout cela deviendra plussensible si l'on substitue des chiffres aux lettres. Ainsi $3 \times 2 = 6$, $3^2 = 9$, $4 \times 3 = 12$, $4^5 = 64$, $2 \times 4 = 8$, $2^4 = 16$, $3 \times 5 = 15$, $3^5 = 243$, etc. etc. (n° 65).

68 bis. La multiplication répétée d'un nombre par lui-même, vient de nous conduire aux puissances. Or, on sait que l'opération contraire, ou celle par laquelle on revient des puissances aux racines, s'appelle *extraction des racines* (*Arith.* n°s 76, 77). Nous dirons à cette occasion que pour indiquer l'extraction de la racine du degré n d'une quantité représentée par a , on écrit $\sqrt[n]{a}$, et que l'on prononce *racine n ième de a* . Quelquefois cette extraction est possible: il est clair, par exemple, qu'on a $\sqrt[3]{8} = 2$, parce que $2^3 = 8$. On a aussi $\sqrt[2]{9} = 3$ parce que $3^2 = 9$, et $\sqrt[5]{32} = 2$ parce que $2^5 = 32$, etc.

Du reste, le signe $\sqrt{}$ qui est une r dont on a un peu changé la forme, s'appelle *signe radical*, et le chiffre ou le symbole qui est à l'ouverture de ce signe, se nomme *l'exposant du signe radical*. On voit que le mot *exposant* est pris ici dans un sens différent de celui que nous lui avons donné au n° 67.

69. Nous voyons par tout cela comment les quantités algébriques, de simples qu'elles étaient d'abord, deviennent composées (n° 53).

Quand les quantités simples que l'on ajoute les unes aux autres, ou que l'on retranche les unes des autres sont différentes, les résultats se trouvent composés de plus d'un terme (n° 2, II). Les quantités d'un seul terme s'appellent des *monomes*, celles de deux des *binomes*, celles de trois des *trinomes*, et en général celles de plusieurs termes des *polynomes*.

Quand les quantités simples que l'on ajoute les unes aux autres, ou que l'on retranche les unes des autres, sont égales entre elles, les différents termes qui résultent de ces opérations, et qui seraient restés distincts et séparés si les quantités eussent été différentes, se réduisent dans ce cas à un seul; et la quantité qui a été ajoutée plu-

sieurs fois à elle-même, ou retranchée plusieurs fois d'elle-même, se trouve précédée d'un coefficient qui très-souvent est en chiffres, parce que le nombre des termes qui se sont réduits à un seul est très-souvent déterminé. On voit que cette *réduction* et ce coefficient numérique indiquent qu'une partie de l'opération n'a été autre chose qu'une opération arithmétique, parce qu'il est resté quelque chose de particulier dans le cas que l'on a examiné. Du reste, cette observation peut s'étendre aux autres opérations algébriques.

Quand les quantités simples que l'on multiplie ou divise les unes par les autres sont différentes, il en résulte des monomes composés de plusieurs lettres et sous la forme entière ou fractionnaire.

Quand ces quantités sont égales, il en résulte des monomes affectés d'exposants et sous la forme entière ou fractionnaire.

Les quantités simples forment donc par leur addition, leur soustraction, leur multiplication et leur division, des quantités composées, qui à leur tour peuvent être additionnées, soustraites, multipliées, divisées, etc.

SECTION II.

Des opérations sur les quantités composées, monomes et polynomes (n° 53).

CHAPITRE PREMIER.

Observations préliminaires.

70. Nous avons donné, au n° 59, des règles pour l'emploi des signes $+$ et $-$, dans les principales opérations de calcul des quantités d'un seul terme, considérées comme directes ou comme inverses.

Or, comme les termes des polynomes peuvent être pris un à un, et que, d'après l'observation du n° 43, on peut considérer comme direct tout terme qui a le signe $+$ ou qui est supposé l'avoir, et comme inverse tout terme qui a le signe $-$, il en résulte que les règles du n° 59 s'appliquent aux quantités de plusieurs termes comme à celles d'un seul terme.

Du reste, les polynomes peuvent recevoir la forme de monomes en les écrivant entre parenthèses, ce qui fournit un moyen d'indiquer les opérations de calcul à faire sur ces quantités combinées entre elles ou avec des monomes. En voici des exemples :

*Additions indiquées, $(a^2b + 5cd) + (3ab^2 - 2mn)$,
.... $(6ef + gh) + ik$, $5l^2m^4 + (2a^2b - 7ac)$.*

*Soustractions indiquées, $(a^2b + 5cd) - (3ab^2 - 2mn)$,
.... $(6ef + gh) - ik$, $5l^2m^4 - (2a^2b - 7ac)$.*

Multiplications indiquées, $(a^2b + 5cd) \times (3ab^2 - 2mn)$, ou $(a^2b + 5cd) \cdot (3ab^2 - 2mn)$, ou plus simplement encore $(a^2b + 5cd)(3ab^2 - 2mn)$ $(ab + cd - ef) \times m^2n$, ou $(ab + cd - ef) \cdot m^2n$, ou $(ab + cd - ef)m^2n$ (n° 2, c, 19).

*Divisions indiquées. $(a + b - c) : (c - d)$, $(a + b - c) : mn$,
.... $g^2h : (m + n - p)$.*

Puissances indiquées, $(a+b)^2, \dots (a-b)^5, \dots (4a^2b-3ab^2)^5, \dots (a^m + b^n - c^p)^{\frac{5}{3}}$ (n° 65).

Racines indiquées. $\sqrt[3]{(5a^4b-8a^5b^2+c)}, \dots \sqrt[5]{(7a^2b^3+4a^5b^2)}, \dots \sqrt[n]{(3c^2d+7c^5d^2)}, \dots \sqrt[2]{(a^2+2ab+b^2)}$ (n° 68 bis).

On peut remarquer sur tout cela,

1°. Que $-(3ab^2-2mn) = -3ab^2+2mn$, que $-(2a^2b+7ac) = -2a^2b-7ac$; que $-(-d^2e-2g) = +d^2e+2g$, et, en général, que le signe — mis au devant d'une parenthèse, change les signes des termes contenus dans la parenthèse ;

2°. Que souvent, dans un calcul, on indique les multiplications au lieu de les effectuer, pour ne pas perdre de vue les facteurs (*Arith.* n° 69), dont les produits seraient composés.

3°. Que souvent même, quand un produit est donné, on cherche à découvrir quels sont ses facteurs, pour pouvoir exprimer le produit au moyen de ces mêmes facteurs : c'est ainsi qu'en arithmétique on peut écrire, au lieu de 12, $(4, 3)$ ou $2 \cdot 6$, ou $2 \cdot 2 \cdot 3$;

4°. Que si l'on a un facteur monome, simple ou composé, et qu'il n'ait point de signe, on peut éviter de le mettre entre parenthèses, comme nous venons de le voir dans nos exemples de multiplications, et comme nous l'avions déjà vu aux n°s 2, c et 19.

5°. Mais que si le monome multiplicateur avait le signe —, ou qu'ayant le signe + on voulût le lui conserver, on ne pourrait éviter de le mettre entre parenthèses qu'en le plaçant au devant du polynome de cette manière $\dots -m^2n(ab+cd), +np(gh+ik)$: car si on le plaçait à la suite du polynome, on n'aurait plus qu'une soustraction ou une addition. Il est évident que $(ab+cd)-m^2n = ab+cd-m^2n$, et que $(gh+ik)+np = gh+ik+np$;

6°. Que les parenthèses sont même nécessaires pour indiquer la multiplication des quantités simples, quand celles-ci ont des signes et qu'on ne veut employer ni le point, ni le caractère $\times$. Ainsi $(+a)(-b)$, ou $\dots +a(-b)$, indiquent la multiplication de $+a$ par $-b$, tandis que $\dots (+a)-b$, ou $+a-b$, ne sont que des soustractions.

7°. Que dans la division, lorsqu'on l'indique par un trait horizontal placé entre le dividende et le diviseur, on peut se passer des parenthèses, comme nous l'avons vu aux n°s 2 E et 19.

Ainsi $(a+b):(c-d) = \frac{a+b}{c-d}, \dots (a+b-c):mn =$

$$\frac{a+b-c}{mn}, \dots gh^2:(m+n-p) = \frac{gh^2}{m+n-p}$$

Du reste, quand les divisions sont mises sous la forme de fractions, on peut les lire de deux manières : $\frac{a+b}{c-d}$ se lit $a+b$ divisé par $c-d$, ou $a+b$ sur $c-d$, comme nous le savons déjà (n° 9, E, note), $\frac{a+b-c}{mn}$ se lit $a+b-c$ divisé par mn , ou $a+b-c$ sur mn ; $\frac{gh^2}{m+n-p}$ se lit gh divisé par $m+n-p$, ou gh sur $m+n-p$;

8°. Que dans les racines on peut remplacer les parenthèses par un trait horizontal, qui recouvre toute la quantité, en partant du signe radical. Ainsi, les racines indiquées plus haut pourraient s'écrire de cette manière :

$$\sqrt[3]{5a^4b - 8a^3b^2 + c}, \dots \sqrt[5]{7a^2b^3 + 4a^3b^2}, \dots$$

$$\sqrt[n]{3c^2d + 7c^5d^2}, \dots \text{etc.}$$

9°. Que ces formes de monomes données aux polynomes permettent d'appliquer à ces derniers les règles qu'on donne pour les opérations à faire sur les premiers, comme nous aurons occasion de le voir par la suite.

CHAPITRE II.

De l'addition, de la soustraction, et de la réduction des quantités composées.

71. On a démontré (n°s 59 et 70) que pour additionner les quantités algébriques, il faut les écrire de suite avec leurs signes, et que pour les soustraire il faut aussi les écrire de suite en changeant les signes des quantités à soustraire. Nous allons appliquer cette règle à quelques exemples de polynomes, les monomes ne pouvant souffrir aucune difficulté.

EXEMPLE I^{er}. On propose d'ajouter $3a^2b + ac - d$ avec $2a^2b + 7ac$; on aura,

$$3a^2b + ac - d + 2a^2b + 7ac.$$

EXEMPLE II. On propose d'ajouter $5abc - 2a^2d$ avec $2a^2d - 5abc$ et avec $a + b$; on aura,

$$5abc - 2a^2d + 2a^2d - 5abc + a + b.$$

EXEMPLE III. On propose d'ajouter $4 \frac{acd}{m} - 6a^5b^2c$ avec $\frac{acd}{m} + 5a^3b^2c$; on aura,

$$4 \frac{acd}{m} - 6a^5b^2c + \frac{acd}{m} + 5a^3b^2c.$$

EXEMPLE IV. On propose de soustraire $3a^5b^3c^2 + 2ac$ de $4a^5b^3c^2 - 3ac$; on aura,

$$4a^5b^3c^2 - 3ac - 3a^5b^3c^2 - 2ac.$$

EXEMPLE V. On propose de soustraire $a^5b + 6cd$ de $a^5b + 2cd$; on aura,

$$a^5b + 2cd - a^5b - 6cd.$$

EXEMPLE VI. On propose de soustraire $7 \frac{b^3c}{n} - 5 \frac{cd}{m} - 8ae$ de

$$7 \frac{b^3c}{n} - 5 \frac{cd}{m} - 8ae;$$

on aura,

$$7 \frac{b^3c}{n} - 5 \frac{cd}{m} - 8ae - 7 \frac{b^3c}{n} + 5 \frac{cd}{m} + 8ae.$$

72. Mais il est facile de voir que le résultat du premier exemple se réduit à

$$5a^2b + 8ac - d,$$

parce que 3 fois a^2b et 2 fois a^2b équivalent ensemble à 5 fois a^2b , ou à $5a^2b$, quelle que soit la valeur de a^2b , et parce que 1 fois ac , et 7 fois ac , équivalent ensemble à 8 fois ac ou à $8ac$, quelle que soit la valeur de ac .

De même le résultat du second exemple se réduit à

$$a + b,$$

parce que $5abc - 5abc$ et $2a^2d - 2a^2d$ se réduisent également à zéro, quelle que soit la valeur de abc et de a^2d .

De même encore, le résultat du troisième exemple se réduit à

$$5 \frac{acd}{m} - a^5b^2c,$$

parce que $4 \frac{acd}{m} + \frac{acd}{m} = 5 \frac{acd}{m}$, et parce que $5a^5b^2c -$

$$6a^5b^2c = 5a^5b^2c - 5a^5b^2c - a^5b^2c = -a^5b^2c.$$

Enfin, le résultat du quatrième exemple se réduit à $a^5b^5c - 5ac$;

celui du cinquième à $4cd$;

celui du sixième à 0.

Cette réduction de plusieurs termes à un seul, qui s'est effectuée dans tous ces exemples, et qui est ordinairement une opération arithmétique (n° 69), ne peut avoir lieu que sur des TERMES SEMBLABLES, c'est-à-dire sur des termes composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants, quels que soient d'ailleurs leurs coefficients et leurs signes. Il est évident que les termes de la quantité $3a^2b + mn - 5cg + 3di$, ne sont susceptibles d'aucune réduction, tant que chacune des lettres qui la composent n'aura pas pris une valeur en chiffres. Il faut même observer que l'expression $3a^2b + 2ab - abc + bc$ ne peut point se réduire, parce que, quoiqu'il y ait des lettres communes à plusieurs de ses termes, celles d'un terme ne se trouvent pas toutes dans un autre terme, ou n'ont pas les mêmes exposants dans l'un que dans l'autre.

Pour réduire à un seul plusieurs termes semblables, il faut donc, si ces termes ont le même signe, donner pour coefficient au nouveau terme la somme de tous les coefficients, avec le signe commun; et si les termes semblables ont des signes différents, il faut faire la somme de coefficients directs et celle des inverses (n° 53), retrancher la plus petite de la plus grande, et donner pour coefficient au nouveau terme la différence de ces deux sommes, avec le signe de la plus grande.

73. On remarquera ici que retrancher un nombre b d'un nombre a , c'est en d'autres termes chercher le rapport de différence ou le rapport excédentif des deux nombres a et b ; et si l'on trouve $a - b = c - d$, on pourra dire que $a : b :: c : d$ (Arith. n°s 534, 535). Alors si on a $a > b$, $a - b$ est direct, ainsi que $c - d$; mais si on a $a < b$, $a - b$ est inverse, ainsi que $c - d$ (n° 53).

Dans l'un et l'autre cas, si l'on ajoute b et d aux deux membres

de l'équation $a - b = c - d$, on a $a - b + b + d = c - d + b + d$, ou en réduisant $a + d = c + b$, c'est-à-dire que dans l'expression $a . b : c . d$, la somme des deux termes extrêmes est égale à la somme des deux termes moyens, comme nous l'avons démontré dans l'arithmétique (*Arith.* n° 584 (*)).

74. Si l'on ajoute à un nombre a un nombre d pour avoir $a + d$, qu'à cette somme on ajoute encore d pour avoir $a + 2d$, et que l'on continue ainsi d'ajouter d à chaque somme que l'on formera de cette manière, il en résultera la progression (*Arith.* n° 542),
 $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . \text{etc.}$

Si la différence d est directe (n° 53), la progression est croissante ; mais si cette différence est inverse, la progression est décroissante (*Arith.* nos 543, 544).

Et il est facile de voir qu'un terme quelconque de cette progression vaut le premier plus la différence multipliée par le nombre qui exprime combien il y a de termes avant celui dont il s'agit (*Arith.* n° 661).

75. Nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette matière, que nous avons développée dans l'arithmétique, et nous terminerons ce chapitre en observant que si l'on ajoute successivement un même nombre à lui-même, l'addition devient multiplication, et que si l'on soustrait successivement un même nombre d'une quantité donnée, la soustraction devient division. Nous allons examiner ces deux opérations.

[*] (*) Le mot *terme*, quand il s'agit de proportions et de progressions, désigne les parties séparées par les points (n° 2, n).

CHAPITRE III.

De la multiplication et de la division des quantités composées.

1°. Des monomes.

76. Une observation assez essentielle à faire avant de commencer cet article, c'est que les règles relatives aux opérations sur les monomes peuvent s'appliquer aussi aux polynomes, en donnant à ces derniers la forme des premiers, au moyen de parenthèses (*Revoyez tout le n° 70*). Ce principe trouvera encore son application dans les chapitres VII et VIII, où nous traiterons de l'élevation aux puissances et de l'extraction des racines dans les monomes, puis du calcul des quantités radicales.

Tout monome algébrique, s'il est simple, ne contient qu'une lettre, outre le signe qui est au devant de cette lettre, ou qu'on peut y supposer. S'il est composé, il l'est, ou par une lettre avec un coefficient, ou par une lettre avec un exposant, ou par plusieurs lettres, ou enfin par la réunion de ces divers éléments.

Cependant tout monome qui n'a point de coefficient numérique, est censé avoir pour coefficient 1, et toute lettre qui n'a point d'exposant, est supposée avoir l'exposant 1. Ainsi, a^5b est la même chose que $1 a^5b^1$, et a^2bc équivaut à $1 a^2b^1c^1$, etc. etc. De même le polynome $7a^2b^5 - m^4n +$, etc. mis entre parenthèses, et considéré alors comme monome, a pour coefficient général 1, et pour exposant général aussi 1, c'est-à-dire qu'il vaut 1 ($7a^2b^5 - m^4n +$ etc.). Tandis que si l'on avait 3 ($7a^2b^5 - m^4n +$ etc.)⁵, le coefficient général serait 3, et l'exposant général 5.

Il faudra donc, dans la multiplication et la division des monomes, considérer les signes, les coefficients, les lettres et les exposants.

77. Or, nous connaissons déjà la loi des signes (nos 59 et 70), et nous avons plusieurs données qui peuvent nous diriger dans la recherche des autres lois.

1°. Nous savons que plusieurs lettres écrites de suite, sans inter-

position de signe, sont multipliées les unes par les autres (n° 19), et qu'il en est de même d'un mélange de quantités numériques et de lettres, quand ces quantités et ces lettres sont écrites sur une même ligne (n°s 19, 64).

2°. Nous savons que deux ou plusieurs nombres multipliés entre eux dans un ordre quelconque, donnent toujours le même produit (*Arith.* n°s 110, 111, 112), ce qui nous fournira la facilité d'établir entre les lettres d'un monome l'ordre alphabétique, qui en facilite la lecture, et de placer au commencement de ce monome toutes les quantités numériques, quand le mélange indiqué ci-dessus aura lieu.

Du reste, on intervertit quelquefois l'ordre alphabétique des lettres quand on veut faire pressentir qu'une ou plusieurs de ces lettres jouent le rôle de coefficient, comme m dans l'expression mab (n°s 65, 66, 67).

3°. Nous savons de plus que si l'on divise un produit par un de ses facteurs, on a pour quotient l'autre facteur (*Arith.* n°s 69, 161, 164), et que si l'on divise les deux termes d'une fraction par un même nombre, la fraction change de forme sans changer de valeur (*Arith.* n° 274). Arrêtons-nous un peu là-dessus.

Les FACTEURS d'un produit sont les nombres qui ont été multipliés entre eux pour former ce produit. Ainsi, les facteurs de $3abc$ sont le chiffre et les trois lettres, ce qui fait quatre facteurs; mais on peut toujours, en les combinant, les considérer comme ne formant que deux facteurs: par exemple, si l'on divise $3abc$ par le facteur 3, on a pour quotient le facteur composé abc . Si l'on divise le même produit $3abc$ par $3a$, on a pour quotient bc , etc. etc.

Appliquons à quelques exemples les deux principes énoncés dans l'avant-dernier alinéa; le premier nous donnera

$$\frac{ab}{a} = b, \quad \frac{ab}{b} = a, \text{ etc.}$$

Le second, combiné avec le premier, nous conduira à ceci:

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{ab} = \frac{1}{b},$$

parce que ab divisé par a donne b , que ac divisé par a donne c , que a divisé par a donne 1, et que ab divisé par a donne b .

Avant d'aller plus loin, tirons de ces quatre formules une règle

qui pourra nous être fort utile par la suite : elle se trouve démontrée par les formules mêmes.

Lorsqu'il y a des facteurs communs à un dividende et à son diviseur, on peut les supprimer de part et d'autre sans altérer le quotient, pourvu qu'on écrive l'unité au dividende, dans le cas où il n'y resterait rien par la suppression des facteurs. Sur quoi il faut remarquer qu'il n'y a pas besoin d'écrire l'unité au diviseur, lorsqu'il n'y reste rien par la suppression des facteurs, parce qu'un nombre divisé par 1

ne change pas. Ainsi $\frac{3}{1} = 3, \frac{a}{1} = a.$

4°. Avec le secours de tous ces principes, et la connaissance que nous avons des propriétés des exposants, propriétés qui ont été développées dans les n°s 64, 65, 66, 67 et 68, nous passerons à la recherche des lois d'après lesquelles on peut multiplier et diviser les monomes algébriques les uns par les autres.

Loi des signes.

78. Répétons cette loi déjà connue. *Pour multiplier ou diviser l'une par l'autre deux quantités algébriques, il faut, lorsqu'elles ont le même signe, donner au produit ou au quotient le signe +, et lorsqu'elles ont des signes contraires, donner au produit ou au quotient le signe — (n°s 59 et 70).*

Dans l'application que l'on fait de cette règle, on s'énonce ainsi, soit pour la multiplication, soit pour la division :

+ par + fait +, — par — fait +,
+ par — fait —, — par + fait —.

Loi des coefficients.

79. *Dans la multiplication.* Il est clair que $2a \times 3b = 2a3b = 2.3ab = 6ab$ (n° 1 et n° 77, 1°, 2°), et en général que $m.a \times n.b = \dots mn.ab$; m étant le coefficient de a , n le coefficient de b , et mn , ou le produit de m par n , le coefficient de ab ; c'est-à-dire que les coefficients du multiplicande et du multiplicateur doivent être multipliés l'un par l'autre pour former le coefficient du produit.

80. *Dans la division.* Faisons les preuves des multiplications ci-dessus. Il est évident, par le n° 77, 3°, qu'on a

$$\frac{6ab}{2a} = \frac{2 \cdot 3ab}{2a} = 3b \quad \frac{6ab}{3b} = \frac{2 \cdot 3ab}{3b} = 2a, \quad \frac{mn.ab}{m.a} = nb,$$

$$\frac{mn.ab}{n.b} = m.a;$$

c'est-à-dire que pour avoir le coefficient d'un quotient, il faut diviser le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur.

Il faut observer à cet égard, que lorsque la division des coefficients ne peut pas s'effectuer, il en résulte, pour le quotient, un coefficient qui a la forme fractionnaire.

$$\text{Ainsi } \frac{2ab}{3a} = \frac{2}{3} b = \frac{2b}{3} \text{ (Arith. n° 254);}$$

$$\frac{m.ab}{n.b} = \frac{m}{n} a = \frac{m.a}{n};$$

opérations dont on pourra faire la preuve par la multiplication.

Loi des lettres.

Elle a lieu lorsque le multiplicande et le multiplicateur, ou le dividende et le diviseur, n'ont aucune lettre commune.

81. *Dans la multiplication.* Il est clair que $ab \times cd = abcd$, que $a^3b^2 \times c^3d = a^3b^2c^3d$; que $a^mb^ncp, \text{ etc. } \times d^qer, \text{ etc. } = a^mb^ncpd^qer$, etc. (n° 77, 1° et 2°); c'est-à-dire que, lorsque les lettres du multiplicande et du multiplicateur sont différentes, il suffit de les écrire de suite au produit avec leurs exposants.

82. *Dans la division.* L'opération dans ce cas ne peut que s'indiquer : pour diviser a par b , on écrit $a : b$, ou $\frac{a}{b}$; pour diviser a^2bc par m^4n , on écrit $a^2bc : m^4n = \frac{a^2bc}{m^4n}$, etc.

c'est-à-dire que, lorsque les lettres du dividende et du diviseur sont différentes, il suffit d'écrire celles du dividende pour numérateur d'une fraction, et celles du diviseur pour dénominateur; la fraction même est le quotient.

83. C'est en effet là l'origine des fractions algébriques que l'on additionne, soustrait, multiplie et divise, soit entre elles, soit avec les nombres entiers, en suivant les règles que nous avons données pour ces opérations dans l'arithmétique, et en y joignant les principes particuliers à l'algèbre, que nous sommes occupés à développer.

84. On remarquera qu'une fraction algébrique comme $\frac{a}{b}$ pourra, dans tel ou tel cas particulier, perdre cette forme et ce caractère lorsqu'on aura donné à ses termes une valeur numérique qui rendra la division possible. Si par exemple a devient 6, et que b devienne 3, on aura $\frac{a}{b} = \frac{6}{3} = 2$. Mais algébriquement parlant $\frac{a}{b}$ est une fraction.

En revanche, les quantités a , b , m^2n , $3mp$, etc. sont en algèbre des nombres entiers, quoique ces expressions puissent prendre dans certains cas des valeurs numériques fractionnaires.

Loi des exposants.

Elle a lieu lorsque le multiplicande et le multiplicateur, ou le dividende et le diviseur, ont des lettres communes.

85. *Dans la multiplication.* Il est facile de voir que $a^3b^2c \times a^2bc = a^3b^2ca^2bc = a^5a^2b^2bcc$ (n° 77, 1° et 2°) = $aaaaabbcc = a^5b^3c^2$ (n° 64), et en général que $a^m \times a^n = a^m a^n$. Mais comme l'exposant m indique que la quantité a est m fois facteur dans le produit, et que l'exposant n indique que cette même quantité a est en outre n fois facteur dans le produit (n° 65), il en résulte que a doit être écrit de suite m fois plus n fois, ou $(m + n)$ fois (n°s 64, 65). On a donc $a^m a^n = a^{m+n}$. C'est-à-dire que lorsqu'il y a des lettres communes au multiplicande et au multiplicateur, chacune de ces lettres s'écrit une fois au produit avec un exposant égal, celui qu'elle a dans le multiplicande, plus celui qu'elle a dans le multiplicateur.

86. *Dans la division.* Faisons les preuves des multiplications ci-dessus. Il est évident par les n°s 64, 65 et 77, 3°, qu'on a

$$\frac{a^5b^3c^2}{a^3b^2c} = \frac{aaaaabbcc}{aaabbc} = aabc = a^2bc;$$

$$\frac{a^5b^3c^2}{a^2bc} = \frac{aaaaabbcc}{aabc} = aaabbc = a^3b^2c;$$

$$\frac{a^{m+n}}{a^m} = \frac{a^m a^n}{a^m} = a^n;$$

$$\frac{a^{m+n}}{a^n} = \frac{a^m a^n}{a^n} = a^m.$$

Mais le premier quotient $a^2bc = a^{5-3}b^{3-2}c^{2-1}$; le second $a^5b^2c = a^{5-2}b^{3-1}c^{2-1}$; le troisième $a^n = a^m + n - m$, et le quatrième $a^m = a^m + n - n$.

Donc, lorsqu'il y a des lettres communes au dividende et au diviseur, chacune de ces lettres communes s'écrit une fois au quotient, avec un exposant égal à celui qu'elle a dans le dividende, moins celui qu'elle a dans le diviseur.

87. Avant de quitter cette règle; nous ferons observer qu'elle renferme trois cas différents; car, ou l'exposant de la lettre commune est plus grand dans le dividende que dans le diviseur, ou il est égal dans les deux, ou il est plus petit dans le premier que dans le second.

Par exemple dans la formule $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$, $m - n$ est direct, mais si $m = n$, $m - n = 0$, et si $m < n$, $m - n$ est inverse; on demande donc ce que signifient ces expressions a^0 et a^{-p} .

88. Puisque a^0 provient de $\frac{a^m}{a^m}$, il est facile de comprendre que $a^0 = 1$, car lorsque le dividende et le diviseur sont égaux, le quotient est toujours l'unité. Toute la différence qu'il y a entre ces deux expressions, c'est que le chiffre 1 désigne l'unité d'une manière plus vague et plus générale, et que le caractère a^0 désigne l'unité provenant de la division d'un nombre par lui-même.

Il faut donc bien se souvenir que toute quantité qui a pour exposant 0 équivaut à l'unité.

89. Mais si l'on avait 0^0 , cette expression équivalant à $\frac{0^m}{0^m}$ ou à $\frac{0}{0}$, sa valeur, considérée d'une manière générale, serait indéterminée, c'est-à-dire qu'on pourrait écrire pour $\frac{0}{0}$ ou 0, ou ± 1 (*), ou ± 2 , ou ± 3 , ou $\pm V$, cette lettre V ayant une valeur quelconque; car la division consiste à chercher un quotient tel que, multiplié par le diviseur, il redonne le dividende; or, il n'y a pas de nombre qui, multiplié par 0 ne redonne 0, donc en général $0^0 = \frac{0}{0} = \pm V$.

Cependant, dans bien des cas, cette expression peut avoir une valeur fixe et déterminée.

(*) Ce double signe $\pm$ signifie + ou -.

Par exemple, si une question avait conduit à la formule $x = \frac{3(a-b)^m}{(a-b)^n}$, et que dans un cas particulier on eût $a=b$ et $m=n$,

on trouverait $x = \frac{3 \times 0^m}{0^m} = \frac{3 \times 0}{0} = \frac{0}{0}$, et la valeur de x paraîtrait indéterminée.

Mais en observant, 1°. que dans le cas particulier dont il s'agit, on a $m=n$; 2°. qu'on peut effacer les facteurs communs à un dividende et à son diviseur (n° 77, 3°), on sera autorisé à conclure qu'on a ici $x = \frac{3(a-b)^m}{(a-b)^m} = 3$.

90. Quant à l'expression a^{-p} (n° 87), elle provient, comme nous l'avons vu, d'un exposant plus grand, retranché d'un exposant plus petit. C'est la règle du n° 86, appliquée à un cas qui, à proprement parler, n'y est pas compris. Elle donne

$$\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{m-m-p} = a^{-p}.$$

Mais d'un autre côté,

$$\frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m a^p} = \frac{1}{a^p} \text{ (n° 77, 3°).}$$

En sorte que généralement $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$;

c'est-à-dire qu'une quantité quelconque avec un exposant inverse, est égale à l'unité divisée par cette même quantité, avec le même exposant, mais direct.

91. Il résulte de là que $ba^{-p} = \frac{b}{a^p}$, et qu'à la place de $\frac{b}{a^p}$ on peut écrire, si l'on veut, ba^{-p} . Si $p=1$, on a, $\frac{b}{a} = ba^{-1}$.

Cela donne le moyen de faire passer une quantité de la forme fractionnaire à la forme entière.

On voit aussi que $\frac{b}{a^{-p}} = b : \frac{1}{a^p} = \frac{b}{1} : \frac{1}{a^p} = \frac{ba^p}{1} = ba^p$ (Aritm. n°s 300, 315).

92. Voici quelques exemples de multiplications et de divisions de monomes, sur lesquels on pourra s'exercer :

$$\begin{aligned}
 &+ 5b^3cd^2 \times - 7a^2b^5c = - 35a^2b^8c^2d^2. \\
 &- 12n^7p^4q^6 \times - 11m^8np = + 132m^8n^8p^5q^6. \\
 &- a^mb^nc \times + 3ab^4c = - 3a^m + 1b^n + 4c^2. \\
 &+ \frac{18a^3b^2cdy^3}{- 15a^5bc^2d^3y} = - \frac{6by^2}{5a^2cd^2}. \\
 &- \frac{12a^8b^3c^5nd^{2p-4}e^4x}{- 18a^2b^7c^nd^5p+4e^4y^2} = + \frac{2a^6c^4nx}{3b^4d^3p+5y^2}
 \end{aligned}$$

Développons la marche du premier exemple de multiplication. On dira + par - fait - (n° 78), 5 fois 7 ou 7 fois 5 font 35 (n° 79), $b^3cd^2 \times a^2b^5c$ donne $a^2b^5+5c^4+4d^2$, ou $a^2b^8c^2d^2$ (n° 77, 2°, 81, 85).

Développons aussi le premier exemple de division. On dira + par - fait - (n° 78), 18 divisé par 15 donne $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$ (n° 80).

$$\frac{a^3b^2cdy^3}{a^5bc^2d^3y} = \frac{a^3bbcdyy^2}{a^5a^2bccdd^2y} = \frac{by^2}{a^2cd^2} \text{ (n° 77, 3°, 4°).}$$

On aurait pu dire aussi

$$\frac{a^3b^2cdy^3}{a^5bc^2d^3y} = a^{3-5}b^{2-1}c^{4-2}d^{1-3}y^{3-1} = a^{-2}b^{-1}d^{-2}y^2 =$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot b \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot y^2 \text{ (n° 86, 90)} = \frac{by^2}{a^2cd^2}.$$

Il conviendra d'ailleurs, après qu'on aura passé en revue les autres exemples, de faire les preuves des multiplications par la division et celles des divisions par la multiplication.

Appliquons aussi les règles que nous venons de trouver à quelques exemples de polynomes, conformément à l'observation contenue dans le premier alinéa du n° 76.

$$\begin{aligned}
 1^\circ. & \frac{(3a^2b - 5c^4d)(2m + n)}{(3a^2b - 5c^4d)} = 2m + n \text{ (n° 77, 3°).} \\
 2^\circ. & 7(2a^3 - 4b) \times 5(2m - n) = 35(2a^3 - 4b)(2m - n) \text{ (n° 79).} \\
 3^\circ. & \frac{35(2a^3 - 4b)(2m - n)}{5(2m - n)} = 7(2a^3 - 4b) \text{ (n° 77, 3°, et 80).} \\
 4^\circ. & 6(4a^5 - b^3)^4 \times 5(3mn - 2p)r = \dots 30(4a^5b^3)^4(3mn - 2p)r \text{ (n° 79, 81).} \\
 5^\circ. & 7(3a^2 - 2b)^5 : 3(2m - n)^2 = \dots \frac{7(3a^2 - 2b)^5}{3(2m - n)^2} =
 \end{aligned}$$

$$\frac{7}{3} \frac{(3a^2 - 2b)^5}{(2m - n)^2} \text{ (n° 80, 82).}$$

$$6^\circ. (3a^2 - 2b)^5 (3a^2 - 2b)^3 = (3a^2 - 2b)^8 \text{ (n° 85).}$$

$$7^\circ. \frac{(3a^2 - 2b)^8}{(3a^2 - 2b)^5} = (3a^2 - 2b)^3 \text{ (n° 86).}$$

$$8^\circ. (7ab + c^3d - 8e^5)^0 = 1 \text{ (n° 88).}$$

$$9^\circ. (7ab + c^3d)^{-10} = \frac{1}{(7ab + c^3d)^{10}} \text{ (n° 90).}$$

93. On remarquera ici que diviser un nombre a par un nombre b , pour avoir le quotient $\frac{a}{b}$, c'est en d'autres termes chercher le rapport de quotient ou le rapport quotitif des deux nombres a et b ; et si l'on trouve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on pourra dire que $a : b :: c : d$ (*Arith.* n° 531 . 537).

Si l'on multiplie par bd les deux membres de l'équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a $ad = bc$, c'est-à-dire que dans l'expression $a : b :: c : d$ le produit des termes extrêmes égale le produit des termes moyens, comme nous l'avons démontré dans l'arithmétique (*Arith.* n° 595).

94. Si l'on multiplie un nombre a par un nombre b pour avoir ab , qu'on multiplie encore ce produit par b pour avoir ab^2 , et que l'on continue ainsi de multiplier par b chaque produit que l'on formera de cette manière, il en résultera la progression (*Arith.* n° 542)

$$\div a : ab : ab^2 : ab^3 : ab^4 : \text{etc.}$$

Si la raison b est plus grande que 1, la progression est croissante; mais si b est une fraction, la progression est décroissante (*Arith.* n° 543, 544).

Et il est facile de voir qu'un terme quelconque de cette progression vaut le premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qu'il y a avant celui dont il s'agit (*Arith.* n° 668).

95. Si $a = 1$, la progression devient

$$\div 1 : b : b^2 : b^3 : b^4 : \text{etc. ou}$$

$$\div b^0 : b^1 : b^2 : b^3 : b^4 : \text{etc. (n° 76, 88),}$$

dont les termes sont en progression quotitive, tandis que les exposants sont en progression excédentive.

Si le premier terme était b^m , et que le quotient fût b^n , la progression deviendrait,

$$\div b^m : b^{m+n} : b^{m+2n} : b^{m+3n} : b^{m+4n} : \text{etc.}$$

Par où l'on voit généralement que lorsque plusieurs exposants d'une même quantité forment une progression excédentive, les puissances de cette quantité marquées par ces exposants, et prises dans le même ordre qu'eux, forment une progression quotitive.

96. Si, dans notre dernière progression, on fait $m = 0$, elle deviendra

$$\div b^0 : b^n : b^{2n} : b^{3n} : b^{4n} : b^{5n} : b^{6n} : b^{7n} : b^{8n} : \text{etc.}$$

L'on aura ainsi une suite de termes en progression quotitive dont le premier sera l'unité, et les exposants de ces termes formeront une progression excédentive commençant par 0. Alors chaque exposant sera le *logarithme* du terme auquel il correspond, c'est-à-dire que 0 sera le logarithme de b^0 , que n sera le logarithme de b^n , que $2n$ sera le logarithme de b^{2n} , et ainsi de suite (*Arith.* n^{os} 686, 687).

97. Il est facile de voir, 1^o. que pour trouver le produit de deux termes de cette progression, comme celui de b^{2n} par b^{4n} , il suffit de prendre le terme correspondant à la somme $6n$ des deux exposants (n^o 85; *Arith.* n^{os} 681, 685);

2^o. Que pour trouver le quotient de deux termes, comme celui de b^{8n} par b^{6n} , il suffit de prendre le terme correspondant à la différence $2n$ des deux exposants (n^o 86) (*Arith.* n^{os} 682, 685).

Et comme les élévations aux puissances ne sont que des multiplications répétées, et que les extractions de racines sont les opérations contraires des élévations aux puissances (*Arith.* n^{os} 74 à 77), il ne sera pas difficile de faire aussi ces opérations par le moyen des logarithmes. Du reste, cette matière a été développée dans l'*Arithmétique d'Émile*, et nous supposons ici la connaissance de cet ouvrage.

2^o. Des polynomes.

De la multiplication des polynomes.

98. Pour multiplier un polynome, représenté par $a + b + c + \text{etc.}$

par un monome, représenté par m , il est évident qu'il faut multiplier successivement et dans un ordre quelconque tous les termes du polynome par le monome.

De même, pour multiplier le polynome $a + b + c + \text{etc.}$ par le binome $m + n$, il est encore évident qu'il faut multiplier l'un après l'autre et dans un ordre quelconque, tous les termes du polynome multiplicande, d'abord par m , et ensuite par n , ou d'abord par n , et ensuite par m .

Pour multiplier $a + b + c + \text{etc.}$ par $m + n + p$, il faut multiplier $a + b + c + \text{etc.}$ par chacun des termes du trinome $m + n + p$.

En général, pour multiplier un polynome par un autre, il faut multiplier tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; et c'est ce qu'on peut très-facilement exécuter au moyen des règles que nous avons obtenues pour la multiplication d'un monome par un autre, ou d'un terme par un autre terme.

99. On doit observer à cet égard que les quantités algébriques n'ayant point, comme les chiffres, une valeur dépendante de leur place ou de leur colonne, il n'y aura rien à retenir en allant d'un terme à un autre, ce qui permettra de commencer la multiplication par la gauche ou par la droite, à volonté (*Arith.* n^{os} 88 à 94).

On peut remarquer encore que, non-seulement l'ordre des lettres, dans chaque terme, est en lui-même indifférent, quoiqu'on préfère en général l'ordre alphabétique (n^o 77, 2^o), mais qu'encore l'arrangement des termes entre eux peut varier sans changer la quantité, puisque la valeur de ces termes, comme nous venons de le dire, n'est en aucune manière dépendante de leur place.

100. Du reste, si le multiplicande et le multiplicateur sont d'avance réduits à la plus simple expression (n^o 72), et que ces deux quantités n'aient aucune lettre commune, il est clair que le produit ne pourra contenir des termes semblables, et qu'il ne pourra par conséquent subir aucune réduction. Dans ce cas, le nombre des termes du produit sera égal à celui des termes du multiplicande multiplié par celui des termes du multiplicateur. Par exemple, en multipliant $a + b + c + d$ par $m + n + p$, on aura un produit total de douze termes.

Mais si le multiplicande et le multiplicateur sont tels qu'il puisse

se trouver au produit total des termes semblables, ces termes se réduisant alors entre eux, le nombre des termes du produit définitif sera moindre que dans le cas précédent, c'est-à-dire qu'il sera moindre que le nombre des termes du multiplicande multiplié par le nombre des termes du multiplicateur. Comme ce cas est le plus important, nous allons l'examiner en particulier, d'autant plus qu'il n'y a aucune observation à faire sur l'autre.

101. Nous venons de parler de termes semblables; or, ces termes se présentent sans cesse dans les opérations d'arithmétique; car les unités sont semblables aux unités, les dizaines aux dizaines, les centaines aux centaines, etc. Ne pourrait-on donc former des polynômes algébriques qui eussent, sous ce point de vue, des rapports plus ou moins marqués avec les quantités numériques?

102. Pour résoudre cette question, examinons avec quelque soin les quantités numériques, et séparons les uns des autres les termes dont elles sont formées; prenons, par exemple, le nombre 52643; il est évident que nous pourrions l'écrire ainsi:

$$50000 + 2000 + 600 + 40 + 3.$$

Mais cette espèce de polynôme peut encore recevoir les deux formes suivantes (n^{os} 1, 65, 88):

$$5.10000 + 2.1000 + 6.100 + 4.10 + 3.1$$

$$5.10^4 + 2.10^3 + 6.10^2 + 4.10^1 + 3.10^0.$$

Et comme il serait facile de décomposer ainsi tout autre nombre entier, on en peut conclure

1°. Que les chiffres de ces nombres ne sont autre chose que les coefficients des différentes puissances de 10, en commençant par la puissance 0, et s'élevant successivement de la droite à la gauche aux puissances 1, 2, 3, 4, etc.

2°. Que dans la manière ordinaire d'écrire les nombres, on supprime, soit les signes, soit les différentes expressions des puissances de 10, ces puissances n'étant plus indiquées alors que par les colonnes. Ainsi, en allant toujours de la droite vers la gauche, on a d'abord la puissance 0 ou les unités, puis la puissance 1 ou les dizaines, puis la puissance 2 ou les centaines, et ainsi de suite.

En résumé, les chiffres écrits sont les coefficients des différentes

puissances de 10, et ces puissances ne sont indiquées elles-mêmes que par les colonnes où les coefficients sont placés.

Il résulte de ces observations qu'on ne peut changer la place des chiffres dans un nombre écrit à la manière ordinaire, sans changer par là même le nombre, tandis que dans les autres manières d'écrire ce nombre, on pourrait, sans le dénaturer, changer l'ordre de ses termes, comme il est facile de le voir (n° 99).

103. Tout cela posé, une quantité algébrique de cette forme

$$7a^4 + 5a^3 + 8a^2 + 3a^1 + 4a^0,$$

sera tout-à-fait analogue à une quantité numérique écrite de l'une des manières ou de l'autre, et l'on pourra changer l'ordre des termes sans dénaturer la quantité (n° 99).

104. Mais dans les quantités numériques écrites comme à l'ordinaire, les chiffres se succèdent toujours dans un ordre régulier et systématique, d'où résulte entre autres la manière d'opérer dans la multiplication. Or, à part les nombres que l'on retient pour les porter d'une colonne à une autre, la marche de cette opération ne changerait point si l'on écrivait ces quantités comme nous l'avons fait il y a un moment, pourvu du moins qu'on ne dérangerait pas l'ordre de grandeur de leurs termes; et l'on pourrait même de cette manière commencer par la gauche, aussi-bien que par la droite, sans y trouver plus de difficultés.

Donc les quantités algébriques de la nature de celles que nous venons d'examiner, pourront aussi se multiplier suivant la marche employée dans les quantités numériques, si du moins l'on ne change pas non plus l'ordre de grandeur de leurs termes, ou si l'on rétablit cet ordre quand il aura été changé.

Si, par exemple, on multiplie la quantité algébrique précédente par une autre de même nature, avec plus ou moins de termes, comme celle-ci,

$$2a^3 + 5a^2 + 3a^1 + a^0,$$

et que l'on suive dans l'opération la marche que l'on suit ordinairement dans les multiplications numériques, on pourra être certain d'avance qu'on trouvera dans les différents produits partiels des termes semblables (n° 72), et que si l'on écrit ces produits les uns sous les autres, en les reculant d'une place à mesure qu'on passera d'un

terme à un autre du multiplicateur, les termes semblables se trouveront placés dans les mêmes colonnes: car tout se passera là comme dans la multiplication des quantités numériques.

D'ailleurs, les différents coefficients et les différents signes qu'on pourra donner à ces termes n'influent en aucune manière sur la similitude ou non similitude des termes du produit (n° 72), l'ordre de ces derniers n'en sera point changé.

105. Avant d'aller plus loin, essayons en effet la multiplication des deux quantités précédentes en suivant la marche de l'arithmétique, qui se rapporte du reste à celle que nous avons indiquée au n° 98. Seulement commençons l'opération par la gauche, puisqu'elle ne peut nous offrir ainsi plus de difficultés. Ce sens est celui qu'on préfère, parce que c'est celui dans lequel la lecture des quantités se fait naturellement. Voici le tableau de cette opération:

$$\begin{array}{r}
 7a^4 + 5a^3 + 8a^2 + 3a^1 + 4a^0 \\
 2a^3 + 5a^2 + 3a^1 + a^0 \\
 \hline
 14a^7 + 10a^6 + 16a^5 + 6a^4 + 8a^3 \\
 + 35a^6 + 25a^5 + 40a^4 + 15a^3 + 20a^2 \\
 + 21a^5 + 15a^4 + 24a^3 + 9a^2 + 12a^1 \\
 + 7a^4 + 5a^3 + 8a^2 + 3a^1 + 4a^0 \\
 \hline
 14a^7 + 45a^6 + 62a^5 + 68a^4 + 52a^3 + 37a^2 + 15a^1 + 4a^0.
 \end{array}$$

On a d'abord multiplié tout le multiplicande par le premier terme du multiplicateur, en disant $+$ par $+$ fait $+$ (n° 78); 2 fois 7 font 14 (n° 79); a^4 par a^3 fait a^4+a^3 , ou a^7 (n° 85); puis $+$ par $+$ fait $+$; 2 fois 5 font 10; a^3 par a^3 fait a^6 ; puis encore $+$ par $+$ fait $+$; 2 fois 8 font 16; a^2 par a^3 fait a^5 ; et ainsi des autres termes $+3a^1+4a^0$ du multiplicande.

On a eu de cette manière le premier produit partiel qui occupe la troisième ligne du tableau.

On a ensuite multiplié tout le multiplicande par le second terme du multiplicateur, pour avoir le second produit partiel qui occupe la quatrième ligne du tableau; et on a reculé ce produit d'une place vers la droite.

On a continué de la même manière pour avoir le troisième et le quatrième produit partiels; et l'on a enfin réduit les termes semblables, colonne par colonne, pour avoir le produit total.

On a dit, par exemple (n° 72), $+10a^6 + 35a^6 = +45a^6$, puis $+16a^5 + 25a^5 + 21a^5 = 62a^5$, et ainsi de suite.

N. B. Les commençants ne doivent pas confondre la réduction avec la multiplication. Quand on réduit, la multiplication est déjà achevée, et il ne faudrait pas dire, comme ils le font souvent, $+10a^6 + 35a^6 = 350a^{12}$, ou $45a^{12}$. C'est ainsi que dans la multiplication des quantités numériques, on doit ajouter les produits partiels pour avoir le produit total, et non les multiplier entre eux.

106. Il y a sur tout cela quelques observations à faire encore. Par exemple, si, sans changer l'ordre des termes, il s'en trouve un ou plusieurs d'omis entre d'autres dans le multiplicande, il faudra, pour obtenir les termes semblables du produit dans un ordre régulier, remettre à leur place dans le multiplicande les termes omis, en leur donnant 0 pour coefficient. C'est ainsi que dans une quantité numérique qui n'a point d'unités, ou de dizaines, ou de centaines, etc. on écrit 0 dans le rang du chiffre qui manque.

107. Mais si la puissance ou les puissances de a , qui manquent, ne sont point comprises entre celles qui sont données, qu'elles soient par exemple à la fin du polynome, il est alors inutile de les remplacer. Ainsi le nombre 430 vaut $400 + 30 + 0$, ou $4.100 + 3.10 + 0$, ou encore $4.10^2 + 3.10^1 + 0.10^0$, ou enfin $4.10^2 + 3.10^1$, le dernier terme étant supprimé sans autre.

108. Si c'est dans le multiplicateur qu'il y a des termes omis, alors il ne sera pas non plus nécessaire de les remplacer : car, comme on multiplie tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur, si un de ces termes manque, il suffira, en passant au suivant, de reculer le produit de deux places au lieu d'une, et ainsi des autres. Cela est analogue à ce que l'on fait en arithmétique, lorsque le multiplicateur contient des 0.

109. Voici deux multiplications de ce genre, sur lesquelles on pourra vérifier ce que nous venons de dire, en opérant comme au n° 105 :

$$\begin{array}{r}
 3a^4 + 0a^3 - 2a^2 \\
 4a^3 - a^2 + 5a \\
 \hline
 12a^7 + 0a^6 - 8a^5 \\
 - 3a^6 - 0a^5 + 2a^4 \\
 + 15a^5 + 0a^4 - 10a^3 \\
 \hline
 12a^7 - 3a^6 + 7a^5 + 2a^4 - 10a^3 \\
 \\
 a^4 - 5a^3 + 2a^2 - 3a \\
 2a^5 - a^3 - 4a \\
 \hline
 2a^9 - 10a^8 + 4a^7 - 6a^6 \\
 - a^7 + 5a^6 - 2a^5 + 3a^4 \\
 - 4a^5 + 20a^4 - 8a^3 + 12a^2 \\
 \hline
 2a^9 - 10a^8 + 3a^7 - a^6 - 6a^5 + 23a^4 - 8a^3 + 12a^2
 \end{array}$$

110. Tout cela posé, reprenons le produit du n° 105, ou du moins ses quatre derniers termes, qui seront suffisants pour établir une comparaison importante entre les quantités algébriques de cette forme et les quantités numériques. Ces quatre termes sont ceux-ci,

$$52a^3 + 37a^2 + 15a^1 + 4a^0.$$

Faisons $a = 10$, nous aurons

$$52.10^3 + 37.10^2 + 15.10^1 + 4.10^0 \dots (A),$$

ou, ce qui revient au même,

$$52000 + 3700 + 150 + 4.$$

Additionnant ces quatre termes, nous obtiendrons enfin 55854, nombre équivalant à

$$5.10^4 + 5.10^3 + 8.10^2 + 5.10^1 + 4.10^0 \dots (B).$$

Ainsi donc les deux quantités numériques (A) et (B) ont la même valeur sous des formes différentes; les coefficients de la première sont composés, ceux de la seconde sont simples.

Mais on voit facilement que ces coefficients composés contiennent eux-mêmes des puissances de 10. Par exemple, le premier terme $52.10^3 = 50.10^3 + 2.10^3 = 5.10^1.10^3 + 2.10^3 = 5.10^4 + 2.10^3$.

En examinant ainsi successivement tous les termes de la quantité (A), depuis le dernier à droite jusqu'au premier à gauche, et les faisant refluer les uns sur les autres, quand cela sera nécessaire, on reconnaîtra bientôt que, pour tirer immédiatement (B) de (A), il suffit

d'écrire dans chaque terme de (A), outre la puissance de 10 qu'il contient, les unités seules de son coefficient, et d'ajouter les dizaines de ce même coefficient, comme si elles étaient des unités simples, au coefficient qui est à la gauche de celui-là, puis de continuer ainsi de terme en terme jusqu'au premier. Mais comme celui-ci a encore des dizaines à son coefficient, ces dizaines deviendront le coefficient d'une puissance plus haute d'une unité. Du reste, ce procédé peut facilement être généralisé.

111. Il résulte de là que si l'on multiplie entre elles deux quantités numériques de la forme de (B), n'ayant que des coefficients d'un seul chiffre, leur produit pourra cependant avoir des coefficients composés, tout comme celui de deux quantités algébriques du même genre, et qu'il ne faudra point, pour comparer ces produits et apercevoir les rapports qu'il peut y avoir entre l'un et l'autre, il ne faudra point, disons-nous, changer la forme du produit numérique, comme nous l'avons fait pour (A), puisqu'on ne pourrait pas faire un changement analogue dans le produit algébrique.

112. Appliquons cela à un exemple. Si nous multiplions $2a^2 + 4a^1 + 3a^0$ par $2a^1 + 7a^0$, nous aurons au produit

$$4a^3 + 22a^2 + 34a^1 + 21a^0.$$

Maintenant si nous faisons $a = 10$, le multiplicande deviendra $2.10^2 + 4.10^1 + 3.10^0$, et le multiplicateur sera $2.10^1 + 7.10^0$; effectuant la multiplication, nous trouverons pour produit

$$4.10^3 + 22.10^2 + 34.10^1 + 21.10^0 \dots (A').$$

Or, ce produit, sous cette forme, sera tout-à-fait comparable au produit algébrique; mais il ne le serait plus si nous lui donnions la forme qu'il peut recevoir par le procédé du n° 110, comme on le voit ici,

$$6.10^3 + 5.10^2 + 6.10^1 + 1.10^0 \dots (B').$$

Cependant ces deux produits (A') et (B') ont l'un et l'autre pour valeur 6561, ce qui est bien exact, puisque le multiplicande équivaut à 243, et le multiplicateur à 27.

* 113. Mais pour savoir plus généralement quand une quantité algébrique multipliée par une autre pourra donner des termes semblables, et quelles seront les conditions nécessaires pour que ces termes semblables se succèdent régulièrement, multiplions le bi

nome d'une seule lettre $a^m + a^n$ par le binôme de la même lettre $a^p + a^q$, nous aurons

$$a^m + a^n$$

$$a^p + a^q$$

$$a^{m+p} + a^{n+p} + a^{m+q} + a^{n+q}.$$

Si l'on supposait $m = n$, et $p = q$, les deux facteurs devant se réduire d'entrée et avant la multiplication, chacun à un seul terme, le produit n'en aurait qu'un seul, et il ne serait plus question de termes semblables.

Si l'on supposait séparément $m = n$ ou $p = q$, un des facteurs se réduisant d'entrée à un seul terme, le produit n'en aurait que deux qui ne pourraient être semblables.

Il faut donc que m diffère de n , et que p diffère de q .

Cela posé, l'exposant du premier terme du produit ou $m + p$, ne pourra être égal ni à l'exposant du second terme, parce que m n'est pas égal à n , ni à l'exposant du troisième, parce que p n'est pas égal à q ; mais il pourra être égal à l'exposant du quatrième ou à $n + q$; alors ces deux termes seront semblables entre eux, et ne le seront pas aux autres.

De même l'exposant du second terme du produit ou $n + p$, ne pourra être égal ni à l'exposant du premier parce que n n'est pas égal à m , ni à l'exposant du dernier parce que p n'est pas égal à q ; mais il pourra être égal à l'exposant du troisième ou à $m + q$; alors ces deux termes seront semblables entre eux, et ne le seront pas aux autres.

Cependant on ne pourra avoir en même temps le premier terme semblable au dernier, et le second semblable au troisième; car si l'on posait les deux équations $m + p = n + q$, et $m + q = n + p$, comme devant exister ensemble, en soustrayant des deux membres de la première n et p , et des deux membres de la seconde n et q , on aurait

$$m - n = q - p$$

$$m - n = p - q,$$

ce qui ne peut avoir lieu en même temps.

On ne peut d'ailleurs faire aucune autre supposition d'égalité entre les exposants des quatre termes du produit, car ceux des deux derniers ne peuvent être égaux à ceux des premiers que dans les

cas que nous venons d'indiquer, et ils ne peuvent être égaux entre eux, parce que m n'est pas égal à n .

Lors donc qu'on aura placé le multiplicande et le multiplicateur comme ils le sont dans notre exemple, si la somme des deux exposants de la première colonne égale celle des deux exposants de la seconde, ou si l'on a $m + p = n + q$, le premier et le dernier terme du produit seront semblables; mais ils ne se trouveront pas l'un sous l'autre lorsqu'on écrira en seconde ligne le produit du multiplicande par le second terme du multiplicateur, qu'on le recule ou non d'une place vers la droite.

Si au lieu de cela les exposants pris en croix donnent deux sommes égales, ou si l'on a $m + q = n + p$, le second et le troisième terme du produit seront semblables, et ils se trouveront placés l'un sous l'autre lorsqu'on écrira en seconde ligne le produit du multiplicande par le second terme du multiplicateur, et qu'on le reculera d'une place vers la droite.

Du reste, le premier cas rentrera dans le second lorsqu'on renversera l'un des deux facteurs.

On pourra vérifier tout cela sur quelque exemple particulier, et en multipliant si l'on veut $a^4 + a^2$, d'abord par $a^3 + a^5$, puis par $a^5 + a^3$.

Maintenant l'on voit bien que plus il y aura dans les facteurs d'un produit de termes qui, comparés quatre à quatre, deux dans l'un et deux dans l'autre, offriront les relations que nous venons d'énoncer, plus il y aura de termes semblables au produit. Et si l'on introduit dans chaque terme de ces facteurs une seconde lettre b , cela ne changera rien aux relations que doivent avoir entre eux les a pour donner des termes semblables; mais ces relations devront aussi être les mêmes pour les b . L'on en dira autant pour une troisième lettre c , pour une quatrième d , et ainsi de suite.

Il faudra donc en général, pour avoir des termes semblables dans la multiplication des polynomes, qu'il y ait au moins deux termes dans le multiplicande, et deux dans le multiplicateur, qui renferment les mêmes lettres, et que les exposants d'une même lettre soient tels dans les quatre termes, que l'on ait

$$\begin{aligned} m - n &= p - q \\ \text{ou } m - n &= q - p, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la différence des deux exposants dans le multiplicande soit égale à la différence des deux exposants dans le multiplicateur.

Mais pour que ces termes semblables viennent naturellement se placer les uns sous les autres, il faudra que l'on ait décidément

$$m - n = p - q,$$

soit que m surpasse n , et que p surpasse q , soit que le contraire ait lieu.

114. Ainsi donc, s'il y a plusieurs termes dans le multiplicande, et plusieurs dans le multiplicateur, qui tous renferment les mêmes lettres, et que les exposants de chaque lettre prise à part forment dans le multiplicande et le multiplicateur deux progressions excédentes, qui soient toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes avec la même raison, on aura des termes semblables qui viendront se placer les uns sous les autres quand on reculera d'une place les produits secondaires (n^{os} 73, 74, 93, 94, 95).

Sur quoi l'on observera que lors même que la progression des exposants serait croissante dans les deux facteurs pour telle ou telle lettre, elle pourra être décroissante dans les deux pour telle ou telle autre lettre, pourvu que les conditions que nous venons d'énoncer aient lieu.

115. Lorsqu'on arrange de cette manière les termes d'un polynôme algébrique, on dit qu'on l'ordonne; et quoiqu'il ne soit pas absolument nécessaire d'ordonner les quantités à multiplier, puisqu'on peut sans cela chercher dans les produits partiels les termes semblables pour les réduire; cependant il est plus commode d'avoir ces termes placés les uns sous les autres, et c'est ce qui arrive quand on a ordonné.

Si l'on ne peut, dans tous les cas, obtenir la régularité des quantités numériques, il faudra du moins en approcher autant que possible.

L'énoncé suivant nous servira de règle pour arriver à ce but, et on pourra le considérer aussi comme une définition du mot ORDONNER.

On choisira dans le multiplicande et le multiplicateur une lettre qui se trouve dans les deux, et que l'on prendra à volonté; on écrira à la première place dans chaque quantité proposée, le terme de cette

quantité, dans lequel la lettre choisie aura le plus haut exposant; on écrira à la seconde place le terme de ceux qui resteront où la même lettre aura le plus haut exposant, et ainsi de suite.

Lorsqu'il se trouvera plusieurs termes qui renfermeront la même puissance de la lettre choisie, on les ordonnera entre eux relativement à une autre lettre.

116. En combinant tout ce que nous venons de dire avec ce que nous avons déjà vu au n° 98, on peut trouver la règle la plus commode pour multiplier un polynome algébrique par un autre.

Il faut d'abord ordonner, autant que possible, les quantités proposées. Il faut ensuite multiplier successivement de la gauche à la droite tous les termes du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et poser ce premier produit partiel; puis multiplier encore tous les termes du multiplicande par le second terme du multiplicateur, et placer ce second produit partiel sous le premier, en le reculant d'une ou de plusieurs places, de manière à écrire, autant que cela se peut, les termes semblables dans les mêmes colonnes. Il faut continuer de même en multipliant toujours tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et faire enfin la réduction des différents produits partiels pour avoir le produit total.

117. Appliquons maintenant cette règle à quelques exemples, et proposons-nous d'abord de multiplier $a^2b + 3a^4b^3 - 5a^5b^2$ par $7a^4b^4 + 2a^5b^5$. Voici le tableau de l'opération :

$$\begin{array}{r}
 3a^4b^3 - 5a^5b^2 + a^2b \\
 2a^5b^5 + 7a^4b^4 \\
 \hline
 6a^9b^8 - 10a^8b^7 + 2a^7b^6 \\
 \quad + 21a^8b^7 - 35a^7b^6 + 7a^6b^5 \\
 \hline
 6a^9b^8 + 11a^8b^7 - 33a^7b^6 + 7a^6b^5.
 \end{array}$$

On a commencé par ordonner les deux quantités (n° 115). On a ensuite multiplié de gauche à droite tout le multiplicande par le premier terme du multiplicateur, en disant : + par + fait +; 2 fois 3 font 6; a^4b^3 par a^5b^5 fait a^9b^8 . Puis — par + fait —; 2 fois 5 font 10; a^5b^2 par a^5b^5 fait a^8b^7 . Puis encore + par + fait +; 2 fois 1 font 2, a^2b par a^5b^5 fait a^7b^6 .

Après avoir trouvé le premier produit partiel, on a calculé de

même le second, qu'on a écrit sous le premier en le reculant d'une place.

On a fait enfin la réduction des termes semblables dans la seconde et dans la troisième colonne, en disant (n° 72), $-10a^8b^7 + 21a^8b^7 = +11a^8b^7$, puis $+2a^7b^6 - 35a^7b^6 = -33a^7b^6$. Ajoutant à cela les termes extrêmes qui n'avaient point de semblables, on a eu le produit total (Voyez le n° 105).

Voici plusieurs autres exemples que nous nous contenterons de figurer :

$$\begin{array}{r}
 5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 \\
 a^3 - 4a^2b + 2b^3 \\
 \hline
 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\
 -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\
 +10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\
 \hline
 5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 \hline
 a^6 + 3a^5b + 3a^4b^2 + a^3b^3 \\
 -3a^5b - 9a^4b^2 - 9a^3b^3 - 3a^2b^4 \\
 +3a^4b^2 + 9a^3b^3 + 9a^2b^4 + 3ab^5 \\
 -a^3b^3 - 3a^2b^4 - 3ab^5 - b^6 \\
 \hline
 a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
 \hline
 a^6 + 2a^5b + 2a^4b^2 + a^3b^3 \\
 -2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 - 2a^2b^4 \\
 +2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 \\
 -a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6 \\
 \hline
 a^6 - b^6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3 \\
 - 25a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4 \\
 + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\
 \hline
 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5.
 \end{array}$$

118. L'exemple suivant, quelque simple qu'il soit, mérite d'être remarqué :

$$a + b$$

$$a - b$$

$$a^2 + ab$$

$$- ab - b^2$$

$$a^2 - b^2.$$

Il nous apprend qu'en multipliant la somme de deux nombres par leur différence, on a au produit la différence des carrés de ces mêmes nombres.

Soient les deux nombres 8 et 5 : leur somme 13, multipliée par leur différence 3, donne 39. Or, le carré de 8 est 64, celui de 5 est 25, et la différence de ces carrés est encore 39.

Ce principe est d'un grand usage.

119. Si on nous demandait de multiplier le polynome $ce + 3a^2 - 4bd$ par le polynome $2bd - 7ce - 4a^2$, nous les ordonnerions, autant que possible, d'abord pour la lettre a , et ensuite pour la lettre b (n° 115); puis faisant l'opération, nous aurions le tableau que voici :

$$3a^2 - 4bd + ce$$

$$- 4a^2 + 2bd + 7ce$$

$$- 12a^4 + 16a^2bd - 4a^2ce$$

$$+ 6a^2bd - 8b^2d^2 + 2bcde$$

$$- 21a^2ce + 28bcde - 7c^2e^2$$

$$- 12a^4 + 22a^2bd - 25a^2ce + 30bcde - 7c^2e^2$$

$$- 8b^2d^2.$$

Sur quoi nous remarquerions qu'il y a dans la troisième colonne un mélange de termes dissemblables. Ce mélange n'aurait point lieu si on donnait au multiplicande et au multiplicateur les formes suivantes (n°s 70, 1°, 4°, 88, 102, 103, etc.):

$$3a^2 - (4bd - ce) a^0 \text{ et } -4a^2 + (2bd - 7ce) a^0.$$

Mais le calcul n'en serait que plus difficile.

120. Proposons-nous enfin pour dernier exemple une multiplication qui ne fournisse aucun terme semblable proprement dit. Prenons pour multiplicande le polynome $3a^2 - 4b^3 + c^5$, et pour multiplicateur le binome $2m - 5n$:

$$\begin{array}{r}
 3a^2 - 4b^3 + c^5 \\
 2m - 5n \\
 \hline
 6a^2m - 8b^3m + 2c^5m \\
 -15a^2n + 20b^3n - 5c^5n \\
 \hline
 6a^2m - 15a^2n - 8b^3m + 20b^3n + 2c^5m - 5c^5n.
 \end{array}$$

Les quantités proposées n'étant pas, rigoureusement parlant, susceptibles d'être ordonnées, on les a écrites telles qu'elles étaient. On a placé le second produit partiel sous le premier, sans le reculer, et on a fait la somme des deux pour avoir le produit total. Il est évident du reste qu'on aurait pu écrire immédiatement le second produit partiel à la suite du premier.

Cependant si on voulait donner aux deux quantités précédentes la forme de quantités ordonnées, on pourrait les écrire ainsi (Voyez le n° précédent) :

$$3a^2 - (4b^3 - c^5) a^0 \text{ et } (2m - 5n) a^0.$$

Ce qui prouve du moins que le cas où les quantités sont susceptibles d'être ordonnées est plus général que l'autre.

De la division des polynomes.

121. Dans la division, on cherche toujours un quotient tel que, multiplié par le diviseur, il redonne le dividende. Il faut donc, pour que la division soit possible, que le dividende soit un produit, et que le diviseur soit un des facteurs de ce produit. Or, comme cela peut avoir lieu sans que l'on s'en doute, on doit en général essayer la division. Mais, si elle ne s'effectue pas, on se contente alors de l'indiquer sous la forme fractionnaire (nos 70 4° et 82).

Cela posé, pour rechercher quelle est la marche à suivre dans la division d'un polynome par un autre, il convient de prendre des exemples qui permettent décidément de terminer l'opération. C'est

pourquoi nous nous contenterons de faire dans ce chapitre les preuves de quelques-unes de nos multiplications précédentes. Et du reste, c'est en observant ce qui se passe dans la multiplication que nous trouverons la route à suivre pour exécuter l'opération contraire.

122. Le cas le plus général et celui auquel les autres cas peuvent se rattacher plus ou moins, c'est celui où les quantités sont susceptibles d'être ordonnées (n° 120). Or, nous pouvons voir dans les multiplications des n°s 105, 109 et 117,

1°. Que les termes du produit total proviennent, pour l'ordinaire, de la réduction des termes semblables que donnent les produits partiels ;

2°. Qu'il y a toujours exception à cette règle pour le premier et le dernier des termes du produit total ; car, pour obtenir ces deux termes, on n'a point de réduction à faire, puisqu'on recule d'une ou de plusieurs places les différents produits partiels, en les écrivant les uns sous les autres : en sorte qu'il n'y a point dans ces produits partiels de terme écrit au-dessous du premier, et point au-dessus du dernier ;

3°. Que le premier terme du produit résulte immédiatement de la multiplication du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et que le dernier terme de ce même produit résulte aussi immédiatement de la multiplication du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

Il suit évidemment de là que, si l'on prend un produit de ce genre pour dividende, et un de ses facteurs pour diviseur, on sera sûr de trouver un des termes du quotient en divisant le premier terme de ce dividende par le premier du diviseur, ou le dernier par le dernier. Alors, si on multiplie tout le diviseur par ce terme trouvé du quotient, et qu'on retranche du dividende proposé le résultat de cette opération, il est clair que le reste qu'on obtiendra sera le produit du diviseur par les autres termes du quotient. En divisant donc le premier terme de ce reste par le premier terme du diviseur, ou le dernier par le dernier, on aura un second terme du quotient ; et ainsi de suite.

123. Ainsi donc, voici la marche à suivre pour diviser un polynome par un autre :

Il faut d'abord ordonner, autant que possible, les quantités proposées, d'après la règle et les observations du n° 115, en y substituant les mots dividende et diviseur aux mots multiplicande et multiplicateur. Il faut ensuite diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur pour avoir le premier terme du quotient, puis multiplier tout le diviseur par ce premier terme du quotient, et retrancher du dividende le produit de cette multiplication. Le reste étant ainsi trouvé, il faut diviser son premier terme par le premier terme du diviseur pour avoir le second terme du quotient, puis multiplier tout le diviseur par ce second terme du quotient, et retrancher du premier reste le produit de cette seconde multiplication. Il faut continuer d'opérer de la même manière jusqu'à ce qu'on ait trouvé tout le quotient.

124. Faisons maintenant, au moyen de cette règle, les preuves de quelques-uns des exemples de multiplication du n° 117.

$$\begin{array}{r}
 5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\
 - 5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2 \\
 \hline
 - 20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 \\
 + 20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3 \\
 \hline
 + 10a^4b^5 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\
 - 10a^4b^5 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5 \\
 \hline
 0.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 \\
 a^3 - 4a^2b + 2b^3 \\
 \hline
 \end{array}$$

Après avoir ordonné les deux quantités pour la lettre a , on a placé le diviseur à la droite du dividende sur une même ligne. Divisant alors $5a^7$ par $5a^4$ (n° 123), on a dit: $+$ par $+$ fait $+$ (n° 78); puis $5:5=1$ (n° 80); puis encore $a^7:a^4=a^3$; $a^7-a^4=a^3$ (n° 86). On a donc écrit $+1.a^3$, ou simplement a^3 sous le diviseur, et comme premier terme du quotient.

On a multiplié ensuite tout le diviseur par ce premier terme du quotient, pour retrancher du dividende le produit de cette multiplication (n° 123). Pour cela on a dit: $+$ par $+$ fait $+$; puis 1 fois 5 fait 5 ; puis encore a^4 par a^3 fait a^4+a^3 ou a^7 ; et l'on a eu $+5a^7$, qu'on a écrit avec un signe contraire sous le premier terme du dividende (n° 59, 123).

Dans la pratique, ce signe contraire, exigé par la règle de la soustraction, s'écrit immédiatement avant d'avoir formé le terme même: Après avoir dit + par + fait +, on ajoute ces mots, j'écris —, et l'on pose ce — sous le premier terme du dividende. On écrit ensuite le coefficient, et enfin les lettres avec leurs exposants.

En arrivant au terme suivant ou au second terme du diviseur, on dira donc dans cet exemple: — par + fait —, j'écris +; et l'on mettra ce + sous le second terme du dividende. On continuera en disant, 1 fois 2 fait 2, et l'on écrira aussi ce coefficient 2 sous le second terme du dividende. Enfin, on prononcera a^3b par a^3 fait a^6b , qu'on placera encore sous le second terme du dividende.

D'après ce détail, on comprendra facilement tout le reste de l'opération. Et quand elle sera finie, comme le montre le tableau, on pourra diviser aussi le dividende par le quotient pour retrouver le diviseur.

$$\begin{array}{r}
 10a^3b^2 - 4a^2b^3 + 8ab^4 \\
 - 10a^3b^2 + 4a^2b^3 - 8ab^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a^6 + 0.a^5b - 3a^4b^2 + 0.a^3b^3 + 3a^2b^4 + 0.ab^5 - b^6 \\
 - a^6 - 3a^5b - 3a^4b^2 - a^3b^3 \\
 - 3a^5b - 6a^4b^3 - a^3b^2 + 3a^2b^4 + 0.ab^5 - b^6 \\
 + 3a^5b + 9a^4b^2 + 9a^3b^3 + 3a^2b^4 \\
 + 3a^4b^2 + 8a^3b^3 + 6a^2b^4 + 0.ab^5 - b^6 \\
 - 3a^4b^2 - 9a^3b^3 - 9a^2b^4 - 3ab^5 \\
 - a^3b^5 - 3a^2b^4 - 3ab^5 - b^6 \\
 + a^3b^5 + 3a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 \\
 \hline
 0.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a^5 + 3a^2b + 3ab^2 + b^5 \\
 a^5 - 3a^2b + 3ab^2 + b^5
 \end{array}$$

Dans cet exemple, on a remis les puissances d' a et de b qui manquaient dans le dividende, mais en leur donnant pour coefficient 0, d'après les principes des n^{os} 106 à 109. Nous allons actuellement reprendre le même exemple sans user de la même précaution; il faudra alors chercher les termes semblables pour en faire la réduction; car ils ne seront plus tous les uns sous les autres.

On pourra diviser aussi le dividende par le quotient pour retrouver le diviseur.

$$\begin{array}{r}
 a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 \\
 - a^6 - 3a^5b - 3a^4b^2 - a^3b^3 \\
 \hline
 3a^5b - 6a^4b^2 - a^3b^3 + 3a^2b^4 - b^6 \\
 + 3a^5b + 9a^4b^2 + 9a^3b^3 + 3a^2b^4 \\
 \hline
 3a^4b^2 + 8a^3b^3 + 6a^2b^4 - b^6 \\
 - 3a^4b^2 - 9a^3b^3 - 9a^2b^4 - 3ab^5 \\
 \hline
 - a^3b^3 - 3a^2b^4 - 3ab^5 - b^6 \\
 + a^3b^3 + 3a^2b^4 + 3ab^5 + b^6 \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a^6 - b^6 \dots\dots\dots \\
 -a^6 - 2a^5b - 2a^4b^2 - a^3b^3 \\
 \hline
 -2a^5b - 2a^4b^2 - a^3b^3 - b^6 \\
 + 2a^5b + 4a^4b^2 + 4a^3b^3 + 2a^2b^4 \\
 \hline
 2a^4b^2 + 3a^3b^3 + 2a^2b^4 - b^6 \\
 -2a^4b^2 - 4a^3b^3 - 4a^2b^4 - 2ab^5 \\
 \hline
 -a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6 \\
 + a^3b^3 + 2a^2b^4 + 2ab^5 + b^6 \\
 \hline
 0.
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \end{array} \right.$$

On pourra diviser aussi le dividende par le quotient, pour retrouver le diviseur.

125. L'exemple du n° 119 a ceci de remarquable, c'est que son produit étant ordonné pour une quelconque des cinq lettres qu'il contient, on trouve toujours plusieurs termes qui offrent une même puissance de la lettre choisie. Pour faire la division, on pourra, en ordonnant ces termes-là entre eux, relativement à une autre lettre (n° 115), les placer les uns sous les autres dans une même colonne verticale, comme on le voit ici, ce qui offre quelques avantages :

$$\begin{array}{r}
 \left\{ \begin{array}{l} - 12a^4 + 22a^2bd - 8b^2d^2 + 5obcde - 7c^2e^2 \\ - 25a^2ce \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} - 4a^2 + 2bd - 7ce \\ + 3a^2 - 4bd + ce \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} + 12a^4 - 6a^2bd \\ + 21a^2ce \end{array} \right\} 1^{\text{er}} \text{ produit soustrait.} \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l} + 16a^2bd - 8b^2d^2 + 5obcde - 7c^2e^2 \\ - 4a^2ce \end{array} \right\} 1^{\text{er}} \text{ reste.} \\
 \hline
 - 16a^2bd + 8b^2d^2 - 28bcde, 2^{\text{me}} \text{ produit soustrait.} \\
 \hline
 \begin{array}{r} - 4a^2ce \quad + 2bcde - 7c^2e^2, 2^{\text{d}} \text{ reste.} \\ + 4a^2ce \quad - 2bcde + 7c^2e^2, 3^{\text{me}} \text{ produit soustrait.} \end{array} \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Le dividende occupe les deux premières lignes à gauche. On a divisé $-12a^4$ par $-4a^2$, on a eu $+3a^2$; on a multiplié tout le diviseur par $+3a^2$, et on a soustrait du dividende ce premier produit.

Le premier reste occupe la cinquième et la sixième lignes à gauche. On a divisé $16a^2bd$ par $-4a^2$, on a eu $-4bd$; on a multiplié tout le diviseur par $-4bd$, et on a soustrait du premier reste ce second produit.

Le second reste occupe la huitième ligne à gauche. On a divisé $-4a^2ce$ par $-4a^2$, on a eu $+ce$; on a multiplié tout le diviseur par $+ce$, et on a soustrait du second reste ce troisième produit.

Comme il n'est rien resté, l'opération s'est trouvée finie et le quotient exact.

On pourra diviser aussi le dividende par le quotient pour retrouver le diviseur.

Voici encore une division du même genre tirée de Bosut; nous nous contenterons de la figurer :

$$\begin{array}{r}
 \left\{ \begin{array}{l} 10a^5 + 11a^2b + 3ab^2 - 5b^2c + 15bc^3 \\ - 15a^2c - 19abc \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} 5a^2 + 3ab - 5bc \\ 2a + b - 3c \end{array} \right. \\
 - 10a^5 - 6a^2b + 10abc \dots 1^{\text{er}} \text{ produit soustr.} \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l} + 5a^2b + 3ab^2 - 5b^2c + 15bc^3 \\ - 15a^2c - 19abc \end{array} \right\} 1^{\text{er}} \text{ reste.} \\
 - 5a^2b - 3ab^2 + 5b^2c \dots 2^{\text{d}} \text{ produit soustr.} \\
 \hline
 - 15a^2c - 19abc + 15bc^3 \dots 2^{\text{d}} \text{ reste.} \\
 + 15a^2c + 19abc - 15bc^3 \dots 3^{\text{me}} \text{ prod. soustr.} \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

On pourra diviser aussi le dividende par le quotient pour retrouver le diviseur.

126. Nous terminerons ces exemples de division par la preuve de la multiplication du n° 120; et ordonnant pour la lettre m , nous ferons l'opération comme dans le numéro précédent.

$$\begin{array}{r}
 \left\{ \begin{array}{l} 6a^2m - 15a^2n \\ - 8b^3m + 20b^3n \\ + 2c^5m - 5c^5n \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} 2m - 5n \\ \hline 3a^2 - 4b^3 + c^5 \end{array} \right. \\
 - 6a^2m + 15a^2n \dots 1^{\text{er}} \text{ prod. soustr.} \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l} - 8b^3m + 20b^3n \\ + 2c^5m - 5c^5n \end{array} \right\} 1^{\text{er}} \text{ reste.} \\
 + 8b^3m - 20b^3n \dots 2^{\text{me}} \text{ prod. soustrait.} \\
 \hline
 + 2c^5m - 5c^5n \dots 2^{\text{d}} \text{ reste.} \\
 - 2c^5m + 5c^5n \dots 3^{\text{me}} \text{ prod. soustrait.} \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

On pourra diviser aussi le dividende par le quotient, pour retrouver le diviseur.

Du reste, si dans cet exemple on n'eût pas ordonné, la forme de l'opération n'en eût été que plus simple, comme on peut le voir ici:

$$\begin{array}{r}
 6a^2m - 15a^2n - 8b^3m + 20b^3n + 2c^5m - 5c^5n \quad | \quad 2m - 5n \\
 - 6a^2m + 15a^2n \quad | \quad 3a^2 - 4b^3 + c^5 \\
 \hline
 - 8b^3m + 20b^3n + 2c^5m - 5c^5n \\
 + 8b^3m - 20b^3n \\
 \hline
 + 2c^5m - 5c^5n \\
 - 2c^5m + 5c^5n \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Quant aux divisions qui ne peuvent s'effectuer exactement et sans reste, on en trouvera des exemples dans le chapitre suivant, et surtout depuis le n° 136, jusqu'à la fin de ce même chapitre.

CHAPITRE IV.

Notions sur les séries qui naissent de la division.

127. Nous n'avons pas placé parmi nos divisions la preuve de la multiplication du n° 118, parce qu'elle devait nous conduire à quelque chose de plus général, comme nous allons le voir.

D'après cette multiplication, il est évident que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (n° 70), d'où il résulte que $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$. Mais les binômes $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$, etc. sont-ils aussi divisibles par $a - b$? Et quels sont les quotients de ces divisions? C'est ce qu'il faut examiner.

$$\begin{array}{r}
 a^3 - b^3 \\
 -a^3 + a^2b \\
 \hline
 a^2b - b^3 \\
 -a^2b + ab^2 \\
 \hline
 ab^2 - b^3 \\
 -ab^2 + b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \left|
 \begin{array}{r}
 a - b \\
 \hline
 a^2 + ab + b^2
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{array}{r}
 a^4 - b^4 \\
 -a^4 + a^3b \\
 \hline
 +a^3b - b^4 \\
 -a^3b + a^2b^2 \\
 \hline
 +a^2b^2 - b^4 \\
 -a^2b^2 + ab^3 \\
 \hline
 +ab^3 - b^4 \\
 -ab^3 + b^4 \\
 \hline
 0.
 \end{array}
 \quad
 \left|
 \begin{array}{r}
 a - b \\
 \hline
 a^3 + a^2b + ab^2 + b^3
 \end{array}
 \right.$$

Ainsi donc

$$\frac{a-b}{a-b} = 1$$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

On trouverait de même

$$\frac{a^5-b^5}{a-b} = a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$$

$$\frac{a^6-b^6}{a-b} = a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5.$$

Et l'analogie porterait à conclure que l'on doit avoir en général

(Formule A.)

$$\frac{a^m-b^m}{a-b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}.$$

Pour vérifier cela, nous multiplierons le quotient par le diviseur, afin de voir si nous retrouverons le dividende. Voici l'opération :

$$\begin{array}{r} a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1} \\ a - b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \dots + ab^{m-1} \\ - a^{m-1}b - a^{m-2}b^2 - \dots - ab^{m-1} - b^m \end{array}$$

$$a^m - b^m.$$

On observera qu'en multipliant par a le terme ab^{m-2} , qui donne a^2b^{m-2} , nous n'avons pas écrit ce produit, parce qu'il tombe dans la lacune indiquée par les points. De même, en multipliant par $-b$ le terme $a^{m-3}b^2$ qui donne $-a^{m-3}b^3$, nous n'avons pas écrit ce produit qui tombe aussi dans la lacune.

Mais on voit suffisamment par la marche de la multiplication, que chaque terme d'une des lignes est détruit par son correspondant dans

l'autre ligne, à l'exception du premier de la première ligne et du dernier de la seconde, qui n'ont point de correspondants.

128. Quand on exprime ainsi la valeur d'une quantité par une suite de termes qui se succèdent avec régularité, on dit qu'on *développe* cette quantité, et ce *développement* ou cette suite de termes s'appelle une *SÉRIE*, surtout lorsque par sa nature ce développement est susceptible de prendre autant de termes qu'on le veut, comme nous en aurons bientôt des exemples.

129. Du reste, si l'on suppose $b=a$ dans la formule A, le premier membre deviendra $\frac{a^m - a^m}{a - a} = \frac{0}{0}$, et le second deviendra ma^{m-1} ; car chaque terme sera a^{m-1} , et le nombre de ces termes est m , comme il est facile de le voir. On aura donc ici $\frac{0}{0} = ma^{m-1}$ (n° 89).

130. Si on voulait trouver le développement de $\frac{a^m + b^m}{a + b}$, on pourrait l'obtenir au moyen de la formule A; pour cela on remarquerait qu'en divisant $a^3 - b^3$ par $a - b$ ou $a^4 - b^4$ par $a - b$, etc. le second terme du dividende, c'est-à-dire $-b^3$ ou $-b^4$, etc. n'influe point sur le quotient, et se borne à détruire le dernier reste; en sorte qu'à part ce reste, on obtiendrait le même quotient si l'on se contentait de diviser a^3 par $a - b$ ou a^4 par $a - b$, etc.

131. Cela posé, pour déduire le développement de $\frac{a^m + b^m}{a + b}$ de la formule A, il suffit de supposer que b change de signe dans le diviseur, ce qui changera aussi le signe des termes qui contiennent les puissances impaires de b dans le quotient. On voit facilement d'après cela quels seront les termes du développement avant la lacune; et quant à ceux qui se trouvent après la lacune, et dans lesquels les puissances de b sont exprimées en m , il y aura deux cas à distinguer, celui où m sera pair et celui où m sera impair; m étant pair, l'exposant $m - 2$ sera pair, et l'exposant $m - 1$ sera impair, et le contraire aura lieu si m est impair.

On aura donc

(Formule B.)

$$\frac{a^m + b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 \dots \pm ab^{m-2} \mp b^{m-1},$$

le signe supérieur des deux derniers termes répondant au cas où m est pair, et l'inférieur au cas où m est impair.

Si on multiplie le quotient par le diviseur, on trouvera pour produit

$$a^m \mp b^m$$

Dans le cas donc où m sera pair, ce produit sera $a^m - b^m$, et différera du dividende de la quantité $2b^m$; car $a^m - b^m + 2b^m = a^m + b^m$. En d'autres termes, la division ne se fera pas exactement, et donnera pour reste $2b^m$.

Mais dans le cas où m sera impair, le produit $a^m + b^m$ sera égal au dividende, et la division se fera sans reste.

132. Il est facile de voir par ce que nous venons de dire, que la formule B pourra aussi représenter le développement $\frac{a^m - b^m}{a + b}$. Alors m étant pair par le produit, $a^m - b^m$ sera égal au dividende, et la division pourra se faire sans reste; mais m étant impair, le produit $a^m + b^m$ différera du dividende de la quantité $-2b^m$, car $a^m + b^m - 2b^m = a^m - b^m$.

133. La formule A en revanche représentera encore le développement de $\frac{a^m + b^m}{a - b}$; et le produit étant alors $a^m - b^m$, soit que m soit pair, soit que m soit impair, il différera dans l'un et dans l'autre cas du dividende $a^m + b^m$ de la quantité $2b^m$, car $a^m - b^m + 2b^m = a^m + b^m$, c'est-à-dire que la division ne pourra point se faire sans reste.

134. Il est bien rare du reste qu'un dividende donné contienne exactement un diviseur donné, et l'on n'a pas de moyen de s'assurer en général de la possibilité d'une division: il faut communément l'essayer, toutefois après avoir ordonné les quantités proposées: car sans cette précaution, telle quantité, exactement divisible par une autre, jetterait cependant dans des divisions qui ne finiraient point.

Nous venons de voir, par exemple, que $a^2 - b^2$ était divisible par $a + b$ (n° 127, 132); mais si l'on renverse le diviseur, et qu'on divise constamment le premier terme du dividende par le premier du diviseur, on obtient un quotient auquel on peut donner autant de termes que l'on veut.

Voici cette opération ,

$$\begin{array}{r|l}
 a^2 - b^2 & b + a \\
 - a^2 - \frac{a^5}{b} & \frac{a^2}{b} - \frac{a^5}{b^2} + \frac{a^4}{b^3} - \frac{a^5}{b^4} + etc. \\
 \hline
 - \frac{a^5}{b} - b^2 & \\
 + \frac{a^5}{b} + \frac{a^4}{b^2} & \\
 \hline
 + \frac{a^4}{b^2} - b^2 & \\
 - \frac{a^4}{b^2} - \frac{a^5}{b^3} & \\
 \hline
 - \frac{a^5}{b^3} - b^2 & \\
 + \frac{a^5}{b^3} + \frac{a^6}{b^4} & \\
 \hline
 + \frac{a^6}{b^4} - b^2 &
 \end{array}$$

Si l'on fait attention à la marche de cette division, on verra facilement qu'elle peut être continuée aussi long-temps qu'on voudra, et qu'elle donnera toujours un reste. On verra outre cela que la régularité du quotient donne la loi de sa formation, et permet d'indiquer la suite des termes dont il doit être formé, sans qu'il soit besoin de continuer la division.

Ce quotient paraît différer beaucoup du quotient exact, qui est $a - b$; mais il a la même valeur que lui lorsqu'on y joint le reste divisé par le diviseur. Pour le prouver, nous allons multiplier par $b + a$ les quatre termes écrits au quotient, et nous ajouterons au produit le reste $\frac{a^6}{b^4} - b^2$; nous retrouverons alors le dividende.

$$\begin{array}{r}
 \frac{a^2}{b} - \frac{a^3}{b^2} + \frac{a^4}{b^3} - \frac{a^5}{b^4} \\
 b + a \\
 \hline
 a^2 - \frac{a^3}{b} + \frac{a^4}{b^2} - \frac{a^5}{b^3} \\
 + \frac{a^3}{b} - \frac{a^4}{b^2} + \frac{a^5}{b^3} - \frac{a^6}{b^4} \\
 + \frac{a^6}{b^4} - b^2 \\
 \hline
 a^2 - b^2.
 \end{array}$$

135. La même chose arriverait dans les divisions numériques si l'on changeait l'ordre naturel des chiffres; c'est ce que l'on verra si l'on essaie de diviser $20 + 4$ par $2 + 10$.

136. On obtient aussi un quotient exprimé par autant de termes que l'on veut lorsqu'on essaie de diviser un nombre par un autre qui ne le divise pas exactement. Par exemple,

(Formule C).

$$\frac{a + b + c + \text{etc.}}{m + n + p + \text{etc.}} = \frac{a}{m} - \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3} - \text{etc.}$$

comme on le voit ici,

$$\begin{array}{r}
 a + b + c + \text{etc.} \quad \left| \begin{array}{l} m + n + p + \text{etc.} \\ \hline a - \frac{an}{m} + \frac{an^2}{m^3} - \text{etc.} \end{array} \right. \\
 - a - \frac{an}{m} - \frac{ap}{m} - \text{etc.} \\
 \hline
 - \frac{an}{m} - \frac{ap}{m} - \text{etc.} + b + c + \text{etc.} \\
 + \frac{an}{m} + \frac{an^2}{m^2} + \frac{anp}{m^2} + \text{etc.} \\
 \hline
 + \frac{an^2}{m^2} + \frac{anp}{m^2} + \text{etc.} - \frac{ap}{m} - \text{etc.} + b + c + \text{etc.} \\
 - \frac{an^2}{m^2} - \frac{an^3}{m^3} - \frac{an^2p}{m^3} - \text{etc.} \\
 \hline
 - \frac{an^3}{m^3} - \frac{an^2p}{m^3} - \text{etc.} + \frac{anp}{m^2} + \text{etc.} - \frac{ap}{m} - \text{etc.} + \\
 b + c + \text{etc.}
 \end{array}$$

Si l'on multiplie $\frac{a}{m} - \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3}$ par $m + n + p + \text{etc.}$ et qu'on ajoute au produit le dernier reste, on retrouve le dividende.

137. Si l'on fait $b=0$, $c=0$, $d=0$, *etc.* et de même $n=0$, $p=0$, $q=0$, *etc.* le quotient se réduit à $\frac{a}{m}$ et le reste $-\frac{an^3}{m^3} - \frac{an^2p}{m^3} - \text{etc.}$ s'anéantit; on a donc alors $\frac{a}{m} = \frac{a}{m}$; ce qui fait voir qu'on ne peut développer une fraction dont les deux termes sont monomes.

138. Si l'on conserve a, b, c, d , *etc.* et m , et qu'on se contente de faire $n=0$, $p=0$, $q=0$, *etc.* le quotient se réduira d'abord à $\frac{a}{m}$; mais le reste sera $b + c + d + \text{etc.}$ On pourra donc continuer la division, et l'on aura

$$\frac{a + b + c + \text{etc.}}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \text{etc.}$$

le quotient étant formé d'autant de termes qu'il y en aura au dividende, mais ne pouvant pas se pousser au-delà.

139. Si l'on conserve m, n, p , *etc.* et a , et que l'on fasse $b=0$, $c=0$, $d=0$, *etc.* on aura

$$\frac{a}{m + n + p + \text{etc.}} = \frac{a}{m} - \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3} - \text{etc.}$$

Le quotient sera donc le même que dans la formule générale, et il pourra contenir autant de termes qu'on voudra; mais on ne pourra négliger les restes. Ceux-ci seront aussi les mêmes que dans la première formule, excepté qu'ils ne contiendront plus les quantités b, c, d , *etc.*

140. Si l'on ne conserve que a, m et n , et qu'on fasse toutes les autres lettres égales à 0, on aura

(Formule D).

$$\frac{a}{m + n} = \frac{a}{m} - \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3} - \text{etc.}$$

Le quotient sera encore le même que dans la formule C, et pourra

aussi contenir autant de termes que l'on voudra ; mais il faudra en général tenir compte des restes.

En arrêtant le quotient au troisième terme, le reste sera, d'après la formule C, $-\frac{an^3}{m^5}$; car tous les autres termes de ce reste seront nuls parce qu'ils contiennent des lettres égales à 0.

* 141. Il se présente une objection contre ce que nous avons dit au n° 137, qu'on ne peut développer une fraction dont les deux termes sont monomes ; car, dira-t-on, on développe en arithmétique les fractions ordinaires en fractions décimales, du moins celles des fractions ordinaires qui ne peuvent être réduites en décimales que par approximation : on trouve alors une suite de termes qu'on peut continuer tant que l'on veut, et cela a lieu lors même que les deux termes de la fraction proposée n'ont chacun qu'un seul chiffre (*Arith.* n° 409). Mais il faut observer que ce développement n'est autre chose que la solution de ce problème : *Réduire par approximation une fraction proposée en dixièmes ; prendre le reste, qui sera nécessairement fractionnaire, et le réduire en centièmes ; prendre encore le reste, et le réduire en millièmes, et ainsi de suite.*

Ce problème en renferme, comme on voit, plusieurs autres ; mais ils peuvent tous se ramener à celui-ci : *Réduire par approximation une fraction proposée à un dénominateur donné.*

Or, pour réduire une fraction à un dénominateur donné, il faut que ce dénominateur soit différent de celui de la fraction proposée, sans quoi elle serait toute réduite. Ce dénominateur sera donc plus grand ou plus petit que celui de la fraction. Cela posé, représentons la fraction par $\frac{a}{\beta}$ et le dénominateur donné par m , on aura $\beta = m + n$, n étant la différence directe ou inverse des deux nombres β et m , selon que m sera plus petit ou plus grand que β .

La fraction proposée $\frac{a}{\beta}$ sera donc aussi représentée par $\frac{a}{m+n}$; d'où l'on voit que l'on peut toujours considérer comme binome le dénominateur des fractions ordinaires que l'on propose de réduire en décimales.

* 142. Si après avoir réduit par approximation $\frac{a}{m+n}$ au dénominateur m , on voulait réduire le reste au dénominateur m^2 , puis le nouveau reste au dénominateur m^3 , et ainsi de suite, il est clair qu'on n'aurait qu'à prendre la formule D, qui donnerait la solution de ce problème ; et si dans cette formule on faisait $m = 10$, on aurait le cas particulier des décimales.

* 143. On pourrait aussi résoudre ce problème et trouver la formule en raisonnant comme on le fait en arithmétique pour réduire les fractions en décimales (*Arith.* nos 392 et suivants).

Je veux diviser a par β , et trouver un quotient qui ait pour dénominateur m : je commence par multiplier a par m ou par $\beta - n = m$ (*); j'ai le dividende $a\beta - an$ qui est m fois trop grand ; faisant la division, j'ai le quotient a et le reste $-an$, l'un et l'autre m fois trop grands ; le véritable quotient est donc $\frac{a}{m}$, et le véritable reste $-\frac{an}{m}$.

Je veux diviser $-\frac{an}{m}$ par β , et trouver un quotient qui ait m^2 pour dénominateur : je commence par multiplier $-\frac{an}{m}$ par m^2 , et pour cela je supprime d'abord le dénominateur m , et je multiplie encore $-an$ par m ou par $\beta - n$; j'ai le dividende $-an\beta + an^2$, qui est m^2 fois trop grand ; faisant la division, j'ai le quotient $-an$ et le reste $+an^2$, l'un et l'autre m^2 fois trop grands ; le véritable quotient de cette seconde division est donc $-\frac{an}{m^2}$, et le véritable reste $+\frac{an^2}{m^2}$.

Je veux diviser $\frac{an^2}{m^2}$ par β , et trouver un quotient qui ait m^3 pour dénominateur : je commence par multiplier $\frac{an^2}{m^2}$ par m^3 , et pour cela je supprime d'abord le dénominateur m^2 , et je multiplie encore an^2 par m ou par $\beta - n$; j'ai le dividende $an^2\beta - an^3$, qui

(*) Nous savons que $\beta = m + n$; retranchant n des deux membres de l'équation, nous aurons $\beta - n = m$.

est m^3 fois trop grand; faisant la division, j'ai le quotient an^2 et le reste $-an^3$, l'un et l'autre m^3 fois trop grands; le véritable quotient de cette troisième division est donc $\frac{an^2}{m^3}$, et le véritable reste $-\frac{an^3}{m^3}$.

En continuant de même, et réunissant les différents quotients trouvés, on aura la formule D.

* 144. Si dans cette formule D, on fait $m = 10$, on trouvera

$$\frac{a}{10 + n} = \frac{a}{10} - \frac{an}{100} + \frac{an^2}{1000} - \frac{an^3}{10000} + \text{etc.}$$

$$\text{ou } \frac{a}{10 + n} = a \left(\frac{1}{10} - \frac{n}{100} + \frac{n^2}{1000} - \text{etc.} \right)$$

formule au moyen de laquelle on pourra réduire par approximation une fraction ordinaire en fraction décimale (n° 142), n étant un nombre direct ou inverse, suivant que le dénominateur de la fraction proposée sera plus grand ou plus petit que 10.

Il conviendra du reste de préparer la fraction proposée de manière à rendre n le plus petit possible, c'est-à-dire à faire que le dénominateur de cette fraction diffère aussi peu qu'on le pourra du nombre 10.

Si l'on propose, par exemple, $\frac{1}{5}$, on fera $\frac{1}{5} = \frac{3}{9}$, et l'on aura $a = 3$ et $n = -1$, ce qui donnera $\frac{1}{5} = \frac{3}{9} = 3 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \text{etc.} \right) = 0.3333\dots$

On verra aussi par là que $\frac{2}{3} = 0.6666\dots$, que $\frac{1}{9} = 0.1111\dots$, que $\frac{2}{9} = 0.2222\dots$, etc.

Si l'on propose $\frac{1}{11}$, on aura $a = 1$ et $n = 1$, d'où $\frac{1}{11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10000} + \text{etc.} = \frac{9}{100} + \frac{9}{10000} + \text{etc.} = 0.090909\dots$

Si l'on propose $\frac{1}{6}$, on observera que $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 0.3333\dots = 0.1666\dots$

Du reste, cette formule ne sera pas en général aussi commode dans la pratique que le procédé arithmétique ordinaire, et nous ne l'avons donnée que pour faire voir la liaison qui existe entre les calculs généraux et les calculs particuliers. Nous proposerons cependant de réduire encore par ce moyen $\frac{1}{7}$ en décimales.

Ici l'on a $a = 1$, et $n = -3$; ce qui donne $\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{27}{10000} + \frac{81}{100000} + \text{etc.}$

Ces termes peuvent s'écrire en colonne, en observant que le dernier chiffre de chaque numérateur doit être plus reculé d'une place vers la droite que le dernier chiffre du numérateur précédent; on aura ainsi

$$\frac{1}{7} = 0.1$$

03

09

27

81

243

729

2187

6561

19683

59049

177147

531441

1594323

4782969

ect. etc.

$$\frac{1}{7} = 0.142857140807299$$

etc. etc.

Mais en observant qu'après le sixième chiffre les deux premiers reviennent, sans pouvoir être modifiés par les nombres qu'on devrait continuer d'ajouter, on en conclura que ces nombres ramèneraient aussi le troisième chiffre et les suivants jusqu'au sixième, pour en former une période; on écrira donc

$$\frac{1}{7} = 0.142857\ 142857\ 142857\ \text{etc.}$$

* 145. Si dans cet exemple, ainsi que dans d'autres que nous avons déjà vus ou qui pourraient se présenter encore, la formule ne donne pas immédiatement chaque chiffre du quotient, c'est qu'en opérant généralement comme nous l'avons fait au n° 143, les quotients partiels que l'on obtient ne peuvent pas répondre dans tous les cas aux quotients partiels que l'on trouve lorsqu'on divise des quantités numériques.

Par exemple, en divisant $a\beta - an$ par β , nous avons eu pour quotient a ; mais si l'on fait $a = 1$, $\beta = 11$ et $n = 1$, comme il le faut lorsqu'on veut réduire $\frac{1}{11}$ en décimales, on aura $a\beta - an = 10$, qui divisé par 11 donnera 0, au lieu de 1 qu'indique le quotient général a .

Par exemple encore, en divisant $-an\beta + an^2$ par β , nous avons eu pour quotient $-an$; mais si l'on fait $a = 1$, $\beta = 7$ et $n = -3$, comme il le faut lorsqu'on veut réduire $\frac{1}{7}$ en décimales, on aura $-an\beta + an^2 = 30$, qui divisé par 7 donnera 4, au lieu de 3 qu'indique le quotient général $-an$.

* 146. Si l'on suppose qu'on opère sur des quantités numériques pour réduire une fraction donnée $\frac{a}{\beta}$ ou $\frac{a}{m+n}$ à un dénominateur donné m' , le reste au dénominateur m^2 , et ainsi de suite (n° 142), qu'on raisonne comme au n° 143, et qu'en prenant dans chaque division partielle le quotient entier le plus exact possible, sans qu'il pêche jamais par excès, on représente ces quotients successifs par $q, q', q'',$ etc. on aura un résultat de cette forme

$$\frac{a}{\beta} = \frac{q}{m} + \frac{q'}{m^2} + \frac{q''}{m^3} + \frac{q'''}{m^4} + \text{etc.}$$

Si l'on fait $m = 10$, on aura la réduction de $\frac{a}{\beta}$ en décimales; et si l'on fait m égal à 2, ou à 3, ou à 12, etc. on aura la réduction de $\frac{a}{\beta}$ en fractions binaires, ternaires, duodécimales, etc.

147. Si dans la formule D on fait $a = m$, elle devient

(Formule E).

$$\frac{m}{m+n} = 1 - \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^3}{m^3} + \frac{n^4}{m^4} - \text{etc.}$$

148. Si dans celle-ci on fait $n = 1$, on a

(Formule F).

$$\frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} - \text{etc.}$$

149. Si l'on y fait au contraire $n = -1$, on a

(Formule G).

$$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \text{etc.}$$

150. Si dans la formule D, on fait $a = n$ et $m = 1$, on a

$$\frac{n}{1+n} = n - n^2 + n^3 - n^4 + n^5 - \text{etc.}$$

On a donc aussi :

(Formule H).

$$\frac{m}{1+m} = m - m^2 + m^3 - m^4 + m^5 - \text{etc.}$$

151. Si dans la formule D, on fait $a = n$ et $m = -1$, on a

$$\frac{n}{-1+n} = -n - n^2 - n^3 - n^4 - n^5 - \text{etc.}$$

On a donc aussi

(Formule I).

$$\frac{m}{-1+m} = -m - m^2 - m^3 - m^4 - \text{etc.}$$

152. Rapprochant ces quatre dernières formules

$$\frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \text{etc.} \dots \dots \dots (\text{F}),$$

$$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{etc.} \dots \dots \dots (\text{G}),$$

$$\frac{m}{1+m} = m - m^2 + m^3 - m^4 + m^5 - \text{etc.} (\text{H}),$$

$$\frac{m}{-1+m} = -m - m^2 - m^3 - \text{etc.} \dots \dots \dots (\text{I}),$$

on remarquera d'abord que, quoique la première fraction $\frac{m}{m+1}$ soit égale à la troisième $\frac{m}{1+m}$, et que la seconde $\frac{m}{m-1}$ soit égaleà la quatrième $\frac{m}{-1+m}$, les développements de ces quantités égales

sont bien différents; mais on ne perdra pas de vue qu'ils ne peuvent être égaux aux quantités mêmes qu'autant que l'on y ajoute le reste divisé par le diviseur.

Si l'on arrête le quotient après le troisième terme, le reste se déterminera facilement au moyen du reste $-\frac{an^3}{m^3}$ de la formule D, en donnant aux lettres a , n et m , les valeurs qu'elles devront avoir.

On peut aussi trouver ces restes en divisant immédiatement les dividendes de chacune de nos fractions $\frac{m}{m+1}$, $\frac{m}{m-1}$, etc. par leurs diviseurs, comme nous l'avons fait pour la formule C; et si l'on donne un peu d'attention à la manière dont les quotients partiels naissent, ainsi que les restes, on pourra aisément savoir d'avance ce que devront être ceux-ci après tel ou tel terme du quotient:

153. Il est évident que si m est plus grand que 1 dans les séries du n° précédent, les termes des deux premières iront sans cesse en diminuant, tandis que ceux des deux dernières iront sans cesse en augmentant, et que le contraire aura lieu si $m < 1$.

On nomme *séries convergentes* celles dont les termes deviennent de plus en plus petits, et *séries divergentes* celles dont les termes deviennent de plus en plus grands.

154. Plus on prend de termes dans une série convergente, plus on approche de la valeur de la fraction qui par son développement a donné la série: car ces termes ne vont en diminuant que parce que les dividendes partiels ou les restes vont en diminuant; en sorte que plus on prend de termes, plus la différence que l'on néglige est petite.

Chacune de ces séries donne donc par approximation la valeur de la fraction dont elle dérive, et cette fraction est considérée comme la *limite* vers laquelle tend la série, sans jamais pouvoir y arriver.

L'approximation devient utile lorsque, comme il arrive souvent, on connaît la série sans connaître la fraction, et qu'il importe de trouver la valeur du moins approchée de celle-ci.

Ce problème, qui est celui de la *sommation des séries*, et qui est l'inverse de celui que nous venons de résoudre dans ce chapitre, demande trop de connaissances pour que nous nous y arrêtions dans cet ouvrage.

155. Plus on prend de termes dans une série divergente, plus on

s'éloigne de la valeur de la fraction qui par son développement a donné la série ; car ces termes ne vont en augmentant que parce que les dividendes partiels ou les restes vont en augmentant : en sorte que plus on prend de termes, plus la différence que l'on néglige est grande.

Dans ce cas, comme dans l'autre, mais surtout dans celui-ci, on n'a la valeur exacte de la fraction par son développement : qu'en arrêtant la série à un terme quelconque, et en lui ajoutant le reste de la division divisé par le diviseur.

Mais comme une même fraction peut donner naissance à une série divergente et à une série convergente (n° 152), l'art consiste, lorsqu'on veut *sommer* une série divergente, à trouver la série convergente qui dépend de la même fraction.

156. Pour donner quelques exemples de ces différents cas, qu'on suppose d'abord $m = 2$, la formule F donnera $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \text{etc.}$

En prenant le premier terme, les deux premiers, les trois premiers, etc. on aura des valeurs tantôt plus grandes, tantôt plus petites que la fraction $\frac{2}{3}$, mais de plus en plus approchées.

La formule H en revanche donnera $\frac{2}{3} = 2 - 4 + 8 - 16 + \text{etc.}$ et les valeurs du premier terme, des deux premiers, des trois premiers, etc. s'écarteront toujours plus de la véritable valeur de la fraction $\frac{2}{3}$.

La formule G et la formule I donneront dans la même supposition

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$$

$$2 = -2 - 4 - 8 - 16 - \text{etc.}$$

Ce dernier résultat est aussi absurde que le second ; mais si, dans l'un et dans l'autre, on tient compte des restes, tout rentre dans l'ordre, comme on pourra le vérifier (n° 152).

Si l'on fait $m = \frac{1}{2}$, les formules F et H donnent

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

et les formules G et I donnent

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$$

$$-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \text{etc.}$$

résultats dont deux sont manifestement absurdes, et sur lesquels en général on fera les mêmes observations que sur les précédents.

157. Si l'on faisait $m = 1$, les formules F et H donneraient deux développements de $\frac{1}{2}$; mais les formules G et I donneraient

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{0} = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \text{etc.}$$

développements qu'on ne peut mettre ni dans la classe des séries divergentes, ni dans celle des séries convergentes, puisque leurs termes n'augmentent ni ne diminuent, mais sont constants.

Si l'on fait attention que le premier de ces développements provient de la division de 1 par $1 - 1$, et le second de la division de 1 par $-1 + 1$, on verra que, dans l'un et dans l'autre, tous les restes sont 1; en sorte que, multipliant le quotient $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ par le diviseur 0, ou le quotient $-1 - 1 - 1 - 1 - 1$ par le diviseur 0, on aura au produit zéro; et ajoutant à ce produit le reste 1, on retrouvera le dividende 1.

Plus généralement, si dans la formule D on fait $m = 1$ et $n = -1$, on aura

$$\frac{a}{0} = a + a + a + a + a + \text{etc.}$$

En multipliant alors $a + a + a + a + a$ par 0, on n'aura que 0; mais ajoutant à ce produit le reste, qui est toujours a , on retrouvera le dividende.

158. Du reste, cette singulière expression $\frac{a}{0}$ se rencontre souvent dans le calcul, et mérite une certaine attention.

Le zéro n'est point une quantité; mais on peut le considérer comme la limite de tout décroissement dans la quantité. Or, l'on sait que plus le dénominateur d'une fraction est petit, plus la fraction est grande. Et l'on peut conclure de ce double principe, que $\frac{a}{0}$ n'est point une quantité, mais la limite de tout l'accroissement que peut prendre a étant divisé par des quantités de plus en plus petites. Ainsi $\frac{a}{2}$ vaut la moitié de a , $\frac{a}{1}$ vaut a tout entier;

$$\frac{a}{1} = 2a = a + a;$$

$$\frac{a}{1} = 3a = a + a + a;$$

$$\frac{a}{1} = 4a = a + a + a + a;$$

$$\frac{a}{1000} = 1000 a;$$

$$\frac{a}{1000000} = 1000000 a;$$

$$\frac{a}{0} = a + a + a + a + a + a + a + a + \text{etc. etc.}$$

Je répète donc que $\frac{a}{0}$ est la limite vers laquelle tend la série $a + a + a + a + a + \text{etc.}$ sans cependant y arriver jamais : c'est la limite de tout l'accroissement dont la quantité a est susceptible en l'ajoutant sans cesse à elle-même.

159. On a donc

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$$

$$\frac{2}{0} = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + \text{etc.}$$

$$\frac{3}{0} = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

etc. etc.

En comparant ces différentes expressions, on voit facilement que l'accroissement dont est susceptible une certaine quantité qui augmente d'après une certaine loi, peut être double, triple, etc. sous-double, sous-triple, etc. de celui d'une autre quantité qui augmente aussi par la même loi.

CHAPITRE V.

Des fractions continues.

160. En partant de ce principe, qu'une fraction ne change point de valeur lorsqu'on divise ses deux termes par un même nombre (*Arith.* n° 274), on peut donner aux fractions numériques une forme assez remarquable, et qui offre divers avantages.

Soit proposée pour exemple la fraction $\frac{69}{151}$. Divisant d'abord 69 par 69, nous aurons pour quotient 1, et divisant aussi 151 par 69, nous aurons pour quotient $2\frac{13}{69}$, en sorte que la proposée vaut 1 sur $2 + \frac{13}{69}$ (n° 70, 7°).

Mais $\frac{13}{69}$ devient à son tour, par le même procédé, 1 sur $5 + \frac{4}{15}$, et $\frac{4}{15}$ devient encore 1 sur $3 + \frac{1}{4}$:

C'est-à-dire que nous avons

$$\frac{69}{151} = \frac{1}{2 + \frac{13}{69}}; \quad \frac{13}{69} = \frac{1}{5 + \frac{4}{15}}; \quad \frac{4}{15} = \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}$$

Ainsi donc on peut donner à la proposée la forme suivante

$$\frac{69}{151} = \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$$

dans laquelle on peut encore raccourcir les traits horizontaux, pour qu'elle devienne enfin

$$\frac{69}{151} = \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$$

Mais il est bon d'observer que cette expression ne peut être assimilée à la suivante

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

qui a une tout autre valeur, comme il est facile de le voir.

On pourrait opérer de la même manière sur la quantité fractionnaire $\frac{151}{69}$. Divisant d'abord 151 par 151, on aurait pour quotient 1;

et divisant aussi 69 par 151, on aurait pour quotient $0 + \frac{69}{151}$, en sorte que la proposée vaudrait 1 sur $0 + \frac{69}{151}$.

Mais ayant déjà trouvé ci-dessus la valeur de $\frac{69}{151}$, on pourrait donner à la quantité fractionnaire proposée la forme que l'on voit ici,

$$\frac{151}{69} = \frac{1}{0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Du reste, en omettant le zéro, ce même développement peut encore s'écrire de cette manière,

$$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2 + etc.}} = 1 : \frac{1}{2 + etc.} = \frac{1}{1} : \frac{1}{2 + etc.} = \frac{2 + etc.}{1} = 2 + etc.$$

(*Arith.* n^{os} 300, 315), d'où il résulte qu'on a aussi

$$\frac{151}{69} = 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire que ces deux derniers développements ont la même valeur, savoir $\frac{151}{69}$ (*):

Soit en général $\frac{m}{n}$ une fraction numérique ou une quantité fractionnaire telle que n ne divise pas m exactement et sans reste. Divisant m par n , nous aurons 1, et divisant n par m , nous aurons un quotient entier que nous désignerons par α , et un reste que nous désignerons par r , en sorte que la proposée vaudra 1 sur $\alpha + \frac{r}{m}$.

Considérant à part la fraction $\frac{r}{m}$, dans laquelle $r < m$, parce que le reste r est plus petit que le diviseur m , nous diviserons r par r pour avoir 1, et nous diviserons aussi m par r pour avoir un nouveau quotient entier β , et s'il est possible, un nouveau reste r' , en sorte que $\frac{r}{m}$ vaudra 1 sur $\beta + \frac{r'}{r}$.

(*) On pourrait être tenté de croire que cela n'est pas possible, à cause de la grandeur de $\frac{1}{0}$ (n^o 158); mais il faut observer que le dénominateur de 1 n'est pas 0 seulement, mais 0 augmenté de la valeur de tout ce qui suit, ce qui rend la fraction plus petite.

Prenant encore à part la fraction $\frac{r'}{r}$, dans laquelle $r' < r$ parce que le second reste r' est plus petit que le premier r , nous diviserons r' par r' pour avoir 1, et nous diviserons r par r' pour avoir un troisième quotient entier γ , et s'il est possible, un nouveau reste r'' : en sorte que $\frac{r'}{r}$ vaudra 1 sur $\gamma + \frac{r''}{r}$, etc. etc.

Nous aurons donc

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\alpha + \frac{r}{m}}; \quad \frac{r}{m} = \frac{1}{\beta + \frac{r'}{r}}; \quad \frac{r'}{r} = \frac{1}{\gamma + \frac{r''}{r}}; \text{ etc.}$$

et la proposée prendra cette forme

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

Mais comme les restes $r, r', r'',$ etc. sont entiers, et vont toujours en diminuant, il faudra qu'il y en ait enfin un qui soit 0; alors le développement s'arrêtera, et sa valeur sera exactement celle de la proposée.

Du reste, si $m > n$, le premier quotient α sera 0, et le développement, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, prendra l'une ou l'autre de ces formes,

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{0} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.} \quad \frac{m}{n} = \beta + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

161. On appelle *fraction continue* toute expression de cette forme-là, où plus généralement de celle-ci

$$\frac{a}{\alpha} \pm \frac{b}{\beta} \pm \frac{c}{\gamma} \pm \frac{d}{\delta} \pm \text{etc.} \quad (\text{n}^{\circ} 89, \text{note.})$$

Une *fraction continue* est donc une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier plus ou moins une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier plus ou moins une fraction, formée à son tour de la même manière que les précédentes, et ainsi de suite.

Du reste, nous désignerons sous le nom de *fraction* toute quantité qui aura la forme fractionnaire, que son numérateur soit plus grand ou plus petit que son dénominateur, ou que les deux soient égaux.

162. Mais nous ne considérerons que les fractions continues dont tous les numérateurs sont égaux à l'unité, et nous supposerons d'ailleurs que tous leurs dénominateurs sont directs.

Cela posé, pour réduire le procédé du n° 160 à ce qu'il a de plus simple, nous remarquerons,

1°. Que les numérateurs de toutes les parties de la fraction continue devant toujours être l'unité, parce qu'un nombre divisé par lui-même équivaut toujours à 1, nous n'aurons pas besoin de rechercher ces numérateurs;

2°. Que la fraction continue dépend absolument des quotients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. qui forment les dénominateurs de ses différentes parties : en sorte que toute l'opération se réduit à trouver ces quotients.

Ces observations nous conduiront évidemment à la règle suivante, applicable à tous les cas dans lesquels on aura une fraction numérique ou un nombre fractionnaire à réduire en fraction continue de l'espèce de celles que nous voulons examiner.

Divisez d'abord le dénominateur de la fraction proposée par son numérateur, et nommez le quotient α ; divisez ensuite le numérateur par le reste, et nommez le quotient β ; divisez après cela le premier reste par le second reste, et soit le quotient γ ; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier, jusqu'à ce que vous parveniez à une division qui se fasse sans reste, ce qui doit nécessairement arriver puisque les restes sont tous des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue générale du n° 160, qui sera égale à la fraction donnée.

Du reste, si le numérateur de la proposée était plus grand que le dénominateur, le premier quotient α serait égal à 0; et d'après ce que nous avons vu, on pourrait donner au développement deux formes différentes, représentées aussi au n° 160.

163. En suivant cette règle, on trouvera

$$\frac{21}{47} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 68 & 157 \\ 0 & 0 = e \end{array}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 157 & 68 \\ 136 & 2 = \beta \end{array}$$

$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 68 & 21 \\ 63 & 3 = \gamma \end{array}$$

$$\frac{157}{68} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 5 \\ 20 & 4 = \delta \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 1 \\ 5 & 5 = \epsilon \end{array}$$

Nous avons figuré les divisions relatives à la dernière fraction, et supprimé les autres.

164. Il serait facile de conclure de là, sans un nouveau calcul, les valeurs des fractions renversées $\frac{47}{21}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{68}{157}$. Examinons d'abord le cas des véritables fractions, plus petites que l'unité, comme les deux premières du n° précédent. Les développements de $\frac{21}{47}$ et de $\frac{5}{12}$ peuvent s'écrire ainsi

$$\frac{21}{47} = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}, \quad \frac{5}{12} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}},$$

et en les renversant, on a

$$\frac{47}{21} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}, \quad \frac{12}{5} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},$$

car on peut supprimer, au-dessous de ces deux derniers développements, le diviseur ou le dénominateur 1.

165. Examinons encore le cas des nombres fractionnaires plus grands que l'unité, comme ceux du n° 163. Les développements de $\frac{8}{5}$ et de $\frac{157}{68}$ peuvent prendre cette forme,

$$\frac{8}{5} = \left\{ \frac{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{1}, \frac{157}{68} = \left\{ \frac{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1} \right.$$

et en les renversant on obtient

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}}, \quad \frac{68}{157} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}},$$

ce que l'on peut finalement écrire ainsi

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \quad \frac{68}{157} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

Du reste, soit pour ce cas, soit pour le précédent, il sera facile, dans la pratique, d'abrégier l'opération du renversement, et d'arriver tout d'un coup au résultat cherché. Cela n'a pas besoin d'explication; un coup d'œil suffit pour apercevoir la simplification du procédé.

166. Il y a quelque chose à dire encore sur le cas d'une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur; car le développement peut recevoir alors deux formes différentes, comme nous l'avons dit au n° 160 pour la proposée $\frac{151}{69}$. Or, il est facile de voir

qu'en prenant ce développement sous la première forme $\frac{1}{0 + \text{etc.}}$ on peut alors le retourner, précisément comme on retourne ceux des fractions proprement dites, dont le numérateur est plus petit que le dénominateur (n° 164).

On a par exemple

$$\frac{151}{69} = \frac{1}{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}.$$

qui devient par le renversement

$$\frac{69}{151} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

On obtiendrait le même résultat en renversant le développement de $\frac{151}{69}$, pris sous sa seconde forme.

Mais comme cela peut facilement se généraliser, on trouve là une nouvelle preuve de l'égalité de valeur des deux développements de $\frac{m}{n}$ donnés dans le n° 160 pour le cas où $m > n$.

167. On peut observer sur le développement de $\frac{5}{8}$ (n° 165), qu'on peut l'écrire ainsi,

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

parce que $\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$.

En général, quand le dernier terme d'une fraction continue sera $\frac{1}{2}$, on pourra le décomposer comme nous venons de le faire : ce qui aurait lieu, par exemple, dans les développements de $\frac{9}{5}$, de $\frac{5}{12}$ et de $\frac{12}{5}$ (n° 163, 164).

168. Maintenant que nous savons développer une fraction ordinaire en fraction continue, proposons-nous le problème inverse : Etant donnée la fraction continue, trouver la fraction ordinaire, qui a la même valeur qu'elle.

Cette opération devra se faire en remontant des derniers termes de la fraction continue jusqu'aux premiers, et en cherchant ainsi successivement leurs valeurs.

Pour faciliter ce calcul aux commençants, il sera bon de leur faire remarquer que $\frac{a}{b}$ lorsque le premier trait horizontal est plus grand que

le second, vaut $a : \frac{b}{d} = \frac{a}{1} : \frac{b}{d} = \frac{ad}{b}$ (*Arith.* n° 300, 315), et que

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, quand le trait du milieu est plus grand que les autres, vaut

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. D'où il résulte qu'au lieu de $\frac{a}{b}$, on peut immédiatement écrire $\frac{ad}{b}$, et qu'au lieu de $\frac{a}{\frac{c}{d}}$, on peut immédiatement écrire

$\frac{ad}{bc}$. En général, le plus grand trait indique la division principale.

Cela posé, pour trouver la fraction ordinaire égale à cette fraction continue (n° 160),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

on cherchera d'abord ce que valent les deux derniers termes, et l'on aura

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{13}{4}} = \frac{4}{13}.$$

Alors, les trois derniers termes vaudront

$$\frac{1}{5 + \frac{4}{13}} = \frac{1}{\frac{69}{13}} = \frac{13}{69}.$$

Donc toute la fraction continue vaudra

$$\frac{1}{2 + \frac{13}{69}} = \frac{1}{\frac{151}{69}} = \frac{69}{151}.$$

Il sera facile de s'assurer que le chemin inverse ne conduirait pas au véritable résultat, c'est-à-dire qu'on ne peut résoudre le problème en descendant des premiers termes de la fraction continue aux derniers.

On pourra s'exercer sur tous les autres exemples des n°s 160, 163, 164, 165, et l'on remarquera que les deux développements qui représentent chaque fraction ordinaire dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, conduisent au même résultat, ce qui achève de démontrer leur identité (n°s 160, 167).

169. Nous venons de voir qu'en remontant des derniers termes d'une fraction continue jusqu'au premier, et qu'en les sommant successivement, on retrouvait la valeur exacte de la fraction ordinaire qui était supposée avoir fourni par son développement la fraction continue. Mais si on négligeait le dernier ou les derniers termes de celle-ci, il est clair qu'on n'aurait qu'une valeur approchée de la fraction ordinaire; et cette valeur serait probablement d'autant moins approchée, qu'on négligerait un plus grand nombre de termes.

En prenant donc d'abord le premier terme $\frac{1}{\alpha}$ du développement de $\frac{m}{n}$ (n°s 160, 162), puis les deux premiers, puis les trois premiers,

et ainsi de suite, on forme une suite de fractions ordinaires qui doivent être *convergentes* vers la fraction $\frac{m}{n}$. Voici le détail du calcul:

La première fraction ordinaire de la suite en question sera $\frac{1}{\alpha}$, comme nous l'avons dit.

La seconde exprimant la valeur des deux premiers termes du développement vaudra

$$\frac{1}{\alpha + \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha\beta + 1}.$$

La troisième fraction convergente, devant exprimer la valeur des trois premiers termes du développement, se calculera en remontant du troisième au premier, et l'on aura d'abord

$$\frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\frac{\beta\gamma + 1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\beta\gamma + 1}; \text{ puis}$$

$$\frac{1}{\alpha + \frac{\gamma}{\beta\gamma + 1}} = \frac{1}{\frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1}} = \frac{\beta\gamma + 1}{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}.$$

La quatrième fraction convergente, égale à la valeur des quatre premiers termes, se trouvera ainsi,

$$\frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta}} = \frac{1}{\frac{\gamma\delta + 1}{\delta}} = \frac{\delta}{\gamma\delta + 1}; \text{ puis}$$

$$\frac{1}{\beta + \frac{\delta}{\gamma\delta + 1}} = \frac{1}{\frac{\beta\gamma\delta + \beta + \delta}{\gamma\delta + 1}} = \frac{\gamma\delta + 1}{\beta\gamma\delta + \beta + \delta}; \text{ puis}$$

$$\frac{1}{\alpha + \frac{\gamma\delta + 1}{\beta\gamma\delta + \beta + \delta}} = \frac{1}{\frac{\alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\delta + 1}{\beta\gamma\delta + \beta + \delta}} = \frac{\beta\gamma\delta + \beta + \delta}{\alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\delta + 1},$$

et ainsi de suite.

Or, il est facile de voir qu'on peut donner à la troisième fraction convergente cette forme-ci

$$\frac{\beta\gamma + 1}{\alpha\beta\gamma + \gamma + \alpha} = \frac{\beta\gamma + 1}{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha};$$

ce que l'on reconnaîtra en divisant d'abord les deux premiers termes du dénominateur par γ pour avoir le quotient $\alpha\beta + 1$, puis en indiquant, par une parenthèse, la multiplication de ce quotient par le diviseur γ (n° 70).

De même on peut changer aussi la forme de la quatrième fraction convergente pour avoir

$$\frac{\beta\gamma\delta + \delta + \beta}{\alpha\beta\gamma\delta + \gamma\delta + \alpha\delta + \alpha\beta + 1} = \frac{(\beta\gamma + 1)\delta + \beta}{(\alpha\beta\gamma + \gamma + \alpha)\delta + \alpha\beta + 1}.$$

170. Cela posé, si l'on écrit sur une même ligne horizontale les quotients α , β , γ , δ , etc. et qu'on place au-dessous les fractions convergentes que nous venons de calculer, on pourra faire une observation importante,

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha, & \beta, & \gamma & & \delta & & \\ \frac{1}{\alpha}, & \frac{\beta}{\alpha\beta + 1}, & \frac{(\beta\gamma + 1)}{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}, & & \frac{(\beta\gamma + 1)\delta + \beta}{(\alpha\beta\gamma + \gamma + \alpha)\delta + \alpha\beta + 1}, & & \end{array}$$

c'est que chacune de ces fractions, dès la troisième, peut se former de cette manière : il faut multiplier le quotient écrit au-dessus d'elle par le numérateur de la fraction précédente, et ajouter au produit le numérateur de l'avant-précédente, ce qui forme le numérateur de la fraction dont il s'agit. Le dénominateur de cette fraction se calcule de la même manière par le quotient écrit au-dessus d'elle, et par les dénominateurs des fractions précédentes.

171. Ayant vérifié cela jusqu'à la quatrième, voici comment nous pourrions démontrer que la même propriété aura lieu dans toute la suite, quelque grande qu'elle soit. Nous représenterons d'abord la seconde fraction par $\frac{a}{b}$, la troisième par $\frac{c}{d}$, la quatrième par $\frac{e}{f}$, et la cinquième, quelle que soit sa composition, encore inconnue, par $\frac{g}{h}$. Nous aurons ainsi la suite

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$$

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\epsilon}$$

dans laquelle il nous faudra examiner la composition de $\frac{g}{h}$.

Nous observerons que

$$\frac{e}{f} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta},$$

et qu'on doit avoir

$$\frac{g}{h} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\epsilon};$$

or, il est clair que pour obtenir cette dernière valeur, il suffit de mettre dans la précédente $\delta + \frac{1}{\epsilon}$ à la place de δ .

Cela posé, puisqu'on a par l'observation $\frac{e}{f} = \frac{c\delta + a}{d\delta + b}$ (n° 170), on aura

$$\begin{aligned} \frac{g}{h} &= \frac{c\left(\delta + \frac{1}{\epsilon}\right) + a}{d\left(\delta + \frac{1}{\epsilon}\right) + b} = \frac{\frac{c\delta\epsilon + c + a\epsilon}{\epsilon}}{\frac{d\delta\epsilon + d + b\epsilon}{\epsilon}} = \\ &= \frac{c\delta\epsilon + c + a\epsilon}{d\delta\epsilon + d + b\epsilon} = \frac{(c\delta + a)\epsilon + c}{(d\delta + b)\epsilon + d} = \frac{e\epsilon + c}{f\epsilon + d}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que la composition de la fraction $\frac{g}{h}$ est analogue à celle des précédentes, et l'on prouverait la même chose de celles qui viendraient ensuite, si le développement avait un plus grand nombre de termes.

La règle du n° 170 est donc démontrée, et il en résulte d'abord que les numérateurs des fractions convergentes vont en augmentant, ainsi que leurs dénominateurs.

172. En appliquant la règle des deux numéros précédents à la fraction $\frac{69}{151}$ (n° 160), et en nous souvenant que les deux premières

fractions convergentes sont représentées par $\frac{1}{\alpha}$ et par $\frac{\beta}{\alpha\beta+1}$, nous aurons

$$\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{11} & \frac{16}{35} & \frac{69}{151} \end{array}$$

En l'appliquant à la fraction $\frac{68}{157}$ (n° 165), nous trouverons

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{7} & \frac{15}{30} & \frac{68}{157} \end{array}$$

Pour appliquer la même règle aux fractions dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, il suffira de remarquer que dans ce cas on a $\alpha = 0$ (160); en sorte que la première fraction con-

vergente, égale en général à $\frac{1}{\alpha}$, devient $\frac{1}{0}$, et que la seconde, re-

présentée par $\frac{\beta}{\alpha\beta+1}$, devient $\frac{\beta}{1}$.

Si donc la proposée est $\frac{151}{69}$ (n° 160), on aura

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{11}{5} & \frac{35}{16} & \frac{151}{69} \end{array}$$

Si la proposée est $\frac{157}{68}$ (n° 163), on trouvera

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{7}{3} & \frac{30}{13} & \frac{157}{68} \end{array}$$

173. On observera que dans tous les cas la dernière fraction convergente est toujours égale à la proposée, ce qui ne peut être autrement puisqu'elle est la somme de tous les termes du développement.

On observera encore que lorsqu'on a trouvé les fractions convergentes vers une proposée, il suffit de renverser chacune de ces fractions pour avoir les convergentes vers la proposée retournée. Voyez deux exemples de cela au numéro précédent dans les proposées $\frac{69}{151}$ et $\frac{151}{69}$, et dans les proposées $\frac{68}{157}$ et $\frac{157}{68}$.

On observera enfin que si l'on cherche les fractions convergentes vers des proposées du genre de celles du n° 167, on en aura une de moins ou une de plus, suivant qu'on écrira le dernier quotient 2, ou qu'on le remplacera par deux quotients 1 et 1. Voyons cela dans un nouvel exemple, et prenons pour proposée la fraction $\frac{50}{7}$.

En suivant la règle du n° 162, nous trouverons les quotients suivants, 0, 4, 3 et 2, et en laissant ce dernier quotient tel qu'il est, nous aurons les fractions convergentes qu'on voit ici,

$$\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 3 & 2 \\ \frac{1}{0} & \frac{4}{1} & \frac{15}{8} & \frac{50}{7} \end{array}$$

Mais en écrivant au lieu du quotient 2, les deux quotients 1 et 1, nous trouverons

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ \frac{1}{0} & \frac{4}{1} & \frac{15}{5} & \frac{17}{4} & \frac{50}{7} \end{array}$$

174. Appliquons encore la théorie des fractions convergentes à une proposée qui ait un grand nombre de chiffres à chacun de ses deux termes, par exemple à la fraction $\frac{50000000}{55882353}$.

Cherchons d'abord les quotients par la règle du n° 162, et pour cela disposons ainsi la suite des divisions (*Arith.* n° 226) :

$$\begin{array}{r} 50000000 \overline{) 55882353} \quad 1 = \alpha \\ \underline{50000000} \\ 5882353 \overline{) 50000000} \quad 8 = \beta \\ \underline{47058824} \\ 2941176 \overline{) 5882353} \quad 2 = \gamma \\ \underline{5882352} \\ 1 \overline{) 2941176} \quad 2941176 = \delta \\ \underline{2941176} \\ 0. \end{array}$$

Ces quotients étant trouvés, nous aurons

$$\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 2941176 \\ \frac{1}{1} & \frac{8}{9} & \frac{17}{19} & \frac{50000000}{55882353} \end{array}$$

175. Il est facile de voir que $\frac{17}{19}$ est à très-peu de chose près la valeur de la fraction proposée $\frac{50000000}{55882353}$; car si l'on réduit ces deux fractions au même dénominateur, et que l'on retranche alors la seconde de la première, on trouvera que $\frac{17}{19}$ ne surpasse la proposée que de $\frac{1}{19 \times 55882353}$, ce qui est une très-petite quantité.

176. Cette observation fera juger de l'utilité des fractions continues, lesquelles donnent les moyens d'exprimer avec peu de chiffres

et d'une manière très-approchée, des fractions ordinaires qui contiennent un grand nombre de chiffres.

177. Mais puisque nous avons été conduits à cette observation en calculant la différence qui se trouve entre une des fractions convergentes et la proposée, nous voyons qu'il conviendrait de rechercher quelle est en général la différence qui existe d'une fraction convergente à l'autre, et de celles-ci à la proposée.

178. En reprenant la suite du n° 171

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{a}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \frac{e}{\delta}, \frac{g}{\epsilon}, \text{ etc.}$$

et calculant, par exemple, la différence des deux fractions $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$, nous aurons $\frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{cf - de}{df}$. Mais comme il est évident que le dénominateur de chaque différence sera toujours égal au produit des dénominateurs des deux fractions que l'on voudra comparer, nous ne considérerons que les numérateurs de ces différences. Celui que nous venons de trouver est $cf - de$, dans lequel nous pouvons mettre à la place de f sa valeur $d\delta + b$, et à la place de e sa valeur $c\epsilon + a$; ce numérateur deviendra ainsi $c(d\delta + b) - d(c\epsilon + a) = cd\delta + bc - cds - ad = bc - ad = -(ad - bc)$, c'est-à-dire que nous aurons

$$+(cf - de) = -(ad - bc),$$

ce qui nous fait voir que le numérateur de la différence des deux fractions $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ est égal au numérateur de la différence des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, mais avec un signe contraire.

On prouverait de même que le numérateur de la différence des fractions $\frac{e}{f}$ et $\frac{g}{h}$ est égal au numérateur de la différence des fractions $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$, mais avec un signe contraire.

Enfin, on prouverait encore la même chose des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ comparées aux fractions $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{a}{\beta}$, et de toutes celles que l'on prendrait au-delà de $\frac{g}{h}$.

Or, comme le numérateur de la différence des fractions $\frac{1}{a}$ et $\frac{a}{b}$ ou $\frac{1}{a}$ et $\frac{\beta}{a\beta+1}$, est égal à $a\beta+1-\alpha\beta$ ou à 1, il en résulte que l'on a pour tous les cas.

$$1b - a\alpha = +1$$

$$a\alpha - bc = -1$$

$$cf - de = +1$$

$$eh - fg = -1$$

etc.

179. On voit donc, 1^o. que l'on a toujours $\frac{1}{a} > \frac{a}{b}$, puisque la seconde de ces deux fractions retranchée de la première donne un reste direct; mais qu'en revanche on a $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, parce qu'ici le reste est inverse. On a de même $\frac{c}{d} > \frac{e}{f}$ et $\frac{e}{f} < \frac{g}{h}$, et ainsi de suite.

180. On voit, 2^o. que quoique ces fractions soient alternativement plus grandes et plus petites les unes que les autres, il n'y en a point qui soient égales entre elles, parce que les différences vont toujours en diminuant; par exemple, quoique la fraction $\frac{a}{b}$ soit plus petite que les fractions $\frac{1}{a}$ et $\frac{c}{d}$, entre lesquelles elle se trouve, on n'a pas.

$\frac{1}{a} = \frac{c}{d}$, parce que $\frac{1}{a} - \frac{a}{b} = \frac{1}{ab}$, tandis que $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{db}$. Or,

$db > ab$, car $d > a$, donc $\frac{1}{db} < \frac{1}{ab}$.

En général, les différences vont en diminuant, parce que leurs numérateurs sont toujours 1, et que leurs dénominateurs vont en augmentant (n^o 171, 178).

181. On voit, 3^o. que les numérateurs des différences étant l'unité, ces différences ne pourraient devenir plus petites que par l'augmentation de leurs dénominateurs. D'où il résulte qu'en descendant de la fraction $\frac{1}{a}$ à la fraction $\frac{a}{b}$, on n'en pourrait trouver aucune qui fût plus rapprochée de $\frac{1}{a}$ que ne l'est $\frac{a}{b}$, à moins que le dénomi-

nateur de cette fraction supposée ne fût plus grand que b ; qu'en montant de la fraction $\frac{a}{b}$ à la fraction $\frac{c}{d}$, on n'en pourrait trouver aucune qui fût plus rapprochée de $\frac{a}{b}$ que ne l'est $\frac{c}{d}$, à moins que le dénominateur de cette fraction supposée ne fût plus grand que d , et ainsi de suite.

182. On voit, 4°. que toutes ces fractions sont réduites à leur plus simple expression; car si a et b , par exemple, dans la fraction $\frac{a}{b}$, ou c et d dans la fraction $\frac{c}{d}$, avaient un diviseur commun, ce même nombre diviserait aussi $ad - bc$; mais cette quantité étant égale à l'unité (n° 178), n'est divisible que par l'unité.

Il en résulte que si l'on développe en fraction continue une fraction ordinaire qui ne soit pas réduite à ses moindres termes, lorsqu'on voudra sommer la fraction continue, on ne trouvera que la plus simple expression de la proposée.

Par exemple, $\frac{56}{15}$ donne les quotients 0, 2, 2, 2, et l'on a

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{5}{2} & \frac{12}{5} \end{array}$$

c'est-à-dire que la somme de toute la fraction continue est $\frac{12}{5} = \frac{56}{15}$.

183. On peut faire encore sur tout ceci une cinquième observation, que nous allons développer en reprenant nos fractions convergentes des n°s 171, 178,

$$\frac{1}{a}, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}, \text{ etc.}$$

Nous savons que $\frac{a}{b} < \frac{1}{a}$, et que leur différence est $\frac{1}{ab}$ (n°s 178, 179), ce qui donne $\frac{a}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab}$.

Nous savons que $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$, et que leur différence est $\frac{1}{bd}$, ce qui donne $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bd}$. Mettant ici à la place de $\frac{a}{b}$ sa valeur trouvée

dans le précédent alinéa, on a $\frac{c}{d} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{bd}$.

En continuant de même, on trouverait

$$\frac{e}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{bd} - \frac{1}{df},$$

$$\frac{g}{h} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{bd} - \frac{1}{df} + \frac{1}{fh}, \text{ etc. etc.}$$

Mais comme la dernière fraction convergente est égale à la proposée (n° 173), si on représente celle-ci par $\frac{m}{N}$, on aura

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{bd} - \frac{1}{df} + \frac{1}{fh} - \text{etc.}$$

Cependant, si le numérateur de la proposée était plus grand que son dénominateur, on aurait $a=0$ et $\frac{1}{a} = \frac{1}{0}$, quantité si grande (n° 158) que sa différence avec la suivante, savoir $\frac{1}{ab}$, se trouverait encore $\frac{1}{0}$.

En sorte que les deux premiers termes de la formule précédente devenant $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$, et se réduisant à rien, la suite en serait altérée. Cette première fraction $\frac{1}{0}$, qui est souvent supposée commencer la série des convergentes, doit donc dans ce cas être supprimée, et la série en question deviendra par là

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}.$$

Du reste, ce rejet de $\frac{1}{0}$ revient à prendre le développement de la proposée plus grande que 1, sous la forme la plus naturelle ou sous sa seconde forme (n° 160, 162), qui donne pour premier terme de la suite des convergentes β ou $\frac{\beta}{1}$, qui est dans ce cas la valeur de $\frac{a}{b}$ (n° 172).

Mais $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bd}$, comme nous l'avons déjà vu, de plus $\frac{e}{f} = \frac{c}{d} - \frac{1}{df}$; donc

$$\frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bd} - \frac{1}{df}.$$

On trouverait aussi

$$\frac{g}{h} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bd} - \frac{1}{df} + \frac{1}{fh}.$$

Donc pour ce cas, en nommant la proposée $\frac{M}{n}$, on obtiendra

$$\frac{M}{n} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bd} - \frac{1}{df} + \frac{1}{fh} - \text{etc.}$$

Appliquons la première formule aux fractions convergentes vers $\frac{68}{157}$, qui sont (n° 172)

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{30}, \frac{68}{157}.$$

Observant que $a=2$, que $b=7$, que $d=30$, et que $f=157$, nous aurons

$$\frac{68}{157} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.7} + \frac{1}{7.30} - \frac{1}{30.157};$$

ce qui est bien juste, comme on peut le vérifier.

Appliquons la seconde formule aux fractions convergentes vers $\frac{157}{68}$, qui sont, en omettant $\frac{1}{0}$ (n° 172),

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{30}{13}, \frac{157}{68}.$$

Observant que $a=2$, que $b=1$, que $d=3$, que $f=13$, et que $h=68$, nous trouverons

$$\frac{157}{68} = \frac{2}{1} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.13} + \frac{1}{13.68};$$

ce que l'on pourra aussi vérifier.

184. Comparons maintenant chaque fraction convergente avec la proposée (n° 177), et pour cela considérons la fraction continue

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

Si l'on ne prend que $\frac{1}{\alpha}$, qui est la première fraction convergente, on a un dénominateur trop petit, puisqu'il devrait être α , plus tout ce qui suit; ainsi la fraction est trop grande.

Si l'on prend $\frac{a}{b}$, ou $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, qui est la seconde fraction convergente, le dénominateur β étant trop petit, $\frac{1}{\beta}$, est trop grand, de même que $\alpha + \frac{1}{\beta}$; donc $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, ou $\frac{a}{b}$, est une fraction trop petite.

En continuant de raisonner ainsi, on verra que dans tous les cas les fractions convergentes sont alternativement plus grandes et plus petites que la proposée, et cela jusqu'à la dernière fraction de la suite, fraction qui est égale à la proposée.

185. Il en résulte que cette dernière fraction, ou la proposée, est toujours comprise par sa valeur entre deux fractions consécutives quelconques de la série, ce qui est possible parce qu'elle a un dénominateur plus grand que tous les autres (n° 181).

186. Il suit encore de là et de ce que nous avons dit au n° 181, que chacune des fractions convergentes exprime la proposée plus exactement que ne le ferait toute autre fraction qui aurait un dénominateur plus petit que celui de la fraction convergente qui vient ensuite.

La fraction $\frac{a}{b}$, par exemple, approche plus de la proposée que toute autre fraction dont le dénominateur serait plus petit que d .

186 bis. Mais quelle est exactement la différence qui existe entre la proposée et une des fractions dites convergentes, comme par exemple $\frac{e}{f}$ dans la suite du n° 171 ?

Pour résoudre cette question, reprenons la suite dont il s'agit avec les quotients placés au-dessus.

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}, \text{ etc.}$$

Nous savons que dans cette suite $\frac{g}{h} = \frac{e\epsilon + c}{f\epsilon + d}$ (nos 170, 171). Mais cette même fraction $\frac{g}{h}$ et la proposée sont aussi égales aux deux fractions continues que l'on voit ici

$$\frac{g}{h} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \frac{1}{\epsilon + \frac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \frac{1}{\epsilon + \frac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

En sorte que $\frac{g}{h}$ deviendra égale à la proposée $\frac{m}{n}$, si l'on met dans

la valeur de celle-là $\epsilon + \text{etc.}$ à la place de ϵ simple. Faisant donc cette substitution dans la première valeur de $\frac{g}{h}$, indiquée ci-dessus, et représentant pour abrégier, $\epsilon + \text{etc.}$ par ϵ' , on aura pour la valeur de la proposée cette expression assez simple $\frac{e\epsilon' + c}{f\epsilon' + d}$.

Cela posé, désignant toujours la proposée par $\frac{m}{n}$, on aura

$$\frac{m}{n} - \frac{e}{f} = \frac{e\epsilon' + c}{f\epsilon' + d} - \frac{e}{f} = \frac{ef\epsilon' + cf - ef\epsilon' - de}{f(f\epsilon' + d)} = \frac{cf - de}{f(f\epsilon' + d)} = \frac{1}{f(f\epsilon' + d)} \quad (\text{n}^\circ 178).$$

Voilà la différence cherchée.

On prouverait de même que la différence de la proposée avec $\frac{c}{d}$ est égale à $\frac{-1}{d(ds' + b)}$.

Mais d'après tout ce qui précède, on peut aussi exprimer cette différence comme on le voit ici,

$$\frac{m}{n} - \frac{c}{d} = \frac{e\epsilon' + c}{f\epsilon' + d} - \frac{c}{d} = \frac{de\epsilon' + cd - cf\epsilon' - cd}{d(f\epsilon' + d)} = \frac{(de - cf)\epsilon'}{d(f\epsilon' + d)} = \frac{-\epsilon'}{d(f\epsilon' + d)}.$$

Maintenant comparons cette dernière différence avec celle de $\frac{e}{f}$,

et nous aurons cette proportion,

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{m}{n} - \frac{e}{f}\right) :: \frac{-\epsilon'}{d(f\epsilon' + d)} : \frac{+1}{f(f\epsilon' + d)}.$$

Faisant abstraction des signes des deux derniers termes de la proportion, et multipliant ces mêmes termes par $df(f\epsilon' + d)$ (*Arith.* n° 547), puis effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur de chaque nouvelle fraction (n° 77, 3°), on obtiendra

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{m}{n} - \frac{e}{f}\right) :: f\epsilon' : d.$$

Or, comme $f > d$ (n° 171), et que d'ailleurs $\epsilon' = \epsilon + \text{etc.}$ qui n'est jamais < 1 , il est évident que $f\epsilon' > d$. En généralisant cela on

voit que les différences des fractions $\frac{1}{a}, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, etc. avec la proposée vont toujours en diminuant, abstraction faite de leurs signes, et que ces fractions sont réellement convergentes vers la proposée (n° 169).

187. Les fractions convergentes étant alternativement plus petites et plus grandes que la proposée, il en résulte qu'on peut séparer ces fractions et en former deux séries, dont l'une comprendra les fractions plus petites que la proposée, et l'autre les fractions plus grandes; la fraction proposée terminant cependant l'une ou l'autre de ces séries, puisqu'elle est toujours la dernière des fractions convergentes.

Si l'on prend alors les différences qui auront lieu entre les fractions consécutives des deux suites, on verra que les numérateurs de ces différences ne seront pas toujours égaux à l'unité. Lors donc qu'un de ces numérateurs ne sera pas 1, c'est-à-dire lorsqu'il surpassera 1, on pourra insérer entre les deux fractions qui ont fourni cette différence, d'autres fractions intermédiaires, qui lieront celles de la suite, et participeront à leurs propriétés.

On verra tout cela développé au long dans les additions de Lagrange à l'Algèbre d'Euler, et l'on y trouvera aussi des applications fort intéressantes de ces principes.

188. Du reste, cette théorie, celle du n° 146, et d'autres encore relatives aux fractions numériques, peuvent être rapprochées et envisagées sous un même point de vue en se proposant ce problème : *Transformer par approximation une fraction en une autre dont le numérateur ou le dénominateur soit donné.* C'est ce qu'a fait voir Lagrange dans le cinquième cahier du Journal de l'école polytechnique.

CHAPITRE VI.

Du plus grand commun diviseur et de la plus grande commune mesure.

Premières notions sur les incommensurables.

189. Il est évident que la règle du n° 162 pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue, n'est autre chose que celle du n° 227 de l'Arithmétique d'Émile, pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. En sorte que la recherche du plus grand commun diviseur de deux quantités se lie immédiatement aux objets dont nous venons de nous occuper.

190. Comme les caractères algébriques sont susceptibles de recevoir différentes valeurs numériques, on ne peut guère dire, en comparant les quantités algébriques, lesquelles sont les plus grandes et lesquelles sont les plus petites.

Par exemple, a^2 sera plus grand que a , si a est un nombre entier; mais le contraire aura lieu si a est une fraction : $a + b$ sera plus grand que a si a et b sont directs; mais il sera en revanche plus petit que a si a est direct et b inverse.

Parmi les quantités littérales, celle qu'on appelle la plus grande, est celle dans laquelle les lettres qui la composent ont le plus haut exposant, ou dont chaque terme renferme un plus grand nombre de facteurs.

191. Cela posé, soient A et B les deux quantités dont on veut avoir le plus grand commun diviseur, et soit $A > B$.

Il est clair d'abord que le diviseur cherché ne pourra être plus grand que B ; or, B se divise lui-même : s'il divise donc A , il sera le nombre cherché; mais si, outre le quotient α , on a un reste R , le diviseur sera plus petit que B .

Or, on a $A = \alpha B + R$: donc le diviseur doit diviser B et $\alpha B + R$; donc il doit diviser R .

Mais R se divise lui-même; s'il divise donc B , il sera le nombre

cherché; mais si, outre le quotient β , on a un second reste R' , le diviseur sera plus petit que R .

Or, on a $B = \beta R + R'$: donc le diviseur doit diviser $\beta R + R'$; donc il doit diviser R' .

192. En continuant de raisonner ainsi, on verra qu'en algèbre, comme en arithmétique, *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités données, il faut diviser la plus grande par la plus petite, ensuite la plus petite par le premier reste, le premier reste par le second reste, le second reste par le troisième reste, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une division sans reste; alors le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur des deux quantités proposées* (Arith. n^{os} 224, 227).

Si on veut chercher le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités A, B, C, D , etc. il faudra d'abord chercher celui de A et de B ; et, le désignant par α , on cherchera celui de α et de C , et, le désignant par β , on cherchera celui de β et de D , et ainsi de suite. Le dernier diviseur commun sera celui de A , de B , de C , de D , etc.

N. B. Il conviendra d'arranger les quantités proposées A, B, C, D , etc. de manière à commencer par les plus simples, pour s'élever graduellement à celles qui le seront le moins.

193. « Avant de mettre en pratique la règle précédente, nous ferons une observation qui peut en faciliter l'usage : c'est qu'on ne change rien au plus grand commun diviseur de deux quantités lorsqu'on multiplie ou qu'on divise l'une des deux par une quantité qui n'est point diviseur de l'autre, et qui n'a aucun commun diviseur avec cette autre. Par exemple, ab et ac ont pour commun diviseur a : si je multiplie ab par d , il viendra abd , qui n'a avec ac d'autre commun diviseur que a , c'est-à-dire le même qui était entre ab et ac , et réciproquement.

« Concluons de là, 1^o que, si, en cherchant le plus grand commun diviseur de deux quantités, on s'aperçoit, dans le cours des divisions que l'on fera successivement, que le dividende ou le diviseur ait un facteur ou un diviseur qui ne soit point facteur de l'autre, on pourra supprimer ce facteur ;

2^o. Qu'on pourra multiplier l'une des deux quantités par tel nombre qu'on voudra, pourvu que ce nombre ne soit point diviseur de

l'autre quantité, et n'ait aucun facteur commun avec elle. » (Lacroix, Algèbre, 2^{me} édit.)

194. Supposons qu'on demande le plus grand commun diviseur de $a^2 - 3ab + 2b^2$ et de $a^2 - ab - 2b^2$:

EXEMPLE 1^{er}.

$$\begin{array}{r|l}
 a^2 - 3ab + 2b^2 & a^2 - ab - 2b^2 \\
 - a^2 + ab + 2b^2 & 1 \\
 \hline
 - 2ab + 4b^2 & \\
 - a + 2b & \\
 \hline
 a^2 - ab - 2b^2 & -a + 2b \\
 - a^2 + 2ab & -a - b \\
 \hline
 ab - 2b^2 & \\
 - ab + 2b^2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

En divisant $a^2 - 3ab + 2b^2$ par $a^2 - ab - 2b^2$, le quotient est 1, et le reste $-2ab + 4b^2$, qui se réduit à $-a + 2b$, en supprimant le facteur $2b$, qui ne divise pas $a^2 - ab - 2b^2$, et qui n'a point de diviseur commun avec cette quantité.

En divisant ensuite $a^2 - ab - 2b^2$ par $-a + 2b$, le quotient est $-a - b$, et le reste nul : en sorte que le plus grand commun diviseur est $-a + 2b$, ou $a - 2b$, ce qui est le même nombre pris avec un signe contraire. L'une de ces valeurs divisant les quantités proposées, l'autre les divisera aussi.

195. Il faut observer que, si, au lieu de mettre deux termes au second quotient, on n'en eût mis qu'un, cela n'aurait pas empêché de trouver le plus grand commun diviseur.

Le reste étant alors $ab - 2b^2$, et se réduisant à $a - 2b$ par la suppression du facteur b , si l'on eût divisé $-a + 2b$ par $a - 2b$,

$$\begin{array}{r|l}
 -a + 2b & a - 2b \\
 + a - 2b & -1 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

on aurait eu -1 pour quotient, et 0 pour reste : en sorte que $a - 2b$

eût été le plus grand diviseur commun, ou $-a + 2b$, qui est la même quantité prise avec un signe contraire.

Il ne faut donc pas craindre de tomber en erreur en ne mettant pas au quotient tous les termes qui pourraient s'y trouver.

196. Il faut encore observer qu'après avoir trouvé le premier terme $-a$ du second quotient, et le reste $ab - 2b^2$, on aurait pu réduire ce reste avant de continuer la division : cela aurait changé le quotient, mais non le plus grand commun diviseur, seule quantité qui importe ici. Voici la forme de la seconde division dans ce cas :

$$\begin{array}{r|l}
 a^2 - ab - 2b^2 & -a + 2b \\
 -a^2 + 2ab & \hline
 \hline
 ab - 2b^2 & -a - 1 \\
 a - 2b & \\
 -a + 2b & \\
 \hline
 0. &
 \end{array}$$

197. Il faut enfin observer que l'on pourrait changer les signes de l'une ou de l'autre des quantités, ou de leurs restes, sans changer le plus grand commun diviseur.

En divisant par exemple $a^2 - ab - 2b^2$ par $a - 2b$, au lieu de $-a + 2b$, on aurait

$$\begin{array}{r|l}
 a^2 - ab - 2b^2 & a - 2b \\
 -a^2 + 2ab & \hline
 \hline
 ab - 2b^2 & a + b \\
 -ab + 2b^2 & \\
 \hline
 0, &
 \end{array}$$

ce qui donne également $a - 2b$, ou $-a + 2b$, pour le plus grand diviseur commun.

198. Du reste, les observations des n^{os} 193 à 197 inclusivement ne sont pas particulières aux quantités algébriques, et peuvent s'appliquer aussi aux quantités numériques, comme on le verra facilement.

199. « Proposons-nous pour second exemple de trouver le plus grand commun diviseur des deux quantités $5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3$ et $7a^2 - 23ab + 6b^2$.

EXEMPLE II.

$$\begin{array}{r|l}
 5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 & 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\
 35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3 & \hline
 - 35a^3 + 115a^2b - 30ab^2 & 5a - 11 \\
 \hline
 - 11a^2b + 47ab^2 - 42b^3 & \\
 - 11a^2 + 47ab - 42b^2 & \\
 \hline
 - 77a^2 + 329ab - 294b^2 & \\
 + 77a^2 - 253ab + 66b^2 & \\
 \hline
 76ab - 228b^2 & \\
 a - 3b &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 7a^2 - 23ab + 6b^2 & a - 3b \\
 - 7a^2 + 21ab & \hline
 - 2ab + 6b^2 & 7a - 2b \\
 + 2ab - 6b^2 & \\
 \hline
 0. &
 \end{array}$$

« Il faudra donc diviser la première de ces deux quantités par la seconde; mais comme 5 ne peut être divisé exactement par 7, je multiplierai la première par 7, qui, n'étant point facteur de tous les termes de la seconde, ne peut rien changer au commun diviseur: j'aurai $35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3$ à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$. En faisant la division, je trouverai $5a$ pour quotient, et pour reste $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$. Comme l'exposant de a , dans celui-ci, est encore égal à celui de a dans le diviseur, je puis continuer la division; mais j'observe qu'il faudra encore, par la même raison que ci-dessus, multiplier par 7; d'ailleurs, je remarque que je puis ôter b dans tous les termes de $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$, parce qu'il n'est point facteur commun de tous les termes du diviseur $7a^2 - 23ab + 6b^2$; j'aurai donc, d'après ces observations, $-77a^2 + 329ab - 294b^2$ à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$: faisant la division, j'ai -11 pour quotient, et $76ab - 228b^2$ pour reste. Je vais donc diviser $7a^2 - 23ab + 6b^2$, qui m'a servi de diviseur jusqu'ici, par le reste $76ab - 228b^2$, ou plutôt par $76a - 228b$. Pour que la division pût se faire, il faudrait multiplier la première de ces deux quantités par

76; mais, avant de faire cette multiplication, il faut savoir si 76 n'est pas facteur de toute la quantité $76a - 228b$, ou s'il n'a pas quelqu'un de ses facteurs qui en soit facteur commun. Or, je remarque que 76 est trois fois dans 228; et, comme il n'est pas facteur de $7a^2 - 23ab + 6b^2$, je supprime dans le diviseur $76a - 228b$, le facteur 76, et j'ai $7a^2 - 23ab + 6b^2$ à diviser par $a - 3b$ seulement; la division faite, il ne reste rien : d'où je conclus que le commun diviseur des deux quantités proposées est $a - 3b$. » (Lacroix, Algèbre, 2^{me} édit.)

200. Il est du reste bien essentiel de remarquer que les procédés du n° 193 pourraient quelquefois se trouver en défaut.

Soit proposé, par exemple, de chercher le plus grand commun diviseur de ces deux quantités :

EXEMPLE III.

$$3.5a^3b - 3.18a^2b^2 + 3.11ab^3 - 3.6b^4 \dots (A),$$

$$9.7a^2b^2 - 9.23ab^3 + 9.6ab^4 \dots (B);$$

on ne sera point autorisé par le n° 193 à diviser (A) par ses diviseurs monomes $3b$, 3 , et b , puisque ces valeurs divisent aussi (B). On ne sera pas plus autorisé à diviser (B) par gb^2 , ni par les facteurs de gb^2 , puisque ces facteurs se trouvent aussi dans (A). Enfin, on ne pourra pas, pour rendre possible la division de (A) par (B), multiplier (A) par $3.7b$, parce que cette quantité $3.7b$ a un diviseur commun avec (B). Que faudra-t-il donc faire?

Remarquant que les quantités proposées (A) et (B) ont un facteur ou diviseur monome $3b$ commun à toutes deux, on le supprimera dans tous leurs termes, et on le mettra en réserve comme devant servir de multiplicateur au plus grand commun diviseur, que les quantités proposées auront alors sous leur nouvelle forme. Or, cette nouvelle forme sera celle ci,

$$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \dots (A'),$$

$$3.7a^2b - 3.23ab^2 + 3.6b^3 \dots (B').$$

Maintenant, pour chercher le plus grand commun diviseur de (A') et de (B'), on divisera (B') par $3b$, qui n'est pas diviseur de (A'), et qui n'a avec (A') aucun diviseur commun. Cela fait, les deux quantités seront les mêmes que dans l'exemple deuxième. On aura donc, comme dans cet exemple, $a - 3b$ pour le plus grand commun divi-

seur de (A') et de (B'), et par conséquent $(a - 3b) 3b = 3ab - 9b^2$ pour le plus grand commun diviseur de (A) et de (B).

201. Il résulte de là que la première opération à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités algébriques, est d'effacer dans tous leurs termes le facteur monome commun qu'elles pourraient avoir. On procède alors à la recherche du plus grand commun diviseur des quotients, puis on multiplie ce diviseur par le facteur monome mis en réserve.

202. Il y a encore une observation à faire qui pourra servir à simplifier, dans bien des cas, la recherche du plus grand commun diviseur.

Soient proposées les deux quantités

$$6b^5 + 15b^4a - 4b^3c^2 - 10b^2ac^2 \dots (A),$$

$$9b^3a - 27b^2ac - 6bac^2 + 18ac^3 \dots (B),$$

nous verrons d'abord qu'elles ne renferment point de facteur monome commun à toutes deux dont on puisse les débarrasser (n° 201); mais on pourra, d'après le n° 193, diviser la première par b^2 , et la seconde par $3a$, sans changer le plus grand commun diviseur. Elles deviendront par là,

$$6b^3 + 15b^2a - 4bc^2 - 10ac^2 \dots (A'),$$

$$3b^3 - 9b^2c - 2bc^2 + 6c^3 \dots (B');$$

et leur plus grand commun diviseur, s'il existe, pourra se trouver immédiatement par le procédé ordinaire.

Mais comme la lettre a , qui se trouve dans (A'), manque absolument dans (B'), le diviseur commun de ces deux quantités, s'il existe, ne pourra point contenir d' a , ou, comme on dit, il sera INDÉPENDANT d' a . Cela posé, il est probable que ce diviseur sera commun aussi aux deux parties de (A'), dont l'une contient a , et non l'autre, savoir :

$$(15b^2 - 10c^2) a \text{ et } (6b^3 - 4bc^2) a^0;$$

c'est-à-dire qu'il sera le plus grand commun diviseur de ces deux quantités et de (B').

Avant de nous assurer de la vérité de ce principe, essayons-le sur l'exemple en question.

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{r|l}
 15b^2 - 10c^2 & 6b^3 - 4bc^2 \\
 3b^2 - 2c^2 & 3b^2 - 2c^2 \\
 \hline
 -3b^2 + 2c^2 & 1
 \end{array}$$

0.

$$\begin{array}{r|l}
 3b^3 - 9b^2c - 2bc^2 + 6c^3 & 3b^2 - 2c^2 \\
 -3b^3 & + 2bc^2 \\
 \hline
 -9b^2c & + 6c^3 \\
 +9b^2c & - 6c^3 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

0.

On a cherché le plus grand commun diviseur de $15b^2 - 10c^2$ et de $6b^3 - 4bc^2$, qu'on a trouvé être $3b^2 - 2c^2$. On a ensuite cherché celui de $3b^2 - 2c^2$ et de (B') (n° 192), qui s'est trouvé le même. En sorte que $3b^2 - 2c^2$ est bien le plus grand commun diviseur de (A') et de (B') , et par conséquent de (A) et de (B) .

Pour s'en assurer mieux encore, et pour comparer en même temps les deux méthodes, nous allons rechercher ce diviseur par le procédé ordinaire. Voici l'opération figurée :

$$\begin{array}{r|l}
 6b^5 + 15b^4a - 4b^3c^2 - 10b^2ac^2 & 9b^3a - 27b^2ac - 6bac^2 + 18ac^3 \\
 6b^3 + 15b^2a - 4bc^2 - 10ac^2 & 3b^3 - 9b^2c - 2bc^2 + bc^3 \\
 \hline
 -6b^3 + 18b^2c + 4bc^2 - 12c^3 & \\
 \hline
 15b^2a + 18b^2c - 10ac^2 - 12c^3 & \\
 (5a + 6c)3b^2 - (5a + 6c)2c^2 & \\
 3b^2 - 2c^2 &
 \end{array}$$

2

$$\begin{array}{r|l}
 3b^3 - 9b^2c - 2bc^2 + 6c^3 & 3b^2 - 2c^2 \\
 -3b^3 & + 2bc^2 \\
 \hline
 -9b^2c + 6c^3 & \\
 +9b^2c - 6c^3 & \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

0.

203. Essayons maintenant de légitimer le procédé abrégé du numéro précédent, et de le généraliser.

Nous avons eu un plus grand commun diviseur qui ne contenait point d' a , ou qui était *indépendant de a* , quoique a se trouvât dans une des quantités proposées. Mais il peut arriver qu'une lettre soit dans les deux quantités proposées, et que cependant le plus grand commun diviseur soit indépendant de cette lettre, ou ne la contienne pas. On peut prouver cela en formant ces quantités de facteurs choisis dans ce but. Par exemple, les deux produits suivants

$$(2a - b)(b - 1) \text{ et } (3a^2 + b)(b - 1)$$

auront évidemment $b - 1$ pour plus grand commun diviseur, et ce diviseur sera indépendant de a , sans que a manque ni dans l'un ni dans l'autre des produits; car, effectuant les multiplications, on aura

$$2ab - b^2 - 2a + b \text{ et } 3a^2b + b^2 - 3a^2 - b.$$

Comment s'assurer, dans des cas semblables, que le plus grand commun diviseur est indépendant de a ?

Représentons par

$$Ra^3 + Sa^2 + Ta + U \dots\dots (X),$$

$$S'a^2 + T'a + U' \dots\dots (Y),$$

deux polynomes ordonnés pour la lettre a , et dont les coefficients, R, S, T, U, S', T', U' , ne contiennent point d' a .

Supposons de plus que ces polynomes n'aient aucun facteur monome commun, parce que s'ils en avaient eu un d'entrée, on les en aurait débarrassés (n° 201).

Imaginons enfin qu'ils aient un diviseur commun D , qui ne contienne point d' a . Ce diviseur, d'après ce que nous venons de dire, sera polynome.

D'ailleurs, puisque le quotient de (X) par D doit redonner (X) quand on le multipliera par D , qui ne contient point d' a , il faudra que ce quotient renferme les mêmes puissances d' a que (X) , ou qu'il soit de la forme $ra^3 + sa^2 + ta + u$. On aura ainsi

$$Ra^3 + Sa^2 + Ta + U = rDa^3 + sDa^2 + tDa + uD;$$

retranchant alors des deux membres de cette équation tous les termes du second, il ne restera rien dans celui-ci, et l'on aura

$$\left. \begin{aligned} &+ Ra^3 + Sa^2 + Ta + U \\ &- rDa^3 - sDa^2 - tDa - uD \end{aligned} \right\} = 0 \text{ (*)},$$

ou, en réduisant colonne par colonne,

$$(R - rD) a^3 + (S - sD) a^2 + (T - tD) a + (U - uD) = 0.$$

Or, comme tout ce premier membre doit se réduire à zéro pour une valeur d' a quelconque, ou pour chaque valeur particulière qu'on voudra donner à a , il faut que l'on ait séparément

$$R - rD = 0, S - sD = 0, T - tD = 0, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$rD = R, sD = S, tD = T, \text{ etc.}$$

d'où l'on tire, en divisant par D les deux membres de ces égalités,

$$r = \frac{R}{D}, s = \frac{S}{D}, t = \frac{T}{D}, \text{ etc.}$$

c'est-à-dire que D divise sans reste et séparément chacun des coefficients R, S, T , etc. de (X) ; et on prouverait la même chose de ceux de (Y) .

Donc ces coefficients R, S , etc. divisibles par un polynome D , sont eux-mêmes des polynomes.

204. Cela posé, imaginons qu'on ait ordonné pour la lettre a deux quantités dont on demande le plus grand commun diviseur, qu'on les ait aussi débarrassées du facteur monome commun qu'elles pouvaient avoir, et qu'on les ait simplifiées par le n° 193. Il est clair, par ce qui précède, que si quelque puissance de la lettre a , dans l'une ou dans l'autre des quantités proposées, un coefficient monome, ou, ce qui revient au même, si chaque puissance d' a n'est pas répétée dans deux ou plusieurs termes en y comprenant a^0 , ces deux quantités n'auront point de diviseur commun indépendant de a (Voyez les exemples 1 et 11). On pourra dans ce cas chercher leur plus grand commun diviseur par le procédé ordinaire; ou bien on pourra voir si, en ordonnant pour une autre lettre, il serait possible qu'elles eussent un diviseur indépendant de cette nouvelle lettre-là.

Du reste, cette observation qui n'exige qu'un simple coup d'œil

(*) On comprend que de l'équation $6 + 8 - 1 - 2 = 7 + 1 + 3$, on peut tirer, en retranchant des deux côtés tout le second membre, $6 + 8 - 1 - 2 - 7 - 1 - 3 = 0$.

peut donner de l'assurance dans la marche que l'on suit. Ainsi, dans le second calcul de l'exemple IV (n° 202), remarquant que les mêmes puissances de b ne sont point répétées dans plusieurs termes, on en conclura que les quantités proposées n'ont point de diviseur indépendant de b , ou que b doit se trouver dans leur plus grand commun diviseur, en sorte qu'ayant mis le reste de la première division sous cette forme $(5a+6c)3b^2 - (5a+6c)2c^2$, on ne craindra point de le diviser par $5a+6c$. En d'autres termes, on sera certain que $5a+6c$, qui divise ce reste, ne divise pas l'autre quantité $3b^3 - 9b^2c - 2bc^2 + 6c^3$; car autrement les quantités proposées auraient un diviseur $5a+6c$ indépendant de b , ce qui ne peut pas être.

205. Si, après avoir ordonné pour a , on remarque que tous les coefficients des puissances de a sont polynomes, il sera possible alors que les quantités proposées aient un diviseur commun indépendant de a , ce qui n'aura pourtant pas toujours lieu.

Mais nous avons vu que D ne divisait (X) et (Y) qu'en divisant leurs coefficients; donc il faudra chercher le plus grand commun diviseur de tous ces coefficients polynomes (n° 192), et, s'il existe, il sera le diviseur indépendant de a .

206. Si en suivant cette marche on trouve un diviseur indépendant de a , il faudra en général diviser par ce facteur les deux quantités proposées, puis voir si les quotients n'auraient point encore quelque diviseur commun dépendant de a ou contenant a . Si cela ne doit pas avoir lieu, le procédé ordinaire conduira bientôt à un reste sans a , et l'on en conclura, 1°. qu'il n'y a point de diviseur commun dépendant de cette lettre; 2°. que le diviseur indépendant déjà trouvé, multiplié par le facteur monome mis en réserve au commencement de l'opération, est le plus grand commun diviseur cherché. Mais si l'on trouve au contraire un diviseur dépendant de a , il faudra le multiplier par le facteur indépendant et par le facteur monome.

207. Dans l'exemple IV du n° 202, où les quantités proposées étaient après les simplifications,

$$(15b^2 - 10c^2)a + (6b^3 - 4bc^2)a^2,$$

$$(3b^3 - 9b^2c - 2bc^2 + 6c^3)a^2,$$

nous avons trouvé $3b^2 - 2c^2$ pour diviseur indépendant d' a . Mais nous étions sûrs qu'il n'y en avait point de dépendant de cette lettre,

puisqu'elle manquait absolument dans la seconde quantité simplifiée. Et d'ailleurs, nous n'avions point eu de diviseur monome commun : en sorte que $3b^2 - 2c^2$ était bien le plus grand commun diviseur cherché. On fera la même remarque sur plusieurs des exemples qui vont suivre.

208. Si en cherchant un diviseur indépendant de a , dans le cas où on pourrait soupçonner son existence (n° 205), on n'en trouvait point, ou, ce qui revient au même, si les coefficients polynomes des puissances de a dans les deux quantités proposées n'avaient point de diviseur commun, on se contenterait de chercher le diviseur dépendant d' a , et on le multiplierait, s'il y avait lieu, par le facteur monome commun, mis en réserve au commencement de l'opération.

209. Nous allons terminer par quelques exemples, auxquels on appliquera tous ces principes.

EXEMPLE V.

$$\begin{array}{r|l}
 2a^4 + 2a^3b - a^2bd - ab^2d & 3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3 \\
 2a^3 + 2a^2b - abd - b^2d & 2 \\
 \hline
 6a^3 + 6a^2b - 3abd - 3b^2d & \\
 - 6a^3 - 6a^2b - 8ab^2 - 8b^3 & \\
 \hline
 - 8ab^2 - 3abd - 8b^3 - 3b^2d & \\
 - (8b^2 + 3bd)a - (8b^2 + 3bd)b & \\
 a + b & \\
 \hline
 3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3 & a + b \\
 - 3a^3 - 3a^2b & \\
 \hline
 4ab^2 + 4b^3 & \\
 - 4ab^2 - 4b^3 & \\
 \hline
 0. &
 \end{array}$$

Si on eût ordonné pour d les deux quantités proposées, la première aurait pris cette forme $(ab + b^2)d - (2a^3 + 2a^2b)$, et la seconde serait restée la même. Cherchant alors le plus grand commun diviseur des coefficients $ab + b^2$ et $2a^3 + 2a^2b$, on aurait très-vite trouvé $a + b$. Cherchant ensuite le plus grand commun diviseur

de $a + b$ et de la seconde quantité proposée, on aurait reconnu que c'était $a + b$ même (n° 205).

Voilà le diviseur indépendant de d , et il n'y a pas lieu à chercher un diviseur dépendant de cette lettre, puisqu'elle manque absolument dans la seconde quantité (n° 207). Donc $a + b$ est le plus grand commun diviseur; car on n'a point séparé de diviseur monome commun.

EXEMPLE VI

Tiré des Leçons de mathématiques de Marie.

$$\begin{array}{r|l}
 3bcq + 3omp + 18bc + 5mpq & 24ad - 7fgq - 42fg + 4adq \\
 (3bc + 5mp)q + 18bc + 3omp & (4ad - 7fg)q + (4ad - 7fg)6 \\
 - (3bc + 5mp)q - 18bc - 3omp & q + 6 \\
 \hline
 0 & 3bc + 5mp.
 \end{array}$$

Si on eût ordonné pour b (cette lettre étant une de celles qui manquent dans la seconde quantité), on n'aurait eu qu'à chercher le plus grand commun diviseur de $3cq + 18c$ et de $5mpq + 3omp$, ou en simplifiant, de $q + 6$ et de $q + 6$, qui est $q + 6$ même. Or, ce binome divisant aussi la seconde quantité proposée, est le plus grand commun diviseur cherché (n° 207).

EXEMPLE VII

Tiré de l'Algèbre de Clairaut.

$$\begin{array}{r|l}
 a^2d^2 - a^2c^2 + c^4 - c^2d^2 & 4a^2d - 2ac^2 - 4acd + 2c^3 \\
 (d^2 - c^2)a^2 + c^4 - c^2d^2 & 2da^2 - (c^2 + 2cd)a + c^3 \\
 \hline
 (d^2 - c^2)2da^2 + 2c^4d - 2c^2d^3 & (d^2 - c^2) \\
 - (d^2 - c^2)2da^2 + (d^2 - c^2)(c^2 + 2cd)a & \\
 - (d^2 - c^2)c^3 & \\
 \hline
 (-c^4 - 2c^3d + c^2d^2 + 2cd^3)a - (-c^4 - 2c^3d + c^2d^2 + 2cd^3)c & \\
 a - c & \\
 \hline
 2da^2 - c^2a - 2cda + c^3 & a - c \\
 - 2da^2 + 2cda & 2da - c^2 \\
 \hline
 - c^2a + c^3 & \\
 + c^2a - c^3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Clairaut a opéré, dans cet exemple, précisément comme nous venons de le faire ici : mais si l'on ordonnait pour d , les deux quantités proposées deviendraient :

$$(a^2 - c^2) d^2 - (a^2 c^2 - c^4) \text{ et } (4a^2 - 4ac) d - (2ac^2 - 2c^3).$$

Cherchant alors le plus grand commun diviseur des quatre binômes renfermés entre les parenthèses, on trouverait $a - c$ presque sans calcul. Voilà le diviseur indépendant de d .

Divisant les deux quantités proposées par $a - c$, on aurait les deux quotients suivants, $(d^2 - c^2) a + (d^2 - c^2) c$ et $4ad - 2c^2$, que l'on verrait bientôt n'avoir point de diviseur dépendant de d , ou n'avoir plus de diviseur commun (n° 206). Donc $a - c$ serait le diviseur cherché.

EXEMPLE VIII.

$$5bm^2a^2 + 10bmna^2 + 5bn^2a^2 + 5bm^2a + 5bn^2a + 5bm + 5bn \dots (A),$$

$$15bm^2a - 15bn^2a + 25bm^3 + 75bm^2n + 75bmn^2 + 25bn^3 \dots (B).$$

On cherchera d'abord si (A) et (B) n'ont point de diviseur commun monome, et si cela est on le séparera. On ordonnera ensuite les quotients pour une des lettres, comme a , puis on cherchera s'ils n'ont point de diviseur commun, pour avoir ainsi le diviseur indépendant de a (n° 205); on continuera comme il est dit au n° 206.

Le plus grand commun diviseur sera $5b(m+n)$.

EXEMPLE IX.

$$4ma^5 - 4na^5 + 12mba^2 - 12nba^2 + 12mb^2a - 12nb^2a + 4mb^5$$

$$- 4nb^5 \dots (A),$$

$$4pa^2 + 4qa^2 + 8bpa + 8bqa + 4b^2p + 4b^2q \dots (B).$$

On séparera le diviseur monome commun; on cherchera le diviseur indépendant de a , on n'en trouvera point.

On simplifiera les quotients déjà ordonnés pour a , et on cherchera leur plus grand commun diviseur par le procédé ordinaire.

Celui des deux quantités proposées sera $4(a^2 + 2ab + b^2) = 4(a+b)^2$.

EXEMPLE X.

$$3a^2b^5m + 3a^5b^3m - 3a^2b^5n - 3a^5b^3n + 3b^5cm + 3a^3b^3cm$$

$$- 3b^5cn - 3a^3b^3cn \dots (A),$$

$$15a^2b^5m + 15b^5cm - 15a^2b^3n - 15b^3cn - 9a^3b^2m - 9ab^2cm$$

$$- 9a^3b^2n + 9ab^2cn \dots (B).$$

On séparera le diviseur commun monome $3b^2$, on ordonnera pour a , et on cherchera le diviseur indépendant de a , qu'on trouvera être $m - n$.

On divisera par $m - n$ les deux quantités (A) et (B), après qu'on les aura débarrassées du facteur commun monome. Les deux quotients ne contiendront plus que les lettres a , b et c ; et l'on cherchera si ces quotients n'ont point de diviseur commun dépendant de a . On trouvera $a^2 + c$.

Alors on multipliera entre eux ces trois diviseurs pour avoir le plus grand commun diviseur $3b^2(m - n)(a^2 + c)$.

210. Nous saurons donc, d'après tout cela, trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales, lorsque ces quantités ne seront pas *premières entre elles* (*Arith.* n° 229); mais quand elles n'auront point de diviseurs communs, on ne pourra pas le reconnaître dans tous les cas aussi facilement qu'en arithmétique, où les restes diminuant sans cesse, il s'en trouve enfin toujours un égal à l'unité.

Quelquefois on pourra voir immédiatement que les quantités proposées n'ont point de diviseur commun, et l'essai que l'on en ferait n'apprendrait rien de plus. Il est bien clair, par exemple, que $a + b$ et $c + d$ sont dans ce cas.

D'autres fois ce ne sera que par l'essai que l'on pourra s'assurer de la non-existence du diviseur; et cet essai sera d'autant plus nécessaire que l'on aura moins l'habitude du calcul, et la connaissance de la composition des quantités algébriques.

Si l'on demandait, par exemple, le plus grand diviseur commun de $a^2 + 2ab + b^2$ et de $a - b$, et que l'on ne pût pas prononcer d'avance sur ce diviseur on opérerait ainsi:

$$\begin{array}{r|l}
 a^2 + 2ab + b^2 & a - b \\
 - a^2 + \quad ab & a + 3b \\
 \hline
 3ab + b^2 & \\
 - 3ab + 3b^2 & \\
 \hline
 4b^2 &
 \end{array}$$

Parvenu là, il faudrait diviser $a - b$ par $4b^2$, ce que l'on voit bien n'être pas possible.

Mais, par les observations du n° 193 on peut, sans changer le plus grand commun diviseur, diviser le reste $4b^2$ par lui-même, puisqu'il ne divise pas $a-b$, et qu'il n'a point de diviseur commun avec $a-b$: ce reste se réduisant ainsi à 1, on n'aura plus à diviser que $a-b$ par 1, et la division se faisant sans reste, 1 sera le plus grand commun diviseur.

Ce procédé généralisé conduirait toujours, comme en arithmétique, au diviseur 1, lorsque les quantités algébriques seraient premières entre elles; mais il n'aurait aucune utilité, puisqu'il faudrait, pour le mettre en pratique, avoir déjà reconnu que la quantité qu'on voudrait diviser par elle-même, ne saurait diviser l'autre quantité, et n'aurait avec elle aucun diviseur commun.

211. Quand on a trouvé le plus grand commun diviseur de deux quantités, on peut exprimer de la manière la plus simple le rapport que ces quantités ont entre elles; il faut pour cela considérer le plus grand commun diviseur comme une nouvelle unité à laquelle on rapporte les quantités proposées.

Sachant par exemple que le plus grand commun diviseur de 91 et de 294 est 7, on trouvera que le rapport de 91 à 294 égale celui de 13 à 42, parce que la nouvelle unité 7 entre 13 fois dans 91, et 42 fois dans 294.

Le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités n'est autre chose, sous ce point de vue, que leur *plus grande commune mesure*. Aussi emploie-t-on en géométrie la méthode du plus grand commun diviseur pour chercher la plus grande commune mesure des lignes. Si l'on propose, par exemple, deux lignes A et B, on porte la plus petite B sur la plus grande A autant de fois que possible; s'il y a un reste R, on le porte sur B autant de fois que possible; s'il y a un second reste R', on le porte sur le premier autant de fois que possible; on continue ainsi jusqu'à ce qu'un des restes soit contenu un nombre de fois juste dans le précédent, et ce reste ainsi contenu dans l'autre est la plus grande commune mesure des lignes A et B.

Mais on démontre en géométrie qu'il y a des lignes qui, quoiqu'on puisse les mesurer séparément, n'ont point entre elles de commune mesure. Si l'on mène, par exemple, d'un angle à l'autre dans un carré une ligne droite qui traverse la figure, cette ligne, qu'on appelle

diagonale, n'a point de commune mesure avec le côté du carré; on peut pourtant partager chacune de ces lignes à part en autant de parties égales qu'on le voudra; mais quelle que soit la partie qui entre un certain nombre de fois juste dans une des lignes, elle n'entrera pas un nombre de fois juste dans l'autre, et laissera toujours un reste plus petit qu'elle. Voilà ce que démontre la géométrie, et ces lignes comparées entre elles sont dites *incommensurables*. La diagonale, par exemple, est incommensurable avec le côté du carré, et réciproquement.

Dans le calcul, nous n'avons pas encore eu d'exemples de nombres incommensurables, car lorsque nous avons dit que deux nombres n'avaient point de commun diviseur, nous avons seulement voulu dire qu'ils n'en avaient point d'autre que l'unité. Tous les nombres entiers ont au moins pour commune mesure l'unité, et il est facile d'assigner la commune mesure des fractions entre elles et avec l'unité : il suffit pour cela de réduire tous ces nombres au même dénominateur.

Ainsi, en réduisant $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ et 1 en douzièmes, on a $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$ et $\frac{12}{12}$, nombres dont la commune mesure ou l'unité commune est $\frac{1}{12}$ (*Arith.* n° 255, note).

Mais comme on démontre encore en géométrie que, si le côté du carré est pris pour unité, la diagonale est égale à la racine seconde de 2 ou au nombre qui, multiplié par lui-même, donne 2, il faut rechercher quel peut être ce nombre, et s'il a une mesure commune avec l'unité. Plus généralement, il faut examiner si les racines secondes, troisièmes, quatrièmes, etc. de nombres quelconques sont commensurables entre elles et avec l'unité.

Cela nous ramène à traiter de l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines (n° 65) (*Arith.* n° 74 à 77).

CHAPITRE VII.

De l'élevation aux puissances et de l'extraction des racines dans les monomes,

Nouveaux détails sur les incommensurables.

212. Les mathématiciens sont convenus d'appeler *puissance* nième d'une quantité quelconque Δ , directe ou inverse, le produit dans lequel cette quantité, prise avec son signe, est n fois facteur, n étant un nombre entier direct et plus grand que 1; et d'appeler *racine* nième de ce produit la quantité même qui a servi à le former (n° 65.) (*Arith.* n° 76).

Ainsi $+\Delta \times +\Delta = +\Delta^2$ est la *seconde puissance* ou le *carré* de $+\Delta$, et cette quantité même est la *racine seconde* ou *carrée* de $+\Delta \times +\Delta = +\Delta^2$ (*Arith.* n° 74 avec la note).

Ainsi $-\Delta \times -\Delta \times -\Delta = -\Delta^3$ est la *troisième puissance* ou la *cube* de $-\Delta$, et cette quantité même est la *racine troisième* ou *cube* de $-\Delta \times -\Delta \times -\Delta = -\Delta^3$ (*Arith.* n° 75), et ainsi de suite.

On peut donc dire aussi que la *racine* n^{me} d'une quantité quelconque B , directe ou inverse, est une *seconde* quantité qui, élevée à la puissance n^{me} , ou prise n fois comme facteur, redonne la première B .

213. Pour indiquer l'élevation à la puissance n^{me} de la quantité $\pm \Delta$, on écrit $(\pm \Delta)^n$, et l'on prononce $\pm \Delta$ élevé à n (n° 65).

Pour indiquer l'extraction de la racine n^{me} de la quantité $\pm B$, on écrit, comme nous le savons déjà, $\sqrt[n]{\pm B}$, et l'on prononce *racine* n^{me} de $\pm B$ (n° 68 bis). Mais lorsque $n = 2$, on écrit simplement $\sqrt{\pm B}$, en supprimant dans ce cas le chiffre 2, qui est censé écrit à l'ouverture du signe radical, et l'on prononce *racine* de $\pm B$.

214. Si la quantité Δ est directe, il est clair qu'on aura $(+\Delta)^n = +\Delta^n$, quelle que soit la valeur de n ; c'est-à-dire qu'une puissance quelconque d'une quantité directe est directe, parce que des facteurs directs ne peuvent donner qu'un produit direct.

Mais si la quantité A est inverse, on aura $(-A)^n = \pm A^n$, le signe supérieur répondant au cas où n serait pair, et le signe inférieur à celui où n serait impair; car un nombre pair de facteurs inverses donne un produit direct, tandis qu'un nombre impair de ces facteurs donne un produit inverse.

215. Il résulte de là, 1° que $\sqrt[n]{+B} = \pm \sqrt[n]{B}$ si n est pair, et que $\sqrt[n]{+B} = +\sqrt[n]{B}$ si n est impair (*); c'est-à-dire que généralement parlant une racine paire d'une quantité directe est ambiguë, et qu'elle peut être indifféremment affectée du signe $+$ ou du signe $-$, si rien dans la question qui a conduit à cette racine ne détermine lequel des deux signes doit être préféré, mais qu'une racine impaire d'une quantité directe est nécessairement directe.

216. Il résulte de là, 2° que $\sqrt[n]{-B}$ ne désigne aucune quantité si n est pair, parce qu'il n'y a aucune quantité directe ou inverse qui étant facteur un nombre pair de fois dans un produit, rende ce produit inverse, et que $\sqrt[n]{-B} = -\sqrt[n]{B}$ si n est impair: c'est-à-dire qu'une racine inverse est nécessairement inverse.

217. Après avoir examiné ce qui a rapport aux signes, nous en ferons abstraction, et nous examinerons ce qui a rapport aux quantités A et B supposées monomes; n étant d'ailleurs toujours un nombre entier direct, et plus grand que 1 (Relisez n° 70, 9°, et n° 76, premier alinéa).

218. Si $A = 0$, on a $A^n = 0^n = 0$.

219. Si $A = 1$, on a $A^n = 1^n = 1$.

220. Si A est un entier plus grand que 1, A^n sera un entier d'autant plus grand que n sera plus grand.

221. Si A est un nombre fractionnaire plus grand ou plus petit que 1, représenté par $\frac{\alpha}{\beta}$, α et β étant des entiers, on aura

(*) Dans les seconds membres de ces deux équations B est supposé n'avoir aucun signe sous le radical, et on y considère cette quantité d'une manière absolue, comme en arithmétique.

$$A^n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta} \times \text{etc.} = \frac{\alpha\alpha\alpha \text{ etc.}}{\beta\beta\beta \text{ etc.}} = \frac{\alpha^n}{\beta^n}.$$

Or, la dernière valeur $\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ se tire immédiatement de la première $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$, ce qui donne la règle suivante (*):

Pour élever un nombre fractionnaire à une puissance n, il faut élever à cette puissance le numérateur et le dénominateur du nombre fractionnaire.

Alors, si $\alpha > \beta$, le résultat sera d'autant plus grand que n sera plus grand. Mais si $\alpha < \beta$, le résultat sera d'autant plus petit que n sera plus grand.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = \frac{48}{27}; \quad \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125};$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} = \frac{75}{128}; \quad \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512}.$$

222. Nous n'examinerons pas le cas où A serait une somme ou une différence, parce que nous voulons, pour le moment, rester dans les monomes, ou du moins dans les quantités qui en ont la forme.

Mais si A est un produit représenté par $\alpha\beta\gamma\delta$, etc., on aura $A^n = (\alpha\beta\gamma\delta \text{ etc.})^n = (\alpha\beta\gamma\delta \text{ etc.}) (\alpha\beta\gamma\delta \text{ etc.}) (\alpha\beta\gamma\delta \text{ etc.}) \text{ etc.} = \alpha\alpha\alpha \dots \beta\beta\beta \dots \gamma\gamma\gamma \dots \delta\delta\delta \dots \text{etc.} = \alpha^n \beta^n \gamma^n \delta^n \text{ etc.}$

Or, la dernière valeur se tire immédiatement de la première, et donne la règle suivante (n° 221, note):

Pour élever un produit à une puissance n, il faut élever à cette puissance chaque facteur du produit proposé.

Sur quoi il faut observer que, si le produit a un coefficient numérique, ce coefficient étant aussi facteur et pouvant être représenté par α , il est soumis à la loi que nous venons d'énoncer.

$$(2ab)^4 = 16a^4 b^4; \quad (5abc)^5 = 3125a^5 b^5 c^5;$$

$$\left(\frac{3a}{5b}\right)^5 = \frac{243 a^5}{3125 b^5}; \quad \left(\frac{7}{11} ab\right)^2 = \frac{49}{121} a^2 b^2.$$

223. Si A était un quotient, ce serait le cas du n° 221.

(*) Une règle est l'indication du chemin le plus court ou du procédé le plus général pour arriver à un résultat cherché. Pour découvrir cette règle, on passe souvent par divers intermédiaires, qu'il faut ensuite franchir pour avoir l'énoncé de la règle. C'est ce qui est bien sensible ici, et dont nous aurons de fréquents exemples dans ce chapitre et le suivant.

Mais si A est une puissance déjà formée et représentée par a^m , on aura $A^n = (a^m)^n = a^{m \cdot n}$. $a^m \cdot a^m \cdot a^m$ etc. $= a^{m+m+m+\dots} = a^{mn}$.

Ce qui fait voir (n° 221, note) que, pour élever à une puissance n une quantité qui a déjà un exposant, il faut multiplier cet exposant par celui de la puissance demandée.

Remarquez que $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$.

$(2^3)^2 = (2)^6 = (2^2)^3 = 64$, et en effet $2^3 = 8$ et $8^2 = 64$; de même, $2^2 = 4$ et $4^3 = 64$.

224. Si A était une racine affectée du signe radical (n° 213), comme $\sqrt[p]{a}$, et qu'on voulût l'élever à la puissance n , figurée ainsi, $(\sqrt[p]{a})^n$, ce cas appartiendrait au calcul des quantités qui sont exprimées au moyen des signes radicaux, et dont nous avons fait un chapitre à part, qu'on trouvera à la suite de celui-ci.

Nous devons donc nous occuper actuellement des différentes valeurs particulières que peut prendre la lettre n dans la formule $\sqrt[n]{B}$ (n° 217).

Mais avant cela appliquons à quelques exemples un peu composés les règles des trois derniers numéros :

$$(2a^3b^2c)^4 = 16a^{12}b^8c^4; (abcm)^n = a^{n}b^{n}c^{n}m^{n};$$

$$(5a^5b^2mcp + d)^5 = 8125a^{25}b^{10}m^5c^5p^5d^5;$$

$$(7ab^{10}c^5md^{5n-4})^{2p} = 7^{2p}a^{2p}b^{20p}c^{10p}d^{6np-8p};$$

$$\left(\frac{3a^2bcm-2n}{4d^8epx}\right)^4 = \frac{81a^8b^4c^4m-8n}{64d^{32}e^4p^4x^4}.$$

On a aussi (n°s 70, 9°; 76, 217) :

$$\left(\frac{3a^2b-5c}{2m-n}\right)^4 = \frac{(3a^2b-5c)^4}{(2m-n)^4};$$

$$((3a^2b+4cd)(m+n))^5 = (3a^2b+4cd)^5(m+n)^5;$$

$$((3a^2b-5c+d)^7)^9 = ((3a^2b-5c+d)^9)^7 = (3a^2b-5c+d)^{63}.$$

225. Reprenons maintenant la formule générale de l'extraction des racines, $\sqrt[n]{B}$, en faisant toujours abstraction des signes $+$ ou $-$, et supposant que n soit un nombre entier direct et plus grand que 1 (n° 217).

Si $B=0$, on a $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{0} = 0$; et en effet $0^n = 0$ (n° 218).

226. Si $B=1$, on a $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{1} = 1$; et en effet $1^n = 1$ (n° 219).

227. Si B est un nombre entier plus grand que 1, il peut arriver deux cas :

1°. Ce nombre B , dont il faut extraire la racine n^{me} , peut être tel que cette racine soit aussi un nombre entier, comme s'il fallait, par exemple, extraire la racine seconde de 81, qui est 9, ou la racine troisième de 125, qui est 5, etc.

2°. Le nombre proposé peut être tel que sa racine demandée ne soit pas un nombre entier, mais qu'elle tombe entre deux de ces nombres, comme si on demandait la racine seconde de 7, qui est évidemment plus grande que 2 parce que $2^2=4$, et plus petite que 3 parce que $3^2=9$, ou la racine troisième de 30, qui est plus grande que 3 parce que $3^3=27$, et plus petite que 4 parce que $4^3=64$, etc.

Dans le premier cas, B sera égal à la puissance n^{me} d'un autre nombre entier, c'est-à-dire qu'on aura $B = a^n$. Alors on trouvera $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a^n} = a$, ce qui est évident par la définition des puissances et des racines; et en effet $(a)^n = a^n = B$.

Dans le second cas, B ne sera égal à la puissance n^{me} d'aucun autre nombre entier. Quelle sera donc la valeur de l'expression $\sqrt[n]{B}$? c'est ce qu'il faut examiner.

228. Si l'on faisait $n=2$ et $B=2$, on aurait $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{2} = \sqrt{2}$ (n°s 211, 213), et cela désignerait le nombre qui, multiplié par lui-même, doit donner 2.

Or, ce nombre est plus grand que 1, puisque $1 \times 1 = 1$, et il est plus petit que 2, puisque $2 \times 2 = 4$. Il paraît donc qu'il doit être égal à l'unité plus une fraction.

Si nous essayons $1\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$, nous aurons $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$, ce qui est trop grand de $\frac{1}{4}$; mais $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$ donnerait $\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$, ce qui est trop petit de $\frac{7}{16}$; en prenant $1\frac{5}{8}$ ou $\frac{11}{8}$, on trouverait $\frac{11}{8} \times \frac{11}{8} = \frac{121}{64}$, ce qui est encore trop petit de $\frac{7}{64}$.

Il est clair qu'en continuant de tâtonner ainsi, on pourrait approcher toujours plus du nombre cherché; mais la question est de savoir si on y arriverait enfin.

Pour généraliser cette recherche, observons que $\sqrt[n]{B}$, dans le cas que nous supposons, ne peut, comme nous l'avons déjà dit, désigner aucun nombre entier; car si on avait $\sqrt[n]{B} = a$, cette lettre étant un entier, on aurait $B = a^n$, ce qui est contre notre supposition.

Si l'expression $\sqrt[n]{B}$ ne peut désigner un entier, elle semble donc devoir désigner un nombre fractionnaire; mais ce nombre élevé à la puissance n devrait redonner B , qui est un entier plus grand que 1. Il faut donc voir si un nombre fractionnaire multiplié par lui-même une fois, deux fois, trois fois, etc. peut donner un produit entier.

229. Représentons par $\frac{\alpha}{\beta}$ un nombre fractionnaire quelconque réduit à sa plus simple expression: α sera un entier égal à un nombre premier (*Arith.* n° 106) ou à un produit de nombres premiers, et il en sera de même de β ; mais aucun des nombres premiers facteurs de α ne se trouvera parmi les facteurs de β , et réciproquement: car nous avons supposé que la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ était réduite à sa plus simple expression.

230. D'un autre côté, comme on a $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n}$ (n° 221), il faudra pour que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$ soit un nombre entier, que α^n soit exactement divisible par β^n , ou que β^n soit facteur de α^n .

231. Or, il ne peut y avoir dans α^n d'autres nombres premiers que ceux qui sont dans α , ni dans β^n d'autres nombres premiers que ceux qui sont dans β ; seulement chacun des nombres premiers qui sont dans α , sera répété comme facteur dans α^n deux ou plusieurs fois suivant la valeur de n , et il en sera de même des nombres premiers de β et de β^n . Aucun des nombres premiers qui sont facteurs de α^n , ne sera donc facteur de β^n , et réciproquement (n° 229).

232. Cela posé, désignons par $p, p', p'', p''', \text{etc.}$ les nombres premiers égaux ou inégaux facteurs de α^n , et nous aurons,

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \frac{pp'p''p''' \text{etc.}}{\beta^n}$$

et pour que β^n soit facteur de α^n , il faudra que β^n soit égal ou à un

des p , ou au produit de deux p , ou au produit de trois p , ou, etc. (*Arith.* n° 219).

233. Mais, 1°. β^n qui est un produit ne peut être égal à un nombre premier seul, comme p ou p' ou p'' , etc.

2°. On ne peut avoir β^n égal à un produit de deux ou plusieurs p : car si l'on avait, par exemple,

$$\beta^n = pp'p'' \text{ etc.}$$

on en tirerait, en divisant les deux membres par p ,

$$\frac{\beta}{p} = p' p'' \text{ etc.}$$

mais $p' p''$ etc. étant un entier, il faudrait donc que $\frac{\beta^n}{p}$ fût aussi un entier; il faudrait donc que p divisât exactement β^n , ou fût facteur de β^n , ce qui n'est pas.

234. Il résulte de là qu'un nombre fractionnaire, multiplié par lui-même une fois, deux fois, trois fois, etc. ne peut donner un produit entier, et que la racine n^{me} d'un entier (n° 217), ne saurait être une fraction.

235. Or, nous avons vu que $\sqrt[n]{B}$ ne pouvait désigner un entier (n° 228). Cette expression n'étant donc ni celle d'un entier, ni celle d'une fraction, semblerait n'avoir aucune valeur, et cependant nous avons aussi vu (n° 228) qu'en faisant des suppositions particulières pour B et pour n , on arrivait à des résultats qui pouvaient être considérés comme valeurs approchées de $\sqrt[n]{B}$.

236. Tout cela prouve que $\sqrt[n]{B}$, dans notre supposition actuelle (n° 228), est une quantité qui n'a aucune commune mesure ni avec les entiers ni avec les fractions, et par conséquent aucune commune mesure avec l'unité (n° 211) : c'est ce que l'on appelle dans le calcul une quantité *incommensurable* ou *irrationnelle*, cette dernière expression faisant entendre qu'on ne peut assigner exactement le rapport ou la raison qu'elle a avec l'unité.

Les nombres entiers et fractionnaires s'appellent, par opposition à ces derniers, des nombres *rationnels* ou des quantités rationnelles.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{5}$, etc. sont des quantités incommensurables ou irrationnelles.

Mais $\sqrt[4]{1} = 1$, $\sqrt[4]{4} = 2$, $\sqrt[3]{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$,
 $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$, etc. sont des quantités rationnelles.

En algèbre $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{b^3}$, $\sqrt[n]{b^2}$, $\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^m}$ sont réputées incommensurables, parce qu'on ne peut extraire ces racines qu'en donnant aux lettres telles ou telles valeurs particulières.

En revanche $\sqrt[n]{a^2} = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[4]{a^4} = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$ sont réputées rationnelles, quoique dans tel ou tel cas particulier a lui-même puisse avoir une valeur incommensurable, comme si l'on supposait $a = \sqrt[3]{2}$, ou $a = \sqrt[3]{2}$, ou $a = \sqrt[3]{5}$, etc. (n° 84).

237. Il faut bien comprendre que les nombres incommensurables ont une valeur très-réelle, quoiqu'on ne puisse exprimer exactement cette valeur en unités et parties de l'unité; car ces incommensurables peuvent se représenter très-exactement par des lignes.

Par exemple, si l'on représente l'unité par une ligne d'une longueur prise à volonté, la diagonale du carré construit sur cette ligne comme côté, désignera la longueur exacte de $\sqrt{2}$, mais ne pourra être traduite en nombres qu'au moyen d'une approximation, ou du signe $\sqrt{}$, ou de quelque chose d'équivalent (n° 211).

238. Si B est un nombre fractionnaire $\frac{\alpha}{\beta}$, plus grand ou plus petit que 1, on aura

$$\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} :$$

car l'extraction des racines est le contraire de l'élevation aux puissances.

Et en effet $\left(\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{\alpha})^n}{(\sqrt[n]{\beta})^n}$ (n° 221) $= \frac{\alpha}{\beta}$, ce qui est évident d'après la définition des puissances et des racines.

On voit par là que pour extraire une racine n d'un nombre fractionnaire, il faut extraire cette racine du numérateur et du dénominateur du nombre proposé (n° 221).

Alors cette fraction $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}}$ gardera sa forme, ou prendra l'une ou l'autre de celles-ci, $\frac{r}{t}$, $\frac{r}{n}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{t}$, suivant que ses deux termes seront irrationnels ou rationnels, ou que le numérateur ou que le dénominateur seront seuls rationnels.

$$\sqrt[5]{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{7}}, \quad \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}, \quad \sqrt[25]{\frac{5}{11}} = \frac{5}{\sqrt[11]{11}}, \quad \sqrt[11]{\frac{11}{5}} = \frac{\sqrt[11]{11}}{5}.$$

Faites aussi les preuves des opérations du n° 221.

239. Voulant rester dans les monomes, ou du moins dans les quantités qui en ont la forme, nous n'examinerons pas le cas où B serait une somme ou une différence proprement dites.

Mais si B est un produit représenté par $a\beta\gamma\delta$ etc. on aura $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a\beta\gamma\delta \text{ etc.}} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{\beta} \sqrt[n]{\gamma} \sqrt[n]{\delta} \text{ etc.}$: car l'extraction des racines est le contraire de l'élevation aux puissances.

Et en effet $(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{\beta} \sqrt[n]{\gamma} \sqrt[n]{\delta} \text{ etc.})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{\beta})^n (\sqrt[n]{\gamma})^n (\sqrt[n]{\delta})^n \text{ etc. (n° 222)} = a\beta\gamma\delta \text{ etc.}$ ce qui est évident par la définition des puissances et des racines.

On voit par là que, pour extraire une racine n d'un produit, il faut extraire cette racine de chacun des facteurs du produit donné (n° 222) :

Sur quoi il faut observer que si le produit a un coefficient numérique, ce coefficient étant aussi facteur, et pouvant être représenté par α , il est soumis à la loi que nous venons d'énoncer.

Du reste, ou toutes les racines pourront s'extraire, ou aucune ne le pourra, ou quelques-unes seulement le pourront, ce qui modifiera la forme du résultat.

$$\sqrt[5]{27a^5b^5c^5} = 3abc; \quad \sqrt[5]{7ab} = \sqrt[5]{7} \sqrt[5]{a} \sqrt[5]{b}; \\ \sqrt[4]{16a^2bc} = 4a \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{c} = 4a \sqrt[4]{bc}.$$

N. B. Cette dernière forme peut avoir lieu parce qu'on peut considérer (bc) comme un seul facteur, dans l'expression $\sqrt[n]{16a^2bc}$.

Faites aussi les preuves des opérations du n° 222.

240. Si B était un quotient, ce serait le cas du n° 238.

Mais si B est une puissance représentée par un exposant effectif, comme, par exemple, a^m , on aura $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$: car l'extraction des racines est le contraire de l'élevation aux puissances.

Et en effet $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$ (n° 223) $= a^m$:

Ce qui fait voir que, pour extraire une racine n d'une quantité qui a un exposant, il faut diviser cet exposant par celui de la racine demandée (n° 223).

Alors, si l'exposant m de la puissance a^m est exactement divisible par l'exposant n de la racine demandée, l'exposant $\frac{m}{n}$ du résultat sera entier; mais si m n'est pas divisible par n , l'exposant $\frac{m}{n}$ sera fractionnaire.

$$\sqrt[3]{8a^6b^12c^3} = \sqrt[3]{2^3a^6b^{12}c^3} = 2a^2b^4c;$$

$$\sqrt[3]{a^5b^5c} = a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}c^{\frac{1}{3}};$$

$$\sqrt[3]{9a^2b^{10}c^5} = \sqrt[3]{3^2a^2b^{10}c^5} = 3ab^5c^{\frac{5}{3}}.$$

Faites aussi les preuves des opérations du n° 223, et enfin celles des opérations du n° 224.

241. Du reste, les exposants fractionnaires nous ramènent à l'examen des exposants en général, examen qui d'ailleurs devait naturellement suivre celui des signes et celui des valeurs des quantités A et B (n° 217). Et nous n'avons point à examiner le cas où B serait de la forme $\sqrt[p]{\beta}$, qui donnerait $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{\beta}} = \sqrt[n]{p}{\beta}$, puisque ce cas est renvoyé au chapitre suivant (n° 224).

Cependant nous invitons les lecteurs à faire, avant d'aller plus loin, et au moyen des règles des trois derniers numéros, les preuves des élévations aux puissances contenues dans le n° 224.

242. Les exposants qui rappellent véritablement l'idée des puissances et des racines, sont les exposants 2, 3, 4, 5, 6, etc. (n° 212); ce n'est que par extension que l'on dit qu'une quantité est élevée à

la première puissance ou élevée à 1 lorsque son exposant est 1, qu'elle est élevée à 0, élevée à -2 , élevée à $\frac{5}{4}$, etc. lorsque son exposant est 0, -2 , $\frac{5}{4}$, etc., et de même pour les racines.

243. Nous avons déjà vu précédemment que $a^1 = a$ (n° 76), que $a^0 = 1$ (n° 88), et que $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ (n° 90).

244. Quant aux exposants fractionnaires, ce que nous avons dit au n° 240 doit nous faire comprendre qu'ils indiquent des racines à extraire : car, puisque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, il est clair que réciproquement $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$:

Ce qui fait voir que lorsqu'on a une quantité avec un exposant fractionnaire, on peut, au lieu de cela, écrire cette quantité sous le signe radical, en mettant à l'ouverture de ce signe le dénominateur de l'exposant fractionnaire, et en faisant servir son numérateur d'exposant pour la quantité sous le signe radical, et réciproquement.

$$\text{Ainsi, } (3a^2b)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(3a^2b)^2};$$

$$\sqrt[7]{5a^4b^2} = \sqrt[7]{(5a^4b^2)^1} = (5a^4b^2)^{\frac{1}{7}};$$

$$(2a^3b - 7c^2d)^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{(2a^3b - 7c^2d)^5};$$

$$\sqrt[m]{2a^3b - 7c^2d} = \sqrt[m]{(2a^3b - 7c^2d)^1} = (2a^3b - 7c^2d)^{\frac{1}{m}}.$$

(Voyez nos 70, 90, 76, premier alinéa, 217).

Cette règle, qui en renferme deux, la directe et la réciproque, mérite une attention particulière, parce qu'elle est d'un grand usage, et qu'elle peut entre autres résoudre la plupart des difficultés que présente le calcul des quantités affectées du signe radical (nos 68 bis, 213). Nous pourrions nous en convaincre quand nous en serons au chapitre suivant. En attendant, continuons l'examen des exposants.

245. Si dans la formule générale de l'extraction des racines $\sqrt[n]{B}$, on suppose $n=1$, on a $\sqrt[n]{B} = \sqrt[1]{B^1} = B^{\frac{1}{1}} = B$.

C'est-à-dire que dans ce cas le radical peut tout simplement se supprimer.

246. Si l'on suppose $n=0$, on a $\sqrt[n]{B} = \sqrt[0]{B^1} = B^{\frac{1}{0}}$ (n° 240) = $\frac{1}{B^1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}}$ (n° 159).

Si l'on suppose $n = -m$, on a $\sqrt[n]{B} = \sqrt[-m]{B} = B^{-\frac{1}{m}}$ (n° 240)
 $= \frac{1}{\sqrt[m]{B}}$ (n° 90) $= \frac{1}{\sqrt[m]{B}}$ (n° 244) $= \frac{\sqrt[m]{1}}{\sqrt[m]{B}}$ (n° 226) $= \sqrt[m]{\frac{1}{B}}$ (n° 238).

247. Si l'on suppose $n = \frac{m}{p}$, on a $\sqrt[n]{B} = \sqrt[\frac{m}{p}]{B} = B^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{B^p}$ (n° 244).

Alors si $p = 0$, on a $\sqrt[\frac{m}{0}]{B} = B^{\frac{0}{m}} = B^0 = 1$.

248. Maintenant, puisque nous avons découvert des quantités qui ne peuvent s'exprimer exactement qu'au moyen des signes radicaux ou des exposants fractionnaires, on sent qu'il peut être nécessaire, dans bien des cas, de savoir opérer par addition, soustraction, multiplication, division, etc. sur ces quantités-là. Nous allons nous occuper de ces calculs dans le chapitre suivant, comme nous l'avons déjà annoncé aux n°s 224, 241, après avoir cependant tiré de tout ce qui précède deux ou trois conséquences qui pourront nous être fort utiles.

Du reste, les quantités affectées de signes radicaux (n°s 68 bis, 213) sont elles-mêmes désignées par les noms de *quantités radicales*

ou de *radicaux*. Ainsi $\pm \sqrt[n]{a^m}$ est une quantité radicale, ou simplement un radical; $\pm$ est le signe du radical; $\sqrt$ est le signe radical (n° 68 bis); a est la quantité sous le signe radical; n est l'exposant du signe radical (n° 68 bis), et la lettre m est enfin l'exposant de la quantité sous le signe radical.

Voici maintenant les conséquences ou les corollaires dont nous venons de parler :

249. Premier corollaire $(a^m)^{\frac{p}{n}} = \sqrt[\frac{p}{n}]{(a^m)^n}$ (n° 244) $= \sqrt[\frac{p}{n}]{a^{mp}}$
 (n° 223) $= a^{\frac{mp}{n}}$ (n°s 240, 244) $= a^{m \cdot \frac{p}{n}}$ (Arith. n° 254).

Or, cette équation $(a^m)^{\frac{p}{n}} = a^{m \cdot \frac{p}{n}}$, fait voir que la règle du n° 223, démontrée pour le cas des puissances entières, s'applique aussi au cas des puissances fractionnaires.

250. Second et troisième corollaires:

$$\sqrt[n]{\alpha^n \beta^m} = \sqrt[n]{\alpha^n} \sqrt[n]{\beta^m} \text{ (n° 239)} = \alpha^n \beta^{\frac{m}{n}}$$

$$\text{(n° 240)} = \alpha \beta^{\frac{m}{n}} = \alpha \sqrt[n]{\beta^m} \text{ (n° 244). Donc}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^n \beta^m} = \alpha \sqrt[n]{\beta^m},$$

et, en renversant cette équation,

$$\alpha \sqrt[n]{\beta^m} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta^m}.$$

Or, la première de ces deux formules fait voir qu'on peut quelquefois sortir un facteur de dessous le signe radical pour l'écrire au devant. Cela a lieu quand ce facteur est élevé à une puissance du degré de la racine à extraire. Il faut alors faire cette extraction.

La seconde formule indique que l'inverse est toujours possible, c'est-à-dire que si l'on a un facteur au devant d'un radical, on peut faire passer ce facteur sous le signe radical, en l'élevant à une puissance égale au degré de la racine à extraire. (Cela aurait déjà pu se conclure du n° 239. Voyez ce numéro en entier).

Du reste, ce facteur, quand il est au devant du radical, s'appelle le *coefficient* de celui-ci; α est le coefficient de $\alpha \sqrt[n]{\beta^m}$.

Appliquons ces deux formules à quelques exemples:

Suivant la première, $\sqrt[3]{64c^5d^3e} = 4d \sqrt[3]{c^5e}$, et $\sqrt[4]{7f^8g^4h} = f^2g \sqrt[4]{7h}$.

Suivant la seconde, $3i^2k \sqrt[3]{4l^2} = \sqrt[3]{108i^6k^3l^2}$, et $7p^mq^r \sqrt[4]{5v^nx} = \sqrt[4]{5 \cdot 7^4 p^{mt} q^{rt} v^{nx}}$.

On a aussi (n°s 70, 9°, 76, 217),

$$\sqrt[5]{32(2a^3b + 4cd)^5(m-n)} = 2(2a^3b + 4cd) \sqrt[5]{m-n};$$

$$3(a+b) \sqrt[4]{c-d} = \sqrt[4]{81(a+b)^4(c-d)}.$$

On pourra faire les preuves par les réciproques.

CHAPITRE VIII.

Des opérations sur les quantités radicales et sur celles qui ont des exposants fractionnaires.

251. Pour rechercher les règles propres à ces opérations, nous supposons d'abord que les quantités écrites sous les signes radicaux sont monomes; mais ces règles pourront aussi s'appliquer aux polynomes, lorsqu'ils auront la forme de monomes, comme nous l'avons déjà vu dans plusieurs occasions (nos 70, 9°, 76, 224, 244, 250).

Puisqu'un radical peut, sans changer de valeur, prendre la forme d'une quantité affectée d'un exposant fractionnaire (n° 244), il est évident que les quantités radicales doivent avoir de grands rapports avec les fractions.

Ainsi, tout comme on peut réduire une fraction d'une expression plus composée à une expression plus simple, en divisant ses deux termes par un même nombre lorsqu'ils ont un facteur commun (*Arith.* n° 274), de même on doit pouvoir réduire un radical d'une expression plus composée à une expression plus simple, en divisant par un même nombre l'exposant du signe radical et celui de la quantité sous ce signe, quand ces deux exposants ont un facteur commun: car, qu'on le remarque bien, ces deux exposants deviennent les deux termes de la fraction, qui sert elle-même d'exposant à la quantité sous sa seconde forme.

Par exemple, $\sqrt[6]{a^9} = a^{\frac{9}{6}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$, et cette dernière valeur aurait pu se tirer immédiatement de la première, en divisant tout d'un coup par 3 les deux exposants 6 et 9.

Par exemple encore, $\sqrt[8]{a^{12}\beta^{20}} = \sqrt[2.4]{a^{3.4}\beta^{5.4}} = \sqrt[2.4]{(a^3\beta^5)^4}$ (nos 222, 223) $= (a^3\beta^5)^{\frac{4}{2.4}} = (a^3\beta^5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{(a^3\beta^5)^1} = \sqrt[2]{a^3\beta^5}$, et cette dernière valeur aurait aussi pu se tirer immédiatement de la première en divisant par 4 les trois exposants 8, 12 et 20.

Plus généralement, $\sqrt[nr]{a^{mr}\beta^{pr}\gamma^q} = \sqrt[nr]{(a^m\beta^p\gamma^q)^r} = (a^m\beta^p\gamma^q)^{\frac{r}{nr}} =$

$(\alpha^m \beta^p \gamma^q)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(\alpha^m \beta^p \gamma^q)^1} = \sqrt[n]{\alpha^m \beta^p \gamma^q}$, et toujours ce dernier radical aurait pu se tirer immédiatement du premier, en divisant par n les trois exposants mr , pr et qr .

Donc un radical peut être réduit d'une expression plus composée à une expression plus simple, lorsque l'exposant du signe radical et ceux des quantités multipliées entre elles sous ce signe, ont un facteur commun. Il faut pour cela diviser tous ces exposants par leur facteur commun. Alors le radical change de forme sans changer de valeur.

N. B. Si les quantités sous le signe n'étaient pas multipliées entre elles, et qu'elles fussent ajoutées ou soustraites, la règle ne pourrait s'appliquer à ce cas. Par exemple, on ne pourrait pas faire

$$\sqrt[8]{a^3 + b^4 - c^6} \text{ égal à } \sqrt[4]{a + b^2 - c^3};$$

Mais si l'on avait $\sqrt[8]{(a+b)^4 (c-d)^6}$, ce radical pourrait se réduire à $\sqrt[4]{(a+b)^2 (c-d)^3}$.

Si l'on avait $\sqrt[8]{\frac{a^4}{b^6}}$, on pourrait écrire au lieu de cela $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^3}}$,

parce que l'on a $\sqrt[8]{\frac{a^4}{b^6}} = \sqrt[8]{\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2}$.

Appliquons ce principe à un exemple un peu composé :

$$\sqrt[4]{25a^8b^{10}c^2d^{6n}} = \sqrt[2]{5a^4b^5cd^{3n}}.$$

Nous avons trouvé ce résultat en suivant la règle précédente, et en remarquant que $25 = 5^2$. Mais si nous eussions voulu nous passer de la règle, et suivre en détail les diverses transformations de la quantité proposée, nous aurions opéré ainsi,

$$\sqrt[4]{25a^8b^{10}c^2d^{6n}} = \sqrt[2.2]{5^2a^{2.4}b^{2.5}c^{2.2}d^{3.2n}} =$$

$$\sqrt[2.2]{(5a^4b^5cd^{3n})^2} = (5a^4b^5cd^{3n})^{\frac{2}{2.2}} =$$

$$(5a^4b^5cd^{3n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{(5a^4b^5cd^{3n})^1} =$$

$$\sqrt[2]{5a^4b^5cd^{3n}}, \text{ comme nous l'avons vu ci-dessus.}$$

252. Dès qu'on peut diviser tous les exposants d'un radical monome par un même nombre, sans changer la valeur de ce radical, il en résulte qu'on peut aussi multiplier tous ces exposants par un même nombre, sans changer la valeur de la quantité radicale. Et il est clair que par ce moyen on pourra réduire deux ou plusieurs radicaux différents à la même expression ou au même degré, c'est-à-dire à une forme telle qu'ils aient le même exposant à l'ouverture du signe radical: car cela est tout-à-fait analogue à ce qui a lieu dans les fractions, lorsqu'on multiplie leurs deux termes par un même nombre, et qu'on les réduit ainsi au même dénominateur (*Arith.* nos 244, 289, 294).

Si l'on a, par exemple, $\sqrt[n]{a^m \beta^p}$, $\sqrt[r]{\gamma^s \delta^t}$, et $\sqrt[v]{\epsilon^x \zeta^y}$, en multipliant tous les exposants du premier radical par rv , tous ceux du second par nv , et tous ceux du troisième par nr , on aura

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. \sqrt[nrv]{a^{mrv} \beta^{prv}} &= \sqrt[n]{a^m \beta^p}, \\ 2^\circ. \sqrt[nrv]{\gamma^{nsrv} \delta^{ntv}} &= \sqrt[r]{\gamma^s \delta^t}, \\ 3^\circ. \sqrt[nrv]{\epsilon^{nr} \zeta^{ny}} &= \sqrt[v]{\epsilon^x \zeta^y} \end{aligned} \right\} (\text{n}^\circ 251),$$

et les trois radicaux proposés seront réduits à la même expression ou au même degré.

Du reste, les transformations que viennent de subir nos radicaux auraient pu se légitimer en opérant d'une manière directe, comme nous allons le faire pour le premier.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m \beta^p} &= a^{\frac{m}{n}} \beta^{\frac{p}{n}} \quad (\text{n}^\circ 240) = a^{\frac{mrv}{nrv}} \beta^{\frac{prv}{nrv}} \quad (\text{Arith. n}^\circ 274) = \\ &= \left(a^{mrv} \beta^{prv} \right)^{\frac{1}{nrv}} \quad (\text{n}^\circ 249) = \sqrt[nrv]{a^{mrv} \beta^{prv}} \quad (\text{n}^\circ 244) = \sqrt[nrv]{a^m \beta^p}. \end{aligned}$$

Et comme tout cela pourrait facilement s'appliquer à un plus grand nombre de radicaux, on voit que, pour réduire deux ou plusieurs radicaux à la même expression ou au même degré, il faut multiplier tous les exposants de chaque radical, c'est-à-dire celui du signe radical et ceux des quantités multipliées entre elles sous ce signe, par le produit des exposants de tous les autres signes radicaux (Voyez le N. B. du numéro précédent).

Par exemple, les trois radicaux suivants,

$$\sqrt[3]{7a^3b}, \sqrt[3]{5cd^2}, \sqrt[5]{e},$$

réduits au même degré d'après cette règle, deviennent,

$$\sqrt[30]{7^{15}a^{45}b^{15}}, \sqrt[30]{5^{10}c^{10}d^{20}}, \sqrt[30]{e^6}.$$

Cependant, lorsque les exposants des signes radicaux auront des multiples communs à tous (*Arith.* n° 105), plus petits que le produit total de ces exposants, on pourra trouver pour les radicaux réduits au même degré des expressions plus simples que ne les donnerait la règle précédente, si elle n'était point modifiée. Mais pour que ces expressions soient tout d'un coup les plus simples possibles, il faudra que leur degré ne soit pas plus élevé que le *plus petit multiple* des exposants en question. Or, ce plus petit multiple se trouve par la règle donnée au n° 296 de l'Arithmétique d'Émile. Un exemple éclaircira ce que nous venons de dire :

Les deux radicaux $\sqrt[12]{a^{11}}$ et $\sqrt[20]{b^7}$, réduits au même degré par la règle précédente, deviennent $\sqrt[240]{a^{400}}$ et $\sqrt[240]{b^{84}}$, tandis qu'après avoir trouvé le plus petit multiple de 12 et de 20, qui est $60 = 5 \cdot 12 = 3 \cdot 20$, on peut multiplier les deux exposants du premier radical par 5, et ceux du second par 3, pour avoir $\sqrt[60]{a^{55}}$ et $\sqrt[60]{b^{21}}$.

253. Si l'on veut ajouter un radical avec un autre, ou le soustraire d'un autre, il est clair qu'il faudra les réunir en observant la loi des signes, telle qu'elle est pour ces deux opérations. Mais la réduction ne sera possible que lorsque les radicaux seront semblables, c'est-à-dire qu'ils ne différeront que par le signe extérieur $+$ ou $-$, et par le coefficient placé au devant du radical.

Par exemple, $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{a^2} = 3\sqrt[3]{a^2}$;

$$5\sqrt[4]{a^3b} - 3\sqrt[4]{a^3b} - 2\sqrt[4]{a^3b} = 0;$$

$$7\sqrt[4]{a^4c} - 8\sqrt[4]{a^4c} - 9\sqrt[4]{a^4c} = -10\sqrt[4]{a^4c}.$$

Mais $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{c}$ ne peut pas se réduire.

Par exemple encore,

$$\begin{aligned} & 3\sqrt[5]{a^2b+c^3d^2} + 7\sqrt[5]{a^2b+c^3d^2} - 4\sqrt[5]{a^2b+c^3d^2} \\ & = 6\sqrt[5]{a^2b+c^3d^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & m\sqrt[p]{a^4+2b} + n\sqrt[p]{a^4+2b} - p\sqrt[p]{a^4+2b} \\ & = (m+n-p)\sqrt[p]{a^4+2b}; \end{aligned}$$

$$7\sqrt[5]{a+b} + 2\sqrt[3]{c-b} - \sqrt[7]{d+g} \text{ est irréductible.}$$

* 254. On pourrait soupçonner que, pourvu que les quantités sous les signes radicaux fussent les mêmes, on rendrait les radicaux semblables en les réduisant à la même dénomination.

Pour rechercher ce qui a lieu dans cette occasion, supposons qu'on veuille ajouter $\sqrt[n]{a^m}$ avec $\sqrt[p]{a^q}$, on aura

$$\sqrt[n]{a^m} + \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[np]{a^{mp}} + \sqrt[np]{a^{nq}} \text{ (n° 252);}$$

mais pour que les radicaux fussent semblables, il faudrait que l'on eût $mp = nq$, ou $n : p :: m : q$ (*Arith.* n° 600).

Or, si l'on suppose que p divisé par n égale r , on aura aussi q divisé par m égal à r : d'où il résulte que $p = nr$, et que $q = mr$. Les

deux radicaux proposés sont donc $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[nr]{a^{mr}}$. Mais le second est semblable au premier, comme on le voit en divisant ses deux exposants par r (n° 251). La réduction au même degré ne peut donc rendre les radicaux semblables que dans le cas où l'on obtiendrait la même chose par la réduction à la plus simple expression.

255. Essayons maintenant de multiplier un radical par un autre, et supposons d'abord qu'ils sont du même degré.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m \beta^p} \times \sqrt[n]{\gamma^q \delta^r} &= \sqrt[n]{a^m \beta^p \gamma^q \delta^r} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}} \beta^{\frac{p}{n}} \gamma^{\frac{q}{n}} \delta^{\frac{r}{n}}} = \left(a^{\frac{m}{n}} \beta^{\frac{p}{n}} \gamma^{\frac{q}{n}} \delta^{\frac{r}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ & \text{(n° 249)} = \sqrt[n]{\left(a^m \beta^p \gamma^q \delta^r \right)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^m \beta^p \gamma^q \delta^r}. \end{aligned}$$

Or, la dernière valeur se tire immédiatement de la première, et donne la règle suivante :

Pour multiplier un radical par un autre radical du même degré, il faut multiplier la quantité qui est sous le signe radical du multiplicande par la quantité qui est sous le signe radical du multiplicateur, et affecter leur produit du signe radical commun.

Si les radicaux proposés ne sont pas du même degré, on commencera par les y réduire (n° 252), et l'on opérera ensuite comme nous venons de l'indiquer :

$$8\sqrt[n]{(a+b)^2} \times 5\sqrt[n]{(c+d)^3} = 40\sqrt[n]{(a+b)^2(c+d)^3}.$$

$$m\sqrt[n]{\frac{2}{3}a^7b^mc^3} \times n\sqrt[n]{\frac{2}{3}a^5b^nc^pd} =$$

$$mn\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^3a^{21}b^3mc^9} \times n\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^2a^{10}b^2nc^2pd^2} =$$

$$mn\sqrt[n]{\frac{52}{1125}a^{31}b^3m^{2n}c^{2p+9}d^2}.$$

$$3\sqrt[56]{a^3b^2} \times \sqrt[36]{a^2b^3} \times 7\sqrt[9]{3abc} =$$

$$3\sqrt[56]{a^{54}b^{36}} \times \sqrt[36]{a^{18}b^{27}} \times 7\sqrt[36]{3^4a^4b^4c^4} = 21\sqrt[36]{81a^{76}b^{67}c^4}.$$

256. Essayons aussi de diviser un radical par un autre radical du même degré :

$$\frac{\sqrt[n]{a^m\beta^p}}{\sqrt[n]{\gamma^q\delta^r}} = \frac{\sqrt[n]{(a^m\beta^p)^1}}{\sqrt[n]{(\gamma^q\delta^r)^1}} = \frac{(a^m\beta^p)^{\frac{1}{n}}}{(\gamma^q\delta^r)^{\frac{1}{n}}} =$$

$$\left(\frac{a^m\beta^p}{\gamma^q\delta^r}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a^m\beta^p}{\gamma^q\delta^r}\right)^1} = \sqrt[n]{\frac{a^m\beta^p}{\gamma^q\delta^r}}.$$

Or, la dernière valeur se tire aussi immédiatement de la première, et fournit la règle suivante :

Pour diviser un radical par un autre radical du même degré, il faut diviser la quantité qui est sous le signe radical du dividende par celle qui est sous le signe radical du diviseur, et affecter leur quotient du signe radical commun.

Si les radicaux proposés ne sont pas du même degré, on commen-

cera par les y réduire (n° 252), et l'on opérera ensuite comme nous venons de l'indiquer.

Pour s'exercer, on fera, d'après cette règle, les preuves des multiplications du n° 255.

257. Voyons maintenant ce qu'il faut faire pour élever un radical à une puissance.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{\alpha^m \beta^p} \right)^r &= \left(\alpha^{\frac{m}{n}} \beta^{\frac{p}{n}} \right)^r = \alpha^{\frac{mr}{n}} \beta^{\frac{pr}{n}} = \left(\alpha^{mr} \beta^{pr} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^{mr} \beta^{pr}} \\ &= \sqrt[n]{\left(\alpha^m \beta^p \right)^r} = \sqrt[n]{\alpha^m \beta^p}^r \end{aligned}$$

La dernière valeur résulte du n° 247, et elle résulte aussi du n° 251 : car, par ce numéro-là les deux exposants d'un radical, savoir celui du signe radical et celui de la quantité sous ce signe, peuvent se diviser par un même nombre, soit que cette division puisse s'effectuer, soit qu'elle ne le puisse pas.

Du reste, chacune des trois dernières valeurs de notre radical peut se tirer immédiatement de la première ou du radical proposé, ce qui nous donne les trois règles suivantes, qui conduisent au même but :

PREMIÈRE RÈGLE. Pour élever un radical à une puissance, il faut multiplier les exposants des facteurs écrits sous le signe radical par l'exposant de la puissance demandée.

SECONDE RÈGLE. Pour élever un radical à une puissance, il faut élever à la puissance demandée la quantité qui est sous le signe radical, sans toucher à celui-ci.

TROISIÈME RÈGLE. Pour élever un radical à une puissance, il faut diviser l'exposant du signe radical par l'exposant de la puissance demandée.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{(a+b)^r (c+d)^q} \right)^r &= \sqrt[n]{(a+b)^{rr} (c+d)^{qr}} = \\ &= \sqrt[n]{(a+b)^r (c+d)^q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[7]{\frac{3a^5 b^m c^8}{5e^2 f^n}} \right)^4 &= 2401 \sqrt[7]{\frac{81a^{20} b^{4m} c^{32}}{625e^8 f^{4n}}} = \\ &= 2401 \sqrt[7]{\frac{3a^5 b^m c^8}{5e^2 f^n}} \end{aligned}$$

258. Si dans la formule générale du numéro précédent $r = n$, on aura tout d'un coup par la troisième règle

$$(\sqrt[n]{a^m \beta})^n = \sqrt[n]{a^m \beta} = a^m \beta \quad (\text{n}^\circ 246);$$

C'est-à-dire que lorsque l'exposant du signe radical est égal à l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le radical, on a pour résultat la quantité même qui est sous le signe radical : ce qui est d'ailleurs évident, d'après la définition des puissances et des racines, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois.

259. Il résulte de là que $(\sqrt[n]{-a})^n = -a$; que n soit pair ou impair.

Or, comme nous avons vu que $\sqrt[n]{-a}$ ne désignait aucune quantité lorsque n était pair (n° 216), les commençants pourraient croire qu'il y a ici une espèce de contradiction; mais elle n'est qu'apparente.

Supposons qu'on demande à quoi se réduit l'avoir d'un joueur qui ayant d'abord 10 francs en poche, perd 5 francs dans une partie, 4 dans une autre, et 1 dans une troisième, il est évident que cet avoir se réduit à rien, ou à 0.

On voit par là qu'une question très-bien posée, et qui ne renferme en soi rien d'absurde ou d'impossible, peut conduire à 0; et l'on comprend qu'une question qui, au lieu de conduire à 0, conduirait à $\sqrt[n]{-1}$, par exemple, devrait renfermer en elle-même quelque chose d'impossible ou d'absurde, parce qu'il est impossible d'extraire la racine carrée de -1 .

Ainsi donc, quoique $\sqrt[n]{-a}$ ne désigne aucune quantité lorsque n est pair, on ne peut pas faire $\sqrt[n]{-a} = 0$; $\sqrt[n]{-a}$, dans ce cas, est un symbole d'impossibilité, 0 n'est point un semblable symbole :

0 est la limite de tout décroissement dans la quantité, $\sqrt[n]{-a}$ n'est point une limite.

Il ne faut donc pas être surpris si l'on a $(\sqrt[n]{-a})^n = -a$, tandis qu'on a $0^n = 0$.

D'ailleurs, il ne faut pas considérer $(\sqrt[n]{-a})^n$ comme une puis-

sance; il faut bien se dire que ce n'est autre chose qu'une manière d'exprimer la quantité $-a$, tout comme nous avons vu

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ etc.}$$

260. Il se présente ici une objection : $(\sqrt{-a})^2$, dira-t-on, égale sans contredit $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, et par la règle du n° 255 cette quantité égale $\sqrt{-a \times -a} = \sqrt{+a^2} = \pm a$; en sorte qu'on doit pouvoir prendre pour la valeur de $(\sqrt{-a})^2$ aussi bien $+a$ que $-a$.

La réponse est fort simple : nous avons dit que *généralement* parlant la racine de $+a^2$ est $+a$ ou $-a$, parce que $+a^2$ provient ou de $+a \times +a$, ou de $-a \times -a$; lors donc qu'on ne sait pas laquelle de ces deux multiplications a donné $+a^2$, la racine est ambiguë; mais il ne peut pas en être de même lorsqu'on a une expression qui montre celle des deux racines qui est à préférer; et c'est précisément le cas de la formule $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ ou $(\sqrt{-a})^2$; sa valeur est déterminée et ne peut être que $-a$.

261. Cette observation conduit aussi à la véritable valeur de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$: d'après la règle du n° 255, cette expression deviendrait $\sqrt{+ab} = \pm \sqrt{ab}$; mais ce double signe ne peut avoir lieu que lorsqu'on ignore si $+ab$ provient ou de $+a \times +b$, ou de $-a \times -b$; or, ce n'est point le cas ici; on sait que $+ab$ provient de $-a \times -b$; d'où il résulte que l'on a décidément

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab} (*).$$

262. Nous venons de voir que les symboles d'impossibilité, en se combinant entre eux, pouvaient perdre leur caractère primitif, et désigner alors des opérations possibles et de véritables quantités. En conséquence on les admet dans le calcul, et l'on est même allé jusqu'à leur accorder le nom de quantités : c'est ce que l'on appelle des *quantités imaginaires*, les autres s'appelant alors, par opposition, des *quantités réelles*, qu'elles soient rationnelles ou non.

(*) Voici une autre démonstration de ce principe $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot -1$ et $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot -1$; donc le produit des deux quantités proposées est égal à
 $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -1 \cdot \sqrt{a} \cdot -1 \cdot \sqrt{b} = -1 \cdot \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$.

263. Voyons enfin ce qu'il faut faire pour extraire une racine d'un radical, c'est-à-dire pour extraire une racine d'une quantité déjà affectée d'un signe radical :

$$\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m \beta^p}} = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}} \beta^{\frac{p}{n}}} = a^{\frac{m}{nr}} \beta^{\frac{p}{nr}} = (a^r \beta^r)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^r \beta^r}.$$

$$\text{Mais } \sqrt[n]{a^r \beta^r} = \sqrt[n]{(a^m \beta^p)^{\frac{1}{r}}} = \sqrt[n]{\sqrt[r]{a^m \beta^p}}.$$

$$\text{Enfin } \sqrt[n]{(a^m \beta^p)^{\frac{1}{r}}} = (a^m \beta^p)^{\frac{1}{nr}} = \sqrt[nr]{a^m \beta^p}.$$

Rapprochons ces trois résultats, nous aurons

$$\sqrt[n]{a^r \beta^r} = \sqrt[n]{\sqrt[r]{a^m \beta^p}} = \sqrt[nr]{a^m \beta^p}.$$

Or, chacune de ces trois valeurs peut se tirer immédiatement du radical dont on a demandé d'extraire la racine, ou de l'expression $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m \beta^p}}$, ce qui nous donnera les trois règles suivantes, propres à résoudre la question :

PREMIÈRE RÈGLE. *Pour extraire une racine d'un radical, il faut diviser les exposants des facteurs écrits sous le signe radical par l'exposant de la racine demandée.*

SECONDE RÈGLE. *Pour extraire une racine d'un radical, il faut extraire la racine demandée de la quantité qui est sous le signe radical, sans toucher à celui-ci.*

TROISIÈME RÈGLE. *Pour extraire une racine d'un radical, il faut multiplier l'exposant du signe radical par l'exposant de la racine demandée.*

Remarquez que, d'après la seconde règle, $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}$ (Voyez une remarque analogue n° 223).

Pour s'exercer, on fera d'après ces règles les preuves des élévations aux puissances du n° 257.

264. Maintenant, si l'on reprend les quantités A et B du n° 213, et qu'au lieu de les supposer monomes ou ayant la forme de monomes, comme on l'a fait jusqu'ici, on les suppose composées de deux ou de plusieurs termes non réunis en un seul, on sera conduit à s'occuper des puissances et des racines des polynomes. C'est ce que nous allons faire dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IX.

De l'élevation aux puissances et de l'extraction des racines dans les quantités de deux ou de plusieurs termes ; de la formule du binome.

265. D'ABORD, si nous multiplions $a + \beta$ par $a + \beta$, nous aurons la seconde puissance, ou le carré de $a + \beta$;

$$\begin{array}{r} a + \beta \\ a + \beta \\ \hline a^2 + a\beta \\ + a\beta + \beta^2 \\ \hline a^2 + 2a\beta + \beta^2. \end{array}$$

La multiplication faite, nous trouverons $(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$, c'est-à-dire que le carré d'un binome contient trois termes, savoir le carré du premier terme de la racine, le double produit des deux, et le carré du second.

266. Il est facile de voir que si les deux termes du binome étaient inverses, tous les termes du carré seraient directs, comme lorsque les deux termes du binome sont directs, ce qui est d'accord avec ce que nous avons dit que $+a \times +a = +a \times a$.

Mais, s'il n'y avait qu'un des termes du binome qui fût inverse, le terme du milieu dans le carré, ou $2a\beta$, serait seul inverse. Dans ce cas, si l'on supposait, 1^o $a = \beta$, la racine se détruirait, et le carré se détruirait aussi, puisqu'on aurait $a\beta = a^2$, $a\beta = \beta^2$, et par conséquent $2a\beta = a^2 + \beta^2$, c'est-à-dire la partie inverse égale à la partie directe. Si l'on supposait, 2^o que a et β fussent inégaux, la racine serait directe ou inverse, suivant que le $+$ l'emporterait sur le $-$, ou le $-$ sur le $+$: cependant le carré serait toujours direct, puisque — par — fait $+$ tout comme $+$ par $+$. On aurait donc $a^2 + \beta^2 > 2a\beta$.

267. On ne peut donc jamais avoir $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$ égal à une quantité inverse.

268. Si l'on multiplie le carré de $\alpha + \beta$ par $\alpha + \beta$,

$$\begin{array}{r} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ \alpha + \beta \\ \hline \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\ + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ \hline \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3, \end{array}$$

on aura $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, c'est-à-dire que le cube d'un binôme contient quatre termes, savoir le cube du premier terme de la racine, trois fois le carré du premier par le second, trois fois le carré du second par le premier, et le cube du second.

269. En écrivant ce cube ainsi $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$, on verrait qu'il vaut aussi le cube de chaque terme de la racine, plus le triple produit des deux termes multiplié par leur somme.

270. Si α et β étaient tous deux inverses, tous les termes du cube seraient inverses; mais s'il n'y avait qu'un des termes du binôme $\alpha + \beta$ qui fût inverse, les termes du cube qui contiendraient les puissances impaires de ce terme inverse seraient inverses, et les autres seraient directs.

271. Si l'on multiplie le cube de $\alpha + \beta$ par $\alpha + \beta$,

$$\begin{array}{r} \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ \alpha + \beta \\ \hline \alpha^4 + 3\alpha^3\beta + 3\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 \\ + \alpha^3\beta + 3\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta^3 + \beta^4 \\ \hline \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4, \end{array}$$

on aura $(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$; et si α et β sont inverses, tous les termes de la quatrième puissance seront encore directs; mais s'il n'y a qu'un des termes du binôme $\alpha + \beta$ qui soit inverse, les termes de $\alpha^4 + 4\alpha^3\beta +$, etc. qui contiendront les puissances impaires de ce terme inverse seront inverses, et les autres seront directs.

272. On trouverait de même

$$(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5,$$

$$(\alpha + \beta)^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6, \text{ etc.}$$

273. En rapprochant les puissances que nous venons de calculer, et les écrivant sans coefficients, comme on le voit ici,

$$\alpha^1\beta^0 + \alpha^0\beta^1$$

$$\alpha^2\beta^0 + \alpha^1\beta^1 + \alpha^0\beta^2$$

$$\alpha^3\beta^0 + \alpha^2\beta^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^0\beta^3$$

$$\alpha^4\beta^0 + \alpha^3\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^1\beta^3 + \alpha^0\beta^4$$

$$\alpha^5\beta^0 + \alpha^4\beta^1 + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^1\beta^4 + \alpha^0\beta^5$$

etc.

etc.

on observera que tous les termes de chaque puissance contiennent α et β , que dans le premier α a pour exposant l'exposant même de la puissance, et que β a pour exposant 0; qu'ensuite les exposants de α vont en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre, et ceux de β en augmentant d'une unité, et que la suite s'arrête lorsque l'exposant de α se trouve être 0, et que celui de β se trouve être égal à l'exposant même de la puissance.

274. De là il résulte nécessairement qu'il y a toujours à chaque puissance un terme de plus qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de cette puissance; car les exposants de β sont dans la première puissance 0, 1, dans la seconde 0, 1, 2, dans la troisième 0, 1, 2, 3, dans la quatrième 0, 1, 2, 3, 4, dans la cinquième 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

275. On observera encore que la somme des deux exposants de α et de β , dans chaque terme d'une puissance, est toujours égale à l'exposant de cette puissance; que si la puissance est paire, et par conséquent le nombre des termes impair, les exposants des deux lettres dans celui du milieu sont égaux, et qu'en général les exposants des deux lettres sont les mêmes dans le premier et le dernier terme, dans le second et l'avant-dernier, et ainsi de suite; mais que ces exposants sont placés dans un ordre inverse, c'est-à-dire que celui de α dans un des deux termes que nous comparons, appartient à β dans l'autre, et réciproquement.

276. Il est facile de voir que toutes ces lois ont lieu dans une puissance entière quelconque du binôme $\alpha + \beta$;

Car d'abord les quantités à multiplier pour la formation successive de ces puissances, sont telles que les termes semblables des produits se trouveront placés les uns sous les autres en reculant chaque second produit d'une place vers la droite (n° 114).

Cela posé, prenons une puissance quelconque déjà formée et dans laquelle on observe les lois indiquées, et multiplions-la par $\alpha + \beta$ pour former la puissance suivante; le premier produit sera celui de la puissance choisie multipliée par α , et il est clair que cette multiplication ne fera qu'augmenter d'une unité l'exposant de α dans chaque terme du multiplicande; en multipliant ensuite ce multiplicande par β , on formera un second produit dont le premier terme sera semblable au second terme du premier produit, le second au troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui n'aura point de correspondant dans la ligne supérieure, et qui ne contiendra que β avec un exposant d'une unité plus grand que celui de la même lettre dans le dernier terme du multiplicande.

277. Il serait donc bien facile de former la puissance n^{me} du binome $\alpha + \beta$, s'il ne s'agissait que des lettres et de leurs exposants, et il est clair qu'abstraction faite des coefficients, on aurait

$$\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \alpha^{n-3}\beta^3 + \dots + \alpha^3\beta^{n-3} + \alpha^2\beta^{n-2} + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n.$$

278. En observant que dans le premier terme on a β élevé à 0 et α élevé à $n - 0$, que dans le second on a β élevé à 1 et α élevé à $n - 1$, que dans le troisième on a β élevé à 2 et α élevé à $n - 2$, et ainsi de suite, on comprendra que dans le terme dont le rang serait marqué par m , on aurait β élevé à $m - 1$ et α élevé à $n - (m - 1)$, c'est-à-dire que ce terme serait, à part le coefficient, $\alpha^{n-(m-1)}\beta^{m-1}$; et il est à remarquer qu'il donnerait tous les autres, en faisant successivement m égal à 1, à 2, à 3, etc.

279. Quant aux coefficients, comme ceux du binome $\alpha + \beta$ sont 1 et 1, en multipliant par $\alpha + \beta$ une puissance déjà formée pour trouver la puissance suivante, il est évident que les coefficients des deux produits partiels seront les mêmes que ceux du multiplicande; en sorte qu'on trouvera toujours les coefficients d'une puissance en écrivant deux fois sur deux lignes superposées les coefficients de la puissance précédente, ayant soin de reculer d'une place ceux de la

seconde ligne, et en additionnant alors ces nombres par colonnes.

Par exemple, les coefficients de la troisième puissance étant 1, 3, 3, 1, on trouvera ceux de la quatrième par cette addition,

$$\begin{array}{r} 1, \quad 3, \quad 3, \quad 1 \\ 1, \quad 3, \quad 3, \quad 1 \\ \hline 1, \quad 4, \quad 6, \quad 4, \quad 1 \end{array}$$

280. Il serait plus simple encore de n'écrire qu'une fois les coefficients de la troisième puissance,

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & , & 3 & , & 3 & , & 1 \\ 1 & , & 4 & , & 6 & , & 4 & , & 1 \end{array}$$

et, en additionnant le premier avec le second, de placer la somme 4 dans l'intervalle de ces deux nombres, mais sur une ligne inférieure; de faire la même chose pour la somme 6 du second et du troisième, pour la somme 4 du troisième et du quatrième, et d'écrire l'unité avant et après les nombres trouvés 4, 6, 4.

En passant ainsi de la puissance 0 à la première puissance, de la première à la seconde, de la seconde à la troisième, de la troisième à la quatrième, etc. on formera le tableau suivant,

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & & & \text{etc.} & & & & \text{etc.} & & & & \end{array}$$

et l'on observera, 1° que le coefficient du premier et du dernier terme dans chaque puissance est 1; 2° que ces coefficients vont en augmentant depuis le premier jusqu'au milieu de la suite dans un sens, et depuis le dernier jusqu'au milieu de la suite dans l'autre sens, en sorte que si le nombre des termes est impair, celui qui est au milieu est le plus grand de tous, et qu'en général les coefficients des termes également éloignés du premier et du dernier, dans chaque puissance, sont égaux.

281. Si l'on fait attention à ce que nous avons dit au n° 279, sur

la manière dont les coefficients d'une puissance donnent ceux de la suivante, et que l'on ne perde pas de vue que les coefficients de la première puissance sont 1 et 1, on comprendra que les propriétés des coefficients que nous venons d'énoncer (n° 280) appartiennent à toutes les puissances entières du binôme $\alpha + \beta$, en sorte qu'il serait facile de former les coefficients de la puissance n^{me} , si l'on avait déjà ceux de la puissance $n - 1$.

282. Mais comme il serait à désirer que l'on pût les former immédiatement, nous devons chercher à découvrir s'il n'y a point quelque loi d'après laquelle ces coefficients naissent les uns des autres dans une même puissance.

283. Or, on voit au n° 272 que si l'on prend le coefficient du second terme du développement de $(\alpha + \beta)^6$, qui est 6, qu'on le multiplie par l'exposant de α dans ce même terme, ou par 5, et qu'on divise le produit 30 par le rang de ce terme, ou par 2, on trouve le coefficient 15 du troisième terme; que si l'on prend à son tour ce coefficient 15, qu'on le multiplie par 4, exposant de α dans ce terme, et qu'on divise le produit 60 par le rang de ce même terme, ou par 3, on trouve le coefficient 20 du quatrième terme.

On peut faire la même observation sur tous les autres termes, soit de cette puissance, soit des autres puissances que nous avons calculées, et voir que toujours, dans ces puissances-là, on trouve le coefficient d'un terme quelconque, à l'exception du premier, en multipliant celui du terme précédent par l'exposant de α dans ce même terme, et en divisant le produit par le nombre qui marque le rang du terme sur lequel on opère.

284. Mais cette loi, observée dans les six premières puissances, s'étend-elle à toutes les autres? Nous pouvons le présumer d'après les réflexions du n° 281, et, si cela était, on aurait en général,

$$(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\alpha^{n-3}\beta^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\alpha^{n-4}\beta^4 + \text{etc.} \dots + \beta^n.$$

Cependant on ne peut pas admettre cette formule sans une démonstration rigoureuse.

Or, d'après le n° 277, il ne peut y avoir aucun doute sur les lettres α et β et sur leurs exposants; nous n'avons donc à nous occuper que des coefficients.

Quant à ceux-ci, ils sont faciles à trouver pour une puissance quelconque quand on a ceux de la puissance moins élevée d'une unité (nos 279, 280, 281). On pourrait donc former ceux de la puissance $n+1$ avec ceux de la puissance n , en supposant ces derniers connus. Mais si, dans cette supposition, on pouvait prouver que les coefficients de la puissance $n+1$ sont composés en $n+1$, précisément comme ceux de la puissance n sont composés en n , on en conclurait que la loi en question ayant lieu pour une puissance quelconque, elle a lieu aussi pour la puissance d'une unité plus haute que celle-là. Or, ajouterait-on encore, la loi est vraie pour la sixième puissance (n° 283), donc elle est vraie pour la septième; et l'étant pour la septième, elle l'est aussi pour la huitième, et ainsi de suite pour toutes les puissances entières et directes.

Admettons donc pour un moment que les coefficients de la puissance n soient tels que les indique la formule du n° 284, et calculons ceux de la puissance $n+1$ par le procédé du n° 279, en écrivant,

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} + \text{etc.}$$

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \text{etc.}$$

puis, en additionnant colonne par colonne.

Nous aurons d'abord 1 et $n+1$ pour les deux premiers coefficients de la puissance $n+1$. Quant au troisième, au quatrième, au cinquième, etc. il y aura des réductions à faire (*).

(*) Pour faciliter l'intelligence des calculs dont nous allons nous occuper, il sera bon de donner quelque attention aux formules suivantes :

1°. $am + bm - cm = m(a+b-c)$ (n° 70).

2°. $m(a+b) - m(c-d) = m((a+b)-(c-d)) = m(a+b-c+d)$.

3°. $(m-n)(a+b) + (m-n)(c-d) = (m-n)((a+b)+(c-d)) = (m-n)(a+b+c-d)$.

4°. $(m-n)(p+q)(a+b) + (m-n)(p+q)(c-d) = (m-n)(p+q)(a+b+c-d)$.

Par exemple, le troisième sera

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}.$$

Le quatrième se calculera en suivant la même marche, et donnera

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{n(n-1)3}{2.3} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)+n(n-1)3}{2.3} = \frac{n(n-1)(n-2+3)}{2.3} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2.3} =$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)}{2.3} = \frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2)}{2.3}.$$

On aura pour le cinquième,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)+n(n-1)(n-2)4}{2.3.4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3+4)}{2.3.4}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{2.3.4} = \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{2.3.4} =$$

$$\frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2)((n+1)-3)}{2.3.4}$$

en sorte que les cinq premiers coefficients de la puissance $n+1$ seront réellement composés en $n+1$, comme les cinq premiers de la puissance n le sont en n . Pour rendre la chose plus évidente, rapprochons ces coefficients en les écrivant sur deux lignes horizontales, et mettons dans la seconde n' à la place de $n+1$, nous aurons ce petit tableau,

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4},$$

$$1 + n' + \frac{n'(n'-1)}{2} + \frac{n'(n'-1)(n'-2)}{2.3} + \frac{n'(n'-1)(n'-2)(n'-3)}{2.3.4}.$$

Mais il reste à savoir si ce résultat aura lieu pour deux coefficients de rang quelconque. Pour nous en assurer, laissons de côté les deux

premiers, puis comptons le rang des autres, depuis le troisième, par les nombres 1, 2, 3, etc. comme on le voit ici :

$$\text{Puissance } n \dots \frac{1.}{2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2.}{2.3} \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{3.}{2.3.4} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}.$$

Nous remarquerons alors que le dernier facteur de chaque numérateur est égal à n moins le rang du terme, et que le dernier facteur de chaque dénominateur est d'une unité plus grand que ce même rang : en sorte que le terme dont le rang est p vaut évidemment

$$\frac{p.}{2.3.4 \dots p(p+1)} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(p-1))(n-p)}{p(p+1)}.$$

On voit aussi que le terme précédent dont le rang est $p-1$, et qu'il faut ajouter à celui-ci pour avoir le terme de rang p de la puissance $n+1$, vaut

$$\frac{p-1.}{2.3.4 \dots (p-1)p} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(p-2))(n-(p-1))}{(p-1)p}.$$

Maintenant, pour ajouter ces deux termes, réduisons-les d'abord au même dénominateur en multipliant le numérateur et le dénominateur du second par $p+1$, puis faisons l'addition des numérateurs; nous aurons

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1) \dots (n-(p-1))(n-p) + n(n-1) \dots (n-(p-1))(p+1)}{2.3.4 \dots p(p+1)} = \\ & \frac{n(n-1) \dots (n-(p-1))(n-p+p+1)}{2.3.4 \dots p(p+1)} = \frac{n(n-1) \dots (n-(p-1))(n+1)}{2.3.4 \dots p(p+1)} \\ & = \frac{(n+1)(n)(n-1) \dots (n-(p-1))}{2.3.4 \dots p(p+1)} = \\ & \frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2) \dots ((n+1)-p)}{2.3.4 \dots p(p+1)} = \\ & \frac{n'(n'-1)(n'-2) \dots (n'-p)}{2.3.4 \dots p(p+1)} = \frac{n'(n'-1)(n'-2) \dots (n'-(p-1))(n'-p)}{2.3.4 \dots p(p+1)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc pour les deux termes du rang p , dans la puissance n et dans la puissance $n+1$ ou n' , ces deux valeurs,

$$\text{Puissance } n \dots \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1))(n-p)}{2.3.4\dots p(p+1)}.$$

$$\text{Puissance } n' \dots \frac{n'(n'-1)(n'-2)\dots(n'-(p-1))(n'-p)}{2.3.4\dots p(p+1)}.$$

Or, le second est évidemment composé en n' ou en $n+1$ comme le premier l'est en n : d'où il résulte que tous les termes de même rang sont composés de la même manière dans les deux puissances, et que la loi du n° 283 ayant lieu dans une puissance quelconque, elle a lieu aussi dans la puissance plus élevée d'une unité, ce qui complète la démonstration de la formule.

Du reste, c'est une formule qu'on appelle *le binôme de Newton*, et elle est d'un si grand usage dans toutes les parties des mathématiques, qu'il importe de se la rendre bien familière.

285. D'ailleurs, en reprenant les coefficients 1 et n des deux premiers termes de la puissance n , le rang du terme quelconque que nous avons désigné par p deviendrait $p+2$. Faisant $p+2=m$, on aurait $p=m-2$, et $p+1=m-1$; et substituant ces valeurs dans le terme en question, en y remettant d'ailleurs les lettres α et β avec leurs exposants, comme nous l'avons vu au n° 278, ce terme deviendrait

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-2))}{2.3.4\dots(m-1)} \alpha^{n-(m-1)} \beta^{m-1}.$$

De ce terme, exprimé ainsi, et que l'on appelle *le terme général*, dérivent tous les autres, excepté le premier 1, en faisant successivement m égal à 2, à 3, à 4, etc.

286. Si les deux termes du binôme $\alpha + \beta$ étaient tous deux inverses, et que n fût pair, il est facile de voir que tous les termes du développement seraient encore directs, mais que, ces deux termes étant inverses, si n était impair, tous les termes du développement seraient inverses.

Si un seul des deux termes du binôme était inverse, les termes du développement qui contiendraient les puissances impaires de cette partie inverse seraient inverses, et les autres seraient directs.

287. Au lieu d'écrire les coefficients des premières puissances

comme nous l'avons fait au n° 280, si on les écrivait en colonne, les premiers sous les premiers, les seconds sous les seconds, et ainsi de suite, on formerait le tableau que voici :

TERMES.

		1 ^{er} 2 ^{me} 3 ^{me} 4 ^{me} 5 ^{me} 6 ^{me} , etc.						
Puissances	0	1						
	1 ^{re}	1	1					
	2 ^{me}	1	2	1				
	3 ^{me}	1	3	3	1			
	4 ^{me}	1	4	6	4	1		
	5 ^{me}	1	5	10	10	5	1	
	6 ^{me}	1	6	15	20	15	6	1
	etc.		etc.		etc.			

288. Et l'on remarquerait, 1° que les premiers termes des puissances successives ne sont autre chose que la suite des nombres constants 1, 1, 1, 1, 1, 1, etc.

289. 2° Que les seconds termes forment la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

290. 3° Que les troisièmes termes forment la suite des nombres 1, 3, 6, 10, 15, etc. que l'on appelle *nombres triangulaires*, parce qu'on peut les arranger en triangles de cette manière

291. 4° Que les quatrièmes termes forment la suite des nombres 1, 4, 10, 20, etc. que l'on nomme *pyramidaux*, parce qu'on peut les arranger en pyramides.

292. 5° Qu'en général les premiers termes, les seconds, les troisièmes, les quatrièmes, les cinquièmes, etc. forment les différentes suites connues sous le nom générique de *nombres figurés*.

293. 6° Que le premier terme de la seconde suite correspond au

second de la première, le premier de la troisième au second de la seconde, le premier de la quatrième au second de la troisième, et ainsi de suite.

294. 7° Qu'un terme quelconque de l'une des suites est égal à la somme des termes supérieurs de la colonne précédente.

Ainsi 15, dans la troisième colonne, équivaut aux nombres $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ de la colonne précédente.

De sorte qu'en remontant de colonne en colonne, on peut toujours exprimer un terme d'une colonne au moyen de ceux de la première, ce qui résulte de ce que les coefficients des puissances successives sont formés des coefficients de la première puissance (n° 279).

295. 8° Que la somme des coefficients de la puissance 0 est $1 = 2^0$; que la somme des coefficients de la première puissance est $1 + 1 = 2 = 2^1$; que la somme des coefficients de la seconde puissance est $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$; que la somme des coefficients de la troisième puissance est $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$; que la somme des coefficients de la quatrième puissance est $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$, et ainsi de suite.

Pour prouver que cela doit être ainsi, il suffit de faire dans la formule $\alpha = \beta = 1$: car elle devient alors

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

en sorte que la somme des coefficients de la puissance n de $\alpha + \beta$ est égale à 2^n , ce qui généralise notre observation.

296. Si nous savions donc calculer un terme quelconque pris dans une quelconque des suites des nombres figurés, nous pourrions déterminer la valeur du coefficient du *nième* terme pour la *nième* puissance du binome $\alpha + \beta$ (Voyez le tableau), et nous vérifierions ainsi le coefficient du terme général donné au n° 285. Mais ces calculs ont peu d'utilité.

297. Cependant ces observations seules prouveraient, non-seulement que le coefficient du premier terme de la *nième* puissance est 1, parce qu'il est dans la suite des nombres constants 1, 1, 1, 1, etc. mais encore que le coefficient du second terme est n , parce qu'il est

dans la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., et que le premier terme 1 de cette suite correspond à la 1^{re} puissance, le second 2 à la 2^{me} puissance, le troisième 3 à la 3^{me} puissance, etc. et le n^{me} à la n^{me} puissance.

298. Nous pourrions même trouver facilement le coefficient du troisième terme de la puissance n^{me} , car il doit être égal (n° 294) à la somme des termes supérieurs dans la colonne précédente du tableau, c'est-à-dire qu'il doit être égal à $1 + 2 + 3 + 4 + \text{etc.} \dots + (n-1)$.

Or, ces nombres forment une progression excédentive, dont la somme se trouve en ajoutant les extrêmes 1 et $n-1$, et multipliant leur somme n par la moitié du nombre des termes, ou par $\frac{n-1}{2}$ (*Arith.* n° 666). Ce coefficient est donc $\frac{n(n-1)}{2}$ (n° 284).

299. Maintenant, pour faire quelque application de la formule du binome, supposons qu'on veuille élever par son moyen la quantité $2x-y$ à la cinquième puissance, on aura

$$(2x-y)^5 = (2x)^5 + \frac{5}{1} (2x)^4 (-y) + \frac{5.4}{1.2} (2x)^3 (-y)^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3} (2x)^2 (-y)^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} (2x) (-y)^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} (2x)^0 (-y)^5;$$

ou, en effectuant les opérations indiquées, et en supprimant d'abord les facteurs communs au numérateur et au dénominateur de chaque coefficient,

$$(2x-y)^5 = 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5.$$

Si l'on veut élever $2x^2 - 3\frac{y}{z}$ à la sixième puissance, on aura

$$\begin{aligned} \left(2x^2 - 3\frac{y}{z}\right)^6 &= (2x^2)^6 + \frac{6}{1} (2x^2)^5 \left(-3\frac{y}{z}\right) + \frac{6.5}{1.2} (2x^2)^4 \\ &\left(-3\frac{y}{z}\right)^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3} (2x^2)^3 \left(-3\frac{y}{z}\right)^3 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} (2x^2)^2 \left(-3\frac{y}{z}\right)^4 + \\ &\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} (2x^2) \left(-3\frac{y}{z}\right)^5 + \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} (2x^2)^0 \left(-3\frac{y}{z}\right)^6; \end{aligned}$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\left(2x^2 - 3\frac{y}{x}\right)^6 = 64x^{12} - 576x^{10} \cdot \frac{y}{x} + 2160x^8 \cdot \frac{y^2}{x^2} - 4320x^6 \cdot \frac{y^3}{x^3} + 4860x^4 \cdot \frac{y^4}{x^4} - 2916x^2 \cdot \frac{y^5}{x^5} + 729 \cdot \frac{y^6}{x^6}.$$

300. Si l'on voulait élever le trinome $a + b + c$ à une puissance quelconque, par exemple à la troisième, on le pourrait au moyen de la formule du binome : car, faisant $\alpha = a$ et $\beta = b + c$, on aurait

$$[a + (b + c)]^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3.$$

Mais la formule donne $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$, et $(b + c)^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$; et substituant ces valeurs dans l'équation trouvée, on a

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$

Si l'on voulait élever le quadrinome $a + b + c + d$ à une puissance quelconque, par exemple à la seconde, on le pourrait aussi au moyen de la formule du binome : car, faisant $\alpha = a$ et $\beta = b + c + d$, on aurait

$$[a + (b + c + d)]^2 = a^2 + 2a(b + c + d) + (b + c + d)^2.$$

Pour trouver $(b + c + d)^2$, on ferait de nouveau $\alpha = b$ et $\beta = c + d$, et l'on aurait

$$[b + (c + d)]^2 = b^2 + 2b(c + d) + (c + d)^2.$$

Mais la formule donne $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$; en sorte que l'on a

$$(b + c + d)^2 = b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2;$$

et, substituant cette valeur dans la première équation, on obtient

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2.$$

Ces exemples font assez voir comment il faudrait opérer en général pour élever, au moyen de la formule du binome, un polynome quelconque à une puissance entière et directe quelconque.

301. Du reste, au lieu de faire α égal au premier terme du polynome proposé, et β égal à la somme des autres, on pourrait faire α égal à la somme de tous les termes, excepté le dernier, et β égal au dernier : le développement serait le même, mais autrement ordonné.

302. Tout ce que nous venons de dire des quantités algébriques s'applique nécessairement aux quantités numériques. Il est facile de voir, par exemple, que si l'on élève au carré un nombre composé de dizaines et d'unités, ce carré contiendra le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités, et le carré des unités (n° 265); que si l'on élève un semblable nombre au cube, ce cube contiendra le cube des dizaines, trois fois le carré des dizaines par les unités, trois fois le carré des unités par les dizaines, et le cube des unités (n° 268); et ainsi de suite.

303. Si ce nombre, à élever aux puissances, contenait plus de deux chiffres, on pourrait le comparer aux polynômes que nous avons considérés dans le n° 300, et faire α égal au premier chiffre à gauche de ce nombre, et β égal à tous les autres; ou, d'après le n° 301, faire α égal à la somme de tous les chiffres, excepté le dernier à droite, et β égal à ce dernier. Puis, décomposant successivement et de la même manière les parties qui contiendraient encore plus de deux chiffres, on raisonnerait sur ces nombres comme sur les polynômes algébriques, et l'on verrait que les puissances des uns sont composées comme les puissances des autres.

304. On pourra donc élever les quantités numériques aux puissances, soit par la multiplication immédiate, soit avec l'aide de la formule du binôme.

Mais le moyen qui sera le plus prompt et le plus commode dans le cas de puissances plus ou moins hautes, ce sera d'opérer par logarithmes, d'après les principes expliqués dans l'Arithmétique d'Émile. J'invite les commençants à s'exercer beaucoup à ces calculs.

305. Après avoir examiné en détail les puissances des polynômes, il faut parler de leurs racines.

Si dans notre formule $\sqrt[n]{B}$, la quantité B exprime un polynôme, il y aura deux cas bien distincts à considérer, celui où le polynôme serait une puissance parfaite du degré de la racine qu'on veut extraire, et celui où le polynôme ne serait pas tel que nous venons de le dire. Dans le premier cas, $\sqrt[n]{B}$ serait une quantité rationnelle; dans le second, ce serait une quantité irrationnelle (n° 236).

306. La formule du binôme fait voir que pour trouver la racine

n^{me} d'une puissance parfaite du degré n d'une quantité composée de deux parties, il suffit d'opérer sur les deux premiers termes de cette puissance; car si l'on sait que ces deux premiers sont $\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta$, ayant extrait la racine n du premier, on aura α , qui est le premier terme de la racine; élevant alors α à la puissance $n-1$, et multipliant cette puissance par n , on aura $n\alpha^{n-1}$, quantité par laquelle on divisera le second terme de la puissance, ou $n\alpha^{n-1}\beta$, pour avoir le quotient β , second terme de la racine. L'élévation de $\alpha + \beta$ à la puissance n fera voir si c'est bien là la racine cherchée.

307. EXEMPLE I. On demande la valeur de $\sqrt[5]{(32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5)}$.

Ayant ordonné la quantité, on extraira la racine 5^{me} du premier terme, laquelle est $2x$; on élèvera $2x$ à la 4^{me} puissance, qui est $16x^4$; et, multipliant ce nombre par 5, on aura $80x^4$, quantité par laquelle il faudra diviser le second terme $-80x^4y$ de la puissance proposée: le quotient $-y$ sera le second terme de la racine. Développant alors $(2x - y)^5$, on verra que c'est bien là la valeur cherchée (n° 299).

308. EXEMPLE II. Quelle est la valeur de l'expression

$$\sqrt[6]{64x^{12} - 576x^{10} \cdot \frac{y}{z} + 2160x^8 \cdot \frac{y^2}{z^2} - 4320x^6 \cdot \frac{y^3}{z^3} + 4860x^4 \cdot \frac{y^4}{z^4} - 2916x^2 \cdot \frac{y^5}{z^5} + 729 \frac{y^6}{z^6}}?$$

Le premier terme est $64x^{12}$, dont la racine 6^{me} égale $\pm 2x^2$ (n° 215), la puissance 5^{me} de $\pm 2x^2$ est $\pm 32x^{10}$, qui, multipliée par 6, devient $\pm 192x^{10}$; en divisant par cette quantité le second terme

$-576x^{10} \cdot \frac{y}{z}$, on trouve le second terme de la racine $\mp 3 \frac{y}{z}$; en

sorte que cette racine est $\pm 2x^2 \mp 3 \frac{y}{z}$, ou $\pm \left(2x^2 - 3 \frac{y}{z}\right)$, ce que vérifie l'élévation à la 6^{me} puissance (n° 299).

309. EXEMPLE III. On demande la racine cube de $27x^{3m} + 54x^{2m}y^2 + 36x^my^2p + 8y^3p$.

La racine cube de $27x^{3m}$ est $3x^m$, qui doit être le premier terme de la racine; $3x^m$ élevé au carré donne $9x^{2m}$, qui, multiplié par 3,

devient $27x^{2m}$; divisant par ce nombre le second terme $54x^{2m}y^p$, on a pour quotient $2y^p$. La racine cherchée est donc $3x^m + 2y^p$, ce que confirme l'élévation au cube.

310. EXEMPLE IV. On demande la racine seconde de $9x^{2m} + 12x^m y^p + 4y^{2p}$.

$$\sqrt{9x^{2m}} = \pm 3x^m; \pm (3x^m)^1 \times 2 = \pm 6x^m; \frac{12x^m y^p}{\pm 6x^m} = \pm 2y^p.$$

Donc $\sqrt{9x^{2m} + 12x^m y^p + 4y^{2p}} = \pm 3x^m \pm 2y^p = \pm (3x^m + 2y^p)$; et en effet $(\pm 3x^m \pm 2y^p)^2 = 9x^{2m} + 12x^m y^p + 4y^{2p}$.

311. EXEMPLE V. On demande la racine troisième de $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

Comme il y a ici plus de quatre termes, il y en aura plus de deux à la racine (n° 274); mais on réduira ceux-ci à deux en considérant le second et les suivants comme n'en faisant qu'un (n° 300). Ayant donc ordonné d'abord pour une des lettres comme a , puis pour une seconde comme b , on aura $a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b^2+bc+c^2) + (b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)$, et l'on traitera ce polynome comme n'ayant que les quatre termes figurés au moyen des parenthèses. On prendra donc d'abord la racine cube du premier terme a^3 ; élevant cette racine a au carré, et multipliant par 3, on aura $3a^2$ pour diviseur du second terme $3a^2(b+c)$, et le quotient sera $(b+c)$. En sorte qu'on aura $a + (b+c)$, ou $a + b + c$, pour la racine cherchée, ce qui se vérifie en élevant cette quantité au cube (n° 300).

312. EXEMPLE VI. On demande la racine seconde de $a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$.

Comme il y a ici plus de trois termes, il y en aura plus de deux à la racine (n° 274); mais on réduira ces derniers à deux en considérant le second et les suivants comme n'en faisant qu'un (n° 300). Ayant donc ordonné d'abord pour une des lettres comme a , puis pour une seconde comme b , etc. on aura $a^2 + 2a(b+c+d) + (b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2)$, et l'on traitera ce polynome comme n'ayant que les trois termes figurés au moyen des parenthèses. On prendra donc la racine seconde du premier terme a^2 ; élevant cette racine a à la première puissance, et multipliant par 2, on aura $2a$ pour diviseur du second terme $2a(b+c+d)$, et le quotient

sera $b + c + d$. En sorte qu'on aura $a + b + c + d$ pour la racine cherchée, ce que confirme l'élévation au carré (n° 300).

313. Dans ces deux derniers exemples, nous avons considéré tous les termes de la racine, excepté le premier, comme n'en faisant qu'un; nous aurions pu, au lieu de cela, considérer tous les termes de cette racine, excepté le dernier, comme n'en faisant qu'un (n° 301); et cela nous aurait conduits à un procédé d'extraction un peu différent de celui que nous venons d'employer, mais moins simple que lui dans le cas des quantités algébriques. Nous le supprimons donc pour abrégier; d'ailleurs, nous aurons occasion de le mettre en usage pour les quantités numériques, dans lesquelles il réussit mieux que celui-ci, et nous laisserons aux lecteurs le soin de les essayer l'un et l'autre dans les différents cas, et de reconnaître ce qui fait la plus grande facilité de l'un en algèbre, et la plus grande facilité de l'autre en arithmétique.

314. Passons à l'extraction des racines des quantités numériques.

Le plus petit nombre de deux chiffres est 10, que l'on élève facilement aux différentes puissances entières en y ajoutant un zéro pour la seconde, deux zéros pour la troisième, trois zéros pour la quatrième, et en général $n - 1$ zéro pour n^{me} . Or, comme le nombre 10 s'exprime au moyen de l'unité suivie d'un zéro, la puissance n^{me} de 10 s'exprimera par l'unité suivie de n zéro; en sorte qu'elle contiendra $n + 1$ chiffres.

315. Il résulte de là, 1°. que si un nombre contient moins de $n + 1$ chiffres, sa racine n^{me} sera au-dessous de 10, et n'aura par conséquent qu'un chiffre.

Il n'y a pas de règle pour trouver la racine dans ce cas: c'est une affaire de tâtonnement et d'habitude. Mais si la racine à extraire est d'un degré élevé, et si par conséquent le nombre proposé est considérable, puisque nous ne parlons ici que des puissances parfaites, il sera plus simple d'opérer par logarithmes (n° 304).

316. Il résulte de là, 2°. que si un nombre contient au moins $n + 1$ chiffres, sa racine n^{me} aura plus d'un chiffre; mais que les chiffres comparables au premier terme de la puissance, c'est-à-dire les chiffres significatifs de la n^{me} puissance des dizaines de la racine, ne se

trouveront jamais dans les n derniers chiffres vers la droite du nombre proposé.

Par exemple, le carré des dizaines de la racine ne peut se trouver ni dans les unités, ni dans les dizaines du carré total; le cube des dizaines de la racine ne peut se trouver ni dans les unités, ni dans les dizaines, ni dans les centaines du cube total, et ainsi de suite.

Il n'est pas moins évident que les chiffres comparables au second terme de la puissance, c'est-à-dire les chiffres significatifs de la $(n-1)^{\text{me}}$ puissance des dizaines de la racine, ne se trouveront jamais dans les $n-1$ derniers chiffres vers la droite du nombre proposé.

Ainsi, dans le carré, les chiffres significatifs de la première puissance des dizaines ne pourront se trouver dans les unités; dans le cube, les chiffres significatifs de la seconde puissance des dizaines ne pourront se trouver ni dans les unités, ni dans les dizaines; et ainsi de suite.

317. Ces observations conduisent au procédé qu'il faut suivre pour extraire les racines des quantités numériques; mais c'est par des exemples qu'il convient de l'expliquer aux commençants.

318. EXEMPLE I. On demande d'extraire la racine carrée de 3364.

Ce nombre contenant plus de deux chiffres, en a plus d'un à sa racine (n° 316).

Mais pour avoir les dizaines de cette racine, il faut extraire la racine du carré des dizaines (n°s 302, 306); et ce carré ne peut être ni dans les unités, ni dans les dizaines (n° 316).

On séparera donc deux chiffres sur la droite du nombre proposé, en cette manière, 33'64; et l'on extraira la racine du plus grand carré contenu dans la partie de gauche. Ce plus grand carré est 25, dont la racine est 5; et ce carré ôté de 33, on a le reste 8, à côté duquel il faut abaisser le premier chiffre 6 de la tranche suivante pour avoir le second terme 86 (n° 316).

Élevant le chiffre 5 à la première puissance, et le multipliant par 2, on a le nombre 10, par lequel il faut diviser le second terme de la puissance (n°s 302, 306), on 86; et le quotient 8, écrit à la suite du chiffre déjà trouvé 5, devra composer avec lui la racine demandée, qui sera donc 58, ce qu'il faudra vérifier par l'élevation au carré.

Voici comment on dispose l'opération que nous venons de faire:

33'64	58	58
25		58
86	10	464
		290
		3364

N. B. Il y a une marche un peu plus courte que celle-ci pour extraire la racine carrée; mais si on voulait l'appliquer aux puissances plus élevées, elle donnerait quelque embarras. Nous croyons que les règles les plus générales sont les meilleures, surtout pour les commençants, dont il ne faut pas surcharger la mémoire.

319. **EXEMPLE II.** On demande la racine carrée de 361.

En opérant et raisonnant comme dans le premier exemple, on trouvera $\sqrt{361} = 19$. Voici le tableau de l'opération :

3'61	19	19
1		19
26	2	171
		19
		361

On observera qu'en divisant 26 par 2, le quotient qui se présente est 13, mais qu'on ne peut écrire plus de 9 à la racine, parce que les dizaines ont déjà été déterminées. Ce qui fait que le quotient paraît devoir être aussi grand, c'est que le carré des unités étant 81, il se trouve 8 dizaines de trop dans ce que nous avons appelé le second terme.

320. **EXEMPLE III.** On demande la racine carrée de 5499025.

Puisque le carré de 1000 est 1000000, nombre plus petit que le proposé, et que le carré de 10000 est 100000000, nombre plus grand que le proposé, il est clair que la racine cherchée sera entre 1000 et 10000, c'est-à-dire qu'elle aura quatre chiffres; mais, d'après l'observation du n° 313, nous considérerons tous ces chiffres, excepté le dernier, comme ne formant qu'un terme, qui sera celui des dizaines.

En raisonnant alors comme dans le premier exemple, on sera conduit à séparer deux chiffres sur la droite du nombre proposé 5499025, et à chercher la racine du plus grand carré contenu dans la partie de gauche ou dans 54990.

Considérant donc pour un moment le nombre 54990 comme celui

qui a été proposé, on sera de nouveau conduit à en séparer deux chiffres sur la droite, et à chercher la racine du plus grand carré contenu dans la partie de gauche, ou dans 549.

Séparant encore deux chiffres sur la droite, et opérant comme dans les exemples 1 et 2, on trouvera 23 pour la racine du plus grand carré contenu dans 549; faisant le carré de 23, et le retranchant de 549, on aura le reste 20, à la suite duquel on écrira le premier chiffre 9 de la tranche suivante, pour avoir le second terme 209 (n° 316).

Considérant alors le nombre 23 comme exprimant les dizaines de la racine de 54990, on élèvera 23 à la première puissance, et on multipliera par 2, ce qui donnera 46, nombre par lequel on divisera le second terme de la puissance, ou 209, et l'on aura le quotient 4, qu'on écrira à la suite de 23.

Faisant le carré de 234, et le retranchant de 54990, on aura le reste 234, à la suite duquel on écrira le premier chiffre 2 de la tranche suivante, pour avoir le second terme 2342 (n° 316).

Considérant le nombre 234 comme exprimant les dizaines de la racine de 5499025, on élèvera 234 à la première puissance, et on multipliera par 2, ce qui donnera 468, nombre par lequel on divisera le second terme de la puissance, ou 2342, et l'on aura le quotient 5, que l'on écrira à la suite de 234.

Faisant le carré de 2345, et le retranchant de 5499025, il ne restera rien, ce qui prouvera que 2345 est la racine demandée.

L'opération principale peut être figurée ainsi :

puissance	5'49'90'25	2345	racine.
— 4			
1 ^{er} reste...	14	4	1 ^{er} diviseur.
— 529			
2 ^{me} reste...	209	46	2 ^{me} diviseur.
— 54756			
3 ^{me} reste...	2342	468	3 ^{me} diviseur.
— 5499025			
4 ^{me} reste...	0		

321. **EXEMPLE IV.** On demande la racine cubique de 34012224.

Ce nombre contenant plus de trois chiffres, en aura plus d'un à sa racine cubique (n° 316). Mais quel que soit ensuite le nombre de ces chiffres, nous les considérerons tous, excepté le dernier, comme ne formant qu'un terme, qui sera celui des dizaines (n° 313).

Pour trouver ces dizaines, il faut extraire la racine troisième du cube des dizaines (n° 302, 306); et ce cube ne peut être ni dans les unités, ni dans les dizaines, ni dans les centaines de la puissance (n° 316).

On séparera donc trois chiffres sur la droite du nombre proposé, en cette manière 34012'224; et il faudra extraire la racine troisième du plus grand cube contenu dans la partie de gauche, ou dans 34012.

Considérant pour un moment le nombre 34012 comme celui qui a été proposé, et raisonnant comme on vient de le faire, on sera de nouveau conduit à en séparer trois chiffres sur la droite, et à chercher la racine troisième du plus grand cube contenu dans la partie de gauche, ou dans 34.

Ce plus grand cube est 27, dont la racine troisième est 3, et ce cube ôté du nombre 34, on a le reste 7, à la suite duquel on écrit le premier chiffre 0 de la tranche suivante, pour avoir le second terme 70 (n° 316).

Faisant le carré de 3, qui est 9, et multipliant par 3, on aura encore 27, nombre par lequel on divisera le second terme, ou 70. Ayant trouvé le quotient 2, on l'écrira à la racine à la suite du 3 qui y est déjà.

Faisant le cube de 32, qui est de 32768, on le retranchera du nombre proposé, et l'on aura le reste 1244, à la suite duquel on abaissera le premier chiffre 2 de la dernière tranche, pour avoir le second terme 12442 (n° 316).

Faisant le carré de 32, qui est 1024, et multipliant par 3, on aura 3072, nombre par lequel on divisera le second terme de la puissance, ou 12442. Ayant trouvé le quotient 4, on l'écrira à la racine à la suite des chiffres 3 et 2 qui y sont déjà.

Faisant le cube de 324, et le retranchant du nombre proposé, il ne restera rien, en sorte que 324 sera la racine cubique cherchée.

L'opération principale peut être figurée ainsi :

puissance	34'012'224	324	racine.
—	27		
1 ^{er} reste...	70	27	1 ^{er} diviseur.
—	32768		
2 ^{me} reste...	12442	3072	2 ^{me} diviseur.
—	34012224		
3 ^{me} reste...	0		

322. En général, pour extraire la racine n^{me} d'un nombre exprimé en chiffres, il faudra, 1° partager ce nombre en tranches de n chiffres, en allant de la droite vers la gauche jusqu'à une dernière tranche qui pourra contenir moins de n chiffres (nous désignerons ces tranches, comptées de gauche à droite, par les lettres A, B, C, D, etc.); 2° extraire la racine n^{me} de la plus grande puissance n^{me} contenue dans la tranche A, racine qui n'aura qu'un chiffre, qu'on mettra en réserve, et que j'appellerai a ; 3° faire la puissance n du chiffre a , et la retrancher de la tranche A; 4° à côté du reste de la tranche A, abaisser le premier chiffre de la tranche B, pour avoir le second terme de la puissance A, B; 5° élever le chiffre a à la puissance $n-1$, multiplier cette puissance par n , diviser par ce produit le second terme de la puissance A, B; et, ayant trouvé le chiffre b pour quotient, l'écrire à la suite du chiffre a ; 6° faire la puissance n du nombre exprimé par les deux chiffres a et b écrits de suite, et la retrancher des deux premières tranches A et B; 7° à côté du reste, abaisser le premier chiffre de la tranche C, pour avoir le second terme de la puissance A, B, C; 8° élever le nombre a, b , à la puissance $n-1$, multiplier cette puissance par n , diviser par ce produit le second terme de la puissance A, B, C, et, ayant trouvé le chiffre c pour quotient, l'écrire à la suite des chiffres a, b ; 9° faire la puissance n du nombre exprimé par les chiffres a, b, c , et la retrancher des trois premières tranches A, B, C; 10° à côté du reste, abaisser le premier chiffre de la tranche D, pour avoir le second terme de la puissance A, B, C, D; 11° élever le nombre a, b, c , à la puissance $n-1$,

multiplier cette puissance par n , diviser par ce produit le second terme de la puissance A, B, C, D , et, ayant trouvé le chiffre d pour quotient, l'écrire à la suite des chiffres a, b, c ; 12° faire la puissance n du nombre exprimé par les chiffres a, b, c, d , et la retrancher des quatre premières tranches A, B, C, D , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranches et plus de restes. Alors les chiffres a, b, c, d , etc. exprimeront la racine demandée.

Cette règle est fondée sur les observations des n°s 302, 303, 306, 313, 314, 316, et les exemples précédents l'éclaircissent.

323. Du reste, quand la racine à extraire sera d'un degré un peu élevé, ou que le nombre proposé sera considérable, il sera plus simple d'opérer par logarithmes.

324. Pour extraire la racine n^{me} d'une quantité fractionnaire, il faudra extraire séparément cette racine du numérateur et du dénominateur de la fraction, et diviser le premier résultat par le second.

325. Si le polynôme représenté par B dans l'expression $\sqrt[n]{B}$ n'était pas une puissance parfaite du degré n , la quantité $\sqrt[n]{B}$ serait irrationnelle (n° 305), et l'on pourrait alors ou lui laisser la forme radicale, ou lui donner celle d'une puissance fractionnaire (n°s 240, 244), ou enfin chercher à développer la quantité irrationnelle, c'est-à-dire à trouver sa valeur par approximation (n°s 228, 237).

Si l'on a, par exemple, $B = \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}$ on posera

$$\text{ou } \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{(\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.})}$$

$$\text{ou } \sqrt[n]{B} = (\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.})^{\frac{1}{n}}$$

ou l'on cherchera la valeur approchée de ces expressions.

326. Le premier moyen qui se présente pour développer

$\sqrt[n]{\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}}$ c'est d'essayer d'y appliquer la règle du n° 306.

327. On trouverait, par exemple, d'après cette règle,

$$\sqrt[n]{\alpha + \beta} = \sqrt[n]{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt[n]{\alpha}} - \frac{1}{8} \frac{\beta^2}{\alpha^2 \sqrt[n]{\alpha}} + \frac{1}{16} \frac{\beta^3}{\alpha^3 \sqrt[n]{\alpha}} - \frac{5}{128} \frac{\beta^4}{\alpha^4 \sqrt[n]{\alpha}} + \text{etc.}$$

Voici comment on procède: on extrait la racine de α , qui est $\sqrt[n]{\alpha}$; on l'élève au carré, et on soustrait ce carré α du binôme proposé; il

reste alors β , que l'on envisage comme formant le reste du carré. Alors on divise ce reste par $2\sqrt{\alpha}$ pour avoir le second terme de la racine, savoir $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$ ou $\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$. On fait de nouveau le carré du binôme $\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)$, binôme que l'on considère comme monome, et comme représentant le premier terme de la racine. Ce carré est $\alpha + \beta + \frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha}$, que l'on soustrait de $\alpha + \beta$ pour avoir le reste $-\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha}$. On divise ce reste par le double de la racine, ou par $2\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$, et l'on a $-\frac{1}{8} \frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha}}$ pour troisième terme de cette racine. On continue de la même manière, en poussant l'opération aussi loin qu'on le veut.

328. Maintenant, si α est un carré comme λ^2 , la suite n'aura plus de radicaux, et la formule deviendra

$$\sqrt{\lambda^2 + \beta} = \lambda + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\lambda} - \frac{1}{8} \frac{\beta^2}{\lambda^3} + \frac{1}{16} \frac{\beta^3}{\lambda^5} - \frac{5}{128} \frac{\beta^4}{\lambda^7} + \text{etc.}$$

série d'autant plus convergente que λ^2 surpassera davantage β .

329. « On voit par là qu'il n'est aucun nombre dont on ne puisse extraire la racine carrée de la même manière, puisque tout nombre peut se décomposer en deux parties dont une soit un carré représenté par λ^2 .

« Si l'on cherche, par exemple, la racine carrée de 6, on fera $6 = 4 + 2$, et par conséquent $\lambda^2 = 4$, $\lambda = 2$, $\beta = 2$, d'où résultera $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024} + \text{etc.}$ Si l'on voulait ne prendre que les deux premiers termes de cette suite, on aurait $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, dont le carré $\frac{25}{4}$ est de $\frac{1}{4}$ plus grand que 6; mais si l'on considère trois termes, on a $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, dont le carré $\frac{1521}{256}$ est encore de $\frac{15}{256}$ trop petit.

« Puisque dans cet exemple $\frac{5}{2}$ approche beaucoup déjà de la vraie valeur de $\sqrt{6}$, nous prendrons pour 6 la quantité équivalente $\frac{25}{4} - \frac{1}{4}$. Nous aurons alors $\lambda^2 = \frac{25}{4}$, $\lambda = \frac{5}{2}$, $\beta = -\frac{1}{4}$; et calculant seulement les deux premiers termes de la nouvelle suite qui résultera de là,

nous trouverons $\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{2} - \frac{1}{10} = \frac{49}{20}$; or, le

carré de cette fraction étant $\frac{2401}{400}$ ne surpasse que de $\frac{1}{400}$ le carré de $\sqrt{6}$.

« Faisant maintenant $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$, de sorte que $\lambda = \frac{49}{20}$, et $\beta = -\frac{1}{400}$, et ne prenant encore que les deux premiers termes de la suite, on aura $\sqrt[3]{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$, dont le carré est $\frac{23049601}{3841600}$. Or, 6 réduit au même dénominateur vaut $\frac{23049600}{3841600}$; l'erreur n'est donc plus que de $\frac{1}{3841600}$. » (Euler, Algèbre.)

330. On trouverait aussi, d'après la règle du n° 306, et en opérant d'une manière analogue à celle du n° 327,

$$\sqrt[3]{\alpha + \beta} = \sqrt[3]{\alpha} + \frac{1}{3} \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{1}{9} \frac{\beta^2}{\alpha^4} + \frac{5}{81} \frac{\beta^3}{\alpha^6} - \frac{10}{243} \frac{\beta^4}{\alpha^8} + \text{etc.}$$

331. En sorte que si α est un cube comme λ^3 , la suite ne contiendra plus de radicaux, et l'on aura

$$\sqrt[3]{\lambda^3 + \beta} = \lambda + \frac{1}{3} \frac{\beta}{\lambda^2} - \frac{1}{9} \frac{\beta^2}{\lambda^5} + \frac{5}{81} \frac{\beta^3}{\lambda^8} - \frac{10}{243} \frac{\beta^4}{\lambda^{11}} + \text{etc.}$$

série d'autant plus convergente que λ^3 surpassera davantage β .

332. « Voilà donc une formule au moyen de laquelle on pourra trouver *par approximation*, comme on dit, la racine cubique d'un nombre quelconque, puisque tout nombre peut se partager en deux parties dont la première soit un cube.

« On voudrait, par exemple, déterminer la racine cubique de 2 : on représentera 2 par $1 + 1$, de façon que $\lambda = 1$ et $\beta = 1$, et l'on

aura par conséquent $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81} - \text{etc.}$ Les deux premiers termes de cette suite font $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dont le cube $\frac{64}{27}$ est trop grand de $\frac{10}{27}$, qu'on fasse donc $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, on aura $\lambda = \frac{4}{3}$ et $\beta = -\frac{10}{27}$, et par conséquent $\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3} - \frac{10}{162}$, ces deux termes font $\frac{4}{3} -$

$\frac{10}{162} = \frac{91}{72}$, dont le cube est $\frac{753571}{575248}$; or, $2 = \frac{746496}{575248}$; ainsi l'erreur est de $\frac{7075}{575248}$, erreur que l'on pourra diminuer encore en suivant le même procédé, et l'on approchera d'autant plus vite de la valeur qu'on cherche, que l'on prendra un plus grand nombre de termes des suites qui l'expriment. » (Euler, Algèbre)

333. On pourra opérer de même pour les puissances plus élevées.

334. Mais en observant que $\sqrt[n]{\lambda^3 + \beta} = (\lambda^3 + \beta)^{\frac{1}{3}}$, si l'on essaie de développer $(\lambda^3 + \beta)^{\frac{1}{3}}$ au moyen de la formule du binôme, et que l'on fasse pour cela $n = \frac{1}{3}$, on retrouvera la suite du n° 328, et bien plus facilement par ce procédé que par le précédent.

On retrouvera aussi très-vite la série du n° 331 par la formule du binôme, en faisant $n = \frac{1}{3}$, parce que $\sqrt[3]{\lambda^3 + \beta} = (\lambda^3 + \beta)^{\frac{1}{3}}$.

Et ainsi des autres puissances.

* 335. A. L'accord de ces résultats avec ceux que donne l'extraction immédiate des racines, nous portera à soupçonner que la formule du binôme, dont nous n'avons établi la légitimité que pour le cas des puissances entières et directes, peut s'appliquer aussi au cas des puissances fractionnaires, et peut-être à celui des puissances inverses. C'est ce qu'il s'agit d'examiner.

B. Divisons d'abord le second membre de la formule du binôme (n° 284) par α^n ; ce second membre deviendra

$$1 + n \frac{\beta}{\alpha} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \frac{\beta^3}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

Divisons ensuite le premier membre de cette formule, ou $(\alpha + \beta)^n$, par la même quantité α^n ; ce premier membre deviendra

$$\frac{(\alpha + \beta)^n}{\alpha^n} = \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right)^n = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right)^n;$$

faisant alors $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$, on aura

$$(1 + \gamma)^n = 1 + n\gamma + \frac{n(n-1)}{2} \gamma^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \gamma^3 + \text{etc.}$$

et si l'on démontre la vérité de cette équation pour toutes les valeurs quelconques de n , on aura aussi démontré la vérité de la formule générale pour toutes ces valeurs: car remettant $\frac{\beta}{\alpha}$ pour γ , et multipliant de part et d'autre par α^n , on retrouvera la formule.

C. Or, nous savons que la suite

$$1 + n\gamma + \frac{n(n-1)}{2}\gamma^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\gamma^3 + \text{etc.} \quad (\text{H})$$

équivalent à $(1 + \gamma)^n$ lorsque n est un nombre entier direct; mais nous ne savons pas encore quelle est la valeur de cette suite lorsque n n'est pas entier et direct.

Cependant, quelle que soit la valeur de n , le rôle que cette lettre joue dans la suite (H), ou la fonction qu'elle y remplit, est la même, c'est-à-dire qu'elle ne se trouve point dans le premier terme de la suite, que dans le second γ est multiplié par n , que dans le troisième γ^2 est multiplié par $\frac{n(n-1)}{2}$, etc. Nous exprimerons cela en disant que dans tous les cas la suite (H) est une même fonction de n .

D. En général, nous appellerons fonction d'une quantité, toute expression de calcul dans laquelle cette quantité entrera d'une manière quelconque; et nous désignerons ces fonctions par f , f' , f'' , etc. F , F' , F'' , etc. φ , φ' , φ'' , etc.

Ainsi $f(x)$, $f'(x)$, $F(x)$, $F'(x)$, etc. indiqueront des fonctions de x différentes, c'est-à-dire des expressions de calcul dans lesquelles la quantité x entrera de différentes manières.

En revanche $f(x)$, $f(y)$, ou $f'(x)$, $f'(y)$, ou etc. indiqueront des fonctions semblables de x et de y , ou des expressions de calcul dans lesquelles les quantités x et y entreront, chacune à part, de la même manière. Telles seraient, par exemple, les fonctions $\frac{ax+b}{c-x}$, $\frac{ay+b}{c-y}$, etc.

E. Cela posé, il est clair que, quelles que soient les valeurs de n et de m , on aura

$$1 + n\gamma + \frac{n(n-1)}{2}\gamma^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\gamma^3 + \text{etc.} = f(n).$$

$$1 + m\gamma + \frac{m(m-1)}{2}\gamma^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\gamma^3 + \text{etc.} = f(m),$$

et par conséquent $(1 + n\gamma + \text{etc.})(1 + m\gamma + \text{etc.}) = f(n) \times f(m)$.

Mais, quelles que soient les valeurs de n et de m , le produit de $1 + n\gamma + \text{etc.}$ par $1 + m\gamma + \text{etc.}$ aura toujours la même forme générale. Il suffira donc de connaître cette forme dans un cas, pour savoir ce qu'elle sera dans tous les autres.

Or, dans le cas où n et m sont des nombres entiers, on a $1 + n\gamma + \text{etc.} = (1 + \gamma)^n$, et $1 + m\gamma + \text{etc.} = (1 + \gamma)^m$, et par conséquent

$$(1 + n\gamma + \text{etc.})(1 + m\gamma + \text{etc.}) = (1 + \gamma)^n (1 + \gamma)^m = (1 + \gamma)^{n+m} = 1 + (n+m)\gamma + \frac{(n+m)(n+m-1)}{2}\gamma^2 + \text{etc.}$$

Donc, la même forme a lieu dans tous les cas, ou pour toutes les valeurs de n et de m , c'est-à-dire que le produit en question est composé en $n+m$, comme ses facteurs le sont, l'un en n et l'autre en m : en d'autres termes, $f(m) \times f(n) = f(n+m)$, et par conséquent

$$f(n+m) = f(n) \times f(m).$$

Faisant $m = a+b$, cette équation devient $f(n+a+b) = f(n) \times f(a+b)$; mais par ce qui précède $f(a+b) = f(a) \times f(b)$, d'où il suit

$$f(n+a+b) = f(n) \times f(a) \times f(b).$$

En continuant de même, on trouverait

$$f(n+a+b+\text{etc.}) = f(n) \times f(a) \times f(b) \times \text{etc.}$$

Maintenant, si l'on suppose $n = a = b = \text{etc.} = \frac{h}{l}$, h et l étant des entiers directs, et $\frac{h}{l}$ une fraction, on aura

$$f\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{l} + \frac{h}{l} + \text{etc.}\right) = f\left(\frac{h}{l}\right) \times f\left(\frac{h}{l}\right) \times f\left(\frac{h}{l}\right) \times \text{etc.}$$

et si la fraction $\frac{h}{l}$ est répétée l fois, on obtiendra $f\left(\frac{lh}{l}\right) = \left(f\left(\frac{h}{l}\right)\right)^l$,

ou $f(h) = \left(f\left(\frac{h}{l}\right)\right)^l$; tirant de part et d'autre la racine du degré l ,

on trouvera

$$\left(f(h)\right)^{\frac{1}{l}} = f\left(\frac{h}{l}\right).$$

Mais $f(h) = 1 + h\gamma + \frac{h(h-1)}{2}\gamma^2 + \text{etc.}$ et comme dans ce cas h est un nombre entier direct $1 + h\gamma + \text{etc.} = (1 + \gamma)^h$, ce qui donne $f(h) = (1 + \gamma)^h$; $\left(f(h)\right)^{\frac{1}{l}} = (1 + \gamma)^{\frac{h}{l}}$; et, par conséquent, $(1 + \gamma)^{\frac{h}{l}} = f\left(\frac{h}{l}\right)$, c'est-à-dire que

$$(1+\gamma)^{\frac{h}{l}} = 1 + \frac{h}{l} \gamma + \frac{\frac{h}{l}(\frac{h}{l}-1)}{2} \gamma^2 + \text{etc.}$$

comme nous pensions le trouver.

* 336. Mais l'équation $f(n+m) = f(n) \times f(m)$, nous conduira encore à un autre résultat : car si l'on suppose $m = -n$, elle devient

$$f(0) = f(n) \times f(-n);$$

et comme $f(0) = 1 + 0\gamma + \frac{0(0-1)}{2} \gamma^2 + \text{etc.} = 1$, on a

$$1 = f(n) \times f(-n),$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{f(n)} = f(-n);$$

mais nous avons vu que n étant un nombre direct entier ou frac-

tionnaire, on avait $f(n) = (1+\gamma)^n$; d'où il résulte $\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{(1+\gamma)^n} = (1+\gamma)^{-n}$ (n^{os} 90, 91), et par conséquent

$$(1+\gamma)^{-n} = f(-n), \text{ ou enfin } (1+\gamma)^{-n} =$$

$$1 + (-n)\gamma + \frac{-n(-n-1)}{2} \gamma^2 + \text{etc.}$$

comme nous pensions aussi le trouver.

337. Nous avons eu, au n° 329, $\sqrt[4]{6} = \frac{49}{20}$, à peu près.

Si nous nous étions proposé d'avance d'obtenir cette racine exprimée en 20^{mes}, nous aurions fait $6 = \frac{6}{1}$, et multipliant les deux termes de cette espèce de fraction par 20³ ou par 400, nous aurions eu $\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\frac{6}{1}} = \sqrt[4]{\frac{2400}{400}}$; extrayant alors la racine du numérateur et du dénominateur (n° 324), nous aurions obtenu, comme au n° 329, $\sqrt[4]{6} = \frac{49}{20}$ environ.

338. Nous avons trouvé, au n° 332, $\sqrt[5]{2} = \frac{91}{72}$, à peu près.

Si nous nous étions proposé d'avance d'obtenir cette racine exprimée en 72^{mes}, nous aurions fait 2 égal à $\frac{2}{1}$; et multipliant les deux termes de cette espèce de fraction par 72³ ou par 373248, nous aurions eu $\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{\frac{2}{1}} = \sqrt[5]{\frac{746496}{373248}}$; extrayant alors la racine troisième

du numérateur et du dénominateur (n° 324), nous aurions obtenu, comme au n° 332, $\sqrt[3]{2} = \frac{91}{72}$ environ.

339. En général, si l'on a un nombre entier e , qui ne soit pas une puissance parfaite du degré n , et qu'on veuille avoir par approximation sa racine n^{me} , réduite au dénominateur d , on multipliera e par d^n , puis l'on prendra en nombre entier la racine n^{me} du produit ed^n , la plus approchée possible; et désignant cette racine par r , on aura $\sqrt[n]{e} = \frac{r}{d}$, à peu près.

340. Un cas de cette théorie qui mérite attention, c'est celui où d serait ou 10, ou 100, ou 1000, etc. car alors la fraction $\frac{r}{d}$ serait une fraction décimale.

Veut-on, par exemple, la racine seconde de 6 en centièmes, on aura $n=2$, $e=6$, $d=100$, $d^n = d^2 = 10000$, $e \times d^n = 60000$, dont la racine seconde la plus approchée en nombres entiers est 245, ce qui donne $\sqrt{6} = 2.45$, comme on le trouverait en réduisant en décimales la fraction $\frac{49}{20}$.

Par exemple encore, veut-on la racine troisième de 2 en centièmes, on aura $n=3$, $e=2$, $d=100$, $d^n = d^3 = 1000000$, $ed^n = 2000000$, dont la racine troisième la plus approchée en nombres entiers est 125, ce qui donne $\sqrt[3]{2} = 1.25$, comme on le trouverait en réduisant en décimales la fraction $\frac{91}{72}$.

341. Si le nombre proposé était fractionnaire, il faudrait extraire séparément la racine n^{me} de son numérateur et de son dénominateur, si possible exactement, sinon par approximation (n° 324) : c'est ce qu'on peut dire de plus général à cet égard.

342. Mais si ni l'un ni l'autre des deux termes de la fraction n'étaient puissance parfaite du degré n , on faciliterait l'opération en multipliant ces deux termes par un nombre tel que l'un des deux, par exemple le dénominateur, devînt puissance parfaite du degré n , et il n'y aurait alors qu'une racine à extraire.

Si l'on voulait, par exemple, la racine seconde de 5.123, on rendrait le dénominateur carré en écrivant au lieu de 5.123, ou 5.1230, ou 5.123000, ou 5.12300000, ou etc. suivant le nombre

de décimales qu'on voudrait à la racine, et l'on n'aurait plus qu'à extraire la racine, ou de 51230, ou de 5123000, ou de 512300000, ou de etc. Supposons qu'on se soit arrêté à 51230 : la racine la plus approchée de ce nombre étant 226, on aura $\sqrt{5.123} = 2.26$ à un centième près.

343. Mais dans ces différents cas il sera souvent plus commode d'opérer par logarithmes.

On pourra aussi se servir pour les extractions de racines d'une méthode donnée par *Halley*, et qui offre souvent de grands avantages : on la trouvera exposée au n° 185 des *Leçons élémentaires de mathématiques* par Lacaille et Marie.

APPENDICE

A LA PREMIÈRE PARTIE.

Des permutations et des combinaisons.

344. A. INTRODUCTION. Nous aurions eu différentes fois l'occasion, dans le cours de cette première partie, d'agiter cette question : *Plusieurs lettres a, b, c, d, etc. étant données, de combien de manières différentes peut-on les écrire, soit en les conservant toutes, soit en les prenant deux à deux, trois à trois, etc. et combien de produits différents peut-on former avec ces mêmes lettres, prises de la seconde manière? etc.*

Ce problème, que nous avons craint d'aborder de peur de nous écarter trop de notre sujet principal, est assez intéressant pour que nous essayions de le résoudre avant d'aller plus loin, d'autant plus qu'il pourra nous servir pour ce que nous avons encore à dire.

B. Quand on a plusieurs choses, et qu'on change successivement leurs places pour trouver tous les arrangements qu'elles peuvent former entre elles, on dit qu'on les *permuté*, et les arrangements eux-mêmes s'appellent des *permutations*.

Quand on les prend au contraire deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc. pour en former des groupes isolés, on dit qu'on les *combine*, et les groupes eux-mêmes se nomment des *combinaisons*.

Il faut observer que dans les combinaisons des différentes parties d'un tout, le tout est en quelque sorte démembré pour en prendre les parties deux à deux, trois à trois, etc. tandis que dans les permutations de ces mêmes parties, le tout conserve toujours son intégrité, et que l'on ne fait que faire changer d'ordre aux différentes parties qui le constituent.

Nous allons dire un mot, d'abord des permutations, puis des combinaisons.

C. *Des permutations entre des lettres différentes.* Deux lettres a et b n'ont que deux permutations ab et ba , dont le nombre est donc exprimé par 2 ou par 1×2 .

Trois lettres a, b, c , donnent six permutations : car chaque lettre peut occuper la première place, et y rester pendant que les deux autres auront les deux permutations qu'elles peuvent avoir ; chacune des lettres fournira ainsi, pendant qu'elle est à la première place, deux arrangements, comme abc, acb , pour a , bac, bca pour b , et cab, cba pour c : chaque lettre donnant ainsi deux arrangements, et le nombre des lettres étant trois, on aura 3 fois deux arrangements, c'est-à-dire que le nombre des permutations sera 6, ou $1 \times 2 \times 3$.

Si on a 4 lettres, a, b, c, d , chacune peut occuper la première place, et dans chacun de ces cas les trois autres peuvent former $1 \times 2 \times 3$ dispositions différentes, comme nous venons de le voir. Le nombre des permutations est donc dans ce cas $1 \times 2 \times 3 \times 4$.

En raisonnant de la même manière, on verra que le nombre des permutations de 5 lettres est $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, que celui de 6 lettres est $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$, et qu'en général celui de n lettres est $1 \times 2 \times 3 \dots \times n$.

D. *Des combinaisons entre des lettres différentes.* Deux lettres ne peuvent être combinées que 2 à 2. Trois lettres peuvent être combinées 2 à 2 ou 3 à 3. Quatre lettres peuvent être combinées 2 à 2, 3 à 3, et 4 à 4, et ainsi de suite.

Considérons d'abord les combinaisons 2 à 2 de 2, de 3, de 4, et en général de n lettres. Cela fait, nous considérerons les combinaisons 3 à 3 de 3, de 4, de 5, et en général de n lettres ; puis les combinaisons 4 à 4 de 4, de 5, de 6, et en général de n lettres, etc.

E. *Des combinaisons 2 à 2.* Chercher le nombre des combinaisons 2 à 2 de deux lettres, ce n'est autre chose que chercher le nombre de leurs permutations, qui est 1×2 ($n^o C.$), ou 2×1 .

Mais trois lettres a, b, c , combinées 2 à 2, donnent ab, ac, ba, bc, ca, cb , c'est-à-dire qu'elles ont six combinaisons, bien entendu que dans tout ceci nous admettons les produits semblables ou égaux, sans admettre les répétitions de la même lettre.

Pour voir comment se forment ces combinaisons, il faut observer

que chaque lettre, étant à son tour la première, se combine avec chacune des deux autres, et fournit ainsi deux combinaisons : or, comme il y a 3 lettres, cela fait 3 fois 2 combinaisons, ou 3×2 .

Quatre lettres a, b, c, d , combinées 2 à 2, donneront donc 12 combinaisons : car chaque lettre étant à la première place, et se combinant avec les 3 autres, donnera 3 combinaisons; et comme il y a quatre lettres, cela fera 4 fois 3 combinaisons, ou 4×3 .

En général, n lettres combinées 2 à 2 donneront $n(n-1)$ combinaisons : car chaque lettre étant à la première place; et se combinant avec les $n-1$ autres, donnera $n-1$ combinaisons; et comme il y a n lettres, cela fera n fois $n-1$ combinaisons, ou $n(n-1)$.

F. *Des combinaisons 3 à 3.* Chercher le nombre des combinaisons 3 à 3 de trois lettres, ce n'est autre chose que chercher le nombre de leurs permutations, qui est $1 \times 2 \times 3$ (n° C), ou $3 \times 2 \times 1$.

Mais si l'on a 4 lettres, et qu'on cherche leurs combinaisons 3 à 3, on verra que, pendant que chaque lettre est à la première place, elle se combine avec toutes les combinaisons 2 à 2 des 3 autres, dont le nombre est 3×2 (n° E). Chaque lettre fournit donc ainsi 3×2 combinaisons, et comme il y a 4 lettres, cela fait $4 \times 3 \times 2$ combinaisons.

Si l'on a 5 lettres, et qu'on veuille les combiner 3 à 3, on verra que pendant que chaque lettre est à la première place, elle se combine avec toutes les combinaisons 2 à 2 des 4 autres, dont le nombre est 4×3 (n° E). Chaque lettre fournit donc ainsi 4×3 combinaisons; et comme il y a 5 lettres, cela fait $5 \times 4 \times 3$ combinaisons.

En général, si l'on a n lettres, et qu'on les combine 3 à 3, on verra que pendant que chaque lettre est à la première place, elle se combine avec toutes les combinaisons 2 à 2 des $(n-1)$ autres lettres, dont le nombre est $(n-1)(n-2)$ (n° E). On a donc ainsi $n(n-1)(n-2)$ combinaisons 3 à 3 pour n lettres.

G. *Des combinaisons 4 à 4.* Chercher le nombre des combinaisons 4 à 4 de 4 lettres, ce n'est autre chose que chercher le nombre de leurs permutations.

Mais si l'on a n lettres ($n > 4$), et qu'on cherche leurs combinaisons 4 à 4, on verra que chaque lettre étant à la première place elle se combine avec toutes les combinaisons 3 à 3 des $(n-1)$ autres lettres, combinaisons dont le nombre est, d'après ce que nous venons

de dire ($n^\circ F$) : $(n-1)(n-2)(n-3)$. On a donc ainsi $(n-1)(n-2)(n-3)$ combinaisons pour chaque lettre; et, comme il y a n lettres, cela fait $n(n-1)(n-2)(n-3)$ pour le nombre des combinaisons 4 à 4 de n lettres.

H. *Des combinaisons m à m.* Chercher le nombre des combinaisons m à m de n lettres, ce n'est autre chose que chercher le nombre de leurs permutations.

Mais si l'on a n lettres ($n > m$), et qu'on cherche leurs combinaisons m à m , on verra que chaque lettre étant à la première place, elle se combine avec toutes les combinaisons $(m-1)$ à $(m-1)$ des $(n-1)$ autres lettres. Or, le nombre de ces combinaisons est $(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(m-1)]$ (*). Et comme il y a n lettres, cela fait

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)$$

pour le nombre des combinaisons de n lettres prises m à m .

I. *Des produits différents.* Quand on a combiné plusieurs lettres 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc. plusieurs des produits formés sont égaux; on a par exemple $abc = acb = bac = bca = cab = cba$.

Il est facile de voir que si les n lettres données sont combinées 2 à 2, on aura le nombre des produits différents en divisant le nombre des combinaisons des n lettres prises 2 à 2, ou $n(n-1)$, par le nombre des permutations de 2 lettres, c'est-à-dire par 1×2 . Ce nombre sera donc $\frac{n(n-1)}{2}$.

Si les n lettres données sont combinées 3 à 3, on aura le nombre des produits différents, en divisant le nombre des combinaisons des n lettres prises 3 à 3, ou $n(n-1)(n-2)$, par le nombre des permutations de 3 lettres, c'est-à-dire par $1 \times 2 \times 3$. Ce nombre sera donc $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$.

(*) Pour bien comprendre comment nous avons formé la quantité

$$(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(m-1)],$$

qui exprime le nombre des combinaisons de $(n-1)$ lettres prises $(m-1)$ à $(m-1)$, il faut observer que cette quantité devait être composée de plusieurs facteurs diminuant toujours d'une unité, que le premier devait être $(n-1)$, et que leur nombre devait être $(m-1)$. Or, puisque le premier facteur égale n diminué de 1, que le second égale n diminué de 2, etc. il est clair que le $(m-1)^{\text{ième}}$ doit éga-

ler n diminué de $m-1$.

En général, si les n lettres données sont combinées m à m , on aura le nombre des produits différents, en divisant le nombre des combinaisons des n lettres prises m à m , ou $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$, par le nombre des permutations de m lettres, c'est-à-dire par $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m$. Ce nombre sera donc

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}.$$

K. Le nombre de tous les produits différents que l'on peut former avec n lettres, en les prenant 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, et ainsi de suite jusqu'à n à n , c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on les prenne toutes, sera donc

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \text{etc.} + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n};$$

ou, parce que le dernier terme, qui a le numérateur égal au dénominateur, équivaut à l'unité, ce nombre sera

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \text{etc.} + 1.$$

Or, si l'on développe par la formule du binôme l'expression $(1+1)^n$, on trouve

$$(1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \text{etc.} + 1,$$

d'où l'on tire, en retranchant de part et d'autre $1+n$,

$$(1+1)^n - 1 - n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \text{etc.} + 1.$$

Mais le second membre de cette égalité n'étant autre chose que le nombre des produits en question, il en résulte que ce nombre égale $(1+1)^n - 1 - n$, ou $2^n - 1 - n$.

Par exemple, avec un seul nombre on peut former $2^1 - 1 - 1$ produits, c'est-à-dire 0 produits; avec deux nombres on peut former $2^2 - 1 - 2$ ou 1 produit; avec trois nombres on peut former $2^3 - 1 - 3$ ou 4 produits; avec quatre nombres on peut former $2^4 - 1 - 4$ ou 11 produits, et ainsi de suite.

L. Des permutations lorsque plusieurs lettres sont semblables. Nous prendrons d'abord un exemple particulier : on demande le nombre des permutations des lettres *aaabbc*. Si ces six lettres étaient différentes, le nombre de leurs permutations serait $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

$\times 6$ (n° C). Mais plusieurs de ces lettres étant semblables, plusieurs des permutations indiquées par le nombre $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ seront semblables; et il est facile de comprendre que comme il y a trois a , le nombre total des permutations devra d'abord être divisé par $1 \times 2 \times 3$, nombre des permutations de trois lettres; mais comme il y a aussi deux b , le nombre total des permutations devra encore être divisé par 1×2 , nombre des permutations de deux lettres. Le nombre cherché sera donc

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2} = \frac{4.5.6}{2} = 60.$$

On verra clairement d'après cela que pour trouver le nombre des permutations de tant de lettres qu'on voudra, dont plusieurs sont semblables, il faudra d'abord chercher le nombre des permutations de toutes les lettres comme si elles étaient toutes différentes, puis diviser ce nombre, 1° par celui des permutations d'autant de lettres qu'il y en a de semblables à la première, 2° par celui des permutations d'autant de lettres qu'il y en a de semblables à la seconde, 3° par celui des permutations d'autant de lettres qu'il y en a de semblables à la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

M. Des combinaisons lorsque chaque lettre est répétée autant que possible. Deux lettres a, b , prises 2 à 2, en admettant la répétition de la même lettre, donnent 4 combinaisons, aa, ab, bb, ba . Le nombre des combinaisons est donc alors 2^2 .

Trois lettres a, b, c , prises 2 à 2, de la même manière, donnent 9 combinaisons, $aa, ab, ac; bb, ba, bc; cc, ca, cb$. Le nombre des combinaisons est donc alors 3^2 .

En général, pour former ces combinaisons 2 à 2, on prendra la première lettre a , et on la combinera avec elle-même et avec les autres lettres, ce qui donnera d'abord autant de combinaisons qu'il y a de lettres; on prendra ensuite la seconde lettre b , et on la combinera avec elle-même et avec les autres lettres, ce qui donnera encore autant de combinaisons qu'il y a de lettres. On fera la même chose avec la lettre c , puis avec la lettre d , s'il y en a plus de trois, et ainsi de suite; et à chaque fois on aura autant de combinaisons qu'il y a de lettres: en sorte que, lorsqu'on aura fini, le nombre total des combinaisons 2 à 2 sera égal au nombre des lettres multiplié par

lui-même, ou au carré du nombre des lettres. S'il y a n lettres, il y aura donc n^2 combinaisons.

Maintenant, si l'on avait 3 lettres, et qu'on voulût les combiner 3 à 3, on commencerait d'abord par les combiner 2 à 2, ce qui donnerait les 3² combinaisons suivantes, $aa, ab, ac; bb, ba, bc; cc, ca, cb$. Ensuite on combinerait la lettre a avec chacune de ces combinaisons, en lui faisant occuper la première place, puis la lettre b avec les mêmes combinaisons, et de la même manière; puis la lettre c , et l'on aurait par conséquent 3² combinaisons pour chacune de ces lettres; ce qui ferait en tout $3^2 \times 3 = 3^3$, comme on le voit ici :

$aaa, aab, aac, abb, aba, abc, acc, aca, acb;$

$baa, bab, bac, bbb, bba, bbc, bcc, bca, bcb;$

$caa, cab, cac, cbb, cba, cbc, ccc, cca, ccb.$

En général, si l'on avait n lettres à combiner 3 à 3, on commencerait par les combiner 2 à 2, ce qui donnerait n^2 combinaisons; puis on combinerait encore successivement chacune des n lettres avec les n^2 combinaisons 2 à 2, ce qui donnerait $n^2 \times n$ combinaisons 3 à 3, ou n^3 .

De même, si l'on avait n lettres à combiner 4 à 4, on commencerait par les combiner 3 à 3, ce qui donnerait n^3 combinaisons; puis on combinerait encore successivement chacune des n lettres avec les n^3 combinaisons 3 à 3, et l'on aurait ainsi $n^3 \times n$ combinaisons 4 à 4, ou n^4 .

En continuant de la même manière, on verrait que n lettres combinées 5 à 5 donnent n^5 combinaisons, que combinées 6 à 6 elles donnent n^6 combinaisons, et qu'en général combinées m à m elles donnent n^m combinaisons.

N. Puisque n lettres combinées deux à deux donnent n^2 combinaisons, que combinées trois à trois elles en donnent n^3 , que combinées quatre à quatre elles en donnent n^4 , et ainsi de suite, il en résulte que le nombre de toutes les combinaisons de ces n lettres, en commençant par les combinaisons 2 à 2, et en finissant par les combinaisons n à n , est égal à (*Arith.* n° 676)

$$n^2 + n^3 + n^4 + \dots + n^n = \frac{n^{n+1} - n^2}{n - 1}.$$

O. Pour abréger, nous ne rechercherons point le nombre des

combinaisons de n lettres, lorsque toutes ou quelques-unes sont répétées, mais qu'elles ne le sont pas également; et nous ne rechercherons point non plus quel est, dans ce cas et dans celui du n° M, le nombre des produits différents qui résultent des différentes combinaisons dont il s'agit, soit ici, soit dans ce numéro-là.

P. Du reste, la théorie qui vient de nous occuper a des applications nombreuses et fort intéressantes, et entre autres dans le *Calcul des probabilités*. Nous allons résoudre par son moyen la question suivante :

Q. Six personnes doivent se ranger autour d'une table de jeu, et les places seront déterminées par le sort. Deux amants qui se trouvent parmi ces six personnes, seraient bien aises d'être l'un à côté de l'autre. Combien y a-t-il de chances pour, et combien y en a-t-il contre ?

Six personnes peuvent former $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ arrangements différents (n° C).

Cela posé, désignons les deux amants par A et B . Pendant que A sera à la droite de B , si on les considère comme une seule personne, on verra que, sans changer leur position respective, on pourra faire $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ arrangements qui leur seront favorables. Et comme il en sera de même pour le cas où A sera à la gauche de B , cela fera déjà $120 + 120 = 240$ arrangements heureux.

Ce serait tout si les six personnes étaient placées sur une même ligne droite; mais A étant à un bout de la ligne, et B à l'autre, si l'on forme le cercle, comme cela a lieu quand on est autour d'une table, les deux amants se rejoindront; or, sans changer cette disposition, les autres personnes, qui sont au nombre de quatre, pourront former $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ arrangements, encore favorables aux deux amants. Et comme il en sera de même lorsque A se placera au bout de la ligne qui était occupé par B , et B à celui qui était occupé par A , cela fera de nouveau 24 arrangements favorables.

Les chances pour seront donc au nombre de $240 + 24 + 24 = 288$, et par conséquent les chances contre au nombre de $720 - 288 = 432$.

Il y aura donc 432 à parier contre 288, ou 3 contre 2, ou $1\frac{1}{2}$ contre 1, que les amants seront séparés.

SECONDE PARTIE.

DES ÉQUATIONS QUI NE SONT PAS RÉSOLUES DÈS QU'ELLES
SONT POSÉES, ET DE LEUR RÉOLUTION.

SECTION PREMIÈRE.

Généralités relatives aux équations, et changements préparatoires qu'on peut leur faire subir.

CHAPITRE PREMIER.

Nouveaux exemples de questions qui fournissent des équations à résoudre, et division de ces équations en plusieurs classes et degrés.

345. Nous avons déjà vu quelques exemples de ces sortes de questions dans les premiers chapitres de cet ouvrage; nous allons en donner d'autres. Nous nous exercerons à exprimer par des équations les rapports des connues aux inconnues (n^{os} 50, 51) dans les problèmes qui nous seront proposés; mais nous n'essaierons point pour le moment de résoudre (n^o 52) ces équations; il faudra avant d'en venir là poser encore quelques principes qui nous seront nécessaires.

D'ailleurs, ceci n'étant en quelque sorte qu'une introduction à la seconde partie de cette Algèbre, les problèmes que nous allons proposer seront plutôt arithmétiques qu'algébriques; il est bon dans toute étude de commencer autant que possible par ce qui est le plus facile.

Nous devons avertir encore qu'un même problème peut souvent être envisagé sous plusieurs faces différentes, d'où découlent autant de manières différentes de le mettre en équation; mais nous ne nous arrêterons pas pour le moment à tourner et retourner ainsi les questions qui vont être soumises à notre examen, ce qui nous entraînerait à trop de longueurs; nous réservons cet exercice, très-utile en lui-même, pour une appendice que nous placerons à la fin de cette seconde partie, et qui contiendra d'autres matières que nous avons jugées devoir aussi être détachées du corps de l'ouvrage.

Du reste, notre but, en donnant ici tous ces problèmes, est de satisfaire les commençants un peu difficiles, qui n'aiment pas à résoudre des équations sans savoir si elles se rattachent à quelque chose de réel. Je veux leur faire voir que des questions pratiques peuvent conduire à des équations de degrés divers. Ceux qui ne seront pas si exigeants, et qui voudront atteindre plus vite le but, pourront passer immédiatement aux nos 357 et 358.

346. PROBLÈME I. « Un père laisse quatre fils, qui partagent son bien de la manière suivante : le premier prend la moitié de l'héritage, moins 3000 francs; le second prend le tiers du même héritage, moins 1000 francs; le troisième prend exactement le quart du bien; et le quatrième prend enfin la cinquième partie du bien et 600 francs. De combien était l'héritage, et combien chaque fils a-t-il reçu ? » (Euler.)

Les conditions du problème sont telles que, si l'on connaît l'héritage, on pourra sur-le-champ calculer les portions de chaque fils.

Soit donc l'héritage x

Painé des fils aura. $\frac{x}{2} - 3000$

le second. $\frac{x}{3} - 1000$

le troisième. $\frac{x}{4}$

le quatrième. $\frac{x}{5} + 600$.

Et ces quatre parts réunies équivalant à l'héritage même, l'équation sera celle-ci,

$$\frac{x}{2} - 3000 + \frac{x}{3} - 1000 + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 600 = x.$$

347. A. PROBLÈME II. « Un homme a deux espèces de monnaie : 7 pièces de la plus forte espèce, avec 12 pièces de la plus faible, font 288 francs; et 12 pièces de la première espèce, avec 7 de la seconde, font 358 francs. On demande combien vaut chaque espèce de monnaie? »

(Lacroix.)

Je suppose qu'une pièce de la plus forte espèce vaille x francs, et qu'une pièce de la plus faible vaille y francs.

Sept pièces de la plus forte vaudront donc $7x$ francs, et douze de la plus faible $12y$ francs, ce qui donnera cette équation,

$$7x + 12y = 288.$$

D'un autre côté, douze pièces de la première espèce vaudront $12x$, et sept de la seconde vaudront $7y$, ce qui donnera cette autre équation,

$$12x + 7y = 358.$$

B. PROBLÈME III. Un homme a deux espèces de monnaie : 7 pièces de la première espèce, avec 12 pièces de la seconde, font 288 francs. On demande combien vaut chaque espèce de monnaie?

En nommant encore x la valeur d'une pièce de la première espèce, et y celle d'une pièce de la seconde, on n'aura que l'équation

$$7x + 12y = 288.$$

C. PROBLÈME IV. Un homme a deux espèces de monnaie : 7 pièces de la plus forte espèce, avec 12 de la plus faible, font 288 francs; 12 pièces de la première espèce, avec 7 de la seconde, font 358 francs; enfin la valeur d'une pièce de la première espèce, répétée autant de fois que l'indique la valeur d'une pièce de la seconde, produit 240 francs. On demande également combien vaut chaque espèce de monnaie?

En représentant toujours ces valeurs par x et par y , on a d'abord les deux équations du problème 2,

$$7x + 12y = 288$$

$$12x + 7y = 358;$$

mais on a de plus celle-ci,

$$xy = 240.$$

348. PROBLÈME V. « Trois joueurs qui ont fait une partie se retirent, le premier avec autant de fois 7 écus que le second a de fois trois écus, et le second avec autant de fois 17 écus que le troisième a de fois 5 écus; et si l'on multiplie l'argent du premier par l'argent du second, et l'argent du second par l'argent du troisième, et enfin l'argent du troisième par l'argent du premier, la somme de ces trois produits est $3830\frac{2}{3}$. Avec combien d'argent se retirent-ils chacun? » (Euler.)

Je suppose que le troisième se retire avec x fois 5 écus, ou avec $5x$ écus.

Le second aura donc x fois 17 écus, ou $17x$ écus.

Quant au premier, il a autant de fois 7 écus que le second a de fois trois écus; mais le second ayant $17x$ écus, a par conséquent $\frac{17x}{3}$ fois trois écus, en sorte que l'argent du premier est exprimé par $7 \times \frac{17x}{3} = \frac{119x}{3}$.

Maintenant, si l'on multiplie l'argent du premier, ou $\frac{119x}{3}$, par celui du second, ou par $17x$, on aura $\frac{2023xx}{3}$.

Si l'on multiplie l'argent du second, ou $17x$, par l'argent du troisième, ou par $5x$, on aura $85xx$.

Si l'on multiplie l'argent du troisième, ou $5x$, par celui du premier, ou par $\frac{119x}{3}$, on aura $\frac{595xx}{3}$.

Enfin, si l'on ajoute ces trois produits, qui doivent valoir ensemble $3830\frac{2}{3}$, on aura l'équation

$$\frac{2023xx}{3} + 85xx + \frac{595xx}{3} = 3830\frac{2}{3}.$$

349. PROBLÈME VI. « Un homme achète un cheval, qu'il vend au bout de quelque temps pour 24 pièces de 5 francs. A cette vente il perd autant pour cent que le cheval lui avait coûté de pièces. On demande combien il l'avait payé. » (Lacroix.)

Je suppose qu'il l'avait payé x pièces.

Puisqu'il perd autant pour cent que le cheval lui a coûté, il perd x pour 100.

Mais si sur chaque 100 il perd x , combien perd-il sur ce qu'il a payé, c'est-à-dire sur x ?

On a la proportion $100 : x :: x : \text{un quatrième terme}$, qui est par conséquent $\frac{xx}{100}$: c'est là ce que perd l'homme en question.

D'un autre côté, comme il a payé le cheval x pièces, et qu'il en a retiré 24, il est clair que sa perte est aussi exprimée par $x - 24$.

On a donc l'équation

$$\frac{xx}{100} = x - 24.$$

350. A. PROBLÈME VII. *Trouver deux nombres tels que, si l'on ajoute leur produit à leur somme, on obtienne 79, et que, si l'on retranche ce même produit du carré du plus grand, on ait 18.*

J'appelle x le plus grand des deux nombres cherchés, et y le plus petit, ce qui donne tout de suite les équations,

$$x + y + xy = 79$$

$$xx - xy = 18.$$

B. PROBLÈME VIII. « *Trouver deux nombres tels que, si l'on ajoute leur produit à leur somme, on obtienne 79,* » sans autre condition.

(Lacroix.)

Appelant encore x et y ces deux nombres, on n'a que la seule équation

$$x + y + xy = 79.$$

C. PROBLÈME IX. *Trouver deux nombres tels que, si l'on retranche le plus petit du plus grand, on ait pour reste 2; tels encore que, si l'on ajoute leur produit à leur somme, on obtienne 79; et tels enfin que, si l'on retranche ce même produit du carré du plus grand, on ait 18.*

Nommant toujours x le plus grand, et y le plus petit, on a

$$x - y = 2$$

$$x + y + xy = 79$$

$$xx - xy = 18.$$

351. PROBLÈME X. « *Quelques capitaines se trouvent en campagne; chacun d'eux commande à trois fois autant de cavaliers et à vingt fois autant de fantassins qu'ils sont de capitaines. Un cavalier reçoit chaque mois pour sa paie autant de florins qu'il y a de capitaines, et un fantassin la moitié de cette somme; d'ailleurs, la dépense totale pour la paie de tous les cavaliers et de tous les fantassins, est de 13000 florins par mois. On demande combien il y a de capitaines.* »

(Euler.)

Il y a x capitaines; chacun d'eux commande à $3x$ cavaliers et à $20x$ fantassins; il y a donc en tout x fois $3x$ ou $3xx$ cavaliers, et x fois $20x$ ou $20xx$ fantassins. Mais chaque cavalier reçoit par mois x florins, et chaque fantassin $\frac{x}{2}$ florins; en sorte que la dépense totale est de... x fl. $\times 3xx + \frac{x}{2}$ fl. $\times 20xx$, ou de $3x^3 + 10x^3$, c'est-à-dire qu'on a

$$3x^3 + 10x^3 = 13000.$$

352. PROBLÈME XI. « Quelques négociants ont en commun un capital de 8240 écus; chacun y ajoute quarante fois autant d'écus qu'ils sont d'associés; ils gagnent avec la somme totale autant pour cent qu'ils sont d'associés. En partageant le profit, il se trouve qu'après que chacun a pris dix fois autant d'écus qu'ils sont d'associés, il reste 224 écus. On demande quel est donc le nombre de ces associés? » (Euler.)

Il y a x associés; chacun d'eux ajoute au capital de 8240 écus, $40x$ écus; en sorte que ce capital se trouve être de $8240 + 40x \times x = 8240 + 40xx$.

Ils gagnent avec cette somme x pour cent, de manière que leur gain doit se déterminer ainsi $100 : 8240 + 40xx :: x : \text{un quatrième terme}$, qui est par conséquent $\frac{8240x + 40xxx}{100}$. Dans le but de partager ce profit, chacun des associés prend d'abord $10x$ écus, ce qui fait pour tous $10xx$; mais il reste encore 224 écus: d'où il résulte que le gain monte à $10xx + 224$.

On a donc l'équation

$$\frac{8240x + 40xxx}{100} = 10xx + 224.$$

353. PROBLÈME XII. Trouver deux nombres tels que, si au carré du premier multiplié par le second, on ajoute deux fois le carré du second multiplié par le premier, plus trois fois le carré du premier, plus quatre fois celui du second, plus dix-huit fois le premier, plus quatre fois le second, le tout ensemble fasse 144.

En nommant x le premier des deux nombres cherchés, et y le second, on formera tout de suite cette équation

$$x^2y + 2y^2x + 3x^2 + 4y^2 + 18x + 4y = 144.$$

354. PROBLÈME XIII. Un enfant a 624 jetons: il en met un certain nombre sur une même ligne droite, et derrière cette première rangée de jetons, il en met une seconde égale à la première, puis une troisième, puis une quatrième, etc. jusqu'à ce qu'il ait autant de rangées qu'il y a de jetons dans l'une d'elles; il place ensuite un jeton au devant de ce premier assemblage; enfin, à côté de ce même assemblage il en construit un second tout pareil, avec son jeton au devant, puis un troisième, puis un quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ait autant d'assemblages moins deux qu'il y a de jetons dans l'un ou l'autre

de ces assemblages ; cela fait, il ne lui reste plus de jetons. On demande combien il y en a dans chaque rangée.

Il y a x jetons dans chaque rangée, et par conséquent il y a x rangées dans chaque assemblage, ce qui fait xx jetons pour chaque assemblage, ou plutôt $xx + 1$, à cause du jeton qui est au devant de chacun.

Maintenant il y a autant d'assemblages moins deux qu'il y a de jetons dans l'un ou l'autre de ces assemblages, c'est-à-dire qu'il y a $xx + 1 - 2$ ou $xx - 1$ assemblages.

Or, en multipliant le nombre des jetons de chaque assemblage par le nombre des assemblages, il est clair qu'on a le nombre de tous les jetons, qu'on sait d'ailleurs être de 624.

On a donc $(xx + 1)(xx - 1) = 624$, ou, en effectuant la multiplication (n° 118),

$$x^4 - 1 = 624.$$

355. PROBLÈME XIV. « Le gouverneur d'une place assiégée voulant obtenir au plus tôt du secours de son général, lui écrit que la garnison est réduite à autant de centaines d'hommes qu'il y a d'unités dans la valeur directe de x de l'équation $x^4 - x^3 - 44x^2 + 49x = 245$. L'homme chargé de ce billet est arrêté par les ennemis : on le fouille, on voit l'avis donné au général, et l'on n'y comprend rien. Si vous eussiez été dans le camp des assiégeants, quel parti auriez-vous tiré de ce billet ? »

(Marie.)

L'équation est déjà posée ; nous pourrions y revenir dans le temps : en attendant, elle nous servira d'exemple. Nous allons la répéter ici :

$$x^4 - x^3 - 44x^2 + 49x = 245.$$

356. PROBLÈME XV. « Un homme ayant placé une somme a dans une entreprise où il perd d'année en année, et toujours dans la même proportion, il cherche à retirer ses fonds ; mais ne l'ayant pu qu'après la n^{me} année, il trouve que la somme placée est diminuée de la quantité b de ce qu'elle était après la première année. On demande à combien pour cent montait sa perte par an. » (Clairaut.)

Il perdait x pour cent par an.

Calculons d'après cela à quoi s'est réduite la somme a pendant la première année, ou ce qui restait au prêteur au bout de cette année-là.

Si 100 est devenu $100 - x$, qu'est devenu a ? On le trouvera en

posant cette proportion : le capital 100 est au capital a comme le reste $100 - x$ est à un quatrième terme, ou en abrégé

$$100 : a :: 100 - x : 4^{\text{me}} \text{ terme.}$$

Ce quatrième terme, qui exprime ce qui reste au bout de la première année, est donc $\left(\frac{100-x}{100}\right)a$, et c'est en même temps le capital de la seconde année.

Pour trouver ce qui reste au bout de cette seconde année, on dira : Si 100 devient $100 - x$, que devient $\left(\frac{100-x}{100}\right)a$? Et l'on posera cette proportion : le capital 100 est au capital $\left(\frac{100-x}{100}\right)a$ comme le reste $100 - x$ est à un quatrième terme, ou en abrégé

$$100 : \left(\frac{100-x}{100}\right)a :: 100 - x : 4^{\text{me}} \text{ terme.}$$

Ce quatrième terme, qui exprime ce qui reste au bout de la seconde année, est donc $\left(\frac{100-x}{100}\right)^2 a$; et c'est en même temps le capital de la troisième année.

Pour trouver ce qui reste au bout de cette troisième année, on fera encore

$$100 : \left(\frac{100-x}{100}\right)^2 a :: 100 - x : 4^{\text{me}} \text{ terme;}$$

et ce quatrième terme sera $\left(\frac{100-x}{100}\right)^3 a$.

On trouvera de même, pour les restes au bout de la quatrième, de la cinquième, et en général de la n^{me} année, les quantités

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)^4 a, \left(\frac{100-x}{100}\right)^5 a, \left(\frac{100-x}{100}\right)^n a.$$

D'un autre côté, le problème dit qu'au bout de la n^{me} année, la somme est diminuée de la quantité b de ce qu'elle était au bout de la première année. Mais après la première année la somme était $\left(\frac{100-x}{100}\right)a$: elle est donc après la n^{me} $\left(\frac{100-x}{100}\right)^n a - b$. En sorte qu'on a l'équation

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)^n a = \left(\frac{100-x}{100}\right)a - b.$$

Or, si l'on observe que $\frac{100-x}{100} = 1 - \frac{x}{100}$, on aura $\left(\frac{100-x}{100}\right)^n$
 $= \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n = 1 - n \frac{x}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^2}{100^2} - , \text{etc.} \dots \pm$
 $\frac{x^n}{100^n}$ (n^{os} 284, 335); en sorte que l'équation ci-dessus pourra pren-
 dre cette forme,

$$\left(1 - n \cdot \frac{x}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^2}{100^2} - , \text{etc.} \dots \pm \frac{x^n}{100^n}\right) a =$$

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right) a - b.$$

357. On voit suffisamment par ces exemples, 1^o que les différents problèmes qu'on peut proposer conduisent à des équations qui contiennent une ou plus d'une inconnue; 2^o qu'il y a quelquefois autant d'équations que d'inconnues (*Voyez* les problèmes 2 et 7, et tous ceux qui n'ont donné qu'une inconnue); 3^o que d'autres fois les inconnues et les équations ne sont pas en même nombre (*Voyez* les problèmes 3, 4, 8, 9 et 12).

358. Mais en considérant à part telle ou telle équation, si celui de ses termes qui contient le plus d'inconnues semblables ou non multipliées entre elles, en renferme un nombre n , cette équation est dite du n^{me} degré.

Du reste, on représente ordinairement les connues, lorsqu'elles ne sont pas exprimées en chiffres, par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, d, e , etc. et les inconnues par les dernières u, x, y, z , etc.

Exemples d'équations du 1^{er} degré.

Celles des problèmes 1 et 2, et les suivantes

$$3x + 5x - x + 12 = 7$$

$$x + 2y - z = 4.$$

etc. etc.

Exemples d'équations du 2^e degré.

Celles des problèmes 5, 6, 7, 8, et les suivantes

$$2x^2 + 3x^2 - 6 = 14$$

$$x^2 + 3x^2 - 5x - 3x + 7 = 15$$

$$xy + 2x - 3y + \frac{5}{2} = 14\frac{1}{2}$$

$$2xy = 8$$

etc. etc.

Exemples d'équations du 3^e degré.

Celles des problèmes 10, 11, 12, et les suivantes

$$x^3 + 2x = 10$$

$$axyz + bxy + cx + dy = e$$

etc.

etc.

Exemples d'équations du 4^{me} degré.

Celles des problèmes 13, 14, et les suivantes

$$x^4 + px^2 = q$$

$$x^4 + px^2 + qx = t.$$

$$x^2y^2 + ax^2y + bxy^2 + cxy = d$$

$$x^3y + xy + y = a.$$

$$xyzu + 3xy + 5u = b$$

etc.

etc.

Exemples d'équations du n^{me} degré.

Celle du problème 15, et les suivantes

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Kx = L.$$

$$xy^{n-1} + x^2y^{n-2} + y^3x^{n-3} = A.$$

etc.

etc.

CHAPITRE II.

Des premières opérations sur les équations, et de quelques changements qu'on peut leur faire subir par l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et les extractions de racines.

Notions sur la décomposition des équations, sur leur abaissement, et sur l'évanouissement des radicaux.

359. Pour découvrir les propriétés des équations, et pour les résoudre, il est souvent nécessaire d'ajouter à leurs deux membres une

même quantité, ou d'en retrancher une même quantité, ou de multiplier ou de diviser ces deux membres par un même nombre, ou de les élever à une même puissance, ou enfin d'en extraire une même racine.

Ces opérations, tout en changeant la valeur de chaque membre de l'équation, ne détruisent point leur égalité, et ne dénaturent point le rapport des connues aux inconnues, exprimé par l'équation même (nos 50, 51).

360. Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$\frac{1}{2}x^m + 2x^{m-1} - 4 = 8 + 6x^{m-1} - \frac{1}{2}x^m,$$

en ajoutant de part et d'autre $\frac{1}{2}x^m$, on aurait

$$x^m + 2x^{m-1} - 4 = 8 + 6x^{m-1};$$

retranchant ensuite des deux côtés $6x^{m-1}$, on obtiendrait

$$x^m - 4x^{m-1} - 4 = 8;$$

ajoutant enfin 4 dans les deux membres, on trouverait

$$x^m - 4x^{m-1} = 12,$$

équation beaucoup plus simple dans un sens, ou beaucoup moins chargée de termes que la proposée.

En général, si l'on a $x + b = a$, et que l'on retranche b de part et d'autre, on trouve $x = a - b$; ou, si l'on a $x - b = a$, et qu'on ajoute b des deux côtés, on trouve $x = a + b$.

Cela revient évidemment à effacer un terme quelconque dans le membre où il se trouve, pour l'écrire dans l'autre avec un signe contraire. Cette règle s'appelle la règle de transposition, parce qu'elle sert à transposer un terme d'un membre dans un autre.

361. Il est bien clair que si l'on transpose tous les termes d'un des membres dans l'autre, il ne restera rien dans celui-là.

Par exemple, notre dernière équation $x = a + b$, donne $x - a - b = 0$, ce qui est du reste évident par soi-même. L'équation précédente $x^m - 4x^{m-1} = 12$, donne $x^m - 4x^{m-1} - 12 = 0$.

362. Mais si l'on transpose les deux membres en masse, on peut alors changer les signes ou ne pas les changer : $x = a + b$ donne $-x - b = -a$, et donne aussi $a + b = x$.

363. Cette observation fait encore voir qu'on peut changer tous les signes des termes d'une équation sans les transposer, pourvu qu'on

les change tous. Car $x = a + b$ donne $-a - b = -x$, et cette dernière équation est la même que celle-ci, $-x = -a - b$.

364. Si nous avions les équations

$$\frac{x^m}{a} + \frac{y}{a} = b$$

$$\frac{ax^3}{m} + \frac{bx^2}{n} - \frac{cy}{n} = d$$

$$\frac{x^m}{a} + \frac{px^{m-1}}{b} = \frac{q}{c}$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3,$$

et que nous voulussions débarrasser leurs différents termes des diviseurs qui s'y trouvent, nous multiplierions la première par a , la seconde par mn , la troisième par abc , et la quatrième par 28, ce qui nous donnerait

$$x^m + y = ab$$

$$ana^3 + bmx^2 - cmy = mnd$$

$$bcx^m + acpx^{m-1} = abq$$

$$28x = 14x + 7x + 4x + 84.$$

Ainsi, pour faire disparaître les diviseurs des termes d'une équation, il faut en général multiplier toute l'équation par le diviseur qu'on veut faire disparaître, s'il n'y en a qu'un dans ce cas, ou par le plus petit multiple des diviseurs différents, s'il y en a plusieurs.

D'après cela,

$$x + \frac{y}{x} = a \text{ donne } x^2 + y = ax$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = c \dots \dots a - b = cx$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{c}{xy} \dots \dots ay + bx = c$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = \frac{c}{x} \dots \dots a - b = c.$$

Mais cette dernière ne peut rien apprendre, puisque a , b et c représentent des quantités connues (n° 358).

365. Du reste, il sera bon d'observer que l'on a ici un moyen de faire disparaître d'une équation les exposants inverses qui pourraient affecter les inconnues.

Si l'on avait, par exemple,

$$x^{-m} + ax^{-n} = b,$$

on en tirerait d'abord (n° 90)

$$\frac{1}{x^m} + \frac{a}{x^n} = b;$$

puis, en multipliant par $x^m \times x^n$ (n° 364),

$$x^n + ax^m = bx^{m+n}.$$

366. Si nous avions l'équation

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} = d,$$

et que nous la divisassions par a , elle deviendrait

$$x^m + \frac{b}{a}x^{m-1} + \frac{c}{a}x^{m-2} = \frac{d}{a}.$$

Par où l'on voit que, pour débarrasser un terme quelconque d'une équation des quantités qui multiplient l'inconnue dans ce terme, il faut, en général, diviser toute l'équation par ces quantités.

367. Sur quoi l'on observera que s'il se trouve dans tous les termes de l'équation un même facteur, et qu'on la divise par ce facteur-là, elle est ainsi simplifiée.

Par exemple, $2xy + 4x + 8y = 12$ donne tout de suite $xy + 2x + 4y = 6$.

368. Si ce facteur, commun à tous les termes, est une inconnue à la première puissance, l'équation est alors abaissée par là d'un degré.

Ainsi, $x^3 - 4x^2 = 9x$ devient, en divisant par x , $x^2 - 4x = 9$.

Ainsi, $xy^2 - 7x = 2x$, équation du 3^{me} degré à deux inconnues, devient $y^2 - 7 = 2$, équation du second degré à une seule inconnue, l'autre ayant été éliminée, c'est-à-dire ayant disparu par cette opération.

Et l'on voit bien que, si le facteur commun était un produit de plusieurs inconnues semblables ou non, l'équation serait ainsi abaissée de plusieurs degrés.

369. Quelquefois le facteur qui peut diviser une équation est po-

lynome, et ce polynome, ou ne contient point d'inconnues, ou en contient. Dans ce dernier cas, l'équation s'abaisse, et dans tous les cas elle devient plus simple.

Par exemple, pour le premier cas,

$ax^2 + bx^2 + 2ax + 2bx - 4a - 4b = 0$, est la même chose que $(a+b)x^2 + 2(a+b)x - 4(a+b) = 0$, équation divisible par $a+b$, et qui devient, en effectuant la division,

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Par exemple encore, pour le second cas,

$(x-1)(x-3) + (x-1)(x-5) - (x-1)(x+4) = 0$, est divisible par $x-1$, et devient, en effectuant cette opération,

$$x - 12 = 0.$$

370. A. Si l'on avait l'équation $\sqrt[m]{x^n} = a$, en élevant chaque membre à la puissance m , on aurait $x^n = a^m$, équation qui n'aurait plus de radical.

Comme on a quelquefois besoin de faire disparaître les radicaux d'une équation, nous allons donner ici quelques exemples d'opérations de ce genre, qui pourront servir de modèle pour des cas semblables.

B. Si l'on avait l'équation

$$x - 2a = b + \sqrt{ax} :$$

laissant le radical seul dans un membre, on aurait

$$x - 2a - b = \sqrt{ax};$$

puis, carrant chaque membre, on obtiendrait

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - 2bx + 4ab + b^2 = ax,$$

équation sans radical.

C. Si l'on avait $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$, on ferait le carré des deux membres, et l'on trouverait

$$x + 2\sqrt{xy} + y = a^2,$$

d'où l'on tirerait

$$x + y - a^2 = -2\sqrt{xy},$$

puis

$$(x + y - a^2)^2 = 4xy.$$

D. Si l'on avait $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$, on cuberait les deux membres, et l'on trouverait

$$x + \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} + y = a^3$$

$$x + \sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) + y = a^3.$$

Mettant a à la place de $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$, on obtiendrait

$$x + 3a\sqrt[3]{xy} + y = a^3.$$

Laissant le radical seul dans le premier membre, et cubant de nouveau, on aurait

$$27a^3xy = (a^3 - x - y)^3.$$

E. Si l'on avait $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = a$, on en tirerait

$$\sqrt[3]{x} = a - \sqrt[3]{x}$$

$$x = a^3 - 3a^2\sqrt[3]{x} + 3ax - x\sqrt[3]{x}$$

$$x = a^3 + 3ax - (3a^2 + x)\sqrt[3]{x}$$

$$(3a^2 + x)\sqrt[3]{x} = a^3 + 3ax - x$$

$$(3a^2 + x)^2 \cdot x = (a^3 + 3ax - x)^2.$$

F. Enfin, si l'on avait $x + ax\sqrt{-1} = b$, on en tirerait

$$ax\sqrt{-1} = b - x$$

$$-a^2x^2 = (b - x)^2.$$

G. Ces exemples suffisent pour faire comprendre que l'on peut toujours faire *évanouir* les radicaux et les imaginaires qu'une équation contient.

Mais on observera qu'on a aussi par là un moyen de faire disparaître les exposants fractionnaires, irrationnels ou imaginaires, qui pourraient affecter les inconnues d'une équation.

Si l'on avait, par exemple,

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} = a,$$

on en tirerait d'abord (n° 244)

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = a,$$

puis l'on opérerait comme nous venons de le faire au n° E.

Si l'on avait

$$x\sqrt[m]{} = a,$$

m étant direct ou inverse, on élèverait chaque membre à la puissance $\sqrt[m]{}$, et l'on aurait (n° 223)

$$x^m = a\sqrt[m]{}.$$

Alors, si m était inverse, on opérerait comme au n° 365; et s'il était fractionnaire, on opérerait comme dans l'exemple précédent.

371. Si l'on avait l'équation

$$x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} + \text{etc.} + ma^{m-1} x + a^m = b^m,$$

en extrayant la racine m des deux membres, on trouverait

$$x + a = b,$$

équation qui, du degré m , est abaissée tout d'un coup au premier degré.

372. Mais si dans une équation les inconnues jouaient le rôle d'exposants, il faudrait avoir recours aux logarithmes pour leur faire quitter cette place-là.

Pour bien comprendre ce que nous allons dire à cet égard, il faut se souvenir que le logarithme d'une puissance est égal au logarithme de la racine multiplié par l'exposant de la puissance; que, par exemple, $\log. a^m = m \log. a$ (*Arith.* n° 697).

Ainsi, $a^x = b$ donne $\log. a^x = \log. b$, puis $x \log. a = \log. b$.

De même, $a^x = b$ donne $\log. a^x = \log. b$, puis $x \log. a = \log. b$.

De même encore, $a^x = b$ donne successivement $\log. a^x = \log. b$,

$$\dots x^y \log. a = \log. b, \dots x^y = \frac{\log. b}{\log. a}, \dots \log. x^y = \log. \frac{\log. b}{\log. a},$$

$$\dots y \log. x = \log. \frac{\log. b}{\log. a}.$$

CHAPITRE III.

Propriétés générales des équations.

Fonctions symétriques de leurs soluteurs.

373. Nous supposerons toutes les équations préparées par les procédés des n°s 365, 370 G, et 372, de manière à ce que l'inconnue

ou les inconnues de ces équations n'aient que des exposants entiers et directs, et que ces inconnues ne jouent pas elles-mêmes le rôle d'exposants.

Cela posé, une équation à une seule inconnue, du degré m (m étant donc entier et direct), contiendra nécessairement un ou plusieurs termes, qui renfermeront x^m (n° 358), et de plus un ou plusieurs termes qui ne renfermeront point d' x , ou qui seront entièrement connus (n° 368). Elle pourra contenir aussi un ou plusieurs termes qui renfermeront x^{m-1} , un ou plusieurs termes qui renfermeront x^{m-2} , et ainsi de suite, jusqu'à un ou plusieurs termes qui renfermeront x .

Cette équation étant donnée, on pourra toujours faire passer tous ses termes dans le premier membre, pour n'avoir que 0 dans le second (n° 361). On pourra ensuite réunir en un seul tous les termes qui renfermeront x^m , en un seul tous ceux qui renfermeront x^{m-1} , et ainsi de suite (*). Enfin, l'on pourra débarrasser x^m des quantités qui diviseront ou multiplieront cette puissance de l'inconnue, et cela en multipliant ou divisant toute l'équation par ces quantités (nos 364, 366).

Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$ax^m + a'x^m + etc. + bx^{m-1} + b'x^{m-1} + etc. + cx^{m-2} + c'x^{m-2} + etc. + etc. + gx + g'x + etc. + h + h' + etc. = -a''x^m - b''x^{m-1} - c''x^{m-2} - etc. (**), \text{ on en tirerait}$$

(*) Ceci est une espèce de réduction (n° 72); mais pour la faire, on considère comme semblables tous les termes qui renferment une même puissance de l'inconnue, et cela en rangeant dans la classe des coefficients les quantités connues numériques et algébriques qui multiplient ou divisent l'inconnue.

Nous allons en voir un exemple général; en voici un ou deux plus particuliers:

L'équation $ax + bx - cx + d + e - f = 0$, peut s'écrire ainsi: $(a + b - c)x + (d + e - f) = 0$; et cette équation est considérée comme n'ayant sous cette nouvelle forme que deux termes seulement, parce que tout ce qui est entre deux parenthèses est censé ne former qu'un seul nombre.

De même, l'équation $ax - \frac{x}{b} - x + m - 3 = 0$, peut s'écrire ainsi: $(a - \frac{1}{b} - 1)x + (m - 3) = 0$. Nous avons déjà vu quelque chose d'analogue dans le n° 9C, et dans les nos 19, 70, 369, 370, D, E.

(**) On demandera peut-être comment il arrive qu'une réunion de termes directs soit indiquée égale à une réunion de termes inverses; mais il faut observer que les

$(a+a'+a''+etc.)x^m + (b+b'+b''+etc.)x^{m-1} + (c+c'+c''+etc.)x^{m-2} + etc. + (g+g'+etc.)x + (h+h'+etc.) = 0$. Faisant alors $a+a'+a''+etc. = n$, $b+b'+b''+etc. = p$, $c+c'+c''+etc. = q$, etc. $g+g'+etc. = t$, $h+h'+etc. = u$, on aurait $nx^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + etc. + tx + u = 0$; divisant par n toute l'équation, on obtiendrait

$x^m + \frac{p}{n}x^{m-1} + \frac{q}{n}x^{m-2} + etc. + \frac{t}{n}x + \frac{u}{n} = 0$; supposant enfin

$\frac{p}{n} = P$, $\frac{q}{n} = Q$, etc. $\frac{t}{n} = T$, $\frac{u}{n} = U$, l'équation proposée deviendrait

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + etc. + Tx + U = 0.$$

374. Dans cette équation, les quantités P , Q , etc. T , U , sont ou monomes ou polynomes, ou égales ou inégales, ou directes ou inverses, ou entières ou fractionnaires, ou commensurables ou incommensurables, ou réelles ou imaginaires.

Ces lettres peuvent même, dans certains cas, devenir égales à zéro, pourvu qu'elles ne le soient pas toutes en même temps : car alors l'équation n'existerait plus, ou l'on n'en pourrait plus rien tirer.

375. Cette même formule pourra encore représenter une équation à plusieurs inconnues ; il suffira de supposer pour cela que l'on a ordonné l'équation pour les différentes puissances d'une même inconnue x , et que les lettres P , Q , etc. T , U , renferment les autres inconnues.

Par exemple, l'équation

$$x^3 + ax^2y + bxy + cx^2y + dx^2 + ey = 0,$$

peut s'écrire ainsi,

$$x^3 + (ey + d)x^2 + (ay^2 + by)x + ey = 0;$$

et si l'on représente $ey + d$ par P , $ay^2 + by$ par Q et ey par R , on aura

quantités désignées ici généralement par a , a' , b' , b' , etc. ainsi que l'inconnue représentée par x , et quelques-unes de ses puissances, doivent avoir, soit les unes, soit les autres, dans tels ou tels cas particuliers, des valeurs inverses qui rendront inverses une partie des termes qui paraissent directs.

Cette observation s'applique à l'équation suivante, dans laquelle un assemblage de termes en apparence directs est égal à 0.

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

équation qui rentre dans la formule précédente.

376. Quand on prépare les équations comme nous l'avons fait dans les n^{os} 373 et 375, cela facilite leur résolution et la recherche de leurs propriétés.

377. Il faut d'ailleurs observer que si m désigne la plus haute puissance de l'inconnue, x^m s'écrit pour l'ordinaire à la première place, et s'appelle le premier terme; que Px^{m-1} s'écrit à la seconde place, et s'appelle le second terme; que Qx^{m-2} s'écrit à la troisième place, et s'appelle le troisième terme, et ainsi de suite jusqu'au terme qui ne contient point d' x , ou qui ne contient que x^0 (n^o 88), lequel s'écrit à la dernière place, et s'appelle le dernier terme.

378. Les quantités P , Q , etc. s'appellent *les coefficients de l'équation* (n^o 373, note 1^{re}); P est le coefficient du second terme, Q le coefficient du troisième, etc. et la quantité qui ne contient point d' x est supposée multiplier x^0 ou l'unité, et tient en conséquence sa place parmi les coefficients.

379. Si P est égal à zéro, le second terme manque; mais Qx^{m-2} conserve cependant son nom de troisième terme, quoiqu'il soit alors écrit à la seconde place. De même, si $Q = 0$, le 3^{me} terme manque; mais Rx^{m-3} conserve son nom de 4^{me} terme. En un mot, chaque terme conserve son nom, soit que les autres manquent, soit qu'ils ne manquent pas.

380. Si tous les termes manquent, excepté le premier et le dernier, on dit que l'équation est à *deux termes*, et ces équations méritent d'être considérées à part; nous nous en occuperons bientôt.

381. Si le dernier terme manquait, et que les autres restassent tous ou en partie avec le premier, l'équation pourrait être abaissée en divisant tous ses termes par la plus petite puissance de x que contiendrait l'équation (n^o 368).

Mais alors le coefficient de cette puissance restant par là sans x , deviendrait le dernier terme (n^{os} 377, 378).

382. Il est facile de comprendre qu'un nombre quelconque étant donné, on peut toujours former une équation en x , même d'un

degré plus élevé que le premier, et dans laquelle x ait pour valeur ce nombre.

Si, par exemple, le nombre donné est a , en faisant $x^m = a^m$, ou $x^m - a^m = 0$, et en supposant, pour simplifier, m égal à un nombre entier plus grand que 1, on a l'équation demandée, qui donne $x = a$; cette quantité pouvant être directe ou inverse, entière ou fractionnaire, rationnelle ou irrationnelle, réelle ou imaginaire (*).

(*) Supposons un problème d'après lequel il s'agisse de trouver un nombre capable de satisfaire à certaines conditions : il est clair que ces conditions pourront être telles que le nombre cherché soit nécessairement entier. Mais elles pourront aussi être telles que le nombre cherché soit fractionnaire.

Ce n'est pas tout : ces conditions pourront encore être de nature à ne pouvoir être satisfaites que par un nombre irrationnel. Si l'on demandait, par exemple, la grandeur de la diagonale d'un carré dont on connaîtrait le côté, cette quantité serait incommensurable, comme nous l'avons dit au n° 209.

Enfin, s'il y avait quelque impossibilité dans ces conditions, cette impossibilité pourrait se manifester de différentes manières, entre autres en conduisant à un résultat imaginaire ou à un résultat inverse.

Cela bien compris, il est évident qu'après avoir représenté par x l'inconnue du problème supposé, après avoir mis ce problème en équation, et résolu cette équation, on trouvera, suivant les cas, x égal à un entier, ou à une fraction, ou à un nombre irrationnel, ou à un symbole imaginaire, et que ces valeurs seront ou directes ou inverses. Je dis qu'on trouvera x égal à l'un de ces résultats; à moins que x ne disparaisse de lui-même, ou qu'il ne soit égal à zéro, comme si l'on avait $7x + 2 - 5x - 2 - 2x = 0$, qui se réduit à $0 = 0$, ou si l'on avait $5x - 3x = 0$, ce qui donne $2x = 0$, et par conséquent $x = 0$.

Un de ces cas dont la métaphysique embarrasse le plus les commençants, est celui où l'on a x égal à un nombre inverse, comme $-a$: car, dit-on, x est la même chose que $+x$, et il est impossible de faire un nombre direct égal à un nombre inverse. Mais ce n'est pas ainsi qu'il faut voir la chose; on ne doit considérer x que comme un signe destiné à représenter l'inconnue, et comme l'équivalent de ces phrases, *le nombre cherché*, *le nombre qu'il faut trouver*, etc. Ainsi, quand on écrit $x = -2$, ce n'est pas poser $2 = -2$; c'est dire d'une manière abrégée, *le nombre que l'on cherche est -2* ; ou, pour traduire tout ce qui tient aux signes algébriques, c'est dire, *le nombre cherché est 2; mais ce nombre est inverse de ce qu'on l'avait supposé* (n° 30, 57).

Du reste, cette observation s'applique aussi aux autres cas, c'est-à-dire à ceux dans lesquels on a x égal à une quantité fractionnaire, incommensurable, imaginaire, nulle, quoique ce symbole x ait la forme ou l'apparence d'un nombre entier.

J'invite les commençants à méditer sur cette note.

Mais on peut même varier l'équation qui doit donner à l'inconnue la valeur demandée.

Veut-on, par exemple, une équation qui donne $x = 2$, cette équation sera ou $x^2 = 4$, ou $x^3 = 8$, ou $x^4 = 16$, ou etc. Et parce que l'on a $2^2 + 3 \times 2 - 10 = 0$, ou $2^3 - 5 \times 2^2 + 3 \times 2 + 6 = 0$, ou etc. l'équation demandée pourra être $x^2 + 3x - 10 = 0$, ou $x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$, ou etc. équations qui sont également satisfaites lorsqu'on y suppose $x = 2$.

Veut-on une équation qui donne $x = -2$ (Voyez la note), cette équation sera ou $x^2 = 4$, ou $x^3 = -8$, ou $x^4 = 16$, ou etc. Et parce que l'on a $(-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$, ou $(-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0$, ou etc. l'équation demandée pourra être $x^2 + 4x + 4 = 0$, ou $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$, ou etc.

Veut-on une équation qui donne $x = \frac{1}{2}$, cette équation sera ou $x^2 = \frac{1}{4}$, ou $x^3 = \frac{1}{8}$, ou etc. Et parce que l'on a $(\frac{1}{2})^2 + 6(\frac{1}{2}) - \frac{15}{4} = 0$, ou $(\frac{1}{2})^3 - 8(\frac{1}{2})^2 + 5(\frac{1}{2}) - \frac{5}{8} = 0$, ou etc. l'équation demandée pourra être $x^2 + 6x - \frac{15}{4} = 0$, ou $x^3 - 8x^2 + 5x - \frac{5}{8} = 0$, ou etc.

Veut-on une équation qui donne $x = \sqrt{2}$, cette équation sera ou $x^2 = 2$, ou $x^3 = 2\sqrt{2}$, ou $x^4 = 4$, ou $x^5 = 4\sqrt{2}$, ou $x^6 = 8$, ou etc. Et parce que l'on a $(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - (2 + \sqrt{18}) = 0$, ou $(\sqrt{2})^3 + 5(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2}) - 10 = 0$, ou etc. l'équation demandée pourra être $x^2 + 3x - (2 + \sqrt{18}) = 0$, ou $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$, ou etc.

Veut-on une équation qui donne $x = \sqrt{-2}$, cette équation sera $x^2 = -2$, ou $x^3 = -2\sqrt{-2}$, ou etc. Et parce que l'on a $(\sqrt{-2})^2 - 2(\sqrt{-2}) + (2 + \sqrt{-8}) = 0$, ou $(\sqrt{-2})^3 - 5(\sqrt{-2})^2 + 2(\sqrt{-2}) - 10 = 0$, ou etc. l'équation demandée pourra être $x^2 - 2x + (2 + \sqrt{-8}) = 0$, ou $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0$, ou etc.

Veut-on enfin une équation qui donne $x = 2 + \sqrt{2}$, il est clair que puisqu'on a $(2 + \sqrt{2})^2 - 4(2 + \sqrt{2}) + 2 = 0$, l'équation demandée pourra être celle-ci : $x^2 - 4x + 2 = 0$.

383. Cela posé, le nombre, quel qu'il soit, qui, mis à la place de x dans une équation, satisfait à cette équation, ou la résout, peut s'appeler le *soluteur* (*) de l'équation.

(*) Je ne puis me déterminer à faire usage du mot de *racine*, admis par tous les auteurs, parce que je sais que ce mot, employé dans deux acceptions très-diffé-

384. Les exemples précédents suffisent pour faire comprendre que les soluteurs de telles ou telles équations sont directs ou inverses, entiers ou fractionnaires, rationnels ou irrationnels, réels ou imaginaires, et que, lors même qu'une équation a un solveur irrationnel ou imaginaire, ses coefficients peuvent dans certains cas être rationnels.

385. Mais est-ce qu'une équation quelconque, prise au hasard et formée arbitrairement, sans assigner d'avance aucune valeur à x , peut toujours avoir un solveur quelconque? On comprendra l'importance de cette question, si l'on observe que les problèmes arithmétiques variant à l'infini, ils peuvent conduire à des équations de toute espèce et de toute forme; en sorte que sans s'arrêter aux problèmes mêmes, on doit s'attacher à chercher la solution de toutes les équations imaginables.

D'Alembert a démontré dans le tome II des Mémoires de l'académie de Berlin, année 1746, qu'il y avait toujours, soit une quantité réelle, soit un symbole imaginaire, qui, mis à la place de x dans un polynome $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} + U$, rendait ce polynome égal à zéro, et était par conséquent solveur de l'équation..... $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} + U = 0$. Mais cette démonstration n'étant pas à la portée des commençants, je la supprime et suppose le principe admis.

386. Cela posé, représentons par α le solveur de l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0$$

(n° 373), ou supposons que l'on ait trouvé $x = \alpha$, nous aurons

$$\alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} \dots + T\alpha + U = 0,$$

d'où nous tirerons

$$U = -\alpha^m - P\alpha^{m-1} - Q\alpha^{m-2} \dots - T\alpha.$$

Si nous mettons ensuite cette valeur de U à la place de U même dans l'équation proposée, nous aurons

rentes, est pour les commençants l'occasion de bien des idées fausses qu'une explication ne prévient pas complètement. D'ailleurs, comment dire à un élève : *voici une racine qui n'est pas une racine, et quand j'emploierai ce mot, prenez bien garde dans quel sens je l'emploie, etc. etc. etc.* Le plus simple, le plus sûr et le plus méthodique, est sans doute d'adopter un mot propre à la chose : j'avais déjà proposé celui-ci en 1799 (Voyez la Préface).

$$\left. \begin{array}{l} x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx \\ - \alpha^m - P\alpha^{m-1} - Q\alpha^{m-2} - \dots - T\alpha \end{array} \right\} = 0,$$

ce qui peut s'écrire ainsi

$$(x^m - \alpha^m) + P(x^{m-1} - \alpha^{m-1}) + Q(x^{m-2} - \alpha^{m-2}) + \dots + T(x - \alpha) = 0.$$

Or, comme nous savons que $x^m - \alpha^m$ est divisible par $x - \alpha$, (n° 127), il en résulte que tout le premier membre de notre dernière équation, considéré même comme une formule algébrique dont on ne connaît point la valeur, et abstraction faite de son égalité à zéro, est divisible par $x - \alpha$.

387. Mais comme notre dernière équation n'est autre chose que la proposée, on peut dire qu'un soluteur d'une équation quelconque étant représenté par α , le premier membre de cette équation est divisible par $x - \alpha$.

388. Pour trouver l'expression générale du quotient de cette division, on prendra l'équation sous sa dernière forme $(x^m - \alpha^m) + P(x^{m-1} - \alpha^{m-1}) + \text{etc.}$; et, divisant d'abord $x^m - \alpha^m$ par $x - \alpha$, on aura $x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} + \text{etc.} + \alpha^{m-1}$ (n° 127). Divisant ensuite $P(x^{m-1} - \alpha^{m-1})$ par $x - \alpha$, on trouvera $P(x^{m-2} + \alpha x^{m-3} + \text{etc.} + \alpha^{m-2})$. Divisant encore $Q(x^{m-2} - \alpha^{m-2})$ par $x - \alpha$, il viendra $Q(x^{m-3} + \alpha x^{m-4} + \text{etc.} + \alpha^{m-3})$. Continuant ainsi ces divisions jusqu'à $T(x - \alpha)$, qui, divisé par $x - \alpha$, donne T , et ajoutant tous les quotients partiels pour avoir le quotient total, on obtiendra enfin

$$\begin{array}{r} x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} + Tx + U \\ \hline x - \alpha \\ \hline x^{m-1} + \alpha \quad | \quad x^{m-2} + \alpha^2 \quad | \quad x^{m-3} \dots + \alpha^{m-1} \\ \quad + P \quad | \quad \quad + P\alpha \quad | \quad \dots \quad + P\alpha^{m-2} \\ \quad \quad + Q \quad | \quad \dots \quad + Q\alpha^{m-3} \\ \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + T^{(*)}. \end{array}$$

389. Faisant $\alpha + P = P'$; $\alpha^2 + Pa + Q = Q'$, etc. on aura

(*) Ces traits verticaux tiennent lieu de parenthèses. Ainsi la troisième colonne, par exemple, ou celle qui commence par α^2 , vaut $(\alpha^2 + Pa + Q)x^{m-3}$.

$$\frac{x^m + Px^{m-1} + \text{etc.}}{x - \alpha} = x^{m-1} + P^1 x^{m-2} + Q^1 x^{m-3} + \text{etc.}$$

d'où l'on tirera

$$(x^m + Px^{m-1} + \text{etc.}) = (x - \alpha)(x^{m-1} + P^1 x^{m-2} + Q^1 x^{m-3} + \text{etc.})$$

Mais comme $x^m + Px^{m-1} + \text{etc.} = 0$, on aura aussi

$$(x - \alpha)(x^{m-1} + P^1 x^{m-2} + \text{etc.}) = 0,$$

nouvelle forme de l'équation proposée.

Maintenant il est bien clair que le premier membre se réduira à 0, non-seulement quand on aura $x - \alpha = 0$, ou $x = \alpha$, mais encore quand on aura $x^{m-1} + P^1 x^{m-2} + Q^1 x^{m-3} + \text{etc.} = 0$.

Cette dernière supposition, qui satisfait à la proposée, donne donc une nouvelle équation du degré $m - 1$; et cette équation ayant nécessairement au moins un soluteur (n° 385), qu'on peut représenter par β , sera divisible par $x - \beta$ (n° 387), et donnera un quotient de la forme $x^{m-2} + P'' x^{m-3} + Q'' x^{m-4} + \text{etc.}$ (n° 388), les coefficients P'' , Q'' , etc. étant différents des coefficients P^1 , Q^1 , etc. et des coefficients P , Q , etc.

On aura donc $x^{m-1} + P^1 x^{m-2} + \text{etc.} = (x - \beta)(x^{m-2} + P'' x^{m-3} + \text{etc.})$, et la proposée prendra la forme

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x^{m-2} + P'' x^{m-3} + \text{etc.}) = 0.$$

On verra alors qu'elle peut être satisfaite, soit que l'on ait $x - \alpha = 0$ ou $x = \alpha$, soit que l'on ait $x - \beta = 0$ ou $x = \beta$, soit que l'on ait $x^{m-2} + P'' x^{m-3} + \text{etc.} = 0$.

Raisonnant sur cette équation comme sur les précédentes, et de même sur celles qui suivront et qui seront des degrés $m - 3$, $m - 4$, $m - 5$, etc. on arrivera enfin à une dernière équation du degré $m - (m - 1)$, ou du premier degré; et la proposée sera alors décomposée en m facteurs du premier degré, et prendra la forme

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \dots (x - \lambda) = 0.$$

390. Si deux ou plusieurs des lettres α , β , γ , etc. sont égales, il y aura deux ou plusieurs des facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. qui seront égaux; mais ces facteurs seront toujours au nombre de m .

391. Si tous les facteurs étaient égaux, le premier membre de l'équation serait la puissance m du binôme $x - \alpha$.

392. En supposant les quantités α , β , γ , etc. toutes différentes,

l'équation se vérifie de m manières, c'est-à-dire lorsqu'on a $x-a=0$, ou lorsqu'on a $x-\beta=0$, ou lorsqu'on a $x-\gamma=0$, etc. Et il en résulte que x peut avoir alternativement m valeurs différentes dans cette équation, c'est-à-dire qu'on a ou $x=a$, ou $x=\beta$, ou $x=\gamma$, etc.

On dit en conséquence qu'une équation du degré m a toujours m soluteurs, et on le dit lors même que quelques-unes des valeurs α, β, γ , etc. sont égales, parce qu'alors même l'équation est formée de m facteurs du premier degré; mais on ajoute que l'équation a deux, ou trois, ou quatre, ou etc. soluteurs égaux.

393. Le premier membre de l'équation étant ainsi décomposé en m facteurs binomes du premier degré, $x-a, x-\beta, x-\gamma, \dots x-\lambda$, il est facile de prouver qu'il ne saurait avoir d'autre diviseur binome du premier degré.

En effet, chacun des binomes $x-a, x-\beta, x-\gamma$, etc. ne peut être divisé que par lui-même et par l'unité : en sorte que si leur produit

$$(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda)$$

était divisible par le binome $x-\pi$, différent des autres, il faudrait que l'on eût $x-\pi$ égal à un produit de deux ou plusieurs des binomes $x-a, x-\beta, x-\gamma$, etc. Or, le second membre de la prétendue équation

$$x-\pi=(x-a)(x-\beta)\dots$$

étant divisible par $x-a$, par $x-\beta$, etc. son premier membre, ou $x-\pi$, serait aussi divisible par $x-a$, par $x-\beta$, etc. ce qui est évidemment impossible tant que α, β , etc. diffèrent de π .

394. Donc on ne peut pas décomposer l'équation en facteurs binomes du premier degré, différents des facteurs dans lesquels elle a été décomposée.

395. Donc elle ne saurait avoir de soluteurs différents des m soluteurs α, β, γ , etc. qui sont donnés par les équations alternatives $x-a=0$, ou $x-\beta=0$, ou $x-\gamma=0$, etc.

396. Il est évident d'ailleurs que si, après avoir formé le premier membre de la proposée $x^m + \dots = 0$, par la multiplication des m binomes $x-a, x-\beta, x-\gamma$, etc. on voulait donner à ce premier membre un plus grand nombre de facteurs, en répétant un ou plusieurs des facteurs $x-a, x-\beta, x-\gamma$, etc. il en résulterait un produit d'un degré plus élevé que la proposée.

397. Donc une équation du m^{me} degré a m soluteurs, et n'en a pas davantage.

398. Si l'on multiplie deux à deux les m facteurs binomes du premier degré, de l'équation $x^m + \text{etc.} = 0$, on formera des facteurs trinomes du second degré, dont chacun pris à part sera diviseur du premier membre de la proposée; et il est évident que le nombre de ces facteurs sera exprimé par la formule

$$\frac{m(m-1)}{2},$$

puisque cette formule indique le nombre des produits différents que l'on peut former avec m lettres, en les combinant deux à deux (n° 344, K).

399. Cependant on doit bien comprendre que, s'il faut multiplier entre eux tous les facteurs binomes du premier degré pour former le premier membre de l'équation, on n'obtiendrait pas en général le même résultat si l'on multipliait entre eux tous les facteurs trinomes du second degré.

Par exemple, l'équation du troisième degré

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0,$$

a trois diviseurs binomes du premier degré, qui, multipliés entre eux, forment le premier membre de cette équation. Et quant à ses diviseurs trinomes du second degré, leur nombre est de

$$\frac{3 \times 2}{2} = 3,$$

car elle est divisible par $(x-\alpha)(x-\beta)$, par $(x-\alpha)(x-\gamma)$, et par $(x-\beta)(x-\gamma)$. Mais si l'on voulait multiplier entre eux ces trois diviseurs, on obtiendrait au produit

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\beta)(x-\gamma),$$

quantité du 6^{me} degré.

400. Si l'on multiplie trois à trois les m facteurs binomes du premier degré de l'équation $x^m + \text{etc.} = 0$, on formera des facteurs tétranomes du troisième degré, dont chacun pris à part sera diviseur du premier membre de la proposée; et il est évident que le nombre de ces facteurs sera exprimé par la formule

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3},$$

puisque cette formule indique le nombre des produits différents que l'on peut former avec m lettres, en les combinant trois à trois (n° 344, K).

Sur quoi il faut faire la même observation que pour les diviseurs du second degré (n° 399).

401. On trouvera de même que le nombre des diviseurs du 4^{me} degré, du 5^{me} degré, etc. sera exprimé par les formules

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5},$$

etc.

402. Nous avons répété plusieurs fois que le premier membre de l'équation $x^m + \text{etc.} = 0$, était égal au produit des m facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. : or, il est évident que les quantités α , β , γ , etc. jouent dans ce produit le même rôle les unes que les autres, puisqu'elles entrent de la même manière dans les facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. et que ces facteurs entrent aussi d'une manière parfaitement semblable dans le produit $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda)$, égal au premier membre de l'équation $x^m + \text{etc.} = 0$.

En sorte que si l'on sait de quelle manière une des lettres α , β , γ , etc. concourt à la formation des coefficients P , Q , R , etc. on saura aussi de quelle manière les autres lettres concourent à cette formation.

403. Cela posé, si l'on supposait $\alpha = \beta = \gamma \dots = \lambda$, le produit $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda)$ deviendrait la puissance m du binôme $x - \alpha$, et il aurait pour expression

$$x^m - m\alpha x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} \alpha^2 x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} \alpha^3 x^{m-3} + \dots$$

$$\pm \alpha^m \dots (X).$$

Or, la supposition que nous venons de faire n'a point pu changer les x de notre produit, et il se trouve contenir en effet les mêmes puissances de l'inconnue que l'équation proposée.

Quant aux coefficients, ils ont été changés par cette même supposition; mais nous les rétablirons sans peine sur leur véritable pied.

404. Dans le développement (X) ci-dessus, le coefficient du second terme est $-ma$, ou

$$-(\alpha + \alpha + \alpha \dots + \alpha);$$

il sera donc, dans le produit cherché,

$$-(\alpha + \beta + \gamma \dots + \lambda);$$

car le premier n'étant composé que de m parties, le second ne peut non plus être composé que de m parties; et d'ailleurs chacune des m lettres α, β, γ , etc. devant y jouer le même rôle, elles y seront toutes, et aucune ne sera répétée.

Le coefficient P du second terme dans le premier membre d'une équation quelconque, dont le second membre est zéro, est donc égal à la somme des solutieurs α, β, γ , etc. de cette équation; mais il a un signe contraire à celui de cette somme.

405. Le coefficient du troisième terme dans le développement (X) étant $\frac{m(m-1)}{2} a^2$, c'est-à-dire étant composé de (aa) répété autant de fois qu'on peut former de produits différents avec m lettres, en les prenant deux à deux (n° 344 K), le coefficient du troisième terme dans le produit cherché, ou dans l'équation proposée, contiendra les produits des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$, combinées deux à deux: car un des aa deviendra $\alpha\beta$ ou $\beta\alpha$, un autre deviendra $\alpha\gamma$ ou $\gamma\alpha$, et ainsi de suite, en prenant toujours des produits différents jusqu'à ce qu'il y en ait autant qu'on en peut faire avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$.

Le coefficient Q du troisième terme dans le premier membre d'une équation quelconque dont le second membre est zéro, est donc égal à la somme des produits différents qu'on peut faire avec tous les solutieurs α, β, γ , etc. de cette équation, en les combinant deux à deux.

406. Le coefficient du quatrième terme dans le développement (X) étant $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \times 3} a^3$, c'est-à-dire étant composé de (aaa) répété autant de fois qu'on peut faire de produits différents avec m lettres en les combinant trois à trois (n° 344 K), et le tout pris en moins, le coefficient du quatrième terme dans le produit cherché, ou dans l'équation proposée, contiendra les produits des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$, combinées trois à trois, et le tout pris en moins: car un des aaa de-

viendra $a\beta\gamma$, ou $a\gamma\beta$, ou etc. un autre deviendra $a\beta\delta$, ou $a\delta\beta$, ou etc. et ainsi de suite, en prenant toujours des produits différents jusqu'à ce qu'il y en ait autant qu'on peut en faire avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, en les prenant trois à trois.

Le coefficient R du quatrième terme, dans le premier membre d'une équation quelconque dont le second membre est zéro, est donc égal à la somme des produits différents qu'on peut faire avec tous les solveurs α, β, γ , etc. de cette équation, en les prenant trois à trois; mais il a un signe contraire à celui de cette somme.

407. Et ainsi de suite, en observant que le signe du second terme de l'équation, celui du quatrième, celui du sixième, etc. sont respectivement contraires à celui de la somme des solveurs, à celui de la somme des produits des solveurs pris trois à trois, à celui de la somme des produits des solveurs pris cinq à cinq, etc.

408. Enfin, le dernier terme du développement (X) étant $\pm a^m = \pm (\alpha \times \alpha \times \alpha \times \dots \alpha)$, le dernier terme du premier membre de l'équation proposée sera $\pm (\alpha \times \beta \times \gamma \times \dots \lambda)$, le signe $+$ étant pour le cas où m sera pair, et le signe $-$ pour celui où m sera impair.

Le dernier terme, dans le premier membre d'une équation quelconque dont le second membre est zéro, est donc égal au produit de tous les solveurs α, β, γ , etc. de cette équation, ce produit étant pris avec son signe si le degré m de l'équation est pair, et avec un signe contraire si le degré m est impair.

409. On pourra vérifier tout cela sur l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0,$$

dont les solveurs sont $+5, -4$, et -3 ; et sur l'équation

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0,$$

dont les solveurs sont $+1, -1, -2, +3$.

410. En l'appliquant à l'équation

$$x^3 - 19x + 30 = 0,$$

dont les solveurs sont $+2, +3$, et -5 , on observera que le second terme manque (n° 379), ou que son coefficient est 0, parce que l'équation ayant des solveurs directs et inverses, et la somme des uns étant égale à celle des autres, la somme totale est zéro (n° 404).

411. Si une équation avait un solveur égal à zéro, le produit de

tous serait zéro, et le dernier terme manquerait dans cette équation (nos 377, 379, 381, 408).

Réciproquement si le dernier terme manque, il y a au moins un solveur égal à zéro; et si les n derniers termes manquent, il y a n solveurs égaux à zéro.

412. Il faut observer que si une équation a des solveurs égaux (n° 392), d'où il résulte que quelques-uns de ses facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. sont égaux (n° 390), les solveurs égaux à d'autres doivent cependant être mis en ligne de compte pour la formation des coefficients de l'équation (n° 392).

Par exemple, dans une équation du quatrième degré dont les solveurs seraient α , α , β , β , on aurait

$$P = -(\alpha + \alpha + \beta + \beta) = -2(\alpha + \beta);$$

$$Q = \alpha\alpha + \alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta\beta = \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2;$$

$$R = -(\alpha\alpha\beta + \alpha\alpha\beta + \alpha\beta\beta + \alpha\beta\beta) = -2(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2);$$

$$S = \alpha\alpha\beta\beta = \alpha^2\beta^2.$$

413. Ayant formé le produit des facteurs binômes

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda),$$

si on le supposait égal à une quantité Z , qui ne fût pas zéro, les lettres α , β , γ , ... λ , ne seraient pas les solveurs de l'équation qui résulterait de cette supposition; mais cela n'empêcherait pas que les coefficients des différents termes du produit $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda)$ ne fussent composés des lettres α , β , γ , ... λ , comme nous l'avons dit dans les nos 404, 405, 406, 407 et 408; seulement il ne faudrait pas perdre de vue que ces lettres ne seraient plus les solveurs.

D'ailleurs, après avoir posé l'équation

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda) = Z,$$

en retranchant Z de part et d'autre, on aurait

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda) - Z = 0;$$

effectuant la multiplication des facteurs, et réduisant le tout avec la quantité Z , on aurait une équation dont le second membre serait zéro, et les coefficients du premier seraient composés des solveurs de cette équation, comme nous l'avons dit aux nos 404 à 408; mais ces solveurs ne seraient plus les lettres α , β , γ , ... λ .

414. Après avoir démontré plusieurs propriétés qui appartiennent à toutes les équations, il faudrait passer à la résolution de ces mêmes équations.

Si étant donnée l'équation générale

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

on pouvait en tirer m valeurs de x , telles que chacune fût exprimée par une certaine combinaison des coefficients $P, Q, \dots T, U$, et de la lettre m , on aurait la résolution générale des équations : car une équation plus ou moins particulière étant donnée, en la comparant avec l'équation générale, on reconnaîtrait pour ce cas les valeurs particulières des quantités désignées généralement par les lettres $P, Q, \dots T, U, m$; et substituant ces valeurs aux mêmes lettres $P, Q, \dots T, U, m$, dans les m formules destinées à exprimer les valeurs de x , on aurait les m soluteurs de l'équation donnée.

Il suffirait même, pour la résolution générale des équations, d'avoir une formule qui exprimât en $P, Q, \dots T, U, m$, un des soluteurs de l'équation générale : car, ayant trouvé par cette formule un des soluteurs α d'une équation particulière, on diviserait cette équation par $x - \alpha$ (n° 387), et l'on obtiendrait une nouvelle équation, dont le degré serait d'une unité moindre (n° 389). Ayant ensuite trouvé par la même formule un des soluteurs β de cette nouvelle équation, on diviserait celle-ci par $x - \beta$, pour avoir une troisième équation, dont le degré serait de deux unités moindre que celui de la proposée ; et l'on continuerait ainsi jusqu'à ce que l'on eût trouvé tous les soluteurs.

Mais les méthodes générales que l'on a pour trouver les soluteurs d'une équation quelconque, ne donnent ces soluteurs qu'au moyen de séries illimitées (*), c'est-à-dire qu'elles ne les donnent que par approximation. (Consultez tout de suite le numéro 630.)

415. Cependant, quoique nous ne connaissions point les soluteurs de l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

et que nous ne puissions les exprimer généralement que par des sé-

(*) J'appelle ainsi les séries qui tendent vers une limite sans jamais y arriver (nos 128, 154).

ries illimitées, nous savons qu'en représentant ces soluteurs par α , β , γ , δ , etc. on a (nos 404 à 409)

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = -P$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \text{etc.} + \beta\gamma + \beta\delta + \text{etc.} + \gamma\delta + \text{etc.} = Q$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \text{etc.} + \beta\gamma\delta + \text{etc.} = -R$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha\beta\gamma\delta \text{ etc.} = \pm U.$$

En sorte que si les coefficients P , Q , R , etc. sont rationnels et ne renferment point d'inconnues (nos 374, 375), on a d'une manière rationnelle et connue (y eût-il même des soluteurs irrationnels), 1° la somme $-P$ des m soluteurs inconnus, 2° la somme Q de leurs produits à deux lettres, 3° la somme $-R$ de leurs produits à trois lettres, et ainsi de suite.

416. Toute fonction (n° 335 D) comme P , ou Q , ou R , ou U , dans laquelle plusieurs quantités α , β , γ , δ , etc. entrent en même temps et de la même manière, se nomme fonction symétrique de ces quantités (*).

417. Du reste, parmi les fonctions symétriques des soluteurs de l'équation $x^m + Px^{m-1} + \text{etc.} = 0$, celles du n° 415 ne sont pas les seules qu'on puisse exprimer au moyen des coefficients de cette équation; nous allons entrer dans quelques détails à cet égard.

418. D'après ce que nous avons vu aux nos 386, 387, 388, si l'on divise par $x - \alpha$ l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

on aura pour quotient

(A)

$$\begin{array}{r|l} x^{m-1} + \alpha & x^{m-2} + \alpha^2 \\ + P & + P\alpha \\ & + Q \\ & + R \\ & \dots\dots\dots \\ & + T. \end{array}$$

(*) Il ne faut pas confondre les fonctions symétriques avec les fonctions semblables. Deux fonctions qui sont telles que α entre dans l'une de la même manière que β entre dans l'autre, sont des fonctions semblables de α et de β (n° 335 D); mais une fonction unique dans laquelle α et β entrent en même temps et de la même manière, est une fonction symétrique de α et de β .

Si on la divise par $x - \beta$ seulement, on aura pour quotient

(B)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^{m-1} + \beta & x^{m-2} + \beta^2 & x^{m-3} + \beta^3 & x^{m-4} \dots & + \beta^{m-1} \\
 + P & + P\beta & + P\beta^2 & & + P\beta^{m-2} \\
 & + Q & + Q\beta & & + Q\beta^{m-3} \\
 & & + R & & \dots \dots \dots \\
 & & & & + T.
 \end{array}$$

Si on la divise par $x - \gamma$ seulement, on aura pour quotient

(C)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^{m-1} + \gamma & x^{m-2} + \gamma^2 & x^{m-3} + \gamma^3 & x^{m-4} \dots & + \gamma^{m-1} \\
 + P & + P\gamma & + P\gamma^2 & & + P\gamma^{m-2} \\
 & + Q & + Q\gamma & & + Q\gamma^{m-3} \\
 & & + R & & \dots \dots \dots \\
 & & & & + T,
 \end{array}$$

et ainsi de suite.

D'ailleurs, cette équation étant du degré m , et ayant m diviseurs du premier degré $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. (n° 389, 393), si on la divise alternativement par tous ces diviseurs, on aura m quotients.

419. Cela posé, il est facile de voir que si l'on additionne tous ces quotients entre eux, colonne par colonne, en allant du haut en bas, on trouvera

1° Dans la première colonne verticale

$$x^{m-1} + x^{m-1} + x^{m-1} + \text{etc.} = mx^{m-1};$$

2° Dans la seconde colonne verticale

$$(\alpha + P + \beta + P + \gamma + P + \text{etc.}) x^{m-2} = (\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.} + mP) x^{m-2};$$

3° Dans la troisième colonne verticale

$$(\alpha^2 + P\alpha + Q + \beta^2 + P\beta + Q + \gamma^2 + P\gamma + Q + \text{etc.}) x^{m-3} = [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.} + P(\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}) + mQ] x^{m-3};$$

4° Dans la quatrième colonne verticale

$$(\alpha^3 + P\alpha^2 + Q\alpha + R + \beta^3 + P\beta^2 + Q\beta + R + \gamma^3 + P\gamma^2 + Q\gamma + R + \text{etc.}) x^{m-4} = [\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{etc.} + P(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.}) + Q(\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}) + mR] x^{m-4};$$

et ainsi de suite.

Enfin, dans la dernière colonne verticale

$$\alpha^{m-1} + P\alpha^{m-2} + Q\alpha^{m-3} + \text{etc.} + T + \beta^{m-1} + P\beta^{m-2} + Q\beta^{m-3} + \text{etc.} + T + \gamma^{m-1} + P\gamma^{m-2} + Q\gamma^{m-3} + \text{etc.} + T + \text{etc.} = \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \text{etc.} + P(\alpha^{m-2} + \beta^{m-2} + \gamma^{m-2} + \text{etc.}) + Q(\alpha^{m-3} + \beta^{m-3} + \gamma^{m-3} + \text{etc.}) + \text{etc.} + mT.$$

420. Faisant pour abréger

$$\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.} = S_1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.} = S_2$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{etc.} = S_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \text{etc.} = S_m (*),$$

la première colonne étant toujours $m x^{m-1}$, la seconde deviendra

$$(S_1 + mP) x^{m-2},$$

la troisième

$$(S_2 + PS_1 + mQ) x^{m-3},$$

la quatrième

$$(S_3 + PS_2 + QS_1 + mR) x^{m-4},$$

et ainsi de suite; et la dernière

$$S_{m-1} + PS_{m-2} + QS_{m-3} + \text{etc.} + mT.$$

421. La somme de tous les quotients pourra donc être représentée par la formule suivante

$$(\Sigma) \quad \begin{array}{ccccccc} mx^{m-1} + S_1 & | & x^{m-2} + S_2 & | & x^{m-3} + S_3 & | & x^{m-4} + \dots + S_{m-1} \\ + mP & | & + PS_1 & | & + PS_2 & | & + PS_{m-2} \\ & | & + mQ & | & + QS_1 & | & + QS_{m-3} \\ & | & & | & + mR & | & + RS_{m-4} \\ & | & & | & & | & \dots \dots \dots \\ & | & & | & & | & + mT. \end{array}$$

422. Maintenant, puisqu'on a $S_1 = -P$ (nos 415, 420), les deux derniers termes de la fonction $S_2 + PS_1 + mQ$ sont connus: d'où il résulte que si l'on connaissait la valeur de la fonction même, ou qu'on pût faire $S_2 + PS_1 + mQ$ égal à une quantité connue, on aurait aussi par là la valeur de S_2 . Cette valeur étant trouvée, on con-

(*) Pour lire les seconds membres de ces équations, j'ai trouvé commode de prononcer S de 1, S de 2, S de 3, . . . S de m : cela prévient toute équivoque.

naîtrait les trois derniers termes de la fonction $S_3 + PS_2 + QS_1 + mR$, et si la valeur de cette fonction était connue, on trouverait par là celle de S_3 , et ainsi de suite.

C'est-à-dire que, sans connaître les soluteurs d'une équation, on pourrait déterminer la somme de leurs carrés, celle de leurs cubes, etc. sommes qui sont évidemment des fonctions symétriques de ces soluteurs.

423. Or, le premier membre de l'équation $x^m + Px^{m-1} + etc. = 0$, n'étant autre chose que le produit des m binômes $x-a, x-\beta, x-\gamma, etc.$ (n° 389), chacun des quotients (A), (B), (C), etc. est composé de tous ces mêmes facteurs $x-a, x-\beta, x-\gamma, etc.$ en exceptant celui par lequel on a divisé pour avoir le quotient en question; ainsi le quotient (A) ne contient pas le facteur $x-a$, mais il contient tous les autres; le quotient (B) ne contient pas le facteur $x-\beta$, mais il contient tous les autres; le quotient (C) ne contient pas le facteur $x-\gamma$, mais il contient tous les autres, et ainsi de suite.

424. Le coefficient du 3^{me} terme de (A) est donc égal à la somme de tous les produits à deux lettres qu'on peut faire avec les $m-1$ lettres $\beta, \gamma, \delta, etc.$ parmi lesquelles ne se trouve pas la lettre a (nos 405, 413, 423). Et comme on sait d'ailleurs que la somme des produits à deux lettres qu'on peut faire avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$ est égale à Q (nos 405, 413), il en résulte que le coefficient du 3^{me} terme de (A) vaut

$$Q - a\beta - a\gamma - a\delta - etc.$$

c'est-à-dire qu'il est égal à Q diminué de tous les produits à deux lettres dans lesquels entre la lettre a .

On trouvera de même que le coefficient du 3^{me} terme de (B) étant égal à la somme de tous les produits à deux lettres qu'on peut faire avec les $m-1$ lettres $\alpha, \gamma, \delta, etc.$ parmi lesquelles ne se trouve pas la lettre β , équivaut à

$$Q - a\beta - \beta\gamma - \beta\delta - etc.$$

c'est-à-dire qu'il est égal à Q diminué de tous les produits à deux lettres dans lesquels entre la lettre β .

On trouvera aussi que le coefficient du 3^{me} terme de (C) étant égal à la somme des produits à deux lettres qu'on peut faire avec les

$m-1$ lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. parmi lesquelles ne se trouve pas la lettre γ , équivaut à

$$Q - \alpha\gamma - \beta\gamma - \gamma\delta - \text{etc.}$$

c'est-à-dire qu'il est égal à Q diminué de tous les produits à deux lettres dans lesquels entre la lettre γ , et ainsi de suite.

425. Le coefficient du 3^{me} terme dans la somme (Σ) des quotients vaut donc

$$\begin{aligned} & Q - \alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\delta - \text{etc.} \\ & + Q - \alpha\beta - \beta\gamma - \beta\delta - \text{etc.} \\ & + Q - \alpha\gamma - \beta\gamma - \gamma\delta - \text{etc.} \\ & + Q - \alpha\delta - \beta\delta - \gamma\delta - \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il vaut

$$\begin{aligned} mQ - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta - \text{etc.} \\ - 2\beta\gamma - 2\beta\delta - \text{etc.} \\ - 2\gamma\delta - \text{etc.} \\ - \text{etc.} \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$mQ - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \text{etc.} + \beta\gamma + \beta\delta + \text{etc.} + \gamma\delta + \text{etc.})$$

ou enfin $mQ - 2Q$, parce que la quantité $\alpha\beta + \alpha\gamma + \text{etc.} + \text{etc.}$ n'est autre chose que la somme des produits à deux lettres, qu'on peut former avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. (*).

(*) Il est clair que chacun des produits à deux lettres qu'on peut former avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. doit manquer deux fois dans la somme des quotients: $\alpha\beta$, par exemple, doit manquer dans le quotient (A) qui n'a pas $x - \alpha$ parmi ses facteurs, et dans le quotient (B) qui n'a pas $x - \beta$ parmi les siens. Par une raison semblable, $\alpha\gamma$ doit manquer dans les quotients (A) et (C); et ainsi des autres.

Quant au nombre des produits à deux lettres qui doivent se trouver dans la somme des quotients, la fonction $mQ - 2Q = (m-2)Q$ l'indique exactement: il y a dans Q , $\frac{m(m-1)}{2}$ produits à deux lettres (n° 405), qui, pris $m-2$ fois, sont

au nombre de $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$; et c'est ce qui doit être: car chacun des quotients

(A), (B), (C), etc. ne contenant que $m-1$ lettres, ne contient que $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ produits à deux lettres, qui, pris m fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a de quotients, donnent un nombre de produits exprimé par $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$.

On a donc $S_2 + PS_1 + mQ = mQ - 2Q$, d'où l'on tire, en retranchant de part et d'autre $PS_1 + mQ$,

$$S_2 = -PS_1 - 2Q.$$

426. Le coefficient du 4^{me} terme de (A), si l'on change son signe, est évidemment égal à la somme de tous les produits à trois lettres qu'on peut faire avec les $m-1$ lettres β, γ, δ , etc. parmi lesquelles ne se trouve pas la lettre α (nos 406, 413, 423). Et comme on sait d'ailleurs que la somme des produits à trois lettres qu'on peut faire avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. est égale à $-R$ (nos 406, 413), il en résulte que le coefficient du 4^{me} terme de (A), si l'on change son signe, vaut

$$-R - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta - \text{etc.} - \alpha\gamma\delta - \text{etc.} - \text{etc.}$$

c'est-à-dire qu'il est égal à $-R$, diminué de tous les produits à trois lettres dans lesquels entre la lettre α .

On trouvera de même que le coefficient du 4^{me} terme de (B) étant égal, si l'on change son signe, à la somme de tous les produits à trois lettres qu'on peut faire avec les $m-1$ lettres α, γ, δ , etc. parmi lesquelles ne se trouve pas la lettre β , équivaut, moyennant ce changement de signe, à

$$-R - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta - \text{etc.} - \beta\gamma\delta - \text{etc.} - \text{etc.}$$

c'est-à-dire qu'il est égal à $-R$, diminué de tous les produits à trois lettres dans lesquels entre la lettre β .

On trouvera aussi que le coefficient du 4^{me} terme de (C) étant égal, si l'on change son signe, à la somme des produits à trois lettres qu'on peut former avec les $m-1$ lettres α, β, δ , etc. parmi lesquelles ne se trouve pas la lettre γ , équivaut, moyennant ce changement de signe, à

$$-R - \alpha\beta\gamma - \alpha\gamma\delta - \text{etc.} - \beta\gamma\delta - \text{etc.} - \text{etc.}$$

c'est-à-dire qu'il est égal à $-R$, diminué de tous les produits à trois lettres dans lesquels entre la lettre γ , et ainsi de suite.

427. Le coefficient du 4^{me} terme dans la somme (Σ) des quotients vaut donc, si l'on change son signe,

$$-R - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta - \text{etc.} - \alpha\gamma\delta - \text{etc.} - \text{etc.}$$

$$-R - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta - \text{etc.} - \beta\gamma\delta - \text{etc.} - \text{etc.}$$

$$-R - \alpha\beta\gamma - \alpha\gamma\delta - \text{etc.} - \beta\gamma\delta - \text{etc.} - \text{etc.}$$

$$-R - \alpha\beta\delta - \alpha\gamma\delta - \text{etc.} - \beta\gamma\delta - \text{etc.} - \text{etc.}$$

$$- \text{etc.}$$

c'est-à-dire qu'il vaut

$$-mR - 3\alpha\beta\gamma - 3\alpha\beta\delta - \text{etc.} - 3\alpha\gamma\delta - \text{etc.} - 3\beta\gamma\delta - \text{etc.}$$

ou, ce qui revient au même,

$$-mR - 3(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \text{etc.} + \alpha\gamma\delta + \text{etc.} + \beta\gamma\delta + \text{etc.})$$

ou enfin, $-mR - 3(-R) = -mR + 3R$: car la quantité $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \text{etc.} + \text{etc.}$ n'est autre chose que la somme des produits à trois lettres, qu'on peut former avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ (*)

Voilà donc ce que vaut le coefficient du 4^{me} terme, si l'on change son signe; d'où il suit que, si on ne le change pas, au lieu de valoir $-mR + 3R$, il vaut $mR - 3R$.

On a donc $S_3 + PS_2 + QS_1 + mR = mR - 3R$, d'où l'on tire, en retranchant de part et d'autre $PS_2 + QS_1 + mR$,

$$S_3 = -PS_2 - QS_1 - 3R.$$

428. En continuant de raisonner ainsi, on tirera du 5^{me} terme de (Σ) la valeur de S_4 , du 6^{me} celle de S_5 , et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui, étant le m^{me} , donnera la valeur de S_{m-1} .

On aura d'abord, pour ce terme-là,

$$S_{m-1} + PS_{m-2} + QS_{m-3} \dots + mT = mT - (m-1)T,$$

d'où l'on tirera

$$S_{m-1} = -PS_{m-2} - QS_{m-3} \dots - (m-1)T.$$

429. En rapprochant les formules qui donnent les sommes des puissances des m soluteurs d'une équation, depuis la somme des premières puissances jusqu'à celle des puissances $m-1$, on a

(*) Il est clair que chacun des produits à trois lettres qu'on peut former avec les m lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ doit manquer trois fois dans la somme des quotients : $\alpha\beta\gamma$, par exemple, doit manquer dans le quotient (A), qui n'a pas $x - \alpha$ parmi ses facteurs; dans le quotient (B), qui n'a pas $x - \beta$ parmi les siens, et dans le quotient (C), qui ne contient pas $x - \gamma$. Par une raison semblable, $\alpha\beta\delta$ doit manquer dans les quotients (A), (B), (D), et ainsi des autres. Quant au nombre des produits à trois lettres qui doivent se trouver dans la somme des quotients, il est facile de voir, en raisonnant comme dans la note du n° 425, que la fonction $mR - 3R = (m-3)R$ l'indique tel qu'il doit être.

$$S_1 = -P$$

$$S_2 = -PS_1 - 2Q$$

$$S_3 = -PS_2 - QS_1 - 3R$$

$$\dots\dots\dots S_{m-1} = -PS_{m-2} - QS_{m-3} \dots - (m-1)T,$$

formules dont la loi est facile à saisir.

430. Appliquons cela à l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0,$$

nous aurons $P=2$, $Q=-23$, $R=-60$, ce qui donnera par les formules

$$S_1 = -2 \text{ et } S_2 = 4 + 46 = 50.$$

Et en effet, les solveurs de l'équation étant $+5, -4, -3$ (n° 409), on a immédiatement

$$S_1 \text{ ou } 5 - 4 - 3 = -2$$

$$S_2 \text{ ou } 25 + 16 + 9 = 50.$$

L'équation $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ donnant $P=-1$, $Q=-7$, $R=1$, $S=6$, on a par les formules

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + 14 = 15$$

$$S_3 = 15 + 7 - 3 = 19.$$

Et en effet, les solveurs de l'équation étant $+1, -1, -2, +3$ (n° 409), on trouve immédiatement

$$S_1 \text{ ou } 1 - 1 - 2 + 3 = 1$$

$$S_2 \text{ ou } 1 + 1 + 4 + 9 = 15$$

$$S_3 \text{ ou } 1 - 1 - 8 + 27 = 19.$$

L'équation $x^3 - 19x + 30 = 0$ donnant $P=0$, $Q=-19$, $R=30$, on a par les formules

$$S_1 = 0, S_2 = 0 + 38 = 38.$$

Et en effet, les solveurs de l'équation étant $+2, +3, -5$ (n° 410), on trouve immédiatement

$$S_1 \text{ ou } 2 + 3 - 5 = 0$$

$$S_2 \text{ ou } 4 + 9 + 25 = 38.$$

Enfin, l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, donnant $P=-1$, $Q=-19$, $R=49$, $S=-30$, on a par les formules

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + 38 = 39$$

$$S_3 = 39 + 19 - 147 = -89,$$

ce dont nous sommes sûrs, quoique nous ne puissions le vérifier, parce que cette fois nous ne sommes pas supposés connaître les solveurs de l'équation (n° 422).

431. Il faut observer que, dans les formules trouvées, m ne peut pas varier à volonté lorsque l'équation est donnée, et que cette lettre est nécessairement égale au degré de l'équation, ou au nombre de ses soluteurs; en sorte que les formules, telles qu'elles ont été démontrées, ne peuvent donner la somme des puissances des soluteurs que depuis la puissance 1 jusqu'à la puissance $m-1$, comme nous l'avons déjà dit (n° 429).

432. Mais si l'on reprend l'équation $x^m + Px^{m-1} + etc. = 0$, et qu'on la multiplie par x^n , on aura

$$x^{m+n} + Px^{m+n-1} + Qx^{m+n-2} \dots + Tx^{n+1} + Ux^n = 0,$$

équation qui a les mêmes soluteurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$ que la proposée, outre n soluteurs égaux à 0 (*).

Cela posé, substituons successivement à x , dans l'équation $x^{m+n} + Px^{m+n-1} + etc. = 0$, les m soluteurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$ nous aurons les m résultats suivants

$$\alpha^{m+n} + P\alpha^{m+n-1} + Q\alpha^{m+n-2} \dots + T\alpha^{n+1} + U\alpha^n = 0,$$

$$\beta^{m+n} + P\beta^{m+n-1} + Q\beta^{m+n-2} \dots + T\beta^{n+1} + U\beta^n = 0, etc.$$

et, en ajoutant tous ces résultats, nous trouverons

$$S_{m+n} + PS_{m+n-1} + QS_{m+n-2} \dots + TS_{n+1} + US_n = 0,$$

ou

$$S_{m+n} = -PS_{m+n-1} - QS_{m+n-2} \dots - TS_{n+1} - US_n,$$

équation dans laquelle on pourra faire varier n , tandis que m restera toujours égal au degré de l'équation proposée, ou, ce qui revient au même, au nombre de ses soluteurs.

433. En faisant successivement n égal à 0, à 1, à 2, etc. et en observant d'ailleurs que $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 + etc. = 1 + 1 + 1 + etc. = m$, on obtiendra les valeurs de S_m , de S_{m+1} , de S_{m+2} , etc.

Rapprochant alors ces formules des précédentes, on formera le

(*) Les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, etc.$ réduisant chacune à 0 le premier membre de l'équation $x^m + Px^{m-1} + etc. = 0$, réduiront aussi à 0 le premier membre de l'équation $x^{m+n} + Px^{m+n-1} + etc. = 0$: car $0 \times x^n = 0$, quelle que soit la valeur de x^n .

D'un autre côté, il manque dans l'équation $x^{m+n} + Px^{m+n-1} + etc. + Ux^n = 0$ les n derniers termes, depuis celui qui renfermerait x^{n-1} jusqu'à celui qui renfermerait x^0 , en sorte qu'elle a n soluteurs égaux à 0 (nos 377, 411).

tableau suivant, que l'on appliquera si l'on veut aux équations du n° 430.

$$S_0 = m$$

$$S_1 = -P$$

$$S_2 = -PS_1 - 2Q$$

$$S_3 = -PS_2 - QS_1 - 3R$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_m = -PS_{m-1} - QS_{m-2} \dots - SS_2 - TS_1 - mU$$

$$S_{m+1} = -PS_m - QS_{m-1} \dots - TS_2 - US_1 - (m+1)0$$

$$S_{m+2} = -PS_{m+1} - QS_m \dots - US_2 - 0S_1 - (m+2)0$$

etc. etc. ()*

434. Maintenant, si l'on multiplie l'une par l'autre les fonctions $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \text{etc.} = S_n$, et $\alpha^p + \beta^p + \gamma^p + \text{etc.} = S_p$, il en résultera un produit que l'on pourra ordonner ainsi,

$$(\alpha^{n+p} + \beta^{n+p} + \gamma^{n+p} + \text{etc.}) + \alpha^n\beta^p + \alpha^p\beta^n + \alpha^n\gamma^p + \alpha^p\gamma^n + \text{etc.} + \beta^n\gamma^p + \beta^p\gamma^n + \text{etc.} + \text{etc.}) = S_n S_p.$$

Mais la fonction renfermée entre les premières parenthèses étant égale à S_{n+p} , celle qui est renfermée entre les secondes parenthèses sera donc égale à

$$S_n S_p - S_{n+p}.$$

C'est la valeur de la fonction symétrique que l'on forme en combinant deux à deux les soluteurs d'une équation, et en affectant ces soluteurs, chacun à leur tour, de l'exposant n et de l'exposant p , que nous supposons pour le moment entiers et directs. Cette valeur est connue, puisqu'on connaît, par les formules du n° 433, S_n , S_p et S_{n+p} .

435. En représentant, par exemple, les soluteurs de l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$$

par α , β , γ , et faisant $n=1$, et $p=2$, on aura

$$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma = S_1 S_2 - S_3:$$

or, dans ce cas $S_1 = -2$, et $S_2 = 50$ (n° 430), ce qui donne $S_1 S_2$

(*) Pour faire mieux saisir la loi de ces formules, on a mis 0 dans les deux dernières, à la place des coefficients qui viendraient après U , et qui doivent en effet manquer, puisque U est supposé être le dernier terme de l'équation proposée.

$= -100$. D'ailleurs, les formules du n° 433 font trouver ici $S_3 = -100 - 46 + 180 = 34$, en sorte qu'on a

$$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \text{etc.} = -100 - 34 = -134,$$

ce que, dans cette occasion, nous pouvons vérifier, puisque nous savons que les soluteurs de la proposée sont 5, -4 et -3 (n° 430). Nous les combinerons donc deux à deux, en les affectant chacun à leur tour de l'exposant 1 et de l'exposant 2, et nous aurons

$$80 - 100 + 45 - 75 - 36 - 48 = -134,$$

comme l'indique la formule.

436. Partant de l'équation trouvée $\alpha^n\beta^p + \alpha^p\beta^n + \text{etc.} = S_nS_p - S_{n+p}$, si on la multiplie par $\alpha^q + \beta^q + \gamma^q + \text{etc.} = S_q$, on aura un produit, que l'on pourra ordonner ainsi,

$$\begin{aligned} & (\alpha^{n+q}\beta^p + \alpha^p\beta^{n+q} + \alpha^{n+q}\gamma^p + \alpha^p\gamma^{n+q} + \text{etc.} + \beta^{n+q}\gamma^p + \\ & \quad \beta^p\gamma^{n+q} + \text{etc.} + \text{etc.}) + \\ & (\alpha^p + \gamma^q\beta^n + \alpha^n\beta^p + \alpha^p + \gamma^q\gamma^n + \alpha^n\gamma^p + \alpha^p + \beta^q\gamma^n + \\ & \quad \beta^n\gamma^p + \text{etc.} + \text{etc.}) + \\ & (\alpha^n\beta^p\gamma^q + \alpha^n\beta^q\gamma^p + \alpha^p\beta^n\gamma^q + \alpha^p\beta^q\gamma^n + \alpha^q\beta^n\gamma^p + \alpha^q\beta^p\gamma^n + \text{etc.} + \text{etc.}) = \\ & S_nS_pS_q - S_{n+p}S_q. \end{aligned}$$

Mais la fonction renfermée entre les premières parenthèses étant égale à $S_{n+q}S_p - S_{n+p+q}$, et la fonction renfermée entre les secondes parenthèses étant égale à $S_{p+q}S_n - S_{n+p+q}$ (n° 434), celle qui est renfermée entre les troisièmes parenthèses sera donc égale à

$$S_nS_pS_q - S_{n+p}S_q - S_{n+q}S_p - S_{p+q}S_n + 2S_{n+p+q}.$$

C'est la valeur de la fonction symétrique que l'on forme en combinant trois à trois les soluteurs d'une équation, et en affectant ces soluteurs chacun à leur tour de l'exposant n , de l'exposant p et de l'exposant q .

437. En multipliant par $\alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \text{etc.} = S_r$ la nouvelle équation que nous venons de trouver, et qui exprime la valeur de $\alpha^n\beta^p\gamma^q + \text{etc.}$ on trouvera un produit dont on pourra tirer la valeur de $\alpha^n\beta^p\gamma^q\delta^r + \text{etc.}$ applicable au cas où la proposée sera au moins du quatrième degré, et aura au moins quatre soluteurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; et ainsi de suite.

438. Du reste, il y a une observation très-importante à faire sur ces formules :

Considérons la fonction

$$\alpha^n \beta^p \gamma^q + \alpha^n \beta^q \gamma^p + \alpha^p \beta^n \gamma^q + \alpha^p \beta^q \gamma^n + \alpha^q \beta^n \gamma^p + \alpha^q \beta^p \gamma^n,$$

dans laquelle chaque terme est composé des trois lettres $\alpha \beta \gamma$, écrites dans le même ordre, et affectées des exposants n, p, q , auxquels on a fait subir toutes les permutations dont ils étaient susceptibles (n° 344 D); cette fonction est par là même composée de six termes; mais si deux des exposants devenaient égaux, par exemple n et p , il est clair que le premier terme deviendrait égal au troisième, le second au quatrième, et le cinquième au sixième. Cela posé, si l'on écrivait encore les six termes, on aurait

$$\alpha^n \beta^n \gamma^q + \alpha^n \beta^q \gamma^n + \alpha^n \beta^n \gamma^q + \alpha^n \beta^q \gamma^n + \alpha^q \beta^n \gamma^n + \alpha^q \beta^n \gamma^n,$$

et la valeur de ces six termes aurait pour expression (n° 436)

$$S_n^2 S_q - S_n S_q - 2S_{n+q} S_n + 2S_{2n+q}.$$

Mais ces six termes, au lieu de former une seule et même fonction, formeraient proprement deux fonctions égales, dont chacune serait composée des trois termes distincts

$$\alpha^n \beta^n \gamma^q + \alpha^n \beta^q \gamma^n + \alpha^q \beta^n \gamma^n.$$

La valeur de cette dernière serait donc

$$\frac{1}{2} (S_n^2 S_q - S_n S_q - 2S_{n+q} S_n + 2S_{2n+q}).$$

En combinant ce que nous venons de dire pour ce cas particulier avec ce que nous avons dit au n° 344 L, touchant les permutations d'un certain nombre de lettres lorsque plusieurs d'entre elles sont semblables, on comprendra que, pour trouver la valeur d'une fonction symétrique de la forme $\alpha^n \beta^p \gamma^q \delta^r$ etc. + etc. lorsqu'il y aura des exposants égaux, et qu'on n'admettra pas la répétition des termes égaux, il faudra calculer cette valeur comme si l'on voulait admettre la répétition des termes égaux; puis, en désignant les exposants inégaux par $n, n', n'',$ etc. diviser la valeur trouvée, 1° par le nombre des permutations d'autant de lettres qu'il y aura d'exposants égaux à n , 2° par le nombre des permutations d'autant de lettres qu'il y aura d'exposants égaux à n' , 3° par le nombre des permutations d'autant de lettres qu'il y aura d'exposants égaux à n'' ; et ainsi de suite.

439. S'il se présentait quelque fonction symétrique fractionnaire, on ferait la somme de tous ses termes en les réduisant au même dénominateur, et l'on aurait une fraction, dont le numérateur et le dénominateur seraient des fonctions symétriques entières, et dont on trouverait par conséquent la valeur par les formules précédentes.

Par exemple,

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \alpha^2\beta + \beta\gamma^2 + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2}{\alpha\beta\gamma} =$$

$$\frac{S_1 S_2 - S_3}{-R} \text{ (nos 434, 406, 408).}$$

Par exemple encore,

$$\frac{1}{\alpha^p} + \frac{1}{\beta^p} + \frac{1}{\gamma^p} = \frac{\beta^p\gamma^p + \alpha^p\gamma^p + \alpha^p\beta^p}{\alpha^p\beta^p\gamma^p} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}(S_p^2 - S_{2p})}{(-R)^p} \text{ (nos 434, 438, 406, 408).}$$

Sur quoi il est bon d'observer que

$$\frac{1}{\alpha^p} + \frac{1}{\beta^p} + \frac{1}{\gamma^p} = \alpha^{-p} + \beta^{-p} + \gamma^{-p} = S_{-p}.$$

440. Venons maintenant à la recherche effective des soluteurs des équations, qui est le but principal de cette seconde partie, les chapitres qui précèdent devant être considérés comme une introduction à cette recherche.

D'après les observations du n° 357, et pour procéder avec un certain ordre, nous traiterons d'abord des problèmes qui fournissent autant d'équations que d'inconnues; et nous parlerons ensuite de ceux qui donnent ou plus ou moins d'équations qu'ils ne donnent d'inconnues.

SECTION II.

De la résolution des équations.

PREMIERE SOUS-DIVISION.

Des problèmes qui fournissent autant d'équations que d'inconnues.

441. Les problèmes que nous allons considérer ici, ou ne donnent qu'une inconnue, ou ils en donnent plus d'une ; mais toujours le nombre des équations que l'on en peut tirer est égal au nombre des inconnues.

442. Une première chose à observer à cet égard, c'est que tel problème qui s'annonce comme appartenant à cette classe, peut cependant ne pas lui appartenir ; le suivant est dans ce cas :

Trouver deux nombres dont la somme soit 7, et dont le double du second, ajouté au double du premier, fasse 14.

En représentant ces deux nombres par x et y , on a les équations

$$x + y = 7, \quad 2x + 2y = 14.$$

Mais il est facile de voir que $2x + 2y$ n'est autre chose que le double de $x + y$, et que 14 n'est autre chose que le double de 7 ; en sorte que non-seulement une de ces équations est une conséquence de l'autre, mais encore l'une n'exprime rien de plus que l'autre, d'où il résulte qu'une des deux peut être supprimée.

Ce problème à deux inconnues ne fournissant donc proprement qu'une équation, n'appartient pas à la classe de ceux qui doivent nous occuper actuellement, et il en serait de même de tous ceux qui, avec 2, ou 3, ou 4, ou etc. inconnues, donneraient aussi ou 2, ou 3, ou 4, ou etc. équations, dont'une ou plus d'une n'exprimerait rien de plus que les autres.

443. Du reste, lors même qu'on n'apercevrait pas du premier abord l'identité de ces équations, il ne pourrait point y avoir d'inconvénient à les traiter comme si elles exprimaient des conditions différentes; la suite du calcul ne pourrait manquer de faire reconnaître ce que l'on n'aurait pas su voir d'entrée.

444. Une seconde observation à faire dans la matière qui nous occupe, c'est que le cas des problèmes à plus d'une inconnue et autant d'équations, rentre quelquefois de lui-même, en tout ou en partie, dans celui des problèmes à une inconnue et une équation, comme nous allons le voir par les questions suivantes :

445. PREMIÈRE QUESTION. *Trouver trois nombres, dont le premier, multiplié par 7, donne 35; dont le second, multiplié par 2, et divisé par 3, donne 36; et dont le troisième, multiplié par 4, donne un produit tel que, si l'on en retranche 12, il reste 20.*

On voit tout de suite que ce problème se décompose en trois autres, qui n'ont entre eux aucune liaison, car il revient à ceci :

1° *Trouver un nombre qui, multiplié par 7, donne 35;*

2° *Trouver un nombre qui, multiplié par 2 et divisé par 3, donne 36.*

3° *Trouver un nombre qui, multiplié par 4, donne un produit tel que, si l'on en retranche 12, on ait pour reste 20.*

Et il est clair qu'à chacun de ces problèmes répond une des trois équations

$$7x = 35, \quad \frac{2y}{3} = 36, \quad 4z - 12 = 20.$$

En général, si un problème qui donne deux ou plusieurs inconnues et autant d'équations, est tel que chaque équation ne contienne qu'une seule inconnue, outre les connues qu'elle doit alors nécessairement contenir pour signifier quelque chose (n^{os} 50, 51, 373), ce problème n'est évidemment qu'un assemblage de problèmes différents et indépendants les uns des autres, à chacun desquels répond une des équations dont il s'agit. Il rentre donc en totalité (n^o 444) dans le cas des problèmes à une inconnue et une équation.

446. SECONDE QUESTION. *Trouver trois nombres avec ces conditions : la somme des deux premiers est 7, leur différence est 1, et le troisième, multiplié par 8, donne 40.*

En représentant ces nombres par x, y, z , on a

$$x + y = 7, \quad x - y = 1, \quad 8z = 40.$$

Cela posé, examinons à part chacune des conditions du problème.

Il faut d'abord que la somme des deux premiers nombres soit 7, ce qui, pour ne parler que des nombres entiers et directs, peut avoir lieu de trois manières, c'est-à-dire lorsque l'on prend 1 et 6, lorsque l'on prend 2 et 5, et lorsque l'on prend 3 et 4.

Il faut ensuite que la différence des deux premiers nombres soit 1, ce qui, en isolant cette condition, peut avoir lieu d'un nombre illimité de manières, car on a

$$2 - 1 = 1, \quad 3 - 2 = 1, \quad 4 - 3 = 1, \text{ etc. etc.}$$

Il faut enfin que le troisième nombre, multiplié par 8, donne 40, ce qui ne peut avoir lieu que d'une manière, c'est-à-dire en multipliant 5 par 8.

Maintenant, si l'on réunit les deux premières conditions, elles ne pourront être satisfaites en même temps que par les nombres 3 et 4, parce qu'il n'y a que ces nombres dont la somme soit 7 et la différence 1.

Mais si nous voulions aussi réunir la dernière condition aux deux premières, nous verrions qu'elle s'y refuse en quelque sorte, c'est-à-dire que cette troisième condition ne se lie en aucune manière aux autres, et qu'on pourrait changer celle-ci sans dénaturer celles-là, et réciproquement.

Le problème actuel revient donc à ces deux :

1° Trouver deux nombres dont la somme soit 7 et la différence 1.

2° Trouver un nombre qui, multiplié par 8, donne 40.

Cet exemple fait voir que, si les équations d'un problème ne peuvent pas toutes s'isoler, ou ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres, cela peut cependant avoir lieu pour quelques-unes d'entre elles. Lorsque cela arrive, le problème rentre en partie (n° 444) dans le cas des problèmes à une inconnue et une équation.

447. Du reste, les réflexions que nous venons de faire sur la dépendance ou la non dépendance réciproque des conditions ou des équations d'un problème, nous conduiront à voir quels sont les caractères généraux de cette dépendance ou non dépendance.

Il est clair que si l'équation $8z = 40$ n'est point liée aux équations $x + y = 7$, et $x - y = 1$, c'est que l'inconnue z que contient celle-là ne se trouve point dans celles-ci, en sorte que la valeur de cette in-

connue ne dépend que de l'équation $8z = 40$. Il n'est pas moins évident que si les équations $x + y = 7$ et $x - y = 1$ sont liées entre elles, c'est que la même inconnue, x ou y , se trouve dans les deux; en sorte que sa valeur dépend des deux équations ensemble, et qu'elle doit satisfaire à l'une comme à l'autre.

Il faut donc en général, pour que deux équations soient liées, 1° qu'une même inconnue au moins se trouve dans les deux, 2° qu'elles contiennent ensemble pour le moins deux inconnues.

La première de ces conditions suit évidemment de tout ce que nous venons de dire; et quant à la seconde, il est manifeste que si l'on voulait poser deux équations avec une seule et même inconnue, ou ces équations seraient contradictoires, et ne pourraient coexister, c'est-à-dire que l'inconnue n'aurait pas la même valeur dans les deux, ou il y aurait toujours une des équations qui n'exprimerait rien de plus que l'autre, et on pourrait la supprimer.

Maintenant, trois ou un plus grand nombre d'équations étant données, si on peut les arranger de manière à ce que la première ait avec la seconde les rapports que nous venons d'indiquer, qu'il en soit de même de la seconde avec la troisième, de la troisième avec la quatrième, et ainsi de suite, toutes ces équations seront liées entre elles; et aucune ne pourra se détacher des autres, ou s'isoler, sans que le problème qui sera censé avoir fourni ces équations ne soit changé.

Ainsi les quatre équations $ax + by = c$, $lu = m$, $dy + ez = f$, $gz + hu = i$, sont liées entre elles, parce qu'en les arrangeant de l'une ou de l'autre de ces manières,

$$\begin{array}{ll} ax + by = c & lu = m \\ dy + ez = f & gz + hu = i \\ gz + hu = i & dy + ez = f \\ lu = m & ax + by = c, \end{array}$$

la première est liée à la seconde, la seconde à la troisième, et la troisième à la quatrième.

448. Cela posé, nous avons deux questions à examiner :

1° *Étant donnée une équation à une inconnue, dans quel cas peut-on la résoudre?*

2° *Étant données deux ou plusieurs équations, qui renferment ensemble un nombre d'inconnues égal au nombre de ces équations, et*

qui sont d'ailleurs liées entre elles (n° 447), peut-on parvenir à connaître la valeur de ces inconnues?

En s'occupant de ces questions, on a trouvé que la seconde se ramenait à la première, c'est-à-dire qu'on pouvait des diverses équations fournies par un problème, dans le cas dont il s'agit ici, tirer d'autres équations ne renfermant chacune qu'une des inconnues du problème.

On a vu de plus que, pour opérer cette espèce de conversion, il n'était pas nécessaire de savoir d'avance résoudre les équations à une inconnue, et qu'en revanche il était indispensable de connaître quelques procédés relatifs à cette même conversion, pour pouvoir traiter d'une manière un peu générale la première question.

D'après tout cela, nous allons partager cette sous-division en deux autres : nous parlerons en premier lieu des problèmes à plusieurs inconnues et autant d'équations, et en second lieu des problèmes à une inconnue et une équation.

§ I.

Des problèmes à plusieurs inconnues et autant d'équations.

449. Nous avons déjà vu quelques problèmes à deux inconnues et deux équations (nos 347 A, 350 A, 446), et l'on doit comprendre par ceux-là qu'il peut s'en trouver à trois inconnues et trois équations, à quatre inconnues et quatre équations, et ainsi de suite.

On doit sentir d'ailleurs que ces équations peuvent être de degrés plus ou moins élevés, non-seulement dans différents problèmes, mais quelquefois aussi dans le même problème.

450. Cela posé, pour que les commençants aient plus de facilité à saisir ce que nous avons à dire sur cette matière, nous prendrons d'abord quelques exemples particuliers; mais nous ne nous attacherons cependant point pour le moment à ceux des nos 347 A, 350 A, et 446, dont la trop grande simplicité ne serait pas avantageuse au développement d'une méthode qui doit embrasser tous les cas.

451. Soient les deux équations

$$x^2 + 2y.x - 8 = 0 \dots (A)$$

$$x^2 + 2y.x - 6 = 0 \dots (B),$$

que l'on suppose exprimer deux conditions d'un même problème.

Si ces conditions n'ont rien de contradictoire, ou, en d'autres termes, si elles peuvent avoir lieu en même temps, l'inconnue y , qui est au premier degré dans les deux équations, aura dans l'une la même valeur que dans l'autre, et l'on en pourra dire autant d'une au moins des deux valeurs de x que doivent fournir chacune de ces équations, qui sont toutes deux du second degré en x (n^{os} 375, 397).

452. Cela posé, nous observerons d'abord que si les deux valeurs de x que doit fournir une quelconque de ces équations, pouvaient satisfaire indifféremment à l'autre équation, il faudrait que les coefficients du second terme dans les deux équations fussent égaux, de même que les derniers termes, ou que l'on eût en même temps (n^{os} 375, 404, 408).

$$2y = 2y \text{ et } -8 = -6.$$

Mais le second de ces résultats étant absurde, les deux équations (A) et (B) ou sont contradictoires, ou n'ont du moins qu'une valeur de x commune.

453. Supposons pour un moment qu'elles ne soient pas contradictoires, et représentons par α et β les valeurs de x que doit fournir (A). Si α est la valeur commune, elle satisfera à (B), et l'on aura

$$\alpha^2 + 2y.\alpha - 6 = 0 \dots (B').$$

En revanche, si c'est β qui est la valeur commune, on aura

$$\beta^2 + 2y.\beta - 6 = 0 \dots (B'').$$

Dans notre supposition actuelle, une de ces deux dernières équations est donc vraie, et l'autre ne l'est pas; ou, si l'on veut, le premier membre de l'une équivaut à 0, et non celui de l'autre. Mais si l'on multiplie ces deux premiers membres entre eux, leur produit étant composé de deux facteurs dont un est nul, sera nul, et l'on aura

$$\alpha^2\beta^2 + 2y(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) - 6(\alpha^2 + \beta^2) + 4y^2\alpha\beta - 12y(\alpha + \beta) + 36 = 0 \dots (E).$$

Or, l'équation (A), dont α et β sont les soluteurs, lorsqu'on considère y comme connue (n^o 375), donne $\alpha + \beta = -2y = -P$ (n^o 404), et $\alpha\beta = -8 = Q$ (n^o 408). D'ailleurs, $R = 0$, parce qu'il n'y a point de quatrième terme. De là on tire (n^{os} 433, 434)

$$\begin{aligned} S_1 &= -2y & S_5 &= -8y^3 - 48y, \\ S_2 &= 4y^2 + 16 & S_1 S_2 - S_3 &= 16y. \end{aligned}$$

Joignant à ces valeurs celle de $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = Q^2 = (-8)^2 = 64$, et les substituant toutes, dans l'équation (E), aux fonctions symétriques de α et de β , on obtient

$64 + 2y(16y) - 6(4y^2 + 16) + 4y^2(-8) - 12y(-2y) + 36 = 0$,
 puis, en effectuant les multiplications, effaçant les termes qui se détruisent, et réduisant, on trouve

$$4 = 0 \dots (F).$$

454. Cette équation, qu'on appelle *l'équation finale*, étant ici absurde ou fausse, prouve que l'équation (E) l'est aussi, de même que les deux équations (B') et (B'') : car si une seule de ces deux dernières eût été vraie, il y aurait eu un des facteurs du premier membre de (E) qui aurait été 0, et ce premier membre se détruisant par là, les équations (E) et (F) auraient été vraies.

Il résulte de là que ni l'une ni l'autre des valeurs de x de l'équation (A) ne peut satisfaire à l'équation (B), et que ces équations n'ayant aucune valeur de x commune sont contradictoires, de même que les conditions que ces équations étaient supposées exprimer.

455. Au lieu d'appeler α et β les deux valeurs de x de l'équation (A), et de les substituer dans l'équation (B), on aurait pu désigner ainsi les deux valeurs de x de l'équation (B), et les substituer dans l'équation (A); alors, en opérant comme nous avons fait, on serait arrivé au même résultat. On aurait pu aussi, au lieu d'ordonner les équations pour l'inconnue x , les ordonner pour l'inconnue y . Mais nous verrons tout cela dans l'exemple suivant, celui-ci ne méritant pas de nous arrêter davantage.

Du reste, si l'on trouve que la contradiction des équations proposées pouvait s'apercevoir ici d'un coup d'œil, il n'en serait pas toujours de même, et il était utile de voir quels résultats on obtenait dans les cas de cette nature.

456. Soient maintenant les deux équations

$$x^2 + 2y.x - 8 = 0 \dots (A)$$

$$x^2 - 3y.x + 2y = 0 \dots (B),$$

que l'on suppose encore exprimer deux conditions d'un même problème.

Il ne sera peut-être pas superflu que nous répétions tout au long pour ce cas le raisonnement que nous avons fait pour le cas précédent.

Si les conditions du problème n'ont rien de contradictoire, ou, en d'autres termes, si elles peuvent avoir lieu en même temps, l'inconnue y , qui est au premier degré dans les deux équations, aura dans

l'une la même valeur que dans l'autre, et l'on en pourra dire autant d'une au moins des deux valeurs de x que doivent fournir chacune de ces équations, qui sont toutes deux du second degré en x (n^{os} 375, 397).

457. Cela posé, nous observerons d'abord que, si les deux valeurs de x , que doit fournir une quelconque de ces équations, pouvaient satisfaire indifféremment à l'autre équation, on aurait (n^{os} 375, 404, 408)

$$-2y = +3y, \text{ et } -8 = +2y;$$

mais le résultat $-2y = +3y$, qui se réduit (n^o 368) à $-2 = +3$, est absurde; donc, ou les deux équations (A) et (B) sont contradictoires, ou elles n'ont du moins qu'une valeur de x commune.

458. Supposons pour un moment qu'elles ne soient pas contradictoires, et représentons par α et β les valeurs de x que doit fournir (A). Si α est la valeur commune, elle satisfera à (B), et l'on aura

$$\alpha^2 - 3y.\alpha + 2y = 0 \dots (B')$$

En revanche, si c'est β qui est la valeur commune, on aura

$$\beta^2 - 3y\beta + 2y = 0 \dots (B'')$$

Dans notre supposition actuelle, une de ces deux dernières équations est donc vraie, et l'autre ne l'est pas; ou, si l'on veut, le premier membre de l'une équivaut à 0, et non celui de l'autre. Mais si l'on multiplie ces deux premiers membres entre eux, leur produit étant composé de deux facteurs dont un est nul, sera nul, et l'on aura

$$\alpha^2\beta^2 - 3y(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) + 2y(\alpha^2 + \beta^2) + 9y^2(\alpha\beta) - 6y^2(\alpha + \beta) + 4y^2 = 0 \dots (E).$$

Or, l'équation (A) dont α et β sont les soluteurs lorsqu'on considère y comme connue (n^o 375), donne $\alpha + \beta = -2y = -P$ (n^o 404), et $\alpha\beta = -8 = Q$ (n^o 408). D'ailleurs, $R = 0$, parce qu'il n'y a point de quatrième terme. De là on tire (n^{os} 433, 434)

$$\begin{aligned} S_1 &= -2y & S_3 &= -8y^3 - 48y \\ S_2 &= 4y^2 + 16 & S_1S_2 - S_3 &= 16y. \end{aligned}$$

Joignant à ces valeurs celle de $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = Q^2 = (-8)^2 = 64$, et les substituant toutes, dans l'équation (E), aux fonctions symétriques de α et de β , on obtient d'abord

$$64 - 3y(16y) + 2y(4y^2 + 16) + 9y^2(-8) - 6y^2(-2y) + 4y^2 = 0;$$

puis, en effectuant les multiplications, réduisant, ordonnant et divisant tous les termes par 4,

$$5y^3 - 29y^2 + 8y + 16 = 0 \dots (F).$$

459. Cette équation, qui est l'équation finale (n° 454), n'offrant aucune contradiction, les équations (A) et (B) ont une valeur commune (n° 457); on voit d'ailleurs que l'équation (F) ne contient plus que l'inconnue y , en sorte qu'elle rentre dans le cas des équations à une inconnue. Lorsqu'on saura résoudre ces équations-là, on pourra trouver les soluteurs de (F), et les substituer successivement à la place de y dans les équations (A) et (B), qui, ne contenant plus alors que l'inconnue x , rentreront aussi dans le cas des équations à une inconnue.

Pour que l'on se fasse une idée juste de cette façon de procéder, nous indiquerons ici d'avance que l'unité est un des soluteurs de (F), ce qu'il est facile de vérifier en mettant 1 et ses puissances à la place de y et de ses puissances dans l'équation (F), qui deviendra ainsi

$$5 - 29 + 8 + 16 = 0.$$

Sachant donc que $y = 1$, on mettra cette valeur à la place de y dans les équations (A) et (B), qui donneront ainsi

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

équations à une inconnue, dont chacune pourra fournir, lorsqu'on saura les résoudre, deux valeurs pour x (n° 397), parmi lesquelles une sera commune aux deux équations, comme nous venons de le dire.

460. Du reste, il est un moyen de simplifier la recherche de ce solveur commun : car si on le représente par a , chacune des équations en x sera divisible par $x - a$ (n° 387), en sorte que $x - a$ sera un diviseur commun des deux équations, et sera même dans ce cas leur plus grand commun diviseur, puisqu'elles n'ont qu'une valeur de x commune.

Or, si l'on cherche le plus grand commun diviseur de ces équations, on trouvera que c'est $x - 2$, d'où il résulte que $a = 2$, ou que 2 est le nombre qui satisfait en même temps aux équations (A) et (B), lorsqu'on y a mis 1 pour y .

461. Mais l'équation finale en y étant ici du 3^me degré, doit avoir

trois soluteurs, qui, mis chacun à part à la place de y , dans les équations (A) et (B), donneraient trois couples d'équations en x , d'où l'on tirerait trois valeurs de cette inconnue. On aurait donc trois valeurs d' y , et trois valeurs correspondantes d' x .

462. Au lieu de représenter par α et β les deux valeurs de x de l'équation (A), si nous eussions représenté par ces mêmes caractères les deux valeurs de x de l'équation (B), nous aurions eu, en les substituant dans (A),

$$\text{ou } \alpha^2 + 2\gamma\alpha - 8 = 0,$$

$$\text{ou } \beta^2 + 2\gamma\beta - 8 = 0;$$

multipliant les deux premiers membres entre eux, nous aurions trouvé, pour l'un et l'autre cas,

$$\alpha^2\beta^2 + 2\gamma(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) - 8(\alpha^2 + \beta^2) + 4\gamma^2\alpha\beta - 16\gamma(\alpha + \beta) + 64 = 0;$$

mais l'équation (B), dont α et β sont les soluteurs, donne $P = -3\gamma$, $Q = 2\gamma$, $R = 0$, d'où l'on tire

$$S_1 = 3\gamma$$

$$S_3 = 27\gamma^3 - 18\gamma^2$$

$$S^2 = 9\gamma^2 - 4\gamma$$

$$S_1S_2 - S_3 = 6\gamma^2;$$

joignant à ces valeurs celle de $\alpha^2\beta^2 = Q^2 = 4\gamma^2$, et les substituant toutes dans l'équation aux fonctions symétriques, nous aurions également obtenu, après toutes les réductions,

$$5\gamma^3 - 29\gamma^2 + 8\gamma + 16 = 0$$

pour l'équation finale en γ , comme dans le n° 458.

463. Si au lieu d'ordonner les équations (A) et (B) pour l'inconnue x (n° 375), on les eût ordonnées pour l'inconnue y , on aurait eu

$$y + \frac{x^2 - 8}{2x} = 0 \dots (A)$$

$$y + \frac{x^2}{2 - 3x} = 0 \dots (B).$$

Désignant alors par α la valeur d' y de (A), et substituant cette valeur dans (B), on aurait trouvé

$$\alpha + \frac{x^2}{2 - 3x} = 0.$$

Or, l'équation (A) donne $P = \frac{x^2 - 8}{2x}$; et comme elle n'a qu'un solveur, il est évident que $S_1 = \alpha$. Mais en général $S_1 = -P$; on a donc ici $\alpha = -\frac{x^2 - 8}{2x}$, et, par conséquent,

$$-\frac{x^2-8}{2x} + \frac{x^2}{2-3x} = 0.$$

De là on tire, en multipliant toute l'équation par $2x(2-3x)$ (n° 364),

$$5x^3 - 2x^2 - 24x + 16 = 0,$$

équation finale en x , qui, si on savait la résoudre, donnerait pour x les trois valeurs dont nous avons parlé au n° 461. Alors ces valeurs, substituées successivement à x dans l'équation (A) ou dans l'équation (B), donneraient trois équations en y , dont on pourrait tirer les trois valeurs de cette inconnue, dont on a aussi fait mention au n° 461.

Je dis dans l'équation (A) ou dans l'équation (B), car elles n'ont chacune qu'un solveur en y pour une même valeur de x , et ce solveur doit être le même dans les deux équations.

Ainsi, comme nous savons qu'une des valeurs de x est 2 (n° 460), ce que l'on peut du reste vérifier en mettant 2 à la place de x dans l'équation finale que nous venons de trouver, si l'on substitue ce nombre à x dans les équations (A) et (B), elles donnent l'une et l'autre pour résultat $y - 1 = 0$, d'où l'on tire $y = 1$.

464. Le procédé que nous venons d'employer pour tirer des égalités proposées une équation finale en x , ou pour *éliminer* (n° 368) l'inconnue y , est le même que celui dont nous nous sommes servis, dans les n°s 458 et 462, pour tirer de ces égalités une équation finale en y , ou pour *éliminer* x ; cependant l'application de ce procédé s'est trouvée ici plus simple et plus facile.

Il peut donc, dans certains cas, y avoir un avantage à *éliminer* telle inconnue plutôt que telle autre; mais l'habitude du calcul et la réflexion feront aisément distinguer ces cas, et reconnaître l'inconnue à *éliminer* de préférence.

465. Il ne sera pas inutile de faire encore ici une observation, qui tende à éclaircir la méthode.

Si nous désignons par α et β , comme dans le n° 458, les solveurs en x de l'équation (A) du n° 456, et qu'au lieu de les substituer à x dans l'équation (B), comme au n° 458, nous les mettions à la place de cette inconnue dans l'équation même qui les a donnés, il est clair que nous aurons

$$\alpha^2 + 2\gamma.\alpha - 8 = 0,$$

$$\beta^2 + 2\gamma.\beta - 8 = 0;$$

multipliant l'une par l'autre ces deux équations, nous trouverons, comme au n° 462,

$$\alpha^2\beta^2 + 2\gamma(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) - 8(\alpha^2 + \beta^2) + 4\gamma^2.\alpha\beta - 16\gamma(\alpha + \beta) + 64 = 0;$$

mais α et β étant supposés ici les soluteurs de l'équation (A), et non de l'équation (B), nous aurons, comme au n° 458, $P = 2\gamma$, $Q = -8$, $S_1 = -2\gamma$, $S_2 = 4\gamma^2 + 16$, $S_3 = -8\gamma^3 - 48\gamma$, $S_4 S_2 - S_5 = 16\gamma$, et $\alpha^2\beta^2 = 64$; en sorte que nous tirerons de là

$$64 + 2\gamma(16\gamma) - 8(4\gamma^2 + 16) + 4\gamma^2(-8) - 16\gamma(-2\gamma) + 64 = 0;$$

ou, en effectuant les multiplications,

$$64 + 32\gamma^2 - 32\gamma^2 - 128 - 32\gamma^2 + 32\gamma^2 + 64 = 0; \dots (I)$$

Or, si l'on efface les termes en γ qui se détruisent, on aura

$$64 - 128 + 64 = 0,$$

d'où l'on pourra tirer $0 = 0$, ou $128 = 128$, ou d'autres résultats semblables, très-vrais en eux-mêmes, mais qui n'apprennent rien.

On obtiendrait un résultat équivalent en opérant sur (B) comme nous venons de le faire sur (A).

466. Les équations de cette espèce, c'est-à-dire celles dont tous les termes se détruisent évidemment d'eux-mêmes, et sans aucune supposition particulière, en sorte que l'on en peut immédiatement tirer $0 = 0$, se nomment *des équations identiques* (*).

Lorsqu'elles renferment une ou plus d'une inconnue, elles prouvent qu'on peut prendre pour ces inconnues tous les nombres possibles. Ainsi, quelque valeur qu'on donne à γ dans l'équation (I) du numéro précédent, on trouve toujours $0 = 0$.

467. Pour peu qu'on y réfléchisse, on verra clairement que si nous sommes arrivés dans le n° 465 à une équation identique, c'est que, des deux équations données (A) et (B), nous n'avons employé dans notre calcul que l'équation (A), que nous avons ainsi isolée de l'autre, quoiqu'elles fussent liées entre elles et fournies par un seul

(*) Une seule équation est identique lorsqu'elle a les caractères que nous venons d'indiquer; mais on dit aussi que deux équations sont identiques, l'une relativement à l'autre, lorsqu'elles n'expriment qu'une même condition (nos 442, 443). Nous les appellerons *identiques entre elles*.

et même problème. Nous avons donc dénaturé ce problème; et il est évident d'ailleurs que, si l'on ne considère que la seule équation $x^2 + 2y.x - 8 = 0$, on pourra y mettre, à la place de y , un nombre à volonté, et qu'on trouvera toujours après cela deux valeurs de x qui satisferont à l'équation, telle qu'elle sera alors (nos 385, 397); c'est aussi là ce qu'indique l'équation identique en y à laquelle nous sommes parvenus (nos 465, 466).

En outre, cette équation $x^2 + 2y.x - 8 = 0$, ainsi isolée, n'appartient plus à la classe de celles que nous examinons à présent, puisqu'elle est seule et contient deux inconnues.

468. D'après tout cela, on voit bien que si l'on voulait chercher l'équation finale en y que peuvent donner les équations

$$x + y = 7, \quad 2x + 2y = 14,$$

que nous avons considérées au n° 442, on arriverait à une équation identique, puisqu'elles n'expriment l'une et l'autre qu'une même condition, et ne doivent être envisagées que comme une seule et même équation (n° 442).

469. Il est donc clair que si de deux équations données, renfermant deux inconnues, l'une n'exprime rien de plus que l'autre, l'élimination d'une des inconnues conduira à une équation identique.

Mais il n'en faudrait pas conclure réciproquement que, si l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues a conduit à une équation identique, ces deux équations n'expriment rien de plus l'une que l'autre, et qu'on puisse en supprimer une.

Supposons, pour développer cela, qu'un problème ait fourni les deux équations suivantes,

$$(x + y)(x + y - 4) = 0,$$

$$(x + y)(x - y) = 0:$$

si l'on effectue la multiplication des facteurs de ces équations, on obtiendra

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0, \quad x^2 - y^2 = 0,$$

résultats auxquels on pourra donner cette forme:

$$x^2 + (2y - 4)x + (y^2 - 4y) = 0 \dots (A),$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots (B).$$

Appelant alors α et β les valeurs de x de (A), les substituant dans (B), et multipliant les résultats, on aura

$$\alpha^2\beta^2 - \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^4 = 0.$$

Mais l'équation (A) donnant $P = 2\gamma - 4$, $Q = \gamma^2 - 4\gamma$, $S_1 = 4 - 2\gamma$, $S_2 = 2\gamma^2 - 8\gamma + 16$, si l'on substitue ces valeurs dans le produit précédent, on obtiendra après les réductions

$$2\gamma^4 - 2\gamma^4 + 8\gamma^3 - 8\gamma^3 + 16\gamma^2 - 16\gamma^2 = 0,$$

équation identique (n° 466).

Il est facile de voir que si l'on est arrivé ici à une équation identique, c'est parce que les deux équations proposées étaient une conséquence l'une de l'autre. En effet, si l'on multiplie $(x+y)(x+y-4)=0$, par $\frac{x-y}{x+y-4}$, on obtient $(x+y)(x-y)=0$; et si l'on multiplie $(x+y)(x-y)=0$, par $\frac{x+y-4}{x-y}$, on obtient $(x+y)(x+y-4)=0$.

Or, une équation étant donnée, il est évident qu'en la multipliant par un nombre quelconque, la nouvelle équation qui en résultera sera une suite nécessaire de la première. Les deux équations proposées sont donc conséquence l'une de l'autre. Mais cela ne dit point qu'elles n'expriment rien de plus l'une que l'autre, comme nous allons le voir.

La première équation $(x+y)(x+y-4)=0$, peut être satisfaite de deux manières, c'est-à-dire en supposant, ou $x+y=0$ (n° 373, note), ou $x+y-4=0$, suppositions qui ne peuvent avoir lieu toutes deux à la fois, comme cela est évident. Or, si $x+y=0$, il faut que $x=-y$ (n° 382, note), c'est-à-dire que l'équation sera satisfaite, quelque nombre que l'on prenne pour x , si l'on prend le même nombre en moins pour y . Mais si $x+y-4=0$, il faut que $x=4-y$ (n° 360), c'est-à-dire que si l'on fait y égal à 1, on aura x égal à 3; que si l'on fait $y=2$, on aura $x=2$; que si l'on fait $y=3$, on aura $x=1$, etc.

La seconde équation $(x+y)(x-y)=0$, peut aussi être satisfaite de deux manières, en supposant ou $x+y=0$, ou $x-y=0$, suppositions qui encore ici ne peuvent avoir lieu toutes deux en même temps. Or, si l'on a $x+y=0$, il en résulte $x=-y$; mais si l'on a $x-y=0$, on en doit conclure $x=y$.

Cela suffit pour prouver que les deux équations proposées n'expriment pas la même chose l'une que l'autre. L'on vient de voir, par exemple, que si l'on supposait $y=1$ dans la première, on pourrait prendre

alors $x = 3$, tandis que si dans la seconde on fait $y = 1$, on ne peut prendre pour x que 1 ou -1 .

Mais si les deux équations expriment des conditions différentes, il en résulte que, données par un même problème, l'une ne peut pas être séparée de l'autre, et qu'il faut les considérer ensemble; en d'autres termes, il faut qu'elles soient satisfaites toutes deux en même temps.

470. Or, dans cet exemple, les deux équations seront satisfaites si l'on pose seulement $x + y = 0$, parce qu'elles ont ce facteur commun; et sous ce point de vue le problème n'appartiendra pas à ceux de la classe actuelle, puisqu'il se résoudra par une seule équation contenant deux inconnues; mais les deux équations seront aussi satisfaites en posant en même temps $x + y - 4 = 0$, et $x - y = 0$; et sous ce point de vue le problème rentrera dans la classe de ceux qui nous occupent, puisqu'il se résoudra par deux équations à deux inconnues.

Cependant un problème donné devant être envisagé, pour sa solution complète, en même temps sous tous les points de vue dont il est susceptible, il en résulte qu'il y a des problèmes, comme celui des équations actuelles, qui appartiennent en même temps à différentes classes.

471. Lors donc que, par l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues, on arrivera à une équation identique, ces équations étant nécessairement conséquence l'une de l'autre, auront un facteur commun qu'il faudra rechercher, afin de les décomposer l'une et l'autre dans leurs facteurs; et l'on verra alors si ces facteurs peuvent fournir des équations; et quand cela aura lieu, on tiendra compte de ces équations.

Ainsi, comme les deux équations $x + y - 7 = 0$, $2x + 2y - 14 = 0$, conduisent à une équation identique, on cherchera leur plus grand commun diviseur, qui est $x + y - 7$; et ces équations écrites ainsi, $x + y - 7 = 0$, $(x + y - 7) 2 = 0$, ne pourront être satisfaites que d'une manière.

De même, les équations $x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, conduisant à une équation identique, on cherchera leur plus grand commun diviseur $x + y$, et les ayant écrites ainsi $(x + y)(x + y - 4) = 0$,

$(x+y)(x-y)=0$, on verra qu'on peut les satisfaire en même temps de deux manières, savoir en posant seulement $x+y=0$, ou en posant ensemble $x+y-4=0$ et $x-y=0$.

472. Soient maintenant les deux équations

$$x^2 - 3y^2 \cdot x + 2y = 0 \dots (A),$$

$$x^2 - 3y \cdot x + 2 = 0 \dots (B),$$

données par un même problème, et dont il s'agisse de tirer une équation finale en y , ou, en d'autres termes, dont on veuille *éliminer* l'inconnue x .

473. Si les deux valeurs de x , que doit fournir une de ces équations pour une même valeur de y (n° 397), peuvent satisfaire indifféremment à l'autre équation, avec la même valeur de y , on aura (n°s 375, 404, 408)

$$-3y^2 = -3y \text{ et } 2y = 2.$$

Or, en divisant par $-3y$ les deux membres de l'équation $-3y^2 = -3y$, et par 2 les deux membres de l'équation $2y = 2$ (n° 368), on tire également de l'une et de l'autre $y=1$: ce qui prouve, 1° que la valeur de y , commune aux deux équations (A) et (B), est 1 ; 2° que les deux valeurs de x , dans l'une des équations (A) et (B), sont les mêmes que dans l'autre. Et en effet, si l'on met 1 pour y dans ces équations, elles se réduisent également à celle-ci,

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

474. Le procédé que nous venons d'employer pour rechercher si les deux valeurs de x de l'une des équations satisfaisaient à l'autre, nous a fait trouver immédiatement la valeur de y ; mais cela n'ayant pas lieu dans tous les cas, il faut, pour arriver à quelque chose de général, raisonner aussi d'une manière générale.

475. Représentant donc par α et β les deux valeurs de x que doit fournir l'équation (A), si ces deux valeurs peuvent satisfaire l'une comme l'autre à l'équation (B), on aura simultanément

$$\alpha^2 - 3y \cdot \alpha + 2 = 0,$$

$$\beta^2 - 3y \cdot \beta + 2 = 0;$$

et si une seule de ces valeurs α et β convient à l'équation (B), une seule des fonctions $\alpha^2 - 3y \cdot \alpha + 2$, et $\beta^2 - 3y \cdot \beta + 2$, équivaudra à 0. Mais dans l'un et l'autre cas, on aura $(\alpha^2 - 3y \cdot \alpha + 2)(\beta^2 - 3y \cdot \beta + 2) = 0$, parce qu'un produit de deux facteurs est 0, soit lorsque les deux

facteurs équivalent chacun à part à 0, soit lorsqu'un seul de ses facteurs est 0.

Effectuant donc la multiplication, on obtiendra

$$\alpha^2\beta^2 - 3\gamma(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) + 2(\alpha^2 + \beta^2) + 9\gamma^2.\alpha\beta - 6\gamma(\alpha + \beta) + 4 = 0 \dots (E).$$

Or, l'équation (A), dont α et β sont les soluteurs, donne $P = -3\gamma^2$, $Q = 2\gamma$, $R = 0$. De là on tire

$$\begin{aligned} S_1 &= 3\gamma^2 & S_3 &= 27\gamma^6 - 18\gamma^3, \\ S_2 &= 9\gamma^4 - 4\gamma & S_1S_2 - S_3 &= 6\gamma^3; \end{aligned}$$

joignant à ces valeurs celle de $\alpha^2\beta^2 = Q^2 = 4\gamma^2$, et les substituant toutes, dans l'équation (E), aux fonctions symétriques de α et de β , on trouve

$$4\gamma^2 - 3\gamma(6\gamma^3) + 2(9\gamma^4 - 4\gamma) + 9\gamma^2(2\gamma) - 6\gamma(3\gamma^2) + 4 = 0;$$

puis, en effectuant les multiplications, réduisant, ordonnant, et divisant tous les termes par 4,

$$\gamma^2 - 2\gamma + 1 = 0 \dots (F).$$

476. Quoique nous ne sachions pas encore résoudre les équations, nous pourrions facilement trouver les soluteurs de celle-ci, puisqu'il est facile de voir que son premier membre n'est autre chose que le carré de $\gamma - 1$, ou celui de $-\gamma + 1$ (nos 265, 266, 306, 310), c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned} \gamma^2 - 2\gamma + 1 &= (\gamma - 1)(\gamma - 1) = 0, \\ \text{ou } \gamma^2 - 2\gamma + 1 &= (-\gamma + 1)(-\gamma + 1) = 0. \end{aligned}$$

Or, il résulte de là ou $\gamma - 1 = 0$, ou $-\gamma + 1 = 0$, équations qui prouvent également que $\gamma = 1$, comme nous l'avions déjà trouvé au n° 473 (Voyez, pour plus de lumière, le n° 266, et les nos 390, 391, 392).

477. Quant à l'inconnue x , il faut ici, pour trouver sa valeur, résoudre l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

à laquelle se réduisent également les équations (A) et (B) lorsqu'on y a mis l'unité à la place de γ (n° 473); et il n'y a pas lieu à rechercher, comme dans le n° 460, un plus grand commun diviseur, puisqu'il n'y a qu'une équation.

478. Du reste, on pourra faire sur les équations qui viennent de nous occuper, des observations analogues à celles que nous avons

faites sur les équations de l'exemple précédent, dans les n^{os} 462 à 467 inclusivement.

479. Soient, en général, deux équations de degrés quelconques, à deux inconnues x et y , données par un même problème, et dont on veuille éliminer une des inconnues, comme x :

1^o On ordonnera ces équations pour x , et l'on aura (n^o 375)

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0 \dots (A),$$

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} \dots + Y'x + Z' = 0 \dots (B).$$

N. B. Comme il n'est pas dit que l'on ait $m = n$, et comme par conséquent les deux équations peuvent avoir plus ou moins de termes l'une que l'autre, on a représenté les coefficients des derniers termes par des lettres différentes, les mêmes lettres désignant ordinairement des termes de même rang.

2^o On représentera par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. les valeurs de l'inconnue x de l'une des équations, comme (A), et substituant chacune de ces valeurs dans l'autre équation (B), on multipliera entre eux tous les résultats de ces substitutions, ce qui donnera

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha^n + P'\alpha^{n-1} \dots + Z') (\beta^n + P'\beta^{n-1} \dots + Z') \\ (\gamma^n + P'\gamma^{n-1} \dots + Z') (\delta^n + P'\delta^{n-1} \dots + Z') \\ \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{array} \right\} = 0 \dots (E).$$

car n'y eût-il qu'une valeur de x commune aux équations (A) et (B), et n'y eût-il par conséquent qu'un des facteurs du premier membre de (E) égal à zéro, ce premier membre n'en serait pas moins lui-même égal à zéro.

3^o On effectuera la multiplication des facteurs du premier membre de (E), et l'on verra que toutes les fonctions des soluteurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. que contiendra le produit, seront symétriques; car chacun de ces soluteurs entre de la même manière dans le facteur qui le contient, et les facteurs d'un produit quelconque jouent toujours dans ce produit-là le même rôle les uns que les autres.

4^o On substituera, dans l'équation (E), aux fonctions symétriques des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. les valeurs de ces fonctions, exprimées au moyen des coefficients $P, Q, R, \dots T, U$, de l'équation (A) dont ces lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. sont les soluteurs, et l'on aura une équation qui ne contiendra plus qu'une certaine combinaison des coefficients

$P, Q, R, \dots T, U$, et $P', Q', R', \dots Y', Z'$, des équations (A) et (B), c'est-à-dire qu'on aura l'équation finale en y (n° 375).

Si cette équation est fautive, les équations proposées seront contradictoires (n° 454).

Si elle est identique, les équations proposées seront conséquence l'une de l'autre, et le problème qui les a fournies appartiendra en totalité ou en partie (n° 442, 470) à la classe de ceux qui n'ont pas le même nombre d'équations que d'inconnues. Du reste, on opérera dans cas comme au n° 471.

Enfin, si l'équation finale n'est ni fautive ni identique, et que l'on n'ait pas encore étudié la résolution des équations à une inconnue, on pourra rarement aller plus loin que l'équation finale. Mais si l'on avait fait cette étude, et que l'on eût eu pour but, non-seulement de trouver l'équation finale en y , mais encore de rechercher les valeurs des deux inconnues x et y , voici comment on procéderait :

On résoudrait, si possible, l'équation finale en y , et ayant trouvé ses solveurs, on opérerait successivement avec tous, comme nous allons le faire avec un.

Prenant donc une des valeurs de y , on la mettrait à la place de cette inconnue dans les deux équations (A) et (B).

Si, par cette substitution, les équations (A) et (B) devenaient *identiques entre elles* (n° 466, note), ce qui ne pourrait du reste avoir lieu que dans le cas où l'on aurait $m = n$, on résoudrait l'une ou l'autre de ces équations pour avoir les m valeurs de x correspondantes à celle de y que l'on aurait employée.

Mais si, par la substitution dont il s'agit, les équations (A) et (B) ne donnaient pas des résultats identiques entre eux, on chercherait le plus grand commun diviseur des premiers membres de ces résultats, et ce diviseur, étant égalé à zéro, formerait l'équation en x à résoudre pour trouver toutes les valeurs de cette inconnue correspondantes à celle de y que l'on aurait employée.

480. Si l'on avait trois équations, (A), (B), (C), liées entre elles (n° 447), et renfermant trois inconnues x, y, z , on pourrait éliminer x , d'abord entre (A) et (B), puis entre (A) et (C), et l'on obtiendrait ainsi deux équations, qui ne contiendraient plus que les inconnues y et z : on retomberait donc dans le cas des problèmes à deux inconnues et deux équations.

Si l'on avait quatre équations, (A), (B), (C), (D), liées entre elles, et renfermant quatre inconnues, u, x, y, z , on pourrait éliminer u , d'abord entre (A) et (B), puis entre (A) et C, puis encore entre (A) et (D), et l'on obtiendrait ainsi trois équations, qui ne contiendraient plus que les inconnues x, y et z ; on retomberait donc dans le cas des problèmes à trois inconnues et trois équations; et ainsi de suite (*).

Soient proposées comme exercices, 1^o les deux équations $x^3 - yx^2 - 2x^2 + 5yx - 6y - 3 = 0$, et $x^2 - yx - 2x + 2y = 0$, 2^o les deux équations $x^2 - 3yx + y^2 + 5 = 0$, et $2x^2 - y^2 + 1 = 0$: on trouvera pour le premier cas l'équation finale $y^2 - 2y + 1 = 0$, et pour le second cas $y^4 - 8y^2 - 9 = 0$.

1.C es principes sur l'élimination étant suffisants pour nos besoins actuels, nous devons passer tout de suite aux problèmes à une inconnue et une équation (n^o 448).

On ne sait pas, avons-nous dit (n^o 414), exprimer d'une manière exacte les soluteurs de l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

du moins tant que cette équation reste aussi générale, c'est-à-dire tant qu'on n'assigne aucune valeur absolue ou relative aux lettres $P, Q, \dots, T, U$, qui désignent ses différents coefficients, et à la lettre m , qui représente le plus haut exposant de son inconnue. Examinons donc des équations moins générales que celle-là, et commençons par un cas qui paraît devoir être fort simple : c'est celui des équations à deux termes (n^o 380).

(*) Lorsqu'on sera plus avancé, on pourra consulter à cette occasion la *Théorie générale des Équations algébriques*, par Bezout, en 1 vol. in-4^o.

Du reste, on trouvera dans l'*Appendice à la seconde partie de notre Algèbre* des méthodes particulières, et plus simples que la méthode générale, pour l'élimination dans les équations du premier degré et des degrés supérieurs.

§ II.

Des problèmes à une inconnue et une équation (n° 448).

CHAPITRE PREMIER.

Des équations à deux termes.

482. Supposons que les coefficients $P, Q, \dots, T$, de l'équation générale

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

soient égaux chacun à zéro : cette équation se réduira à l'équation à deux termes

$$x^m + U = 0,$$

dans laquelle U est direct ou inverse (n° 373, note 2, et 382, note), et de là on tirera d'abord (n° 360)

$$x^m = -U, \text{ puis (n° 371), } x = \sqrt[m]{-U}.$$

483. Lorsque $m = 1$, l'équation $x^m + U = 0$ devient $x + U = 0$, qui est la formule générale des équations du premier degré : car, après avoir transporté tous les termes dans le premier membre (n° 361), réuni en un seul terme tous ceux qui renferment x , puis tous ceux qui ne renferment point d' x (n° 373 avec la note 1^{re}), et débarassé l'inconnue des quantités qui la multiplient et qui la divisent (n° 364, 366), on aura toujours une équation de la forme $x + U = 0$ (Voyez la note 2 du n° 373).

Quand on en est là, on transporte le terme tout connu dans le second membre, et l'on a

$$x = -U,$$

ce qui donne pour x une valeur directe ou inverse, suivant que U se trouvait inverse ou direct dans le premier membre.

N. B. Les commençants feront bien de s'exercer, avant d'aller plus loin, à résoudre des problèmes du premier degré, dont ils trouveront des exemples dans l'Appendice; ils pourraient d'abord chercher la solution de ceux que nous avons donnés dans les n° 346 et 347 A.

484. Lorsque m égale 2, ou 3, ou 4, etc. l'équation à deux termes est du second, ou du troisième, ou du quatrième degré, etc. et se résout par une extraction de racine seconde, ou troisième, ou quatrième, etc.

Si m est impair, l'extraction de la racine ne donne qu'une valeur pour x , directe si $-U$ est direct, et inverse si $-U$ est inverse (n^{os} 215, 216).

Si m est un nombre pair, l'extraction de la racine donne pour x deux valeurs qui ne diffèrent que par le signe. Ces deux valeurs sont réelles si $-U$ est direct, elles sont imaginaires si $-U$ est inverse (n^{os} 215, 216, 262) (*).

On trouvera des problèmes de ce genre dans l'Appendice; et l'on pourra d'abord chercher la solution de ceux que nous avons donnés aux n^{os} 348, 351, 354.

485. Il paraîtrait donc que les équations à deux termes ne peuvent avoir qu'un soluteur ou deux, quel que soit leur degré; et cependant nous avons démontré (n^{os} 386 à 397) qu'une équation quelconque

(*) Si l'on avait donc $x^{2n} = a^{2n}$, on en tirerait $x = \pm a$. Ceci mérite quelque attention.

Pourquoi, dirait-on, si vous mettez le double signe devant la racine du second membre, ne le mettez-vous pas devant celle du premier? D'Alembert, Bezout et Lacroix disent qu'on le peut, mais que cela ne mène à rien de nouveau. Voici le raisonnement de Bezout, qui revient à celui des deux autres mathématiciens cités: *Si l'on écrit $\pm x = \pm a$, on en tire ces quatre équations $+x = +a$, $+x = -a$, $-x = +a$, $-x = -a$. La dernière, en changeant les signes, revient à la première. Il en est de même de la troisième relativement à la seconde. Mais quand on fait l'objection dont il s'agit, on n'admet pas que le $+$ puisse correspondre au $-$, et le $-$ au $+$; on demande que le double signe soit mis devant les deux membres, précisément pour que l'on ait ou $+x = +a$, ou $-x = -a$, et pas autre chose; ainsi, ce raisonnement ne résout point la difficulté.*

La véritable raison de cette règle se trouve contenue dans les observations de la note du n^o 382; x n'est que le caractère destiné à désigner l'inconnue, et dire, par exemple, que $x^2 = 9$, c'est dire que le carré d'un certain nombre est 9, d'où il résulte que ce nombre, le nombre cherché, est ou $+3$, ou -3 , parce que le carré de -3 est 9, tout comme le carré de $+3$; on a donc ce résultat: le nombre cherché est ou $+3$, ou -3 , ce que l'on écrit ainsi, $x = \pm 3$; si l'on écrivait le double signe aux deux membres, en faisant correspondre le $+$ avec le $+$, et le $-$ avec le $-$, on n'aurait qu'une des solutions du problème.

Il y a une autre manière d'envisager la chose: $x^2 = 9$ revient à $x^2 - 3^2 = 0$, et ceci revient à $(x+3)(x-3) = 0$ (n^{os} 118 et 127). Or, cette équation peut être satisfaite en supposant $x-3 = 0$, qui donne $x = +3$, ou en supposant $x+3 = 0$, qui donne $x = -3$.

avait autant de soluteurs, soit réels, soit imaginaires, qu'il y avait d'unités dans l'exposant de son degré. Comment accorder cela?

Représentons $\sqrt[m]{U}$ par a , cette lettre étant suivant le cas un nombre réel ou imaginaire, rationnel ou irrationnel, entier ou fractionnaire, direct ou inverse; nous aurons $U = a^m$, et $U = -a^m$; l'équation générale à deux termes sera ainsi représentée par

$$x^m - a^m = 0.$$

De cette équation on tirera

$$x^m = a^m, \text{ et } x = a.$$

Mais comme $x^m - a^m$ est divisible par $x - a$ (n° 127, 387), on fera cette division, et l'on aura

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \text{etc.} + a^{m-1},$$

ce qui donne

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \text{etc.} + a^{m-1}).$$

Or, puisque $x^m - a^m = 0$, on a aussi

$$(x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \text{etc.} + a^{m-1}) = 0,$$

équation qui est la même que la proposée, et qui est satisfaite, soit que l'on fasse $x - a = 0$, soit que l'on fasse $x^{m-1} + ax^{m-2} + \text{etc.} + a^{m-1} = 0$.

Cela posé, l'équation $x - a = 0$ donne un des soluteurs de la proposée, et l'équation $x^{m-1} + ax^{m-2} + \text{etc.} + a^{m-1} = 0$ doit donner les $m - 1$ autres.

486. Si dans les deux formes que nous venons de trouver pour l'équation à deux termes d'un degré quelconque, on met ay à la place de x , ou si l'on fait $x = ay$, on aura, 1°

$$a^m y^m - a^m = 0, \text{ ou } y^m - 1 = 0,$$

on aura, 2°

$$(ay - a)(a^{m-1}y^{m-1} + a^{m-1}y^{m-2} + \text{etc.} + a^{m-1}) = 0,$$

équation qui peut se réduire avec facilité: car si on la divise d'abord par a , ce qui se fera en divisant seulement son premier facteur par a , et si on la divise ensuite par a^{m-1} , ce qui se fera en divisant seulement son second facteur par a^{m-1} , elle deviendra

$$(y - 1)(y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + 1) = 0,$$

et sera satisfaite, soit que l'on ait $y - 1 = 0$, soit que l'on ait $y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + 1 = 0$.

L'équation $y - 1 = 0$ donne $y = 1$, et l'équation $y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + 1 = 0$ doit donner $m - 1$ autres valeurs pour y .

487. La proposée $y^m - 1 = 0$ fournit donc m valeurs pour y ; et comme elle donne d'ailleurs $y = \sqrt[m]{1}$, il en résulte que l'unité, considérée comme puissance du degré m , a m racines, ou qu'il y a m nombres ou expressions numériques, qui, élevés séparément à la puissance m , donnent 1 pour cette puissance.

Celle de ces valeurs de y que nous connaissons est l'unité même, qui, multipliée par a , donne $1a$ ou a , première valeur de x , puisqu'on a $x = ay$; or, cette valeur de x nous était aussi connue.

Pour avoir les autres valeurs de x , il faudrait multiplier a , ou la valeur de x , déjà trouvée, par les valeurs d' y différentes de l'unité, que fournit l'équation $y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + 1 = 0$, et l'on aurait ainsi les m valeurs de x que comporte l'équation $x^m - a^m = 0$.

488. Cette équation donnant d'ailleurs $x = \sqrt[m]{a^m}$, il en résulte qu'un nombre quelconque, considéré comme puissance du degré m , a toujours m racines différentes, ou qu'il y a m nombres ou expressions numériques, qui, élevés séparément à la puissance m , donnent a^m pour résultat.

Si, par exemple, $m = 2$, substituant cette valeur dans les équations précédentes, on aura, 1°

$$x^2 - a^2 = 0, \text{ ou } x^2 = a^2, \text{ ou } x = \sqrt{a^2},$$

on aura, 2°

$$y^2 - 1 = 0, \text{ ou } y^2 = 1, \text{ ou } y = \sqrt{1},$$

on aura, 3°

$$(y - 1)(y + 1) = 0.$$

En posant alors le facteur $y - 1 = 0$, on aura $y = +1$, et en posant l'autre facteur $y + 1 = 0$, on aura $y = -1$, c'est-à-dire que l'unité carrée a deux racines, $+1$ et -1 , qui, élevées chacune à part à la seconde puissance, redonnent $+1$, ce qui est d'accord avec les principes posés ci-devant.

Multipliant chacune de ces racines par a pour avoir x , parce que $x = ay$, on aura $x = +a$, ou $x = -a$, c'est-à-dire que la quantité a^2 a deux racines carrées, $+a$ et $-a$, qui, élevées chacune à part à la seconde puissance, donnent également $+a^2$, ce qui est aussi d'accord avec les principes.

Si $m = 3$, substituant cette valeur dans les équations précédentes, on aura, 1°

$$x^3 - a^3 = 0, \text{ ou } x^3 = a^3, \text{ ou } x = \sqrt[3]{a^3};$$

on aura, 2°

$$y^3 - 1 = 0, \text{ ou } y^3 = 1 \text{ ou } y = \sqrt[3]{1};$$

on aura, 3°

$$(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0.$$

En posant alors le facteur $y - 1 = 0$, on aura $y = 1$; et en posant l'autre facteur $y^2 + y + 1 = 0$, on aura une équation du second degré, qui donnera, lorsqu'on saura la résoudre, les deux autres soluteurs de l'équation $y^3 - 1 = 0$, ou $y^3 = 1$. Nous indiquerons d'avance ici que ces soluteurs sont

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ et } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

C'est-à-dire donc que l'unité cube a trois racines, 1, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, qui, élevées chacune à part à la troisième puissance, redonnent 1, comme on peut le vérifier.

Multipliant chacune de ces racines par a , pour avoir x , parce que $x = ay$, on aura $x = a \times 1$, ou $x = a(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})$, ou $x = a(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})$. C'est-à-dire que la quantité a^3 a trois racines cubiques, qui, élevées chacune à part à la troisième puissance, donnent également a^3 .

Si $m = 4$, on aura, 1°

$$x^4 - a^4 = 0, \text{ ou } x^4 = a^4, \text{ ou } x = \sqrt[4]{a^4};$$

on aura, 2°

$$y^4 - 1 = 0, \text{ ou } y^4 = 1, \text{ ou } y = \sqrt[4]{1};$$

on aura, 3°

$$(y - 1)(y^3 + y^2 + y + 1) = 0.$$

En posant le facteur $y - 1 = 0$, on aura $y = 1$; et en posant l'autre facteur $y^3 + y^2 + y + 1 = 0$, on aura une équation du troisième degré, qui donnera, lorsqu'on saura la résoudre, les trois autres soluteurs de l'équation $y^4 - 1 = 0$, ou $y^4 = 1$. Nous indiquerons d'avance ici que ces soluteurs sont

$$-1, +\sqrt{-1}, \text{ et } -\sqrt{-1}.$$

C'est-à-dire donc que l'unité, considérée comme quatrième puissance, a quatre racines, $+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$, qui, élevées chacune à part à la quatrième puissance, redonnent 1, comme on peut le vérifier.

Multipliant chacune de ces racines par a pour avoir x , parce que $x = ay$, on aura $x = a(+1)$, ou $x = a(-1)$, ou $x = a(+\sqrt{-1})$, ou $x = a(-\sqrt{-1})$. C'est-à-dire que la quantité a^4 a quatre racines quatrièmes, qui, élevées chacune à part à la quatrième puissance, donnent également a^4 ; et ainsi de suite.

489. Mais, pour être certains que ce qui précède soit bien compris, et que l'on voie comment cela se lie avec les vérités déjà démontrées, nous allons revenir sur cet objet, et le présenter sous un jour un peu différent.

Toutes les puissances de 1 sont 1, et par conséquent toutes les racines de 1 sont 1.

Cela posé, que l'on propose ce problème, *Trouver un nombre qui, élevé à la puissance m , donne pour résultat 1* : on sera sûr d'avance que ce nombre doit être 1.

Cependant, si on le représente par y , l'équation $y^m = 1$, qui en résultera, ne différera pas de celle-ci, $y^m - 1 = 0$, ni de celle-ci,

$$(y - 1)(y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + 1) = 0.$$

Or, cette équation donne ou $y - 1 = 0$, d'où l'on tire en effet $y = 1$, ou $y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + 1 = 0$, d'où l'on doit tirer encore $m - 1$, valeurs alternatives de y .

Ainsi l'unité, considérée comme puissance du degré m , a m racines.

490. Si nous représentons pour un moment ces m racines, même sans les connaître, par $1, \rho, \sigma, \tau, \nu, \text{etc.}$ nous aurons $1^m = 1, \rho^m = 1, \sigma^m = 1, \tau^m = 1, \nu^m = 1, \text{etc.}$

D'un autre côté, si nous prenons un autre nombre quelconque, a , en le multipliant successivement par $1, \rho, \sigma, \tau, \nu, \text{etc.}$ nous aurons les produits $a1, a\rho, a\sigma, a\tau, a\nu, \text{etc.}$; et si nous élevons ces produits à la puissance m , nous aurons $a^m 1^m, a^m \rho^m, a^m \sigma^m, a^m \tau^m, a^m \nu^m, \text{etc.}$ Mais toutes ces puissances sont égales, et valent chacune a^m : car $1^m = 1, \rho^m = 1, \sigma^m = 1, \text{etc.}$

Donc une quantité quelconque, a^m , considérée comme puissance du degré m de a , a m racines $a1, a\rho, a\sigma, a\tau, \text{etc.}$

491. On voit d'ailleurs que, pour trouver ces m racines, il suffit d'extraire par les procédés ordinaires la racine m de a^m , et de multiplier cette racine a par les m racines $1, \rho, \sigma, \tau, \nu, \text{etc.}$ de l'unité.

492. La racine a , que l'on tire immédiatement de la puissance a^m par les procédés ordinaires de l'extraction, je la nommerai *racine arithmétique*, et je désignerai les autres par le nom de *racines algébriques*, « parce qu'elles ne doivent leur existence qu'à la combinaison des signes de l'algèbre. » (*)

493. Puisqu'il suffit, pour avoir les m racines d'un nombre, de chercher sa racine arithmétique, et de la multiplier par les m racines de l'unité, c'est de ces racines-là que nous continuerons de nous occuper.

Elles sont données par l'équation

$$(y - 1)(y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + 1) = 0;$$

mais le premier facteur $y - 1 = 0$ ne fournit que la racine arithmétique $y = 1$; il faut donc examiner le second facteur en posant

$$y^{m-1} + y^{m-2} + \text{etc.} + y + 1 = 0.$$

Or, le nombre des termes du premier membre de cette nouvelle équation est égal à m .

Donc si m est pair, cette équation sera satisfaite en faisant $y = -1$, puisqu'elle deviendra

$$-1 + 1 - 1 + 1 \dots - 1 + 1 = 0,$$

ses termes étant en nombre pair et se détruisant de deux en deux, en sorte qu'il n'en restera point.

Mais si m est impair, cette équation ne sera pas satisfaite en faisant $y = -1$, puisqu'elle deviendra

$$+1 - 1 + 1 - 1 \dots + 1 - 1 + 1 = 1,$$

ses termes étant en nombre impair et se détruisant de deux en deux, en sorte qu'il restera le dernier.

Ainsi donc, si m est pair, on a, sans résoudre l'équation, d'abord la racine arithmétique 1, puis une des racines algébriques -1 , qui est la même que l'arithmétique avec le signe $-$. Mais si m est impair, on n'a immédiatement que la racine arithmétique. Voilà ce que nous savions depuis long-temps.

(*) Je me suis rapproché de Lacroix, qui appelle la première *détermination arithmétique*, et les autres *déterminations algébriques*.

Dans l'un et l'autre cas, il faut, pour trouver les autres racines, résoudre complètement l'équation. Nous avons vu ce qu'elles étaient pour le second, le troisième et le quatrième degré. (n° 488).

494. Les soluteurs de l'équation $y^m - 1 = 0$, ou, ce qui revient au même, les m racines $1, \rho, \sigma, \tau, \nu$, etc. de l'unité, ont encore quelques propriétés intéressantes que nous allons examiner.

Prenons pour exemple l'équation $y^4 - 1 = 0$, dont nous représenterons les quatre soluteurs par $1, \rho, \sigma, \tau$, et comparons-la à l'équation générale du quatrième degré,

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0:$$

nous aurons $P=0, Q=0, R=0, S=-1$; et les formules du n° 433 nous donneront

$$\begin{aligned} S_1 &= 0, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 4, \\ S_5 &= 0, S_6 = 0, S_7 = 0, S_8 = 4, \\ &\text{etc. (*)}. \end{aligned}$$

495. Si nous supposons ensuite $y = \frac{1}{z}$, en substituant cette valeur dans l'équation $y^4 - 1 = 0$, elle deviendra $\frac{1}{z^4} - 1 = 0$; multipliant celle-ci par z^4 , nous en tirerons $1 - z^4 = 0$; puis changeant les signes, nous trouverons $-1 + z^4 = 0$, ou

$$z^4 - 1 = 0.$$

Or, comme $y = \frac{1}{z}$, il est clair que $yz = 1$, et que $z = \frac{1}{y}$; ainsi nous aurons les quatre valeurs de z en divisant l'unité par chacune des quatre valeurs de y , c'est-à-dire que les quatre soluteurs de l'équation $z^4 - 1 = 0$, seront

(*) On pourra facilement vérifier cela, puisqu'on sait que les quatre soluteurs de l'équation $y^4 - 1 = 0$, ou que les quatre racines quatrième de l'unité sont $+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ (n° 488); il sera aisé de voir que la somme des premières puissances de ces racines est zéro, de même que celle de leurs carrés et celle de leurs cubes, tandis que la somme de leurs quatrième puissances est 4, etc. etc. D'ailleurs, comme ces soluteurs sont les racines quatrième de l'unité, chacun d'eux élevé à la quatrième puissance donne 1, en sorte que la somme de ces quatrième puissances doit nécessairement être $1 + 1 + 1 + 1 = 4$; il en doit être de même de la somme des huitième puissances, des douzième, etc. car la huitième puissance est le carré de la quatrième, la douzième est son cube, etc. et le carré de 1 est 1, tout comme le cube de 1, etc.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{\rho}, \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\tau}.$$

Mais l'équation $z^4 - 1 = 0$ étant parfaitement la même que l'équation $y^4 - 1 = 0$, il en résulte que les quatre solveurs de l'une doivent être égaux aux quatre solveurs de l'autre. Et en effet, on a d'abord,

$$\frac{1}{1} = 1, \text{ et } \frac{1}{-1} = -1;$$

on a ensuite

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{-(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1},$$

et enfin

$$\frac{1}{-\sqrt{-1}} = \frac{-(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})}{-\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}. (*)$$

En sorte que

$$1 + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\tau} = 1 + \rho + \sigma + \tau = 0,$$

$$1 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} = 1 + \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$1 + \frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\sigma^4} + \frac{1}{\tau^4} = 1 + \rho^4 + \sigma^4 + \tau^4 = 4 \text{ etc.}$$

496. Généralement, si l'on compare l'équation $y^m - 1 = 0$ à l'équation

$$y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + \dots + Ty + U = 0,$$

on aura $P=0, Q=0, \dots T=0, U=-1$; et les formules du n° 433 donneront

$$S_1=0, S_2=0, \dots S_m=m,$$

$$S_{m+1}=0, S_{m+2}=0, \dots S_{2m}=m,$$

etc. (**)

(*) Si l'on a donc $\rho = -1, \sigma = +\sqrt{-1}, \tau = -\sqrt{-1}$, on trouve $\frac{1}{\rho} = \rho, \frac{1}{\sigma} = \tau, \frac{1}{\tau} = \sigma$. C'est ainsi qu'il faut entendre que les solveurs de l'une des équations sont égaux à ceux de l'autre. On étendra cette observation à ce qui va suivre.

(**) Pour avoir S_{2m}, S_{5m} , etc. on pourra faire n égal à m , à $2m$, etc. dans la formule qui donne S_{m+n} (n° 432). Voyez du reste la note du n° 494.

497. Faisant ensuite $y = \frac{1}{z}$, ou $z = \frac{1}{y}$, et représentant par $1, \rho, \sigma, \tau, \nu$, etc. les soluteurs de l'équation $y^m - 1 = 0$, ceux de l'équation $z^m - 1 = 0$, seront $1, \frac{1}{\rho}, \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\nu}$, etc. et ces derniers seront égaux aux premiers, mais non dans l'ordre dans lequel nous venons de les écrire. (Voyez la note du n° 495.)

On aura donc

$$1 + \frac{1}{\rho^n} + \frac{1}{\sigma^n} + \text{etc.} = 1 + \rho^n + \sigma^n + \text{etc.}$$

c'est-à-dire que la somme des puissances n^{mes} des soluteurs de l'équation $z^m - 1 = 0$, équivaudra à m , si l'on a n égal à m , ou à $2m$, ou à $3m$, etc. et que cette somme équivaudra à zéro, si l'on n'a pas n égal à m , ou à $2m$, ou à $3m$, etc.

498. Faisons encore ici une observation intéressante :

Si ρ représente un des soluteurs de l'équation $y^m - 1 = 0$, il est clair qu'on aura

$$\rho^m - 1 = 0, \text{ ou } \rho^m = 1;$$

or, si l'on élève cette équation aux différentes puissances entières et directes, on obtiendra

$$\rho^{2m} = 1, \rho^{3m} = 1, \rho^{4m} = 1, \text{ etc.}$$

ce qui revient à ceci

$$(\rho^2)^m - 1 = 0, (\rho^3)^m - 1 = 0,$$

$$(\rho^4)^m - 1 = 0, (\rho^5)^m - 1 = 0,$$

etc.

Et l'on voit évidemment par là que, si ρ est un solveur de l'équation $y^m - 1 = 0$, $\rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5$, etc. seront aussi solveurs de cette équation.

Cependant le nombre de ces solveurs n'est pas illimité; car, $\rho^m = 1$, $\rho^{m+1} = \rho^m \cdot \rho = 1 \cdot \rho = \rho$, $\rho^{m+2} = \rho^m \cdot \rho^2 = 1 \cdot \rho^2 = \rho^2$, etc. etc. Ainsi, quand on a passé la puissance m de ρ , les mêmes résultats reviennent, et dans le même ordre.

Mais si $\rho = 1$, on aura $\rho^2 = 1, \rho^3 = 1$, etc. c'est-à-dire qu'on n'obtiendra ainsi que le seul solveur 1. Si $\rho = -1$, ce qui pourra avoir lieu dans le cas où m serait pair, on aura alors $\rho^2 = +1, \rho^3 = -1, \rho^4 = +1, \rho^5 = -1$, etc. c'est-à-dire qu'on n'obtiendra ainsi que les deux solveurs $+1$ et -1 .

Il importerait donc de savoir si, en prenant pour ρ , dans le cas de $m > 2$, un soluteur différent de l'unité directe ou inverse, la suite des puissances de ρ donnerait tous les autres soluteurs, ou si cette suite ne redonnerait pas plusieurs fois le même.

499. Supposons donc $m > 2$, et soit ρ un des soluteurs de l'équation $y^m - 1 = 0$ différents de l'unité. Soit encore n et p , deux nombres entiers inégaux, et plus petits que m . Il est clair, par ce qui précède, que ρ^n et que ρ^p seront aussi soluteurs de cette équation. Voyons si ces soluteurs peuvent être égaux.

Nous aurions, dans ce cas, $\frac{\rho^n}{\rho^p} = 1$, ou $\rho^{n-p} = 1$. Mais alors ρ serait soluteur de l'équation $y^{n-p} - 1 = 0$. En d'autres termes, les équations $y^m - 1 = 0$, et $y^{n-p} - 1 = 0$, auraient le soluteur commun ρ , et par conséquent le diviseur commun $y - \rho$.

Mais si l'on suppose que m soit un nombre premier, et qu'on cherche le plus grand commun diviseur de $y^m - 1$, et de $y^{n-p} - 1$, en se souvenant d'ailleurs que $n - p < m$, on trouvera pour ce plus grand commun diviseur $y - 1$. Or, on ne peut faire $y - 1 = y - \rho$, car il en résulterait $\rho = 1$, ce qui est contraire à la supposition.

Ainsi, quand m est un nombre premier, on ne peut avoir $\rho^n = \rho^p$, c'est-à-dire que ρ élevé à deux puissances différentes moindres que m , ne donne jamais alors le même soluteur. Donc, dans ce cas, les formules $\rho^1, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^m$, ayant des valeurs différentes, et en nombre m , constituent les m soluteurs de l'équation.

500. Supposons maintenant que m soit un nombre composé, comme np , n et p étant deux nombres premiers différents, et plus grands que l'unité, la proposée sera

$$y^{np} - 1 = 0.$$

Comparons-la avec les deux équations

$$y^n - 1 = 0, \quad y^p - 1 = 0;$$

et représentons par ρ un des soluteurs de la première, et par ρ' un de ceux de la seconde. On aura $\rho^n = 1$, et $\rho'^p = 1$, et par conséquent

$$\rho^{np} \text{ ou } (\rho^n)^p = 1^p = 1, \text{ et } \rho'^{np} \text{ ou } (\rho'^p)^n = 1^n = 1.$$

Ainsi les deux soluteurs ρ et ρ' des deux équations $y^n - 1 = 0$ et $y^p - 1 = 0$, sont aussi soluteurs de la proposée, même en les supposant l'un et l'autre différents de l'unité. On prouverait la même chose des soluteurs ρ^2 et ρ'^2 , ρ^3 et ρ'^3 , etc.

Mais en prenant séparément les soluteurs de ces deux équations pour ceux de la proposée, on n'en aurait en tout que $n+p$, et il en faudrait np . Or, $n+p$ n'est égal à np que quand n et p valent chacun 2; mais nous avons pris n et p différents entre eux.

Que faudra-t-il donc faire pour trouver en général ces np soluteurs? Essayons de multiplier chacun des soluteurs de $y^n - 1 = 0$ par chacun de ceux de $y^p - 1 = 0$, comme, par exemple, ρ par ρ' , ρ^2 par ρ'^2 , etc. et voyons si ces produits ne pourraient point satisfaire à l'équation $y^{np} - 1 = 0$:

$$(\rho\rho')^{np} = \rho^{np}\rho'^{np} = (\rho^n)^p (\rho'^p)^n = 1^p 1^n = 1.$$

De même,

$$(\rho^2\rho'^2)^{np} = \rho^{2np}\rho'^{2np} = (\rho^n)^{2p} (\rho'^p)^{2n} = 1^{2p} 1^{2n} = 1.$$

En continuant ainsi, on trouverait que tous les produits dont nous venons de parler satisfont à la proposée. Or, n nombres, multipliés un à un, et successivement par p nombres, donnent np produits. D'ailleurs, tous ces produits sont soluteurs; si donc ces np soluteurs, et les $n+p$ que nous avons déjà trouvés, étaient tous inégaux, ils seraient ensemble au nombre de $n+p+np$. Mais l'unité se trouvant parmi les soluteurs de $y^n - 1 = 0$, et se trouvant aussi parmi ceux de $y^p - 1 = 0$, en formant les produits des uns par les autres, il faut omettre la multiplication des n premiers nombres par 1, et celle des p seconds par 1, c'est-à-dire qu'il faut négliger ces $n+p$ prétendus produits, ce qui réduit le nombre des soluteurs de $n+p+np$ à np seulement.

Nous aurons donc de cette manière les np soluteurs demandés, si du moins il n'y en a point d'égaux entre eux. C'est ce qu'il faut examiner encore.

Il est évident d'abord qu'il ne faut pas prendre le cas où ρ et ρ' seraient tous deux égaux à l'unité, car on n'obtiendrait ainsi que l'unité pour les puissances de ρ et de ρ' , et pour les produits de ces nombres.

Cela posé, tous les soluteurs de $y^n - 1 = 0$, sauf l'unité, seront différents des soluteurs de $y^p - 1 = 0$, puisque n n'est pas égal à p . Il ne reste plus qu'à voir, 1° si un de ces soluteurs peut être égal à un des produits dont nous avons parlé, et 2° si deux des produits en question peuvent être égaux entre eux.

Prenons deux exposants, r et t , tous deux plus petits que n , et supposons $t > r$. Prenons encore deux exposants, s et v , plus petits que p , et supposons $v > s$. Cherchons ensuite si on peut avoir, par exemple, $p^r = p^t p'^s$ et $p^r p'^s = p^t p'^v$. De la première égalité on tirerait

$$\frac{p^r}{p^t} = p'^s, \text{ puis } \frac{1}{p^{t-r}} = p'^s;$$

or, le premier membre de cette dernière équation est soluteur de $y^n - 1 = 0$ (nos 494 à 497); le second est soluteur de $y^p - 1 = 0$, et les soluteurs de l'une sont tous différents des soluteurs de l'autre, sauf l'unité; mais nous avons supposé que p et p' n'étaient pas tous deux égaux à 1.

De la seconde égalité supposée, savoir $p^r p'^s = p^t p'^v$, on tirerait

$$\frac{p^r}{p^t} = \frac{p'^v}{p'^s}, \text{ puis } \frac{1}{p^{t-r}} = p'^{v-s},$$

et le premier membre de cette dernière équation serait soluteur de $y^n - 1 = 0$, tandis que le second serait soluteur de $y^p - 1$, sans être l'un et l'autre égaux à 1, ce qui exclut leur égalité.

On obtiendrait les mêmes résultats par d'autres suppositions analogues. Ainsi, $p^t = p^r p'^s$ donnerait $\frac{1}{p'^s} = \frac{p^r}{p^t}$, puis $\frac{1}{p'^s} = \frac{1}{p^{t-r}}$, ce qui est impossible.

De même $p^r p'^v = p^t p'^s$ donnerait $\frac{p^r}{p^t} = \frac{p'^s}{p'^v}$, puis $\frac{1}{p^{t-r}} = \frac{1}{p'^{v-s}}$, ce qui est encore impossible.

On prouverait de même l'inégalité de tous les np soluteurs en question; et il résulte de là que ces np nombres sont en effet les np soluteurs de la proposée $y^{np} - 1 = 0$.

De plus, ni p , ni p' , ne peuvent redonner par leurs puissances toutes les racines de l'unité du degré np , puisque p ne redonne que celles du degré n , et que p' ne redonne que celles du degré p . Mais chacune des racines du degré np , qui ne sera pas racine du degré n ou du degré p , comme pp' , redonnera par ses puissances toutes les autres racines du degré np .

On prouvera de même que si $m = npq$, ces lettres indiquant des nombres premiers différents, et qu'on désigne par p , p' , p'' , trois soluteurs imaginaires des équations $y^n - 1 = 0$, $y^p - 1 = 0$, $y^q - 1 = 0$.

$= 0$, le produit $\rho\rho'\rho''$, élevé aux puissances successives, donnera tous les solveurs de $y^{npq} - 1 = 0$, sans que cela ait lieu ni pour ρ , ni pour ρ' , ni pour ρ'' séparément; et ainsi de suite.

500 *bis*. Mais si dans la proposée $y^{np} - 1 = 0$, nous faisons $p=n$, ce que nous n'avons pas supposé d'abord, elle deviendrait $y^{nn} - 1 = 0$, et les deux équations $y^n - 1 = 0$, et $y^p - 1 = 0$, se réduiraient à une seule, $y^n - 1 = 0$, qui ne donnerait que les n solveurs $1, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1}$, qui sont les n racines n^{mes} de l'unité. Je dis que l'équation $y^n - 1 = 0$, ne donnerait, pour la proposée, que ces n solveurs-là : car, en les multipliant entre eux, comme nous avons fait dans le cas précédent, on retomberait toujours sur les mêmes résultats (n° 498). Comment donc obtenir les nn solveurs de la proposée actuelle $y^{nn} - 1 = 0$?

Reprenons les n racines n^{mes} de l'unité, désignées ci-dessus par

$$1, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1};$$

puis extrayons encore les n racines n^{mes} de chacun de ces solveurs de la proposée : n racines de n nombres feront nn racines.

Celles du premier nombre 1 formeront encore la suite déjà indiquée

$$1, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1}.$$

Celles de ρ seront représentées ainsi (nos 490, 491),

$$1. \sqrt[n]{\rho}, \rho \sqrt[n]{\rho}, \rho^2 \sqrt[n]{\rho} \dots \rho^{n-1} \sqrt[n]{\rho}.$$

Celles de ρ^2 seront

$$1. \sqrt[n]{\rho^2}, \rho \sqrt[n]{\rho^2}, \rho^2 \sqrt[n]{\rho^2} \dots \rho^{n-1} \sqrt[n]{\rho^2};$$

et ainsi de suite.

Prenons une de ces racines, et voyons si elle satisfait à la proposée : par exemple,

$$\left(\rho^2 \sqrt[n]{\rho}\right)^{nn} = \rho^{2nn} \sqrt[n]{\rho^{nn}} = \rho^{2nn} \rho^{\frac{nn}{n}} = (\rho^n)^{2n} (\rho^n) = 1^{2n} \times 1 = 1.$$

En général, si on prend $r < n$, et $t < n$, on aura

$$\left(\rho^t \sqrt[n]{\rho^r}\right)^{nn} = \rho^{tnn} \sqrt[n]{\rho^{rnn}} = (\rho^n)^{tn} (\rho^n)^r = 1^{tn} \times 1^r = 1.$$

En sorte que chacune des nn racines en question satisfait à la proposée, et que leur suite forme les nn solveurs cherchés : car il est évident qu'il ne faut prendre qu'une fois la suite des n racines de l'unité.

On pourrait croire que ce nombre de soluteurs peut être réduit de beaucoup, et que la suite générale $\sqrt[n]{\rho^r}, \rho \sqrt[n]{\rho^r}, \rho^2 \sqrt[n]{\rho^r}, \dots, \rho^{n-1} \sqrt[n]{\rho^r}$ est composée de termes égaux, en disant, par exemple,

$$\rho^t \sqrt[n]{\rho^r} = \sqrt[n]{\rho^r \rho^{nt}} = \sqrt[n]{\rho^r (\rho^n)^t} = \sqrt[n]{\rho^r 1^t} = \sqrt[n]{\rho^r}.$$

Mais il faut observer qu'on n'obtient ces résultats qu'en faisant passer sous le radical les $n-1$ racines de l'unité $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1}$, écrites au devant du radical comme coefficient, c'est-à-dire en les élevant à la n^{me} puissance, qui est toujours 1, malgré la diversité des racines.

Cela est si vrai que, en procédant de cette manière, on trouverait que ces racines mêmes sont égales, quoiqu'elles ne le soient pas. On pourrait dire, par exemple,

$$1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\rho^n} = \rho,$$

$$\rho = \rho \cdot 1 = \rho \sqrt[n]{1} = \rho \sqrt[n]{\rho^n} = \rho \rho = \rho^2,$$

$$\rho^2 = \rho^2 \cdot 1 = \rho^2 \sqrt[n]{1} = \rho^2 \sqrt[n]{\rho^n} = \rho^2 \rho = \rho^3.$$

etc. etc.

Nous voyons donc qu'aucun soluteur de $y^n - 1 = 0$ élevé aux puissances, ne saurait donner tous les soluteurs de $y^{nn} - 1 = 0$, mais que cela a lieu pour toute autre racine imaginaire de l'unité du degré nn ,

comme $\rho \sqrt[n]{\rho}$.

On pourrait étendre ces résultats aux équations $y^{nnn} - 1 = 0$, $y^{nnnn} - 1 = 0$, etc.

(Voyez sur toute cette théorie le Traité de la Résolution des équations numériques, par Lagrange.)

501. Appliquons ces principes à deux cas particuliers, qui nous seront utiles.

Soit d'abord la proposée $y^6 - 1 = 0$: nous la comparerons avec les deux équations

$$y^3 - 1 = 0, \quad y^2 - 1 = 0.$$

Les soluteurs de la première sont (n° 488)

$$+1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1},$$

et ceux de la seconde sont

$$+1 \text{ et } -1.$$

Multiplions les premiers par les seconds : en omettant les multiplications par $+1$, nous aurons

$$-1, +\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}, +\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1},$$

et les six soluteurs de la proposée $y^6-1=0$, seront ceux-ci,

$$+1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}, -1, +\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}, \\ +\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}.$$

Nous pourrions donc les représenter par $1, \rho, \rho^2, -1, -\rho, -\rho^2$, ou par $\pm 1, \pm \rho, \pm \rho^2$.

Soit enfin la proposée $y^4-1=0$, ou $y^{2 \cdot 2}-1=0$: nous prendrons l'équation $y^2-1=0$, dont les soluteurs sont, comme nous venons de le voir, $+1$ et -1 ; c'est-à-dire que les deux racines deuxièmes de l'unité sont $+1$ et -1 . Nous extrairons encore les deux racines deuxièmes de chacune de ces racines, et nous aurons pour la première

$$+1 \text{ et } -1,$$

et pour la seconde,

$$+\sqrt{-1} \text{ et } -\sqrt{-1}.$$

Ce sont les quatre soluteurs de la proposée, ou les quatre racines quatrièmes de l'unité, comme nous l'avons déjà dit au n° 488.

501 *bis*. Après avoir examiné les équations à deux termes, il paraît naturel d'essayer de ramener à cette classe celles qui ne lui appartiennent pas. Voici la question qui s'offre à nous dans ce moment : Une équation quelconque étant donnée, ne pourrait-on pas en tirer une équation à deux termes, dont les soluteurs eussent avec ceux de la proposée un rapport facile à déterminer ? C'est ce qu'il s'agit de rechercher actuellement.

CHAPITRE II.

De l'évanouissement des termes au moyen d'une seule indéterminée.

De la résolution des équations du second degré, et en général de l'équation $x^{2m} + Bx^m + A = 0$.

De l'extraction des racines dans les quantités composées d'une partie commensurable et d'un radical du second degré.

502. ÉTANT donnée l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

si l'on pouvait en tirer une équation à deux termes, cette équation étant différente de la proposée, son inconnue serait nécessairement différente de x ; elle serait donc plus grande ou plus petite que x ; on aurait donc $x = y + a$, y représentant la nouvelle inconnue, et a la quantité directe ou inverse qu'il faudrait lui ajouter pour avoir x .

Mais si l'on met $y + a$ à la place de x dans la proposée, on a

$$\begin{array}{c}
 y^m + ma + P \\
 \hline
 y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 + (m-1) Pa + Q \\
 \hline
 y^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1)}{2} Pa^{m-2} + (m-2) Qa^{m-3} + \dots + T \\
 \hline
 y + a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U \\
 \hline
 \left. \begin{array}{c} y + a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U \end{array} \right\} = 0
 \end{array}$$

503. Maintenant il est clair que si le coefficient du second terme, c'est-à-dire $ma + P$, est égal à zéro, l'équation en y , quoique du même degré que celle en x , sera sans second terme.

De même, si le coefficient du troisième terme, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{2} a^2 + (m-1) Pa + Q$, est égal à 0, l'équation en y sera sans troisième terme; et ainsi de suite.

504. Pour que l'équation en y se réduise à son premier et à son dernier terme, il faudrait donc que l'on eût en même temps

$$ma + P = 0,$$

$$\frac{m(m-1)}{2} a^2 + (m-1) Pa + Q = 0,$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Pa^2 + (m-2) Qa + R = 0$$

$$\dots \dots \dots ma^{m-1} + (m-1) Pa^{m-2} + (m-2) Qa^{m-3} \dots \dots + T = 0.$$

Or, comme les lettres $m, P, Q \dots T$, sont données par l'équation, elles expriment des connues: en sorte que la lettre a peut seule être considérée comme une inconnue commune à toutes ces équations: car nous devons chercher quelle valeur doit avoir a pour rendre nuls en même temps, si possible, les premiers membres de ces équations, ou les coefficients des termes que nous voulons faire disparaître.

Mais s'il y a une valeur d' a qui puisse satisfaire à toutes ces équations, lesquelles ne renferment d'ailleurs que la seule inconnue a , il suffira de la première équation, qui est du premier degré, pour donner cette valeur d' a .

La première équation donne $a = -\frac{P}{m}$, et cette valeur étant substituée dans la seconde équation, le premier membre de celle-ci devient

$$\frac{m(m-1)}{2m^2} P^2 - \frac{(m-1)}{m} P^2 + Q,$$

ce qui se réduit à

$$\left(\frac{1-m}{2m}\right) P^2 + Q,$$

quantité qui ne peut égaler zéro qu'autant que l'on aurait

$$Q = -\left(\frac{1-m}{2m}\right) P^2 = \frac{m-1}{2m} P^2;$$

en sorte que la valeur de a , que donne la première équation, ne satisfait pas à la seconde généralement, c'est-à-dire pour toute valeur quelconque de P , de Q et de m , mais seulement lorsque ces lettres ont entre elles la relation que nous venons de trouver.

On ne peut donc pas assigner à a de valeur qui satisfasse dans tous les cas aux équations dont il s'agit. Généralement parlant, ces équations ne peuvent donc coexister, ou, en d'autres termes, elles sont contradictoires.

505. Mais il est clair que si nous avons dans ces équations autant d'indéterminées ou d'inconnues qu'il y a d'équations, ou que nous voudrions faire évanouir de termes, et que ces équations fussent d'ailleurs liées entre elles (n° 447), nous pourrions alors trouver les valeurs que devraient avoir ces indéterminées pour que toutes les équations fussent satisfaites en même temps.

Ainsi, pour faire évanouir un seul terme, il ne faut qu'une équation avec une indéterminée; pour en faire évanouir deux, il faut deux équations et deux indéterminées; pour en faire évanouir trois, il faut trois équations et trois indéterminées; et en général pour faire évanouir tous les termes d'une équation du degré m , à l'exception du premier et du dernier, il faut $m - 1$ équations, et $m - 1$ indéterminées.

506. Cependant il faut prendre garde à la manière d'introduire ces indéterminées dans l'équation proposée: car si l'on voulait poser $x = y + a + b + \text{etc.}$ ces lettres $a, b, \text{etc.}$ se comporteraient dans la substitution comme si elles n'en formaient qu'une, et l'on ne pourrait point les déterminer séparément. C'est ce qu'il serait facile de vérifier en mettant $y + a + b$, par exemple, à la place de x dans une équation complète du troisième degré.

507. On a trouvé que, pour faire évanouir deux des termes intermédiaires dans une équation qui est au moins du troisième degré en x , il faut poser $x^2 = y + a + bx$; que, pour en faire évanouir trois dans une équation qui est au moins du quatrième degré, il faut poser $x^3 = y + a + bx + cx^2$, et ainsi de suite. Mais nous reviendrons là-dessus dans le chapitre suivant. Examinons ici ce qu'il y a à dire pour le cas d'une seule indéterminée.

508. Généralement parlant, une indéterminée ne fait évanouir qu'un terme; cependant, dans de certaines circonstances, elle peut en faire évanouir plusieurs. Si l'on a, par exemple, $Q = \frac{m-1}{2m} P^2$ (n° 504), et qu'on fasse $a = -\frac{P}{m}$, le second et le troisième terme de la proposée disparaîtront.

Appliquons cela à l'équation du troisième degré. On a alors $m=3$; et si l'on fait par conséquent $Q = \frac{1}{3} P^2$, ou que l'on suppose

$$x^3 + Px^2 + \frac{1}{3} P^2 x + R = 0,$$

cette équation se réduira à deux termes en y mettant $y = \frac{1}{3}P$ à la place de x , comme il est facile de le vérifier.

509. Considérons en général les $m - 1$ équations du n° 504. Il est facile de voir qu'il y a dans chacune de ces équations une lettre de plus que dans l'équation précédente, et que la première équation $ma + P = 0$, donnant $ma = -P$ et $a = -\frac{P}{m}$, si l'on met cette valeur de a dans la seconde équation, celle-ci donnera la valeur de Q exprimée en m et P ; que si l'on met ensuite cette valeur de Q avec celle de a dans la troisième équation, celle-ci donnera la valeur de R exprimée en m et P et ainsi de suite.

On aura donc (n° 335 D)

$$a = F(m, P)$$

$$Q = F'(m, P)$$

$$R = F''(m, P)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$T = F^{\omega}(m, P)$$

Prenant donc m et P à volonté, ces équations nous feront voir quelles relations les quantités $a, Q, R, \dots T$, devront avoir avec celles-là pour que l'évanouissement de tous les termes intermédiaires ait lieu.

Mais tout comme après avoir choisi parmi les lettres $a, m, P, Q, \dots T$, les deux quantités m et P , nous avons exprimé toutes les autres en fonctions de celles-là, si nous eussions choisi à la place de m et P deux autres lettres, comme Q et R , nous aurions aussi pu exprimer toutes les autres en fonctions de celles-là.

Il en résulte que parmi les lettres $a, m, P, Q, \dots T$, deux pourront avoir une valeur quelconque, mais que les autres devront avoir avec ces deux certaines relations déterminées pour que l'évanouissement des termes se fasse.

Cet évanouissement n'aura donc pas lieu généralement, mais seulement dans certaines circonstances.

Cependant, et nous le répétons, quelle que soit l'équation, l'introduction d'une indéterminée peut toujours faire évanouir un terme de cette équation.

510. Si l'on veut faire évanouir le second, on supposera

$$ma + P = 0,$$

et il suffira de savoir résoudre les équations du premier degré pour tirer de celle-ci la valeur de a , qui doit satisfaire au but qu'on se propose.

On trouvera que a doit être égal à $-\frac{P}{m}$, c'est-à-dire que si l'on met $y - \frac{P}{m}$ à la place de x dans l'équation proposée, qui est du degré m , la transformée en y , quoique du même degré que la proposée, sera plus simple qu'elle, puisqu'elle n'aura point de second terme.

Ce principe, à cause de sa simplicité et de son utilité, mérite d'être traduit en langage ordinaire, afin qu'il soit mieux saisi par les commençants. On peut l'énoncer ainsi : *Pour faire évanouir le second terme d'une équation, c'est-à-dire celui qui contient x^{m-1} , x étant l'inconnue, et m son plus haut exposant, il faut substituer à x une nouvelle inconnue y , augmentée du coefficient de ce second terme pris avec un signe contraire, et divisé par l'exposant du premier.*

511. Si l'on veut faire évanouir le 3^{me} terme de l'équation proposée, on fera

$$\frac{m(m-1)}{2} a^2 + (m-1) Pa + Q = 0;$$

et si l'on sait résoudre les équations du second degré, on tirera de celle-ci la valeur de a , qui doit satisfaire au but dont il s'agit.

512. Sur quoi il faut observer que, d'après tout ce que nous avons dit, la valeur de a , qui fait disparaître le 3^{me} terme, n'est pas la même que celle qui fait disparaître le second, du moins si les coefficients P et Q n'ont pas entre eux les relations dont nous avons déjà parlé.

De là il résulte que si l'on veut faire évanouir le 3^{me} terme après avoir déjà fait évanouir le second, celui-ci revient à ce moment-là, et réciproquement.

Cette observation du reste s'applique à tous les autres termes; en sorte que si l'on avait une équation qui n'eût que le premier, le second et le dernier terme, et qu'on voulût faire disparaître le second, tous les suivants reviendraient.

Soit pour exemple l'équation

$$x^4 + 8x^3 - 1 = 0,$$

dont le troisième et le quatrième terme manquent; si l'on veut faire disparaître le second, et que l'on fasse $x = y - 2$ (n° 510), on aura

$$\left. \begin{array}{l} x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 \\ + 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64 \\ - 1 \end{array} \right\} = 0,$$

ou, en réduisant,

$$x^4 - 24x^2 + 64x - 49 = 0,$$

équation sans second terme, mais dans laquelle on retrouve en revanche le troisième et le quatrième.

513. Pour faire évanouir le quatrième terme seulement de l'équation générale, il faudrait résoudre une équation du 3^{me} degré en a .

Pour faire évanouir le 5^{me}, il en faudrait résoudre une du 4^{me}; et ainsi de suite.

Mais tant qu'il ne s'agira que d'un terme compris entre le premier et le dernier, l'équation à résoudre, pour faire disparaître ce terme-là sera toujours d'un degré moins élevé que le degré de l'équation proposée, comme on le voit d'un coup d'œil dans la formule générale.

514. Si l'on pouvait faire évanouir le dernier tout connu, tous les autres contenant x , on diviserait par x , et l'équation serait abaissée d'un degré (n° 381).

Faisant encore disparaître le dernier terme de cette nouvelle équation, on l'abaisserait une seconde fois d'un degré; et continuant toujours de même, on l'abaisserait jusqu'au premier degré, ce qui donnerait par conséquent la résolution générale des équations.

Mais pour faire disparaître le dernier terme de la proposée, il faudrait poser

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \dots + Ta + U = 0,$$

et résoudre cette équation pour en tirer la valeur de a convenable à ce cas.

Or, cette équation en a est parfaitement la même que la proposée en x , et offre par conséquent les mêmes difficultés qu'elle, ou n'est pas plus facile à résoudre.

On voit donc que ce problème, *Une équation quelconque étant donnée, en faire évanouir le dernier terme, ou la transformer en une autre équation du même degré et sans dernier terme, n'est autre chose que celui-ci, Trouver la résolution générale des équations.*

515. Du reste, puisque l'équation $a^m + Pa^{m-1} + \text{etc.} = 0$, est la même que l'équation $x^m + Px^{m-1} + \text{etc.} = 0$, il en résulte que dans

ce cas $x = a$; et comme nous avons fait $x = y + a$, la valeur d' y doit ici être nulle.

Or, cela est d'accord avec tous les principes: car, une équation étant donnée, si l'on y fait l'inconnue égale à zéro, tous les termes se détruisent, à l'exception du dernier, qui ne contient pas l'inconnue, et l'on a $U = 0$, ce qui est absurde, à moins que U ne soit nul par lui-même, c'est-à-dire qu'une équation où l'inconnue est 0 manque nécessairement de dernier terme (n° 411).

Réciproquement, si une équation n'a point de dernier terme, elle sera toujours satisfaite en y supposant l'inconnue égale à 0, parce que tous les termes renfermant l'inconnue, ils se détruiront tous par cette supposition. Un des soluteurs sera donc alors 0, et les autres se trouveront dans l'équation, que l'on obtiendra en divisant la proposée par l'inconnue qu'elle contient. Ainsi

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx = 0$$

a pour un de ses soluteurs $x = 0$, et les $m - 1$ autres sont donnés par l'équation

$$x^{m-1} + Px^{m-2} + Qx^{m-3} \dots + T = 0.$$

516. L'évanouissement du second terme, le plus facile de tous, est souvent très-utile, et conduit d'ailleurs très-vite à la résolution générale des équations du second degré, qui, lorsqu'elles manquent de second terme, ne sont autre chose que des équations à deux termes.

La proposée étant

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

formule générale des équations du second degré (n° 373), on fera $x = y - \frac{1}{2}P$ (n° 510), ce qui donnera

$$\left. \begin{aligned} y^2 - Py + \frac{1}{4}P^2 \\ + Py - \frac{1}{2}P^2 \\ + Q \end{aligned} \right\} = 0,$$

ou, en réduisant,

$$y^2 - \frac{1}{4}P^2 + Q = 0.$$

Or, cette équation est à deux termes puisqu'elle ne contient que le carré de l'inconnue et des quantités toutes connues qui sont supposées ne former qu'un seul terme. On en tirera donc d'abord

$$y^2 = \frac{1}{4}P^2 - Q;$$

puis, en extrayant la racine,

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q},$$

valeur qui, étant multipliée par les deux racines carrées de l'unité, ou par $+1$ et -1 (n° 491), deviendra

$$r = \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}.$$

(Voyez le n° 484 avec la note.)

Mais puisque x égale $r - \frac{1}{2}P$, ou, ce qui est la même chose, $-\frac{1}{2}P + r$, on aura

$$x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}.$$

ce sont là les deux soluteurs de l'équation générale du second degré.

Les commençants feront bien de vérifier ces valeurs de x , soit en les substituant chacune séparément à x dans la proposée, soit en cherchant à former cette équation par la multiplication de ses facteurs :

car puisqu'on a $x = -\frac{1}{2}P + \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}$, ou $x = -\frac{1}{2}P - \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}$, on a aussi $x + \frac{1}{2}P - \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q} = 0$, ou $x + \frac{1}{2}P + \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q} = 0$, et par conséquent

$$\left. \begin{aligned} (x + \frac{1}{2}P - \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}) \\ (x + \frac{1}{2}P + \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}) \end{aligned} \right\} = 0.$$

La proposée doit résulter du produit de ces deux facteurs, qu'il faut considérer chacun comme binomes, puisqu'ils sont composés de l'inconnue et d'une quantité connue, que l'on peut supposer réduite à un seul terme.

Du reste, nous reviendrons encore sur les équations du second degré, et nous donnerons dans l'Appendice différents problèmes de ce genre pour exercer les commençants. Ils pourraient dès à présent chercher à résoudre celui du n° 349.

517. Faisons en attendant observer que la résolution de l'équation du second degré donne celle de l'équation

$$x^{2m} + Bx^m + A = 0,$$

qui n'a que trois termes, mais dont l'exposant $2m$ du premier terme est double de l'exposant m du terme intermédiaire, quelle que soit la valeur de m .

Car, prenant d'abord x^m pour l'inconnue de l'équation, x^{2m} sera le carré de cette inconnue, et la formule du second degré donnera immédiatement

$$x^m = -\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - A};$$

d'où l'on tirera par conséquent

$$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - A}}.$$

Or, cette valeur se partage en deux, qui sont

$$\sqrt[m]{-\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - A}},$$

$$\text{et } \sqrt[m]{-\frac{1}{2}B - \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - A}},$$

et qui étant multipliées chacune par les m racines m^{mes} de l'unité (n° 491), donneront les $2m$ solveurs de la proposée.

518. Considérons un moment les quantités

$$\sqrt[m]{-\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - A}},$$

$$\text{et } \sqrt[m]{-\frac{1}{2}B - \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - A}};$$

on ne peut pas, tant qu'elles restent aussi générales, leur donner une expression plus simple; mais il est évident que cela doit être possible dans certains cas particuliers.

Si l'équation proposée était, par exemple, celle-ci,

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0,$$

on en tirerait, par la formule,

$$x = \sqrt{5 \pm \sqrt{25 - 9}},$$

ce qui donnerait tout de suite x égal à 3 ou à 1, valeurs qui, multipliées l'une et l'autre par les deux racines carrées de l'unité, fourniraient les quatre solveurs de la proposée, +3, -3, +1, -1.

On vient de voir ici que $\sqrt{5 + \sqrt{16}}$ s'est réduit à 3, et que $\sqrt{5 - \sqrt{16}}$ s'est réduit à 1. Et l'on doit comprendre qu'il pourrait y avoir des expressions radicales de la forme de celles qui nous occupent, qui, sans se réduire autant que ces dernières, seraient cependant susceptibles de certaines réductions. Nous allons le démontrer

par un exemple simple. Prenons la quantité $1 + \sqrt{2}$, et élevons-la au carré: elle deviendra $1 + 2\sqrt{2} + 2$, ou $3 + \sqrt{8}$; extrayons de nouveau la racine, nous trouverons

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Mais au lieu d'aller de la plus simple de ces deux expressions à la plus composée, comme nous l'avons fait, il est clair qu'il serait utile de pouvoir aller de la plus composée à la plus simple.

Essayons donc d'extraire les racines des quantités de la forme $a + \sqrt{b}$, quantités que l'on appelle, *en partie commensurables, en partie incommensurables*. Et commençons par la racine carrée.

519. Cette racine ne sera pas purement monome, car dans ce cas le carré le serait aussi.

Elle ne sera pas non plus purement rationnelle, puisque le carré contient un radical.

Elle sera donc de cette forme $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, une des lettres α et β pouvant être un carré, et une des quantités $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\beta}$ pouvant par conséquent être rationnelle.

Plus généralement encore, cette racine pourra être représentée par $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\sqrt{\nu}$: car, comme $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, étant élevé au carré, donne une partie rationnelle comparable à a , et une partie irrationnelle comparable à $\sqrt{b}$, il est évident qu'il en sera de même de $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\sqrt{\nu}$, puisque $\sqrt{\nu}$ par son élévation au carré donnera un nombre rationnel ν , qui, multipliant le carré de $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, le laissera composé d'une partie commensurable et d'un radical du second degré.

On aura donc

$$a + \sqrt{b} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \nu = (\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}) \nu,$$

D'où l'on tirera d'abord

$$(\alpha + \beta)\nu = a, \quad (2\sqrt{\alpha\beta})\nu = \sqrt{b},$$

puis

$$(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)\nu^2 = a^2, \quad (4\alpha\beta)\nu^2 = b.$$

Si l'on retranche alors la seconde équation de la première, on trouvera

$$(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)\nu^2 = a^2 - b,$$

ce qui donnera, en divisant par ν^2 , puis extrayant de part et d'autre la racine carrée,

$$\alpha - \beta = \sqrt{\frac{a^2 - b}{v^2}},$$

d'où l'on tirera

$$\beta = \alpha - \sqrt{\frac{a^2 - b}{v^2}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $(\alpha + \beta)v = a$, ou $\alpha + \beta = \frac{a}{v}$,
ou $\alpha + \beta - \frac{a}{v} = 0$, on aura

$$\alpha - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - b}{v^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{v} = 0.$$

Il faudra donc résoudre cette équation pour en tirer la valeur de α , et la substituer ensuite dans l'équation précédente, qui donnera la valeur de β . Or, ces équations n'étant que du premier degré, on les résoudra facilement. Cependant il faudra avant tout donner une valeur à v .

Cette quantité étant indéterminée, si nous pouvions, en lui donnant telle ou telle valeur, rendre rationnelle la fonction $\sqrt{\frac{a^2 - b}{v^2}}$, ce serait cette valeur-là qu'il faudrait choisir. Mais il est facile de comprendre que, quelque valeur qu'on donne à v , $\frac{a^2 - b}{v^2}$ ne sera carré qu'autant que $a^2 - b$ le sera : car une fraction n'est carrée que lorsque ses deux termes le sont. La valeur de v étant donc inutile à cet égard, nous la ferons, pour plus de simplicité, et dans tous les cas, égale à 1, et les deux formules précédentes se réduiront à celles-ci,

$$\beta = \alpha - \sqrt{a^2 - b},$$

$$\alpha - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b} - \frac{1}{2} a = 0. (*)$$

Ainsi donc α et β ne seront rationnels, et l'extraction de la racine ne pourra avoir lieu, que lorsque $a^2 - b$ sera un carré.

(*) J'aurais pu observer d'entrée que $(\sqrt{a} + \sqrt{\beta})\sqrt{v}$ était égal à $\sqrt{av} + \sqrt{\beta v}$, et rentrait par conséquent dans la forme $\sqrt{a'} + \sqrt{\beta'}$ en faisant $av = a'$ et $\beta v = \beta'$. Mais j'ai préféré la marche que j'ai suivie pour qu'elle fût uniforme avec celle des degrés plus élevés. C'est aussi là la raison de la forme que j'ai donnée aux expressions des valeurs de α et de β .

Soit proposé, par exemple, de réduire $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$. On a ici $a = 3$, $b = 8$, $a^2 - b = 1$; en sorte que la quantité proposée est susceptible de réduction. Et comme on trouve $a = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$, et $\beta = 2 - 1 = 1$, on a $\sqrt{a} + \sqrt{\beta} = \sqrt{2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$, c'est-à-dire

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = 1 + \sqrt{2},$$

comme nous l'avons vu au n° 518.

Soit encore proposé $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 + \sqrt{300}}$. On a $a = 28$, $b = 300$, $a^2 - b = 484$, qui est un carré; en sorte que la quantité proposée est réductible. Et comme on trouve $a = 11 + 14 = 25$, et $\beta = 25 - 22 = 3$, on a

$$\sqrt{28 + \sqrt{300}} = 5 + \sqrt{3}.$$

Soit proposé $\sqrt{11 + \sqrt{13}}$. On a $a = 11$, $b = 13$, $a^2 - b = 108$, qui n'est pas un carré; en sorte que la quantité proposée n'est pas réductible.

Soit enfin proposé $\sqrt{-\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - A}}$, qui est un des solveurs de l'équation $x^4 + Bx^2 + A = 0$. On a $a = -\frac{1}{2}B$, $b = \frac{1}{4}B^2 - A$, $a^2 - b = \frac{1}{4}B^2 - \frac{1}{4}B^2 + A = A$: ce qui fait que la réduction sera possible, si le dernier terme A de l'équation est un carré direct.

Si la quantité proposée, au lieu d'être $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, était $\sqrt{a - \sqrt{b}}$, il faudrait prendre, pour sa valeur, $\sqrt{a} - \sqrt{\beta}$, au lieu de $\sqrt{a} + \sqrt{\beta}$.

Du reste, la valeur de chacune de ces quantités est double: on a $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ égal à $+\sqrt{a} + \sqrt{\beta}$, ou à $-\sqrt{a} - \sqrt{\beta}$; et $\sqrt{a - \sqrt{b}}$ égal à $+\sqrt{a} - \sqrt{\beta}$ ou à $-\sqrt{a} + \sqrt{\beta}$.

520. Essayons maintenant d'extraire la racine cubique des quantités composées d'une partie commensurable et d'un radical du second degré, c'est-à-dire cherchons à simplifier l'expression

$$\sqrt[5]{a + \sqrt{b}}.$$

Cette racine ne sera ni purement monome, ni purement rationnelle, comme il est facile de le comprendre.

Elle n'aura pas non plus la forme $\sqrt{a} + \sqrt{\beta}$, si ni a ni β ne sont carrés, car le cube de cette quantité n'aurait aucune partie rationnelle.

Mais elle pourra avoir la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$, parce que le cube de cette

fonction, comme on peut le vérifier, est composé d'une partie commensurable et d'un radical du second degré.

Plus généralement elle pourra avoir la forme $(\alpha + \sqrt{\beta})^3 \sqrt{\nu}$: car, si le cube de $\alpha + \sqrt{\beta}$ est composé d'une partie rationnelle comparable à α , et d'un radical du second degré comparable à $\sqrt{\beta}$, le cube de $(\alpha + \sqrt{\beta})^3 \sqrt{\nu}$ sera composé de la même manière, parce qu'il sera égal à $(\alpha + \sqrt{\beta})^3 \cdot \nu$. On aura donc

$$\alpha + \sqrt{\beta} = (\alpha + \sqrt{\beta})^3 \sqrt{\nu} = (\alpha^3 + 3\alpha\beta + 3\alpha^2\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\beta})\sqrt{\nu},$$

d'où l'on tirera d'abord

$$(\alpha^3 + 3\alpha\beta)\sqrt{\nu} = \alpha, \quad (3\alpha^2 + \beta)\sqrt{\nu}\sqrt{\beta} = \sqrt{\beta},$$

puis

$$(\alpha^6 + 6\alpha^4\beta + 9\alpha^2\beta^2)\nu^2 = \alpha^2, \quad (9\alpha^4\beta + 6\alpha^2\beta^2 + \beta^3)\nu^2 = b.$$

Si l'on retranche alors la seconde équation de la première, on trouvera

$$(\alpha^6 - 3\alpha^4\beta + 3\alpha^2\beta^2 - \beta^3)\nu^2 = \alpha^2 - b,$$

ce qui donnera, en divisant par ν^2 , puis extrayant de part et d'autre la racine cubique,

$$\alpha^2 - \beta = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 - b}{\nu^2}},$$

d'où l'on tirera

$$\beta = \alpha^2 - \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 - b}{\nu^2}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $(\alpha^3 + 3\alpha\beta)\sqrt{\nu} = \alpha$, ou

$$\alpha^3 + 3\alpha\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{\nu}} \text{ ou } \alpha^3 + 3\alpha\beta - \frac{\alpha}{\sqrt{\nu}} = 0, \text{ on aura}$$

$$\alpha^3 - \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 - b}{\nu^2}} \alpha - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\sqrt{\nu}} = 0.$$

Il faudra donc résoudre cette équation pour en tirer la valeur de α et la substituer dans la précédente, qui donnera la valeur de β . Mais comme elle est du troisième degré, nous ne savons pas encore la résoudre.

Quant à la valeur de ν , il faudra la prendre telle que la fonction $\frac{\alpha^2 - b}{\nu^2} = \frac{(\alpha^2 - b)\nu}{\nu^3}$ soit un cube parfait, ce qui aura lieu si le numérateur de la seconde forme, ou $(\alpha^2 - b)\nu$ est un tel cube. On pren-

dra donc tous les facteurs premiers du nombre $a^2 - b$ (*Arith.* nos 215, 216), et si ces facteurs sont, par exemple, $p.p.p'$, on fera $v = p.p'.p'$, ce qui donnera $(a^2 - b)v = p^3.p'^3$, cube parfait. Ainsi, si l'on avait $a^2 - b = 180 = 2.2.3.3.5$, on ferait $v = 2.3.5.5 = 150$, et l'on aurait $(a^2 - b)v = 180 \times 150 = 27000$.

La valeur de v étant ainsi fixée, si l'équation finale en z a un solveur rationnel, on le prendra pour z , en sorte que β sera aussi rationnel, comme il est facile de le voir, et que la quantité proposée

$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ sera susceptible de réduction. Mais si l'équation finale n'a point de solveur rationnel, la réduction ne sera pas possible.

521. S'il s'agissait d'extraire des racines plus élevées des quantités composées d'une partie commensurable et d'un radical du second degré, il faudrait suivre une marche analogue à celle que nous avons suivie pour l'extraction des racines carrée et cubique, marche que nous avons suffisamment fait connaître.

Du reste, ceci nous a ramenés aux équations du troisième degré et des degrés supérieurs.

Nous allons voir dans le chapitre suivant, qui n'est que la continuation de celui-ci, une méthode applicable à ces équations.

CHAPITRE III.

De l'évanouissement des termes au moyen de deux ou plusieurs indéterminées.

Comment cela peut conduire à résoudre les équations du troisième et du quatrième degré, et en général les équations $x^{3m} + Cx^{2m} + Bx^m + A = 0$, et $x^{4m} + Dx^{3m} + Cx^{2m} + Bx^m + A = 0$.

522. Nous avons dit au n° 507 que, pour faire évanouir deux des termes intermédiaires dans une équation qui est au moins du troisième degré en x , il fallait faire $x^2 = y + a + bx$, ou, ce qui revient au même, $x^2 - bx - (a + y) = 0$.

Si donc l'équation proposée est l'équation générale du troisième degré (n° 373),

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

on la considérera comme coexistant avec l'équation hypothétique

$$x^2 - bx - (a + y) = 0,$$

l'inconnue x ayant la même valeur dans les deux, et les lettres a et b représentant des quantités dont nous ne connaissons pas encore les rapports avec les coefficients P, Q, R , mais que nous déterminerons ensuite conformément à notre but.

Cela posé, on éliminera x des deux équations ci-dessus, et l'on parviendra à une équation finale en y , qui sera encore du troisième degré, et de la forme

$$y^3 + P'y^2 + Q'y + P' = 0,$$

les coefficients P', Q', R' , étant composés des coefficients P, Q, R , et des indéterminées a et b .

Parvenu là, on posera $P' = 0$ et $Q' = 0$, ce qui donnera $y^3 + R' = 0$, d'où l'on tirera $y^3 = -R'$, et $y = \sqrt[3]{-R'}$.

Mais R' étant composé non-seulement des coefficients connus P, Q, R , mais encore des quantités a et b , il faudra substituer à ces quantités leurs valeurs en P, Q, R , tirées des équations $P' = 0$, et $Q' = 0$.

On éliminera donc a ou b de ces deux équations, supposons a , et l'on trouvera une équation finale en b , qui ne sera que du second degré; on résoudra celle-ci pour avoir la valeur de b , qui, substituée dans l'équation $P' = 0$, donnera celle de a .

Enfin les valeurs de a , de b et de y , substituées dans l'équation $x^2 - bx - (a + y) = 0$, donneront celles de x .

523. Si l'on avait l'équation générale du quatrième degré,

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

en faisant encore $x^2 = y + a + bx$, on trouverait par l'élimination de x une équation du quatrième degré en y , de la forme

$$y^4 + P'y^3 + Q'y^2 + R'y + S' = 0;$$

et posant $P' = 0$ et $R' = 0$, il resterait

$$y^4 + Q'y^2 + S' = 0,$$

équation qu'on résoudrait par la formule du n° 517, après avoir substitué aux lettres a et b contenues dans les coefficients Q' et S' , leurs valeurs en P , Q , R , S , tirées des équations $P' = 0$ et $R' = 0$, qui, étant comparées pour en éliminer a ou b , donneraient une équation finale d'un degré moindre que celui de la proposée.

524. Ces calculs étant très-longs, nous ne faisons qu'indiquer leur marche, d'autant plus que nous résoudrons bientôt par un procédé différent les équations générales du 3^{me} et du 4^{me} degré.

525. Du reste, ces équations étant résolues, elles nous conduiront à la résolution des équations

$$\begin{aligned} x^{5m} + Cx^{2m} + Bx^m + A &= 0, \\ x^{4m} + Dx^{3m} + Cx^{2m} + Bx^m + A &= 0, \end{aligned}$$

comme la résolution de l'équation du second degré nous a conduits, dans le n° 517, à trouver les soluteurs de l'équation

$$x^{2m} + Bx^m + A = 0.$$

526. En général, pour faire disparaître n termes d'une équation en x , il faudrait prendre n indéterminées $a, b, c, \dots l$ (n° 507), et poser

$$x^n = y + a + bx + cx^2 + \dots + lx^{n-1}.$$

Mais dès que la proposée surpasse le 4^{me} degré, et qu'on veut en faire disparaître un nombre de termes suffisant, on arrive dans la recherche des indéterminées $a, b, c, \dots l$, à une équation finale d'un degré plus élevé que celui de la proposée, et que par conséquent on ne peut résoudre.

527. L'évanouissement des termes conduit, comme nous venons de le voir, à la résolution des équations générales du second, du troisième et du quatrième degré. Il y a plusieurs autres voies pour arriver à ce but; il serait superflu de les indiquer toutes; mais nous allons en développer une qui dépend de la considération des fonctions des soluteurs, et qui est due au célèbre Lagrange.

CHAPITRE IV.

De la résolution des équations du second degré par la recherche de certaines fonctions des soluteurs. Nature de ces soluteurs.

528. Nous avons vu que le coefficient du second terme d'une équation est égal à la somme des soluteurs, en prenant cette somme avec un signe contraire; que le coefficient du troisième est égal à la somme des produits différents qu'on peut faire avec les soluteurs en les combinant deux à deux, et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme, qui est égal au produit de tous les soluteurs, produit pris avec son signe si l'équation est de degré pair, et pris avec un signe contraire si elle est de degré impair.

D'après cela, on pourrait se proposer ce problème :

Connaissant la somme d'un nombre m de quantités inconnues, celle des produits de ces quantités combinées deux à deux, celle des produits de ces mêmes quantités combinées trois à trois, etc. enfin le produit de toutes ces quantités, trouver la valeur de chacune d'elles.

Nommant $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, les m inconnues, on aurait, d'après ce qui précède, et en posant l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0;$$

on aurait, dis-je,

$$\begin{aligned} -\alpha - \beta - \gamma - \dots - \lambda &= P \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \dots + \alpha\lambda + \beta\gamma + \dots + \beta\lambda + \dots + \gamma\lambda + \dots &= Q \\ -\alpha\beta\gamma - \dots - \alpha\beta\lambda - \dots - \alpha\gamma\lambda - \dots - \beta\gamma\lambda - \dots &= R \\ \dots + \alpha\beta\gamma\lambda + \dots &= S \\ \dots &= T \\ \dots + \beta\gamma\lambda + \dots &= T \\ \dots + \alpha\beta\gamma + \dots &= U. \end{aligned}$$

Et ces équations étant au nombre de m à cause des m coefficients $P, Q, \dots, T, U$, et contenant m inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, on pourrait par l'élimination trouver une équation finale ou en α , ou en β , ou en γ , etc.; et si cette équation était plus facile à résoudre que la proposée, après en avoir tiré la valeur de l'inconnue qu'elle renfer-

merait, on remonterait à la valeur des autres, et l'on aurait les m soluteurs de la proposée.

Or, voici pour ce cas un procédé d'élimination beaucoup plus simple que les procédés ordinaires. Multiplions la première de nos m équations par α^{m-1} , la seconde par α^{m-2} , la troisième par α^{m-3} , etc. et l'avant-dernière par α , puis ajoutons tous ces produits avec la dernière équation, et nous aurons l'équation finale en α , comme on va le voir

$$\begin{array}{rcl}
 -\alpha^m - \alpha^{m-1}\beta - \alpha^{m-1}\gamma \dots - \alpha^{m-1}\lambda & & = P\alpha^{m-1} \\
 + \alpha^{m-1}\beta + \alpha^{m-1}\gamma \dots + \alpha^{m-1}\lambda & & \\
 + \alpha^{m-2}\beta\gamma \dots + \alpha^{m-2}\beta\lambda \dots + \alpha^{m-2}\gamma\lambda \dots & \left. \vphantom{\begin{array}{l} -\alpha^m - \alpha^{m-1}\beta - \alpha^{m-1}\gamma \dots - \alpha^{m-1}\lambda \\ + \alpha^{m-1}\beta + \alpha^{m-1}\gamma \dots + \alpha^{m-1}\lambda \end{array}} \right\} & = Q\alpha^{m-2} \\
 - \alpha^{m-2}\beta\gamma \dots - \alpha^{m-2}\beta\lambda \dots - \alpha^{m-2}\gamma\lambda \dots & & \\
 - \alpha^{m-3}\beta\gamma\lambda \dots & \left. \vphantom{\begin{array}{l} -\alpha^m - \alpha^{m-1}\beta - \alpha^{m-1}\gamma \dots - \alpha^{m-1}\lambda \\ + \alpha^{m-1}\beta + \alpha^{m-1}\gamma \dots + \alpha^{m-1}\lambda \end{array}} \right\} & = R\alpha^{m-3} \\
 \dots + \alpha^{m-3}\beta\gamma\lambda \dots & & = S\alpha^{m-4} \\
 \dots & & \\
 \dots & + \alpha\beta\gamma \dots \lambda = T\alpha & \\
 & + \alpha\beta\gamma \dots \lambda = U &
 \end{array}$$

$$-\alpha^m = P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} \dots + T\alpha + U,$$

d'où l'on tirera

$$0 = \alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} \dots + T\alpha + U,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} \dots T\alpha + U = 0.$$

Or, cette équation en α est parfaitement identique avec la proposée en x , et offre pour sa résolution les mêmes difficultés qu'elle.

Si, au lieu de multiplier les m équations par α^{m-1} , α^{m-2} , α^{m-3} , etc. on les eût multipliées par β^{m-1} , β^{m-2} , β^{m-3} , etc. ou par γ^{m-1} , γ^{m-2} , γ^{m-3} , etc. ou etc. on aurait eu des équations finales en β , ou en γ , ou etc. mais elles auraient toutes été semblables à la proposée.

On ne peut donc tirer immédiatement les soluteurs d'une équation des relations que ces soluteurs ont avec les coefficients de cette équation.

529. Soit, pour exemple, l'équation générale du troisième degré,

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

en nommant α , β , γ , ses trois soluteurs, on aura

$$-\alpha - \beta - \gamma = P$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = Q$$

$$-\alpha\beta\gamma = R;$$

multipliant la première par α^2 , la seconde par α , et ajoutant les produits avec la troisième, on trouvera

$$-\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha^2\gamma = P\alpha^2$$

$$+ \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma = Q\alpha$$

$$-\alpha\beta\gamma = R$$

$$-\alpha^3 = P\alpha^2 + Q\alpha + R,$$

d'où l'on tirera

$$\alpha^3 + P\alpha^2 + Q\alpha + R = 0,$$

équation finale qu'il faudrait résoudre pour avoir la valeur de α , mais qui, étant identique avec la proposée, offre les mêmes difficultés qu'elle.

Soit encore pour exemple l'équation générale du second degré

$$x^2 + Px + Q = 0;$$

en nommant α et β ses deux soluteurs, on aura

$$-\alpha - \beta = P$$

$$\alpha\beta = Q;$$

multipliant la première par α , et ajoutant le produit avec la seconde, on trouvera

$$-\alpha^2 - \alpha\beta = P\alpha$$

$$+ \alpha\beta = Q$$

$$-\alpha^2 = P\alpha + Q,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\alpha^2 + P\alpha + Q = 0,$$

équation identique avec la proposée.

530. Cela posé, voyons si nous ne pourrions point vaincre ces difficultés, et tirer parti des relations que les soluteurs des équations ont avec leurs coefficients, pour arriver à la résolution de ces équations.

Considérons d'abord l'équation générale du second degré $x^2 + Px + Q = 0$, et raisonnons sur cette équation comme si nous ne savions pas la résoudre.

531. Si nous avons entre les soluteurs α et β de la proposée, outre l'équation $-\alpha - \beta = P$, qui est du premier degré, une seconde

équation du premier degré, il est clair que ces deux équations donneraient, par l'élimination d'une des inconnues, une équation finale qui ne passerait pas le premier degré, et que l'on résoudrait facilement, d'où résulterait la connaissance de α et de β , ou de la double valeur de x .

532. Cette équation du premier degré, que nous voudrions trouver, devrait nécessairement contenir un ou plus d'un terme qui renfermeraient α , un ou plus d'un terme qui renfermeraient β , et un ou plus d'un terme tout connus; étant ordonnée, elle devrait donc avoir cette forme :

$$g\alpha + h\beta = e.$$

533. Il est clair d'ailleurs que, dans cette équation, la valeur de e ne dépendrait pas seulement de celles de α et de β , mais encore de celles de g et de h .

Or, les valeurs de α et de β dépendent elles-mêmes de celles de P et de Q , ou des coefficients de l'équation proposée, en sorte que nous ne pouvons pas les prendre à volonté. Mais les valeurs de g et de h ne dépendant point de la proposée, sont beaucoup plus arbitraires, et nous pourrions les fixer comme il nous conviendra de le faire, d'après le but que nous nous proposons.

Quand nous aurons donc décidé quelque chose à l'égard de ces dernières valeurs, il faudra rechercher celle qui en résultera pour e . Ainsi ce caractère, que nous avons d'abord considéré comme connu, parce que nous envisagions l'équation $g\alpha + h\beta = e$ comme trouvée, doit actuellement être considéré comme désignant une inconnue, parce qu'il s'agit de former cette équation.

534. Or, les inconnues ne se déterminent que par les rapports qu'elles ont avec des connues, et au moyen d'équations qui expriment ces rapports. Il faut donc, avant de pouvoir former l'équation $g\alpha + h\beta = e$, trouver une autre équation qui donne e . En d'autres termes, e ou la fonction $g\alpha + h\beta$, doit être l'inconnue d'une équation qu'il faut poser et résoudre avant d'avoir l'équation $g\alpha + h\beta = e$.

535. Mais comme les soluteurs α et β de l'équation générale $x^2 + Px + Q = 0$, jouent dans cette équation le même rôle l'un que l'autre, il en résulte que tous les raisonnements et tous les calculs qui pour-

raient conduire à la valeur de $ga + h\beta$, s'appliqueraient également à celle de $g\beta + ha$, en supposant même les coefficients g et h déjà déterminés. Ainsi l'équation qui doit donner la valeur de $ga + h\beta$ doit aussi donner celle de $g\beta + ha$, c'est-à-dire que cette équation paraît devoir être du second degré (*). Cependant il faut voir si l'on ne peut point l'abaisser.

536. Cela aurait lieu si l'on faisait $h = g$, parce qu'alors la fonction ne changerait point par la permutation de α et de β .

Mais $ga + g\beta = g(\alpha + \beta) = -gP$, parce que $\alpha + \beta = -P$. L'équation à comparer avec $-\alpha - \beta = P$, pour tirer des deux les valeurs de α et de β (n° 531), serait donc celle-ci,

$$g(\alpha + \beta) = -gP,$$

qui n'apprenant rien de plus que l'équation $-\alpha - \beta = P$, ou $\alpha + \beta = -P$, ne pourrait nous conduire au résultat que nous cherchons. Il résulte de là qu'on ne peut faire $h = g$, et qu'il est impossible de trouver la valeur de $ga + h\beta$ sans trouver en même temps la valeur de $g\beta + ha$, c'est-à-dire sans résoudre une équation du second degré.

537. Mais, par supposition (n° 530), nous ne savons résoudre les équations du second degré que dans deux cas différents :

1° Lorsque tous leurs termes étant transposés dans le premier membre, ce premier membre est un carré parfait, comme si l'on avait $x^2 - 2ax + a^2 = 0$: car il suffit alors de savoir extraire la racine carrée d'un polynome pour décomposer le premier membre de l'équation dont il s'agit dans ses facteurs du premier degré. On voit, par exemple, que l'équation ci-dessus est la même que celle-ci, $(x - a)(x - a) = 0$, ce qui ne donne qu'une valeur pour x , savoir $x = a$. Dans ce cas donc les deux solveurs sont égaux (n° 392).

2° Nous savons résoudre une équation du second degré lorsqu'elle est à deux termes, c'est-à-dire lorsqu'on a le carré de l'inconnue égal à une quantité connue : on extrait alors la racine carrée arithmétique (n° 492) de la quantité connue, et l'on multiplie cette racine par les deux racines carrées de l'unité (n° 491), c'est-à-dire par 1 et

(*) Il ne faut pas confondre cette équation du second degré, qui est à former, avec l'équation du premier degré $ga + h\beta = e$, ou $g\beta + ha = e$. Voyez ce qui précède.

par -1 (n° 488), ce qui donne les deux soluteurs de l'équation, qui ne diffèrent donc alors que par le signe.

538. Pour faire rentrer dans le premier de ces cas l'équation du second degré, qui doit avoir pour soluteurs les fonctions $gx + h\beta$ et $g\beta + ha$, il faudrait poser en fait l'égalité de ces soluteurs ou de ces fonctions, ce qui donnerait

$$gx + h\beta = g\beta + ha.$$

Or, il y a ici une observation importante à faire : puisque la proposée $x^2 + Px + Q = 0$ est générale, ses coefficients P , Q , sont susceptibles de différentes valeurs, desquelles résulteront aussi différentes valeurs pour les soluteurs α , β . Mais quelles que soient ces valeurs, il faudra que l'égalité $gx + h\beta = g\beta + ha$, ayant lieu pour un cas, ait lieu pour tous les autres. Et il est facile de comprendre que cela ne sera possible qu'autant que les coefficients de α seront égaux dans les deux membres, et qu'il en sera de même de ceux de β .

Du reste, cela peut se démontrer de cette manière : de l'égalité précédente on tire facilement celle-ci, $(g-h)(\alpha-\beta) = 0$, qui ne peut être satisfaite qu'en supposant $\alpha-\beta = 0$, ou $g-h = 0$. Mais $\alpha-\beta$ n'est égal à zéro, ou α n'est égal à β , que quand le premier membre de la proposée $x^2 + Px + Q = 0$, est un carré parfait (n° 390, 391, 392), ce qui est assez rare; et il faut que notre égalité ait lieu pour tous les cas. Par conséquent, $g-h = 0$, ou $g = h$.

On aurait donc ici $g = h$ et $h = g$, ce qui revient au même. Et de là résulterait, comme au n° 536, $g(\alpha + \beta) = -gP$, résultat qui n'apprend rien de plus que l'équation $-\alpha - \beta = P$.

539. Pour faire rentrer dans le second cas du n° 537 l'équation du second degré qui doit avoir pour soluteurs les fonctions $gx + h\beta$ et $g\beta + ha$, il faudrait qu'en désignant par e l'une de ces fonctions, les deux soluteurs fussent (n° 537)

$$e(+1), \quad e(-1);$$

ou, en d'autres termes, que l'on eût

$$gx + h\beta = -g\beta - ha.$$

Posons donc en fait que cette égalité ait lieu, nous en tirerons, d'après l'observation du n° 538, $g = -h$, et $h = -g$, ce qui revient au même. Faisant, pour simplifier, $g = 1$, nous aurons $h = -1$, et les deux fonctions $gx + h\beta$, et $g\beta + ha$ deviendront

$$\alpha - \beta \text{ et } \beta - \alpha,$$

en sorte que nous aurons, ou $e = \alpha - \beta$, ou $e = \beta - \alpha$; autrement nous aurons, ou $e - (\alpha - \beta) = 0$, ou $e - (\beta - \alpha) = 0$.

Multipliant ces deux équations alternatives, il en résultera l'équation du second degré

$$e^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta = 0,$$

laquelle devient, par le n° 433,

$$e^2 - (P^2 - 2Q) + 2Q = 0,$$

ou, en réduisant,

$$e^2 - (P^2 - 4Q) = 0 \dots (\text{Réduite}).$$

De là on tire $e = \sqrt{P^2 - 4Q}$, quantité qui, étant multipliée par les deux racines carrées de l'unité ou par $+1$ et -1 , fournira les deux solveurs de la réduite (n° 484 avec la note).

540. Représentons encore pour quelques moments ces deux solveurs par e et $-e$, ce caractère désignant maintenant une quantité connue : ces deux valeurs seront celles des deux fonctions $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$, et l'on pourra prendre à volonté une de ces fonctions et une des valeurs e et $-e$ pour les égaler, et former ainsi l'équation du premier degré, qui, comparée avec l'équation $\alpha - \beta = P$, doit nous conduire à la connaissance des solveurs α et β (n° 531).

Faisons donc d'abord $\alpha - \beta = e$, ou

$$\alpha - \beta = +\sqrt{P^2 - 4Q}.$$

C'est là l'équation du premier degré en α et β que nous avons désiré d'obtenir, pour la comparer à l'équation

$$-\alpha - \beta = P.$$

Or, voici un procédé d'élimination, applicable à ce cas, et qui nous donnera très-vite les valeurs de α et de β .

Retranchons la seconde équation de la première, et divisons le résultat par 2, nous aurons

$$\alpha = -\frac{1}{2}P + \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}.$$

Ajoutons en revanche les deux équations, et divisons aussi la somme par 2, nous trouverons

$$\beta = -\frac{1}{2}P - \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}.$$

Ces valeurs sont précisément celles que nous avons déjà trouvées

au n° 516, et il est facile de voir que nous ne trouverions que celles-là en essayant de poser autrement l'équation du premier degré à comparer à l'équation $-\alpha - \beta = P$.

Si nous posons, par exemple,

$$\beta - \alpha = e, \quad -\beta - \alpha = P,$$

il est clair que β jouerait ici le rôle que α jouait dans le cas précédent, et que α jouerait ici le rôle que β jouait dans le cas précédent; en sorte qu'on obtiendrait pour β et pour α les valeurs que nous venons d'obtenir pour α et pour β . Or, rien ne détermine une de ces lettres à représenter une des valeurs plutôt que l'autre.

Si nous voulions ensuite poser

$$\alpha - \beta = -e, \quad -\alpha - \beta = P,$$

en changeant les signes de la première équation, nous serions rentrer ce cas dans le précédent.

Si nous voulions enfin poser

$$\beta - \alpha = -e, \quad -\alpha - \beta = P,$$

en changeant les signes de la première équation, nous serions rentrer ce cas dans le premier que nous avons considéré.

On ne peut donc obtenir pour α et β que les deux valeurs que nous avons données (*).

Voyons maintenant quelle peut être la nature de ces soluteurs, dans le cas où P et Q ne seraient pas imaginaires.

541. Si nous supposons que P soit nul dans la proposée, celle-ci ne sera plus qu'une équation à deux termes, et comme on aura alors

(*) L'équation $-\alpha - \beta = P$ étant écrite ainsi, $\alpha + \beta = -P$, fait voir que $-P$ est égal à la somme des deux quantités α et β , et que $-\frac{1}{2}P$ est égal à la moitié de cette somme.

En revanche, l'équation $\alpha - \beta = \sqrt{P^2 - 4Q}$ fait voir que $\sqrt{P^2 - 4Q}$ est égal à la différence des mêmes quantités α et β , et que $\sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}$ est égal à la moitié de cette différence.

Cela posé, les formules qui expriment les valeurs de α et de β , prouvent que le plus grand de deux nombres quelconques est égal à la moitié de la somme des deux augmentée de la moitié de leur différence, et que le plus petit est égal à la moitié de la somme diminuée de la moitié de la différence.

Ce principe fait trouver les deux nombres lorsqu'étant l'un et l'autre inconnus leur somme et leur différence sont données.

$\sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q} = \sqrt{-Q}$, une des valeurs de x deviendra $+\sqrt{-Q}$, et l'autre $-\sqrt{-Q}$; en sorte qu'on aura les deux soluteurs de la proposée en multipliant la fonction $\sqrt{-Q}$ par les deux racines carrées de l'unité (n^{os} 484 à 489), et que ces soluteurs seront égaux et de signes contraires. Mais si Q est inverse dans la proposée, ou direct dans la valeur de x , ces soluteurs seront réels, tandis qu'ils seront imaginaires si Q est direct dans la proposée, ou inverse dans la valeur de x .

542. Si P n'est pas nul, et que Q soit inverse dans la proposée, ou direct dans la valeur de x , quel que soit le signe de P , $\frac{1}{4}P^2$ sera direct; et comme d'ailleurs $\sqrt{\frac{1}{4}P^2 + Q} > \frac{1}{2}P$, les deux soluteurs seront réels, inégaux, l'un direct et l'autre inverse.

543. Si P n'est pas nul, et que Q soit direct dans la proposée, ou inverse dans la valeur de x , il y aura trois cas à considérer, savoir lorsqu'on aura, ou

$$\frac{1}{4}P^2 > Q, \text{ ou } \frac{1}{4}P^2 < Q, \text{ ou } \frac{1}{4}P^2 = Q.$$

1^o Dans le premier cas, les deux soluteurs seront encore réels; mais comme on aura $\sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q} < \frac{1}{2}P$, si P est direct dans l'équation, ou inverse dans la valeur de x , les soluteurs seront tous deux inverses et inégaux; et si P est inverse dans la proposée, ou direct dans la valeur de x , les soluteurs seront tous deux directs et inégaux.

2^o Dans le second cas, c'est-à-dire si $\frac{1}{4}P^2 < Q$, les soluteurs seront imaginaires, et ne différeront entre eux que par le signe de la partie radicale, quel que soit celui de P .

3^o Dans le troisième cas, c'est-à-dire si $\frac{1}{4}P^2 = Q$, le radical devenant nul, les deux valeurs de x se réduiront à une, dont le signe dépendra de celui de P . Alors les deux soluteurs seront égaux (n^o 392), et le premier membre de l'équation sera un carré parfait (n^o 391).

544. Du reste, les soluteurs étant réels, ils seront commensurables ou incommensurables, suivant que les extractions de racines qu'il faudra faire pour les trouver, pourront se faire exactement ou seulement par approximation.

545. Arrêtons-nous un moment sur le second cas du n^o 543, d'après lequel Q étant direct dans la proposée, ou inverse dans la

valeur de x , on avait d'ailleurs $\frac{1}{4}P^2 < Q$: comme alors $\frac{1}{4}P^2 - Q$ est inverse, on a deux solveurs imaginaires.

Pour éclaircir cela, faisons $\frac{1}{4}P^2 - Q = -Q'$: nous aurons

$$x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{-Q'}, \quad \text{ou } x + \frac{1}{2}P = \pm \sqrt{-Q'};$$

élevant cette dernière formule au carré, nous trouverons

$$x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2 = -Q',$$

c'est-à-dire un carré égal à une quantité inverse, ce qui n'est pas possible (n° 267). Et voilà pourquoi cette équation donne pour x deux valeurs imaginaires ou impossibles.

546. La méthode que nous venons d'employer pour résoudre l'équation générale du second degré, conduit aussi, comme nous allons le voir, à la résolution de celles du troisième et du quatrième degré. On la doit au célèbre Lagrange, qui l'a donnée dans les *Mémoires de Berlin pour les années 1770 et 1771*. Elle a ensuite été exposée par La Place dans le *Journal de l'École normale*, et par Lacroix dans le *Complément de ses Éléments d'Algèbre*. Nous l'avons développée avec le plus grand détail dans l'application que nous venons d'en faire à l'équation du second degré, et cela pour que les commençants eussent plus de facilité à en saisir l'esprit.

Du reste, « quoique cette méthode, dit La Place, soit un peu plus longue que les méthodes indirectes, je la crois préférable dans un cours destiné à développer les vrais principes des sciences. »

CHAPITRE V.

De la résolution des équations du troisième degré par la recherche de certaines fonctions des solveurs. Nature de ces solveurs.

547. Étant donnée l'équation

$$x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0,$$

il ne serait point nécessaire, pour l'emploi de la méthode, d'en faire disparaître le second terme; mais comme cette opération préliminaire

simplifiera nécessairement nos calculs, nous la supposerons faite.

Nous poserons donc $x' = x - \frac{1}{3}P'$ (n° 510); et, substituant cette valeur dans l'équation donnée, elle prendra cette forme, $x^3 + Qx + R = 0$. Et il est clair que dès que nous connaîtrons x , nous aurons aussi x' .

La proposée est donc supposée être

$$x^3 + Qx + R = 0.$$

548. Si nous avons entre ses soluteurs α , β , γ , outre l'équation $\alpha + \beta + \gamma = -P = 0$, deux autres équations du premier degré, de la forme $ga + h\beta + i\gamma = e$ (n° 532), ces trois équations nous conduiraient facilement à la connaissance des trois soluteurs (n° 531).

549. Mais ces deux équations ne sont pas plus difficiles à trouver qu'une seule : car, si nous n'en voulions qu'une, celle-ci, $g\beta + ha + i\gamma = e'$ résulterait des mêmes calculs que la première (n° 535), et il en serait de même de toutes celles que nous pourrions former en faisant changer de place autant de fois que possible aux trois lettres α , β , γ ; en sorte que, lors même que nous ne voudrions que la fonction e , la connaissance de la valeur de cette fonction devrait dépendre, à ce qu'il semble, de la résolution d'une équation du sixième degré, qui nous donnerait, outre la fonction e , toutes celles que l'on peut former en permutant entre elles, dans la fonction $ga + h\beta + i\gamma$, les lettres α , β , γ (n°s 344 C, 535), savoir,

$$ga + h\beta + i\gamma$$

$$ga + h\gamma + i\beta$$

$$g\beta + ha + i\gamma$$

$$g\beta + h\gamma + ia$$

$$g\gamma + ha + i\beta$$

$$g\gamma + h\beta + ia.$$

Si donc nous pouvions la résoudre, après en avoir trouvé les soluteurs, nous en choisirions deux pour former les deux équations du premier degré dont nous avons besoin (n° 548).

Cependant, il faut voir si l'on ne pourrait point abaisser le degré de cette équation.

550. Cela aurait lieu si l'on faisait $i = h = g$: car les six fonctions

devenant égales, la seule qui resterait ne dépendrait que d'une équation du premier degré. De là résulterait bien la connaissance de la valeur de la fonction $g\alpha + g\beta + g\gamma$; mais, outre que nous n'aurions, qu'une fonction, au lieu de deux dont nous avons besoin (n° 548), celle-ci n'apprendrait rien de plus que l'équation $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

551. L'abaissement aurait aussi lieu si l'on faisait seulement $h = g$, car les six fonctions, devenant égales deux à deux, se réduiraient à ces trois:

$$g\alpha + g\beta + i\gamma$$

$$g\alpha + g\gamma + i\beta$$

$$g\beta + g\gamma + i\alpha,$$

et ne dépendraient plus que d'une équation du troisième degré.

Mais, par supposition, nous ne savons résoudre les équations du troisième degré que dans deux cas:

1° Lorsque tous leurs termes étant transportés dans le premier membre, ce premier membre est un cube parfait, et que les soluteurs sont égaux. C'est ce que l'on comprendra très-bien par le n° 537.

2° Lorsqu'elles sont à deux termes, on extrait alors la racine cube arithmétique (n° 492) du terme connu transporté dans le second membre, et l'on multiplie cette racine par les trois racines cubiques de l'unité (n° 491); les trois produits sont les trois soluteurs de l'équation.

552. Pour faire rentrer dans le premier de ces cas l'équation du troisième degré qui doit avoir pour soluteurs les trois fonctions du numéro précédent, il faudrait poser en fait l'égalité de ces trois fonctions. Mais il est facile de voir, par l'observation du n° 538, que l'on aurait alors $i = g$; en sorte qu'il ne resterait qu'une fonction dont la connaissance ne mènerait à rien (n° 550).

553. Pour faire rentrer dans le second cas du n° 551 l'équation que nous cherchons, il faudrait qu'en désignant par e une des trois fonctions du même numéro, et par $1, \rho, \rho^2$, les trois racines cubiques de l'unité (n° 498), ces trois fonctions fussent entre elles (n° 491) comme les nombres $e, e\rho, e\rho^2$. Il faudrait, par exemple, que la première fonction multipliée par ρ et par ρ^2 donnât deux produits égaux aux deux autres fonctions.

Or, le produit $g\rho.\alpha + g\rho.\beta + i\rho.\gamma$ ne peut être égal ni à la seconde

fonction, ni à la troisième : car, d'après l'observation du n° 538, ces égalités supposées donneraient $g\rho = g$, et par conséquent $\rho = 1$, ce qui ne peut avoir lieu, puisque nous avons représenté par ρ une des racines cubiques de l'unité différente de l'unité même.

L'équation dont il s'agit est donc nécessairement du sixième degré.

554. Mais nous ne savons résoudre les équations du sixième degré que dans trois cas différents :

1° Lorsque tous leurs termes étant dans le premier membre, ils forment une sixième puissance parfaite, et que tous les soluteurs sont égaux (n° 537).

2° Lorsqu'elles sont à deux termes. On extrait alors la racine sixième arithmétique (n° 492) du terme connu transporté dans le second membre, et l'on multiplie cette racine par les six racines sixièmes de l'unité (n° 491). Les six produits sont les six soluteurs de l'équation (*).

3° Lorsqu'elles ont la forme de l'équation du n° 517, dans laquelle nous pouvons supposer $m = 3$ et $2m = 6$, car ces équations se résolvent alors comme celles du second degré.

555. Pour faire rentrer dans le premier de ces cas l'équation du sixième degré qui doit avoir pour soluteurs les six fonctions du n° 549, il faudrait poser en fait l'égalité de ces six fonctions, ce qui donnerait (n° 538) $i = h = g$, et n'apprendrait rien de nouveau (nos 538, 550, 552).

556. Pour faire rentrer dans le second cas du n° 554 l'équation que nous cherchons, il faudrait qu'en désignant par e une quelconque des six fonctions du n° 549, et par $\pm 1, \pm \rho, \pm \rho^2$, les six racines sixièmes de l'unité (n° 501), la fonction désignée par e devînt égale à telle ou telle des cinq autres fonctions du n° 549, lorsqu'on la multiplierait, non-seulement par $\pm \rho$, ou par $\pm \rho^2$, mais encore, soit par -1 , soit par $-\rho$, soit enfin par $-\rho^2$.

(*) Si l'on désigne par ρ une des racines cubiques de l'unité, on aura $\rho = \sqrt[3]{1}$; et comme on a d'ailleurs $\pm 1 = \sqrt[2]{1}$, en multipliant ces deux équations entre elles, on en tirera $\pm \rho = \sqrt[6]{1}$: ce qui fait voir qu'en prenant en $+$ et en $-$ chaque racine cubique de l'unité, on obtient les six racines sixièmes de l'unité, qui sont par conséquent connues (n° 501).

Pour voir si cela peut avoir lieu, prenons le cas le plus simple, e^t multiplions par -1 la première fonction dont il s'agit, $ga + h\beta + i\gamma$, ou, ce qui revient au même, changeons ses signes, puis comparons-la aux cinq autres fonctions, pour voir si elle peut être égale, ainsi modifiée, à quelqu'une d'entre elles.

En la supposant d'abord égale à la seconde, on aurait $ga + h\gamma + i\beta = -ga - h\beta - i\gamma$; or, comme les coefficients de a doivent être égaux dans les deux membres, de même que ceux de β et ceux de γ (n° 538), nous trouverions $g = -g$, $h = -h$, et $i = -i$, ce qui est absurde.

Si on supposait ensuite cette première fonction modifiée égale à la troisième, en faisant $g\beta + ha + i\gamma = -ga - h\beta - i\gamma$, on en tirerait, par le principe cité, $g = -h$, $h = -g$, et $i = -i$; or, cette dernière égalité est encore absurde.

Si on voulait égaler la première fonction modifiée à la quatrième, en écrivant $g\beta + h\gamma + ia = -ga - h\beta - i\gamma$, on aurait $g = -h$, $h = -i$, $i = -g$, d'où l'on tirerait $-g = -i$ et $g = -g$, ce qui de nouveau est impossible.

On prouverait de même que $-ga - h\beta - i\gamma$ ne peut égaler ni la cinquième fonction du n° 549, ni la sixième.

Donc, la première fonction multipliée par -1 ne peut être égale à aucune des cinq autres; et, par conséquent, notre équation du sixième degré ne peut être une équation à deux termes.

557. Pour faire rentrer enfin dans le troisième cas du n° 554 l'équation que nous cherchons, il faudrait qu'en désignant par e et par e' deux des six fonctions du n° 549, et par 1 , ρ , ρ^2 , les trois racines cubiques de l'unité, ces fonctions fussent entre elles (n° 517) comme les nombres

$$e, \quad e\rho, \quad e\rho^2; \quad e', \quad e'\rho, \quad e'\rho^2.$$

Supposant, par exemple, la première égale à e , il faudrait que celle-là multipliée par ρ fût égale à une des cinq autres, et que la même multipliée par ρ^2 fût égale à une des quatre autres. Supposant alors une des trois qui resteraient égale à e' , il faudrait que, multipliée par ρ et par ρ^2 , elle donnât deux produits égaux aux deux autres fonctions.

Or, ce produit $g\rho \cdot a + h\rho \cdot \beta + i\rho \cdot \gamma$ ne peut pas être égal à la seconde fonction, car cette égalité supposée donnerait $g\rho = g$, et par conséquent $\rho = 1$, ce qui ne peut avoir lieu.

Il ne peut pas non plus être égal à la troisième fonction, car il faudrait pour cela que l'on eût entre autres $ip = i$, ou $p = 1$.

Essayons donc s'il ne pourrait point être égal à la quatrième. Nous poserons

$$gp \cdot \alpha + hp \cdot \beta + ip \cdot \gamma = g\beta + h\gamma + i\alpha,$$

et nous aurons $gp = i$, $hp = g$, $ip = h$. Mettant gp à la place de i dans la valeur de h , nous trouverons $h = gp^2$, et mettant gp^2 à la place de h dans la valeur de g , nous obtiendrons $g = gp^3$ ou $g = g$, parce qu'ici $p^3 = 1$ (n° 499). Faisant alors, pour simplifier, $g = 1$, nous en concluons

$$g = 1, \quad h = p^2, \quad i = p.$$

Ces valeurs étant substituées aux lettres g, h, i , dans les six fonctions précédentes, ces fonctions deviennent

$$\alpha + p^2\beta + p\gamma$$

$$\alpha + p^2\gamma + p\beta$$

$$\beta + p^2\alpha + p\gamma$$

$$\beta + p^2\gamma + p\alpha$$

$$\gamma + p^2\alpha + p\beta$$

$$\gamma + p^2\beta + p\alpha.$$

Et si l'on en forme deux assemblages, en mettant dans l'un la première, la quatrième et la cinquième, et dans l'autre la seconde, la troisième et la sixième, de cette manière :

Premier assemblage,

$$\alpha + p^2\beta + p\gamma$$

$$\beta + p^2\gamma + p\alpha$$

$$\gamma + p^2\alpha + p\beta,$$

Deuxième assemblage,

$$\alpha + p^2\gamma + p\beta$$

$$\beta + p^2\alpha + p\gamma$$

$$\gamma + p^2\beta + p\alpha,$$

il arrive que l'une quelconque de ces fonctions multipliée par p et par p^2 , donne les deux autres fonctions du même assemblage (*). D'où il résulte que les valeurs assignées à g, h, i , satisfont à toutes les conditions qu'il fallait remplir.

558. Représentant donc par e l'inconnue de l'équation du sixième degré qui devra donner la valeur de ces six fonctions, on aura les six équations alternatives suivantes,

(*) Pour vérifier cela, il faut faire attention que dans ce cas $p^3 = 1$, et que $p^4 = p$ (n° 498).

$$e - (\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma) = 0$$

$$e - (\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta) = 0$$

$$e - (\beta + \rho^2\gamma + \rho\alpha) = 0$$

$$e - (\beta + \rho^2\alpha + \rho\gamma) = 0$$

$$e - (\gamma + \rho^2\alpha + \rho\beta) = 0,$$

$$e - (\gamma + \rho^2\beta + \rho\alpha) = 0.$$

Et, pour les multiplier entre elles, on fera d'abord le produit des trois de chaque assemblage. Chacun d'eux donnera une équation du troisième degré, dont le second et le troisième terme seront nuls, et dont le dernier sera égal au cube de la première fonction. C'est ce que l'on reconnaîtra en mettant, à la place de la seconde et de la troisième fonction, la première, multipliée par ρ et par ρ^2 . Alors, la somme des trois fonctions du premier assemblage sera $(1 + \rho + \rho^2)(\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)$, ce qui se réduit à 0, parce que l'équation $y^3 - 1 = 0$ n'ayant point de second terme donne $1 + \rho + \rho^2 = 0$ (n° 496). Le second terme de l'équation en e , que donne le premier assemblage, sera donc nul. La somme des produits de ces fonctions prises deux à deux sera $(\rho + \rho^2 + \rho^3)(\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)^2$, ce qui se réduit aussi à 0, parce qu'ici $\rho^3 = 1$ (n° 498). Le troisième terme de l'équation en e , que donne le premier assemblage, sera donc aussi nul. Enfin le produit de trois fonctions sera $\rho^3(\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)^3 = (\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)^3$.

On aura donc, dans le premier assemblage,

$$e^3 - (\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)^3 = 0.$$

Par les mêmes raisons, le second assemblage donnera

$$e^3 - (\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta)^3 = 0.$$

Multipliant alors entre elles ces deux équations alternatives du troisième degré, en considérant e^3 comme l'inconnue, il en résultera (n°s 404, 408) l'équation du sixième degré,

$$e^6 - [(\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)^3 + (\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta)^3] e^3 + (\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)^3 (\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta)^3 = 0,$$

que l'on pourra résoudre comme une équation du second degré. Mais il est évident qu'avant d'en venir là il faudra développer ses coefficients, pour faire en sorte d'exprimer leur valeur au moyen des coefficients connus de la proposée. Ainsi donc :

559. 1° On fera le cube de $\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma$, en observant de mettre 1 à la place de ρ^3 et de ρ^6 lorsque ces quantités se présenteront, ρ à la place de ρ^4 , et ρ^2 à la place de ρ^5 , conformément au principe du n° 498.

2° On fera le cube de $\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta$, et pour cela il suffira de copier le cube précédent en changeant β en γ , et γ en β .

3° On ajoutera ces deux cubes, en observant de mettre -1 à la place de $\rho + \rho^2$; car, l'équation $y^3 - 1 = 0$ donnant $1 + \rho + \rho^2 = 0$ (n° 496, 558), on a $\rho + \rho^2 = -1$. Cette addition donnera

$$2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - 3(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2) + 12\alpha\beta\gamma = 2S_3 - 3(S_1S_2 - S_3) - 12R,$$

quantité qui, prise avec un signe contraire, sera le coefficient de e^3 (Voyez n° 420, 434, 408).

Or, la proposée donnant $P=0$, on a, par les formules du n° 433, $S_1=0$, $S_2=-2Q$, $S_3=-3R$, $S_1S_2-S_3=3R$, en sorte que la quantité en question se réduit à celle-ci, $-6R-9R-12R=-27R$, qui, prise avec un signe contraire, donne $27R$ pour le coefficient de e^3 .

4° Comme $(\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)^3 (\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta)^3$ est la même chose que $[(\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma)(\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta)]^3$, on multipliera $\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma$ par $\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta$, et l'on cherchera la valeur du produit, pour élever ensuite cette valeur au cube. Mais, en faisant la multiplication, on mettra encore 1 à la place de ρ^3 , et ρ à la place de ρ^4 , et dans la réduction on mettra -1 à la place de $\rho + \rho^2$. On trouvera ainsi

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = S_2 - \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)$$

pour la valeur du produit en question (Voyez les n° 434 et 438).

Or, ce produit, d'après les égalités précédentes, se réduit à $-2Q - Q = -3Q$, dont le cube $-27Q^3$ forme le terme tout connu de l'équation.

Cette équation est donc

$$e^6 + 27R e^3 - 27Q^3 = 0 \dots \dots \text{(réduite)}$$

et elle donne (n° 517)

$$e = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}R} \pm \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 27}{4}R^2 + 27Q^3}$$

ce qui fait deux valeurs de e , que l'on peut désigner par e et par e' , et qui, étant multipliées chacune par les trois racines cubiques de l'unité, fourniront les six soluteurs de la réduite (n° 517).

560. Cessix soluteurs seront les valeurs connues des six fonctions du n° 557, et l'on pourra prendre à volonté deux de ces fonctions, l'une

dans un des assemblages, et l'autre dans l'autre, pour les évaluer à e et à e' , ce qui déterminera la valeur des autres fonctions d'après leurs rapports connus avec ces deux-là.

561. Cela posé, il nous sera facile d'établir les deux équations du premier degré qui, comparées avec l'équation $\alpha + \beta + \gamma = 0$, doivent nous conduire à la connaissance des soluteurs α, β, γ , (nos 548, 549). Mais il ne faut pas perdre de vue qu'une de ces équations devra provenir de l'un des assemblages du n° 557, et l'autre de l'autre, car sans cela l'une n'exprimerait rien de plus que l'autre, puisqu'une fonction d'un assemblage donne les autres du même assemblage lorsqu'on la multiplie par p et par p^2 , qui sont des quantités connues.

562. Faisons donc d'abord

$$\alpha + p^2\beta + p\gamma = e, \quad \alpha + p^2\gamma + p\beta = e',$$

et comparons ces deux équations à celle-ci,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Si l'on traite ces trois équations de manière à en éliminer deux inconnues, et qu'ayant trouvé la valeur de la troisième, on remonte à celles des deux autres, on aura

$$\alpha = \frac{e + e'}{3}, \quad \beta = \frac{pe + p^2e'}{3}, \quad \gamma = \frac{p^2e + pe'}{3}.$$

Mais, comme ce calcul pourrait embarrasser quelques lecteurs, qu'il renferme différentes réductions qui ne se présentent pas d'elles-mêmes, et qu'on peut d'ailleurs y employer un procédé d'élimination plus simple que le procédé général, nous allons tracer ici sa marche.

Retranchons la dernière équation de la première et de la seconde, nous aurons

$$(p^2 - 1)\beta + (p - 1)\gamma = e,$$

$$(p - 1)\beta + (p^2 - 1)\gamma = e'.$$

De là nous tirerons

$$\beta + \frac{p-1}{p^2-1}\gamma = \frac{e}{p^2-1}, \quad \beta + \frac{p^2-1}{p-1}\gamma = \frac{e'}{p-1}.$$

Mais $\frac{p^2-1}{p-1} = \frac{p^2-p^3}{p-1} = \frac{(1-p)p^2}{p-1} = -p^2$, et par conséquent

$$\frac{\rho - 1}{\rho^2 - 1} = -\frac{1}{\rho^2} = -\rho^{(*)},$$

ce qui donne

$$\beta - \rho\gamma = \frac{e}{\rho^2 - 1}, \quad \beta - \rho^2\gamma = \frac{e'}{\rho - 1}:$$

retranchant la seconde de ces deux dernières équations de la première, nous aurons

$$(\rho^2 - \rho)\gamma = \frac{e}{\rho^2 - 1} - \frac{e'}{\rho - 1}.$$

Multipliant par $\rho^2 - 1$, et observant que $\rho^4 = \rho$, que $\rho^3 = 1$, et que $-1 - \rho^2 = \rho$, puisque $1 + \rho + \rho^2 = 0$, nous obtiendrons

$$3\rho\gamma = e - \frac{\rho^2 - 1}{\rho - 1} e' = e + \rho^2 e'.$$

Divisant par 3ρ , et nous souvenant que $\frac{1}{\rho} = \rho^2$, et que $\rho^4 = \rho$, nous aurons

$$\gamma = \frac{e + \rho^2 e'}{3\rho} = \frac{e + \rho^2 e'}{3} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\rho^2 e + \rho e'}{3}.$$

Reprenant alors les deux premières équations en β et γ sans α , les ajoutant ensemble, et observant que $\rho^2 - 1 + \rho - 1 = -3$, parce que $\rho^2 + \rho = -1$, nous aurons

$$-3\beta - 3\gamma = e + e';$$

et de là nous tirerons, en mettant à la place de γ sa valeur déjà trouvée, changeant les signes et transposant,

$$3\beta = -e - e' - \rho^2 e - \rho e' = -(1 + \rho^2)e - (1 + \rho)e'.$$

ce qui donnera, à cause de $1 + \rho^2 = -\rho$, $\beta = \frac{\rho e + \rho^2 e'}{3}$.

Substituant les valeurs de β et de γ dans l'équation $\alpha = -\beta - \gamma$, nous aurons enfin

$$\alpha = \frac{-(\rho + \rho^2)e - (\rho + \rho^2)e'}{3} = \frac{e + e'}{3}.$$

J'appellerai *valeurs du premier système* ces valeurs de α , de β et

(*) $\frac{1}{\rho^2} = \frac{\rho^3}{\rho^2} = \rho$, et $\frac{1}{\rho} = \frac{\rho^3}{\rho} = \rho^2$, parce que, dans ce cas, $\rho^3 = 1$ (n° 498).

de γ , tirées de la première disposition que nous venons de faire en posant

$$\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma = e, \text{ et } \alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta = e'.$$

563. Essayons maintenant de faire une autre disposition, et voyons ce qui en résultera.

La première disposition, qu'il est à propos de répéter encore, était celle-ci,

$$\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma = e, \quad \alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta = e', \quad \alpha + \beta + \gamma = 0;$$

et nous en avons conclu ces valeurs :

$$\alpha = \frac{e + e'}{3}, \quad \beta = \frac{\rho e + \rho^2 e'}{3}, \quad \gamma = \frac{\rho^2 e + \rho e'}{3}.$$

Au lieu de cela, posons actuellement

$$\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma = e, \quad \beta + \rho^2\alpha + \rho\gamma = e', \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Si nous multiplions la seconde équation par ρ , elle deviendra $\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta = \rho e'$, et cette seconde disposition rentrera parfaitement dans la première, en faisant dans celle-ci $e' = \rho e'$. Mettant donc dans les valeurs de α , de β et de γ de la première disposition $\rho e'$ partout où il y a e' , nous trouverons pour cette seconde disposition

$$\alpha = \frac{e + \rho e'}{3}, \quad \beta = \frac{\rho e + e'}{3}, \quad \gamma = \frac{\rho^2 e + \rho^2 e'}{3}.$$

Ce sont là les *valeurs du second système*.

564. Comparons encore avec la première disposition, cette disposition-ci,

$$\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma = e, \quad \gamma + \rho^2\beta + \rho\alpha = e', \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Si nous multiplions la seconde équation par ρ^2 , elle deviendra $\alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta = \rho^2 e'$, et cette troisième disposition rentrera dans la première, en faisant dans celle-ci $e' = \rho^2 e'$. Mettant donc, dans les valeurs de α , de β et de γ de la première disposition, $\rho^2 e'$ partout où il y a e' nous trouverons pour cette troisième disposition

$$\alpha = \frac{e + \rho^2 e'}{3}, \quad \beta = \frac{\rho e + \rho e'}{3}, \quad \gamma = \frac{\rho^2 e + e'}{3}.$$

Ce sont les *valeurs du troisième système*.

565. On pourrait continuer à faire d'autres dispositions ; mais les valeurs que l'on tirerait de chacune seraient toujours celles de l'un

des trois systèmes que nous venons d'examiner; seulement les valeurs égales dans deux systèmes différents ne correspondraient pas, du moins pas toutes, aux mêmes lettres α, β, γ , qui ne sont point déterminées à représenter telle de ces valeurs plutôt que telle ou telle autre.

Vérifions cela sur un ou deux exemples, et posons pour 4^{me} cas,

$$\beta + p^2\gamma + p\alpha = e, \quad \alpha + p^2\gamma + p\beta = e', \quad \beta + \gamma + \alpha = 0;$$

il est évident que β joue, dans les équations de ce quatrième cas, le même rôle que α dans celles du troisième (n° 564); que γ joue, dans les équations de ce quatrième cas, le même rôle que β dans celles du troisième; que α joue, dans les équations de ce quatrième cas, le même rôle que γ dans celles du troisième; en sorte qu'on tirerait de ce quatrième cas, pour β , pour γ et pour α , les valeurs que l'on a tirées du troisième pour α , pour β et pour γ , et que si on les arrangeait ainsi,

$$3^{\text{me}} \text{ cas.} \dots \alpha, \beta, \gamma$$

$$4^{\text{me}} \text{ cas.} \dots \beta, \gamma, \alpha,$$

les valeurs correspondantes dans les deux lignes seraient égales chacune à chacune.

Ces quatre cas se sont succédés dans un certain ordre; pour le continuer il faudrait à présent combiner la seconde fonction du premier assemblage avec la seconde du second, puis avec la troisième; passer de là à la troisième fonction du premier assemblage, et la combiner successivement avec les trois du second, en faisant toujours la fonction du premier assemblage égale à e , et celle du second égale à e' . Quittons cette route, et revenant à la première disposition, ou au premier cas, échangeons l'un contre l'autre les premiers membres des deux premières équations, sans rien toucher aux seconds membres, c'est-à-dire posons

$$\alpha + p^2\gamma + p\beta = e, \quad \alpha + p^2\beta + p\gamma = e', \quad \alpha + \gamma + \beta = 0;$$

il est évident que α joue dans ce cas-ci le même rôle que α dans le premier cas; que γ joue dans celui-ci le même rôle que β dans le premier; et que β joue dans celui-ci le même rôle que γ dans le premier. En sorte qu'on tirerait de ce cas-ci, pour α , pour γ et pour β , les valeurs que l'on a tirées du premier pour α , pour β et pour γ ; et que si on les arrangeait ainsi,

$$1^{\text{er}} \text{ Cas.} \dots \alpha, \beta, \gamma$$

$$\text{Cas actuel.} \dots \alpha, \gamma, \beta,$$

les valeurs correspondantes dans les deux lignes seraient égales chacune à chacune.

Pour prendre encore un cas d'un autre genre, faisons

$$\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma = e, \quad \alpha + \rho^2\gamma + \rho\beta = \rho e', \quad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

disposition dans laquelle on voit que les premiers membres sont ceux du premier cas; mais qu'il y a un second membre changé.

Si l'on divise la seconde équation par ρ , elle deviendra $\frac{1}{\rho}\alpha + \rho\gamma + \beta = e'$, ou, ce qui revient au même (n° 562, note), $\beta + \rho^2\alpha + \rho\gamma = e'$; la disposition actuelle se réduira donc par là à celle-ci,

$$\alpha + \rho^2\beta + \rho\gamma = e, \quad \beta + \rho^2\alpha + \rho\gamma = e', \quad \alpha + \beta + \gamma = 0;$$

qui est précisément celle du second cas (n° 563), et donne par conséquent les mêmes valeurs qu'elle.

Du reste, ce dernier exemple fait voir que, dans toutes les dispositions, on peut toujours ramener les seconds membres (à part l'équation $\alpha + \beta + \gamma = 0$) à ne contenir que e ou e' , les premiers étant toujours les unes ou les autres de nos six fonctions.

566. Mais enfin, voilà neuf valeurs de α , de β et de γ , au lieu de trois que nous cherchions; d'où cela provient-il? En y réfléchissant, nous découvrirons bientôt que si, au lieu de l'équation

$$x^3 + Qx + R = 0,$$

on nous eût proposé celle-ci,

$$x^3 + \rho Qx + R = 0,$$

ou cette troisième,

$$x^3 + \rho^2 Qx + R = 0,$$

nous aurions obtenu la même réduite

$$e^6 + 27Re^3 - 27Q^3 = 0,$$

car cette réduite ne contient d'autre puissance de Q que le cube, et Q^3 est le cube ou de $1Q$, ou de ρQ , ou de $\rho^2 Q$ (n°s 490, 491): en sorte que les neuf valeurs que nous avons trouvées pour α , β , γ , ou pour x , sont les neuf soluteurs de l'équation du neuvième degré, que l'on formerait en multipliant entre elles les trois équations en x ci-dessus.

567. En laissant ces équations isolées, il s'agit donc de voir quel système de valeurs correspond à la première équation, quel à la seconde, et quel à la troisième.

Ce qui établit une différence entre ces équations, c'est que le coefficient de x n'est pas le même dans les trois. Or, le coefficient de x est dans chacune égal à la somme des produits que l'on peut faire en multipliant deux à deux ses soluteurs. Il faut donc voir quel système de valeurs donne $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = Q$, quel donne $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \rho Q$, et quel donne $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \rho^2 Q$.

568. Si l'on prend les valeurs du premier système

$$\alpha = \frac{e + e'}{3}, \quad \beta = \frac{\rho e + \rho^2 e'}{3}, \quad \gamma = \frac{\rho^2 e + \rho e'}{3},$$

que l'on multiplie celle de α par celle de β , celle de α par celle de γ , et celle de β par celle de γ , en mettant toujours 1 pour ρ^3 et ρ^2 pour ρ^4 , puis que l'on ajoute ces produits, en se souvenant que $1 + \rho + \rho^2 = 0$, et que $\rho^2 + \rho = -1$, on trouvera

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{1}{3}ee' = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{e^3e'^3}.$$

Mais $e^3e'^3$ est le produit des deux soluteurs de la réduite, considérée comme équation du second degré, et ce produit est égal au dernier terme de l'équation, ou à $-27Q^3$; d'où résulte

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{-27Q^3} = Q.$$

Les valeurs du premier système sont donc celles qui conviennent à la première équation, qui est notre proposée.

En opérant de même sur les valeurs du second système, on trouverait

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{1}{3}\rho ee' = \rho Q,$$

ce qui répond à la seconde équation.

Enfin, le troisième système donnerait

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{1}{3}\rho^2 ee' = \rho^2 Q,$$

ce qui répond à la troisième équation.

569. En nous tenant donc au premier système, et mettant dans les valeurs de α , de β et de γ , celles de e , de e' , de ρ et de ρ^2 , nous aurons les soluteurs de la proposée. Or, nous avons

$$\alpha = \frac{e}{3} + \frac{e'}{3}, \quad \beta = \rho \frac{e}{3} + \rho^2 \frac{e'}{3}, \quad \gamma = \rho^2 \frac{e}{3} + \rho \frac{e'}{3}.$$

Nous avons d'ailleurs (n° 559)

$$e = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}R \pm \sqrt{\frac{27 \cdot 27}{4}R^2 + 27Q^3}},$$

ce qui revient à

$$e = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}R \pm \sqrt{\frac{27 \cdot 27}{4}R^2 + \frac{27 \cdot 27}{27}Q^3}},$$

ou à

$$e = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}R \pm 27 \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}},$$

ou enfin à

$$e = 3 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R \pm \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{e}{3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R + \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}},$$

$$\frac{e'}{3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R - \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}}.$$

En sorte que les soluteurs de l'équation

$$x^3 + Qx + R = 0, \text{ sont}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R + \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}} +$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}R - \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}}.$$

$$\beta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R + \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}} +$$

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R - \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}}.$$

$$\gamma = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R + \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}} +$$

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R - \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3}}.$$

Recherchons quelle peut être la nature de ces soluteurs dans le cas où Q et R seraient réels.

570. Si nous supposons que Q soit nul dans la proposée, celle-ci ne sera plus qu'une équation à deux termes; et comme on aura alors $+\sqrt[3]{\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3} = +\sqrt[3]{\frac{1}{4}R^2} = \frac{1}{2}R$, la valeur de α deviendra $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R} = \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-R} = \sqrt[3]{-R}$, celle de β deviendra $\rho \sqrt[3]{0} + \rho^2 \sqrt[3]{-R} = \rho^2 \sqrt[3]{-R}$, et celle de γ deviendra $\rho^2 \sqrt[3]{0} + \rho \sqrt[3]{-R} = \rho \sqrt[3]{-R}$; en sorte qu'on aura les trois soluteurs de la proposée en multipliant la fonction $\sqrt[3]{-R}$ par les trois racines cubiques de l'unité (nos 484 à 489). Un de ces soluteurs sera donc réel, et les deux autres imaginaires.

571. Si Q n'est pas nul, et que son signe soit $+$ dans la proposée, il sera aussi $+$ dans la fonction $\frac{1}{27}Q^3$; en sorte que la quantité $\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{27}Q^3$ sera directe, quel que soit dans la proposée le signe de R . Il y aura donc encore alors un solveur réel, et deux imaginaires.

572. Si Q n'est pas nul, et que son signe soit $-$ dans la proposée, il sera aussi $-$ dans la fonction $\frac{1}{27}Q^3$; et il y aura trois cas à considérer, savoir lorsqu'on aura, ou $\frac{1}{27}Q^3 = \frac{1}{4}R^2$, ou $\frac{1}{27}Q^3 < \frac{1}{4}R^2$, ou $\frac{1}{27}Q^3 > \frac{1}{4}R^2$.

1° Dans le premier cas, la valeur de α deviendra $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}R} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}R} = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}R}$; celle de β et celle de γ deviendront l'une et l'autre après toutes les réductions $-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}R}$; en sorte que les trois soluteurs seront réels.

2° Dans le second cas, il y aura, comme il est facile de le voir, un solveur réel, et deux imaginaires.

3° Dans le troisième cas, les trois soluteurs auront l'apparence imaginaire; mais on prouve qu'encore alors ils sont tous trois réels.

573. Quand nous aurons démontré cela, nous pourrons dire *lorsque dans l'équation du troisième degré sans second terme, et dont les coefficients sont réels, Q est inverse, et que l'on a en outre $\frac{1}{27} Q^3 > \frac{1}{4} R^3$, ou du moins $\frac{1}{27} Q^3 = \frac{1}{4} R^3$, les trois soluteurs sont réels; dans tous les autres cas, il n'y en a qu'un de réel, et les deux autres sont imaginaires* (n°s 570, 571, 572).

574. De ce théorème résultera celui-ci: *Toute équation du troisième degré, et dont les coefficients sont réels, a au moins un solveur réel.*

575. Du reste, il faut bien observer que les soluteurs réels pourront être, suivant les cas, commensurables ou incommensurables.

576. Il faut aussi remarquer que, puisque l'équation est sans second terme, la somme des trois soluteurs est zéro (n° 410).

577. Enfin, dans le cas où l'équation n'a qu'un solveur réel représenté par α , il est clair que les deux soluteurs imaginaires sont ceux de l'équation du second degré, que l'on peut former en égalant à zéro le quotient du premier membre de la proposée divisé par $x - \alpha$ (n°s 387, 388, 389).

Ces soluteurs imaginaires proviennent donc d'une équation du second degré, comparable à celle que nous avons considérée au n° 545.

578. Démontrons actuellement que, dans le cas où Q est inverse et que l'on a $\frac{1}{27} Q^3 > \frac{1}{4} R^3$, les trois soluteurs sont réels malgré leur apparence imaginaire. Pour cela, faisons $-\frac{1}{2} R = a$, et $\sqrt{\frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{27} Q^3} = \sqrt{-b'} = \sqrt{-1.b'} = \sqrt{b'}. \sqrt{-1} = b \sqrt{-1}$, en mettant b pour $\sqrt{b'}$, soit que b' soit ou ne soit pas un carré; nous aurons

$$\alpha = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, que chacun des deux termes de cette valeur de α soit réductible ou non par la méthode du n° 520, dont nous n'essaierons pas de faire usage ici, puisqu'elle suppose elle-même la résolution

d'une équation du troisième degré, quelle que soit, dis-je, la nature de ces termes, nous aurons

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{a(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})} = a^{\frac{1}{3}}(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{a(1-\frac{b}{a}\sqrt{-1})} = a^{\frac{1}{3}}(1-\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}},$$

Faisant encore $\frac{b}{a} = c$, la formule du binôme donnera

$$(1+c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}c\sqrt{-1} + \frac{2}{3.6}c^2 - \frac{2.5}{3.6.9}c^3\sqrt{-1} - \frac{2.5.8}{3.6.9.12}c^4 + \frac{2.5.8.11}{3.6.9.12.15}c^5\sqrt{-1} + \frac{2.5.8.11.14}{3.6.9.12.15.18}c^6 - etc.$$

Supposant que l'on multiplie ce développement par $a^{\frac{1}{3}}$, et qu'on représente ensuite par A la somme des quantités qui ne contiennent pas $\sqrt{-1}$, et par B la somme de celles qui sont multipliées par ce radical, on aura

$$a^{\frac{1}{3}}(1+c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = A + B\sqrt{-1}.$$

Pour avoir le développement de $(1-c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, il est clair qu'il suffira de changer dans le précédent les signes des termes qui contiennent les puissances impaires de c . Or, comme ces termes sont précisément ceux qui contiennent $\sqrt{-1}$, il est clair qu'on aura

$$a^{\frac{1}{3}}(1-c\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = A - B\sqrt{-1}.$$

En sorte que la valeur d' a est celle-ci,

$$A + B\sqrt{-1} + A - B\sqrt{-1} = 2A.$$

$$\text{Celle de } \beta \text{ est } \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}(A + B\sqrt{-1}) + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$(A - B\sqrt{-1});$$

et lorsqu'on fait les multiplications indiquées, elle se réduit à $-(A + B\sqrt{3})$.

Celle de γ est $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} (A + B\sqrt{-1}) + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} (A - B\sqrt{-1})$; et lorsqu'on effectue les multiplications, elle se réduit à $-(A - B\sqrt{3})$.

On a donc

$$\alpha = +2A$$

$$\beta = -(A + B\sqrt{3})$$

$$\gamma = -(A - B\sqrt{3}),$$

quantités réelles.

579. Non-seulement cette méthode prouve la réalité des trois soluteurs dans le cas actuel; mais elle donne encore par approximation les valeurs de ces soluteurs.

Si l'on a $a > b$, c sera plus petit que 1; et les séries ci-dessus seront convergentes, et pourront servir immédiatement au calcul des valeurs en question (nos 153, 154).

Mais si l'on a $a < b$, c sera plus grand que 1; et les séries ci-dessus étant divergentes, il faudra leur en substituer d'autres qui, au lieu de procéder suivant les puissances de $\frac{b}{a}$, procèdent suivant celles de $\frac{a}{b}$, et soient par conséquent aussi convergentes (nos 153, 154, 155).

Nous ne faisons qu'indiquer ces objets, pour passer à d'autres matières plus importantes.

580. Du reste, tous les efforts que l'on a faits pour exprimer, dans le cas actuel, les soluteurs du troisième degré autrement que par des formules affectées d'imaginaires, ou par des séries illimitées, ayant été inutiles, on a désigné ce même cas par le nom de *cas irréductible*: c'est celui dans lequel on a Q inverse, et en même temps $\frac{1}{27} Q^3 > \frac{1}{4} R^2$.

CHAPITRE VI.

De la résolution des équations du quatrième degré par la recherche de certaines fonctions des soluteurs. Nature de ces soluteurs.

581. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les soluteurs de l'équation sans second terme

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

et cherchons trois équations du premier degré, de la forme $ga + h\beta + i\gamma + k\delta = e$, qui, conjointement avec l'équation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, puissent nous donner les valeurs de α , de β , de γ et de δ .

582. Comme quatre lettres sont susceptibles de 24 permutations, l'équation qui peut nous donner la valeur des fonctions que nous voulons trouver, paraît devoir être du 24^{me} degré (nos 535, 549). Voyons si l'on ne pourrait point l'abaisser.

Nous ne devons pas faire $k = i = h = g$, car des vingt-quatre fonctions il n'en resterait qu'une, et nous en voulons au moins trois. D'ailleurs, la connaissance de cette fonction n'apprendrait rien de plus que l'équation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

Mais, en faisant $k = i$, l'équation s'abaisse au douzième degré, et en faisant encore $h = g$, elle s'abaisse au sixième. Il n'est pas possible de l'abaisser davantage sans retomber dans le cas précédent.

Les fonctions que nous avons à considérer sont donc celles-ci :

$$ga + g\beta + i\gamma + i\delta$$

$$ga + g\gamma + i\beta + i\delta$$

$$ga + g\delta + i\beta + i\gamma$$

$$g\beta + g\gamma + i\alpha + i\delta$$

$$g\beta + g\delta + i\alpha + i\gamma$$

$$g\gamma + g\delta + i\alpha + i\beta.$$

583. Mais nous ne savons résoudre les équations du sixième degré que dans quatre cas différents :

1^o Lorsque le second membre étant zéro, le premier est une sixième puissance parfaite;

2° Lorsqu'elles sont à deux termes ;

3° Lorsqu'elles ont la forme de l'équation du n° 517 ;

4° Lorsqu'elles peuvent se résoudre comme une équation du troisième (Voyez n° 525).

584. Pour faire rentrer l'équation que nous cherchons dans le premier de ces cas, il faudrait supposer l'égalité des six fonctions ci-dessus, ce qui ne mènerait à rien.

585. Pour la faire rentrer dans le second, il faudrait qu'une quelconque des six fonctions ci-dessus étant multipliée soit par -1 , soit par $\pm p$, soit par $\pm p^2$, elle se trouvât ainsi égale à telle ou telle des cinq autres fonctions (n° 556).

Or, le produit $g_p \cdot \alpha + g_p \cdot \beta + i_p \cdot \gamma + i_p \cdot \delta$, ne peut être égal ni à la seconde fonction, ni à la troisième, ni à la quatrième, ni à la cinquième, parce que ces égalités donneraient également (n° 538) $g_p = g$, ou $p = 1$, ce qui n'est pas possible.

Ce même produit ne peut pas non plus être égal à la sixième fonction, car cette égalité donnerait $g_p = i$, et $i_p = g$; mettant g_p à la place de i dans la valeur de g , on aurait $g_p^2 = g$, ou $p^2 = 1$, ce qui n'est pas possible. Les conditions de ce cas ne peuvent donc pas être remplies.

586. Pour faire rentrer l'équation cherchée dans le troisième cas ci-dessus, il faudrait que, désignant par e et e' deux des six fonctions, et par $1, p, p^2$, les trois racines cubiques de l'unité, ces fonctions fussent entre elles comme les nombres $e, ep, ep^2, e', e'p, e'p^2$ (n° 557). Il faudrait donc, entre autres, que l'on eût la première fonction multipliée par p égale à une des autres. Mais cela donnerait, comme dans le cas précédent, ou $p = 1$, ou $p^2 = 1$, ce qui n'est pas possible. Ainsi les conditions de ce cas ne peuvent pas non plus être remplies.

587. Enfin, pour faire rentrer l'équation cherchée dans le quatrième cas ci-dessus, ou pour lui donner la forme $e^6 + Ce^4 + Be^2 + A = 0$, il faudrait qu'en désignant par e, e', e'' , trois des six fonctions, les trois autres fussent égales à $-e, -e', -e''$: car, en faisant les carrés de ces six quantités, ces carrés se réduiraient à ces trois, e^2, e'^2, e''^2 , qui seraient les solveurs de l'équation $e^6 + Ce^4 + etc. = 0$, considérée comme équation du troisième degré. En d'autres termes, il

faudrait qu'en changeant les signes de trois des six fonctions, on retrouvât les trois autres.

588. Or, si l'on change les signes de la première, elle devient $-ga - g\beta - i\gamma - i\delta$, ce qui ne peut être égal ni à la seconde, ni à la troisième, ni à la quatrième, ni à la cinquième fonction : car ces égalités donneraient également $-g = g$, résultat absurde. Mais, en faisant cette quantité égale à la sixième fonction, on a $-g = i$ et $-i = g$, ce qui revient au même. Prenant alors, pour plus de simplicité, $g = 1$, on a $i = -1$, et les six fonctions deviennent

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta$$

$$\alpha + \gamma - \beta - \delta$$

$$\alpha + \delta - \beta - \gamma$$

$$\beta + \gamma - \alpha - \delta$$

$$\beta + \delta - \alpha - \gamma$$

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta.$$

L'on voit que la première et la dernière ne diffèrent que par le signe, qu'il en est de même de la seconde et de l'avant-dernière, de la troisième et de la quatrième. D'où il résulte que les valeurs assignées à g, h, i, k , satisfont aux conditions qu'il fallait remplir (n° 587).

589. Cela posé, si l'on écrit ces fonctions deux à deux, sur trois lignes superposées, en mettant sur une même ligne les fonctions qui ne diffèrent que par le signe, on aura le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} +(\alpha + \beta - \gamma - \delta) & -(\alpha + \beta - \gamma - \delta) \\ +(\alpha + \gamma - \beta - \delta) & -(\alpha + \gamma - \beta - \delta) \\ +(\alpha + \delta - \beta - \gamma) & -(\alpha + \delta - \beta - \gamma), \end{array}$$

et l'on pourra poser les six équations alternatives

$$\begin{array}{ll} e - (\alpha + \beta - \gamma - \delta) = 0 & e + (\alpha + \beta - \gamma - \delta) = 0 \\ e - (\alpha + \gamma - \beta - \delta) = 0 & e + (\alpha + \gamma - \beta - \delta) = 0 \\ e - (\alpha + \delta - \beta - \gamma) = 0 & e + (\alpha + \delta - \beta - \gamma) = 0, \end{array}$$

de la multiplication desquelles doit résulter l'équation du sixième degré que nous cherchons à former.

Comme que l'on s'y prenne pour faire ce calcul, on arrivera, ainsi que nous l'avons désiré, à une équation qui ne contiendra que les puissances paires de e , et dont les coefficients seront des fonctions symétriques des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, c'est-à-dire des soluteurs de la

proposée. En sorte que ces coefficients pourront être exprimés au moyen des coefficients Q, R, S , de cette même proposée. Mais, pour ne pas risquer de laisser les commençants dans l'embarras, nous allons leur tracer la marche à suivre, en les avertissant qu'on pourrait tendre au même but par différentes routes.

590. Nous multiplierons d'abord deux à deux les équations qui sont sur une même ligne, ce qui nous donnera sans calcul (n° 118)

$$e^2 - (\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2 = 0$$

$$e^2 - (\alpha + \gamma - \beta - \delta)^2 = 0$$

$$e^2 - (\alpha + \delta - \beta - \gamma)^2 = 0$$

591. Nous observerons ensuite que

$$(\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2 =$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\gamma - 2\delta)^2 =$$

$$[(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 2(\gamma + \delta)]^2 =$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 - 4\alpha\gamma - 4\beta\gamma -$$

$$4\gamma^2 - 4\gamma\delta - 4\alpha\delta - 4\beta\delta - 4\gamma\delta - 4\delta^2 +$$

$$4\gamma^2 + 8\gamma\delta + 4\delta^2.$$

Mais, comme $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ (n° 581), le carré de cette somme est aussi 0, en sorte que le développement ci-dessus se réduit à $-4(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta) = -4(Q - \alpha\beta - \gamma\delta) = 4(\alpha\beta + \gamma\delta - Q)$.

De cette valeur, nous tirerons celle de $(\alpha + \gamma - \beta - \delta)^2$, car la précédente fonction revient à celle-ci, lorsqu'on y met γ à la place de β , et β à la place de γ . Par cette simple observation, nous trouverons tout de suite

$$(\alpha + \gamma - \beta - \delta)^2 = 4(\alpha\gamma - \beta\delta - Q).$$

Enfin, de cette dernière valeur, nous tirerons celle de $(\alpha + \delta - \beta - \gamma)^2$, en y mettant δ à la place de γ , et γ à la place de δ . Nous aurons ainsi

$$(\alpha + \delta - \beta - \gamma)^2 = 4(\alpha\delta + \beta\gamma - Q).$$

592. Mais il est clair que nous aurions évité le multiplicateur 4, qui se trouve dans ces valeurs, si, au lieu de faire $g=1$ et $i=-1$ dans nos six fonctions, nous y eussions fait $g=\frac{1}{2}$ et $i=-\frac{1}{2}$: car ces fonctions auraient été ainsi deux fois plus petites, et leurs carrés quatre fois plus petits. Nous reviendrons donc en arrière à cet égard, afin de simplifier nos calculs et la réduite qui en doit résulter, et

nous supposerons les fonctions en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, des n^{os} 588 et 589, divisées par 2, ce qui donnera pour e des valeurs la moitié moindres que les précédentes; il faudra alors supposer les carrés de ces mêmes fonctions divisés par 4 dans le n^o 590, ce qui donnera pour e^2 des valeurs quatre fois plus petites.

D'après cette supposition, et d'après les valeurs trouvées au n^o 591, les trois équations du n^o 590 se changeront en celles-ci,

$$e^2 - (\alpha\beta + \gamma\delta - Q) = 0$$

$$e^2 - (\alpha\gamma + \beta\delta - Q) = 0$$

$$e^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma - Q) = 0,$$

auxquelles on pourra donner cette forme :

$$e^2 + Q - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 0$$

$$e^2 + Q - (\alpha\gamma + \beta\delta) = 0$$

$$e^2 + Q - (\alpha\delta + \beta\gamma) = 0.$$

593. Représentant alors, pour quelques moments seulement, et pour abrégér les calculs; représentant, dis-je, $e^2 + Q$ par u , on aura

$$u - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 0$$

$$u - (\alpha\gamma + \beta\delta) = 0$$

$$u - (\alpha\delta + \beta\gamma) = 0.$$

Or, l'équation du troisième degré en u , qui sera le produit de ces trois, aura pour coefficient de son second terme la somme des quantités $\alpha\beta + \gamma\delta$, $\alpha\gamma + \beta\delta$, $\alpha\delta + \beta\gamma$, en prenant cette somme avec un signe contraire. Elle aura pour coefficient de son troisième terme la somme des produits de ces mêmes quantités multipliées deux à deux. Elle aura pour dernier terme le produit de ces trois fonctions avec un signe contraire. Cherchons, d'après cela, ces coefficients.

Coefficient du second terme de l'équation en u.

$$-(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) = -Q.$$

Coefficient du troisième terme de l'équation en u.

$$\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta\delta + \alpha\beta^2\delta + \alpha\beta\delta^2 + \alpha^2\gamma\delta + \alpha\gamma^2\delta + \alpha\gamma\delta^2 + \beta^2\gamma\delta + \beta\gamma^2\delta + \beta\gamma\delta^2 = \frac{1}{2}(S_2S_1^2 - 2S_3S_1 - S_2^2 + 2S_4) \text{ (n^{os} 436, 438)} = -4S.$$

(Car on a $P=0$, et par conséquent $S_1=0$, $S_2=-2Q$, $S_3=-3R$, $S_4=2Q^2-4S$).

Dernier terme de l'équation en u .

$$-[(\alpha^3\beta\gamma\delta + \alpha\beta^3\gamma\delta + \alpha\beta\gamma^3\delta + \alpha\beta\gamma\delta^3) + (\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2\delta^2 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2\delta^2)] = -[\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + \frac{1}{6}(S_2^5 - 3S_4S_2 + 2S_6)]$$

$$(n^{\text{os}} 436, 438) = -[S(-2Q) + \frac{1}{6}(-8Q^3 + 12Q^3 - 24QS - 4Q^3 + 12QS + 6R^2)] = -(-4QS + R^2) = 4QS - R^2.$$

(Car on a, outre les valeurs précédentes, $S_6 = -2Q^3 + 6QS + 3R^2$ (n° 433)).

L'équation en u sera donc

$$u^3 - Qu^2 - 4Su + (4QS - R^2) = 0.$$

594. Et par conséquent celle en e sera, en remettant $e^2 + Q$ à la place de u ,

$$\left. \begin{array}{rcl} e^6 + 3Qe^4 + 3Q^2e^2 + Q^3 \\ - Q \quad - 2Q^2 \quad - Q^3 \\ \quad - 4S \quad - 4QS \\ \quad \quad + 4QS \\ \quad \quad \quad - R^2 \end{array} \right\} = 0,$$

ou, en réduisant,

$$e^6 + 2Qe^4 + (Q^2 - 4S)e^2 - R^2 = 0 \text{ (réduite).}$$

595. Pour résoudre cette équation, il faudrait la traiter comme une équation du troisième degré, en prenant e^2 pour l'inconnue. On ferait donc d'abord disparaître le second terme : pour cela, on poserait $e^2 = y - \frac{2}{3}Q$, et substituant cette valeur dans la réduite, on obtiendrait une équation du troisième degré en y , et sans second terme. On la comparerait alors à l'équation générale du n° 547, et l'on verrait ce qu'il faudrait substituer à Q et à R dans les formules du n° 569, pour avoir les trois valeurs d' y , desquelles on conclurait ensuite les trois valeurs de e^2 . Extrayant enfin les racines carrées de ces trois valeurs, et les prenant soit en plus, soit en moins, on aurait les six valeurs de e , ou les six soluteurs de la réduite du quatrième degré.

Supposons ce calcul fait, et continuons, pour plus de simplicité, à représenter les six soluteurs dont il s'agit par $e, e', e'', -e, -e', -e''$, tous ces caractères désignant maintenant des quantités connues.

596. Ces six valeurs sont celles des six fonctions du n° 589, supposées divisées par 2 (n° 592), et l'on pourra prendre à volonté une

de ces fonctions pour l'égaliser à e ; mais alors la fonction de signe contraire sera égale à $-e$; prenant une troisième fonction pour l'égaliser à e' , celle de signe contraire sera égale à $-e'$; enfin les deux autres fonctions seront égales à e'' et à $-e''$.

597. Cela posé, il nous sera facile d'établir les trois équations du premier degré, qui, comparées avec l'équation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, doivent nous conduire à la connaissance des soluteurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de la proposée. Mais il ne faut pas perdre de vue que, parmi ces trois équations, il ne doit pas y en avoir deux qui ne diffèrent que par le signe, car elles n'exprimeraient rien de plus l'une que l'autre.

598. Faisons donc d'abord

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma - \delta) &= e \\ -\frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta - \delta) &= e' \\ -\frac{1}{2}(\alpha + \delta - \beta - \gamma) &= e'', \end{aligned}$$

et comparons ces trois équations à celle-ci,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0;$$

nous en tirerons facilement les valeurs de α , de β , de γ et de δ . Voici comment on pourra opérer :

Ces quatre équations reviennent à celles-ci,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \gamma - \delta &= -2e, & \alpha + \gamma - \beta - \delta &= -2e', \\ \alpha + \delta - \beta - \gamma &= -2e'', & \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 0; \end{aligned}$$

la dernière donne $\alpha = -\beta - \gamma - \delta$; mettant cette valeur dans les trois autres, elles se réduisent à

$$\gamma + \delta = e, \quad \beta + \delta = e', \quad \beta + \gamma = e''.$$

La dernière de ces trois donne $\beta = e'' - \gamma$; mettant cette valeur dans la seconde, on obtient $\gamma + \delta = -e' + e''$; et retranchant ce résultat de la première, on trouve $2\delta = e + e' - e''$, ou $\delta = \frac{1}{2}(e + e' - e'')$. Substituant cette valeur dans l'équation $\gamma + \delta = e$ ou $\gamma = e - \delta$, on a $\gamma = \frac{1}{2}(e - e' + e'')$. Cette valeur de γ , mise dans l'équation $\beta = e'' - \gamma$, donne $\beta = \frac{1}{2}(-e + e' + e'')$. Enfin, les valeurs de β , de γ et de δ , mises dans l'équation $\alpha = -\beta - \gamma - \delta$, donnent $\alpha = \frac{1}{2}(-e - e' - e'')$. On a donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(-e - e' - e'') \\ \beta &= \frac{1}{2}(-e + e' + e'') \\ \gamma &= \frac{1}{2}(+e - e' + e'') \\ \delta &= \frac{1}{2}(+e + e' - e''). \end{aligned}$$

Ce sont les valeurs du premier système.

599. Essayons de faire une autre disposition, et posons

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma - \delta) = e$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta - \delta) = e'$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \delta - \beta - \gamma) = e''$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Pour faire rentrer cette disposition dans la première, il suffira de prendre $-e$, $-e'$ et $-e''$, au lieu de e , de e' et de e'' , comme on le voit en changeant le signe général des premiers membres, et par conséquent celui des seconds. Faisant donc ces changements de signes dans les valeurs de α , de β , de γ et de δ , nous aurons pour ce cas

$$\alpha = \frac{1}{2}(+e + e' + e'')$$

$$\beta = \frac{1}{2}(+e - e' - e'')$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(-e + e' - e'')$$

$$\delta = \frac{1}{2}(-e - e' + e'').$$

Ce sont les valeurs du second système.

600. On pourrait continuer à faire d'autres dispositions; mais les valeurs que l'on tirerait de chacune seraient toujours celles de l'un des deux systèmes que nous venons d'examiner.

Vérifions cela sur un exemple, et posons

$$-\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma - \delta) = e$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta - \delta) = e'$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha + \delta - \beta - \gamma) = e''$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Si l'on change le signe des deux membres de la seconde équation, cette disposition rentrera dans la première, en mettant $-e'$ partout où il y avait e' ; on trouvera ainsi

$$\alpha = \frac{1}{2}(-e + e' - e'')$$

$$\beta = \frac{1}{2}(-e - e' + e'')$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(+e + e' + e'')$$

$$\delta = \frac{1}{2}(+e - e' - e''),$$

et ces valeurs seront celles du second système; mais, ce qui était représenté là par α , β , γ , δ , sera représenté ici par γ , δ , α , β .

Il y a une autre manière de reconnaître cela.

Notre dernière disposition revient à celle-ci,

$$\frac{1}{2}(\gamma + \delta - \alpha - \beta) = e$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \delta - \beta) = e'$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + \beta - \delta - \alpha) = e''$$

$$\gamma + \delta + \alpha + \beta = 0;$$

et si on la compare, après cet arrangement nouveau, à la seconde disposition, on voit que γ joue ici le même rôle que α là, que δ joue ici le même rôle que β là, que α joue ici le même rôle que γ là; enfin, que β joue ici le même rôle que δ là.

601. Mais voilà cependant huit valeurs de α , de β , de γ et de δ , au lieu de quatre que nous cherchions; d'où cela provient-il? En y réfléchissant, nous découvrirons bientôt que si, au lieu de l'équation

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

on nous eût proposé celle-ci,

$$x^4 + Qx^2 - Rx + S = 0,$$

nous aurions obtenu la même réduite,

$$e^6 + 2Qe^4 + (Q^2 - 4S)e^2 - R^2 = 0;$$

car cette réduite ne contient d'autre puissance de R que le carré, et R^2 est le carré ou de $+R$ ou de $-R$.

En sorte que les huit valeurs que nous avons trouvées pour α , β , γ , δ , ou pour x , sont les huit soluteurs de l'équation du huitième degré, que l'on formerait en multipliant entre elles les deux équations en x ci-dessus.

602. En laissant ces équations isolées, il s'agit donc de voir quel système de valeurs correspond à la première équation, et quel à la seconde.

Ce qui établit une différence entre ces équations, c'est que le coefficient de x n'est pas le même dans les deux. Or, le coefficient de x est dans chacune égal à la somme prise avec un signe contraire des produits que l'on peut faire en multipliant trois à trois ses soluteurs. Il faut donc voir quel système de valeurs donne $-(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) = +R$, et quel donne $-(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) = -R$.

603. Si l'on prend les valeurs du premier système, et qu'on fasse les multiplications nécessaires, on trouve, après toutes réductions,

$-(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) = +ee'e'' = +\sqrt{e^2e'^2e''^2} = +\sqrt{R^2}$, parce que $e^2e'^2e''^2$ est le produit des trois soluteurs de la réduite, considérée comme équation du troisième degré, et que ce produit est égal au dernier terme de cette réduite, pris avec un signe contraire, ou à R^2 . Mais $+\sqrt{R^2} = +R$. Donc les valeurs du premier système sont celles qui se rapportent à la première équation en x , ou à la proposée.

En opérant de même sur les valeurs du second système, on trouverait

$-(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) = -ee'e'' = -\sqrt{e^2e'^2e''^2} = -\sqrt{R^2} = -R$, ce qui répond à la seconde équation en x .

604. Disons actuellement un mot sur la nature des soluteurs de l'équation du quatrième degré, dans le cas où ses coefficients seraient réels. Comme nous avons exprimé ces soluteurs au moyen de ceux de la réduite, il est clair que la nature de ceux-là dépendra de la nature de ceux-ci. Mais du reste, nous n'examinerons que les valeurs du premier système, car en changeant leurs signes on a celles du second.

605. Le dernier terme de la réduite étant R^2 pris en moins, et R^2 provenant de $\pm R$ élevé au carré, ce dernier terme sera inverse, quelle que soit la proposée.

D'un autre côté, ce dernier terme étant avec un signe contraire le produit des trois soluteurs de la réduite considérée comme équation du troisième degré, ce produit est nécessairement direct.

606. Cela posé, considérons d'abord le cas où la réduite aurait ses trois soluteurs réels: pour que leur produit soit direct, comme il doit l'être (n° 605), il faut qu'ils soient, ou tous trois directs, ou un direct et deux inverses.

1° Si les trois soluteurs de la réduite sont réels et directs, ces trois soluteurs étant e^2, e'^2, e''^2 , leurs racines $+e, -e, +e', -e', +e'', -e''$, seront réelles, et par conséquent les quatre soluteurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, de la proposée, qui sont formés de ces quantités-là (n° 598), seront réels; mais ils seront sous l'influence du cas irréductible.

2° Si les trois soluteurs de la réduite sont réels, et qu'il y en ait un direct et deux inverses égaux; si, par exemple, e^2 est direct, et que e'^2

et e''^2 soient inverses et égaux, les quantités représentées par $+e$ et $-e$ seront réelles; mais les quantités représentées par $+e'$, $-e'$, $+e''$, $-e''$, seront imaginaires, et à part leurs signes, elles seront égales. Alors on aura $\alpha = \frac{1}{2}(-e - 2e')$, $\beta = \frac{1}{2}(-e + 2e')$, $\gamma = \frac{1}{2}e$, $\delta = \frac{1}{2}e$. C'est-à-dire que les deux premiers soluteurs de la proposée seront imaginaires, et que les deux derniers seront réels et égaux. On reconnaîtra facilement qu'en général, dans le cas actuel, la proposée aura deux soluteurs réels égaux, et deux imaginaires.

3^o Si les trois soluteurs de la réduite sont réels, et qu'il y en ait un direct et deux inverses inégaux, il y aura deux des six quantités $+e$, $-e$, $+e'$, $-e'$, $+e''$, $-e''$, qui seront réelles, et quatre imaginaires; mais ces dernières étant inégales, elles ne se détruiront point dans l'expression des valeurs de α , β , γ , δ ; en sorte que la proposée aura ses quatre soluteurs imaginaires.

607. Considérons à présent le cas où la réduite aurait un soluteur réel et deux imaginaires, c'est-à-dire où une des trois quantités e^2 , e'^2 , e''^2 , par exemple la première, serait réelle, et les deux autres imaginaires. Les deux soluteurs imaginaires de la réduite sont ceux d'une équation considérée comme du second degré, et de la forme $e^4 + pe^2 + q = 0$, c'est-à-dire dont le dernier terme est direct (n^o 577): leur produit est donc direct, parce que dans ce degré il doit être de même signe que le dernier terme. Mais le produit des trois soluteurs de la réduite est toujours direct (n^o 605); donc le troisième soluteur, ou le soluteur réel, est direct. Donc, des six quantités $+e$, $-e$, $+e'$, $-e'$, $+e''$, $-e''$, deux sont réelles, par exemple les deux premières: ce sont les racines du soluteur réel et direct de la réduite, et les quatre autres sont imaginaires; ce sont les racines des deux soluteurs imaginaires de la réduite.

Cela posé, si nous résolvons l'équation $e^4 + pe^2 + q = 0$, pour avoir la forme des deux soluteurs imaginaires, nous trouverons qu'ils ont pour expression $e'^2 = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ et $e''^2 = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Faisant, pour abrégér, $-\frac{1}{2}p = m$ et $\frac{1}{4}p^2 - q = -n$, parce que cette quantité est nécessairement inverse, nous aurons

$$e'^2 = m + \sqrt{-n} \quad e''^2 = m - \sqrt{-n};$$

et de là nous tirerons

$$+e' = +\sqrt{m+\sqrt{-n}}$$

$$-e' = -\sqrt{m+\sqrt{-n}}$$

$$+e'' = +\sqrt{m-\sqrt{-n}}$$

$$-e'' = -\sqrt{m-\sqrt{-n}};$$

substituant ces valeurs dans celles de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, nous aurons

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[-e - \left(\sqrt{m+\sqrt{-n}} + \sqrt{m-\sqrt{-n}} \right) \right]$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[-e + \left(\sqrt{m+\sqrt{-n}} + \sqrt{m-\sqrt{-n}} \right) \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[+e - \left(\sqrt{m+\sqrt{-n}} - \sqrt{m-\sqrt{-n}} \right) \right]$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left[+e + \left(\sqrt{m+\sqrt{-n}} - \sqrt{m-\sqrt{-n}} \right) \right]$$

Or, il est facile de prouver que la somme des deux radicaux principaux que contient chacune de ces valeurs, est réelle, tandis que leur différence est imaginaire; d'où il résultera que les valeurs de α et de β sont réelles, et que celles de γ et de δ sont imaginaires.

Ayant une quantité quelconque, si on l'élève au carré, et qu'on en extraie ensuite la racine seconde, on n'aura point dénaturé cette quantité. Opérons ainsi sur la somme des radicaux en question. Je prends

$$\sqrt{m+\sqrt{-n}} + \sqrt{m-\sqrt{-n}},$$

et je trouve pour son carré, après les réductions,

$$2m + 2\sqrt{m^2 + n};$$

extrayant la racine seconde, je retrouve pour la valeur de la somme des deux radicaux ci-dessus,

$$\sqrt{2m + 2\sqrt{m^2 + n}},$$

quantité réelle : car, 1° quel que soit le signe de m , on aura $m^2 + n$ direct, puis que n , étant décidément inverse dans le radical $\sqrt{-n}$, est décidément direct ici ; 2° $\sqrt{m^2 + n}$ est le produit des deux radicaux à ajouter, produit nécessairement direct, puisqu'on a supposé que ces deux radicaux avaient le même signe ; 3° $\sqrt{m^2 + n} > m$; et par conséquent, lors même que m serait inverse, on aurait $2m + 2\sqrt{m^2 + n}$ direct.

Par le même procédé on trouverait que, si les deux radicaux en question ont un signe contraire, ils se réduisent à

$$\sqrt{2m - 2\sqrt{m^2 + n}},$$

quantité toujours imaginaire.

Maintenant, quel que soit celui des trois soluteurs e^2 , e'^2 , e''^2 , que l'on veuille supposer direct, on trouvera toujours, en raisonnant comme nous venons de le faire, que *la réduite ayant un solveur réel et deux imaginaires, la proposée aura deux solveurs réels et deux imaginaires.*

608. Les soluteurs de l'équation du quatrième degré dont les coefficients sont réels, sont donc ou tous quatre réels (n° 606, 1°), ou tous quatre imaginaires (n° 606, 3°), ou il y en a deux de réels et deux d'imaginaires (n°s 606, 3°, 607).

Les soluteurs imaginaires sont donc, dans le quatrième degré, toujours en nombre pair, comme dans le second et le troisième degré, si du moins les coefficients de ces équations sont réels.

CHAPITRE VII.

Des soluteurs égaux.

609. LA méthode que nous venons d'employer pour résoudre les équations du second, du troisième et du quatrième degré, semblerait devoir s'appliquer aux degrés supérieurs à ceux-là : mais lorsqu'il s'agit de l'équation générale du cinquième degré, ou du sixième degré, etc. celle qui devrait donner les valeurs des fonctions $e, e',$ etc. ne peut malheureusement point se ramener à l'une des formes que l'on sait résoudre.

610. On a donc dû abandonner cette marche, et chercher quelque autre procédé propre à faire découvrir les soluteurs des équations d'un degré supérieur au quatrième. Les méthodes dont nous allons nous occuper s'appliquent même souvent avec avantage aux équations du troisième et du quatrième degré, à cause du cas irréductible des formules générales.

Lagrange observe à cette occasion que ces formules se présentent, dès le troisième degré, sous une forme telle qu'il est impossible d'en tirer les valeurs numériques des soluteurs par la simple substitution de celles des coefficients, dans les cas mêmes où tous les soluteurs sont essentiellement réels. Il ajoute que cette difficulté aurait lieu à plus forte raison dans les équations des degrés supérieurs, s'il était possible de les résoudre par des formules générales.

Heureusement, dit-il encore, on a trouvé le moyen de la vaincre (cette difficulté) dans le troisième et le quatrième degré, par la considération de la trisection des angles, et par le secours des tables trigonométriques; mais ce moyen, qui dépend de la division des angles, n'est applicable, dans les degrés plus élevés, qu'à une classe d'équations très-limitée; et l'on peut assurer d'avance que, quand même on parviendrait à résoudre généralement le cinquième degré et les suivants, on n'aurait par là que des formules algébriques, précieuses en elles-mêmes, mais très-peu utiles pour la résolution effective et numérique des équations des mêmes degrés, et qui, par conséquent, ne dispense-

la somme des quotients sera représentée par la fonction (Σ) du n° 421, laquelle devient

$$mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} \dots + T,$$

lorsqu'on y met $(m-1)P$ à la place de $S_1 + mP$ (n° 422), $(m-2)Q$ à la place de $S_2 + PS_1 + mQ$ (n° 425), etc. et T à la place de $S_{m-1} + PS_{m-2} \dots + mT$ (n° 428).

614. Or, il est facile de voir que cette fonction $mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + \text{etc.}$ qui exprime la somme des quotients, se conclut immédiatement de la proposée $x^m + Px^{m-1} + \text{etc.} = 0$, et qu'il suffit pour cela de multiplier chaque terme du premier membre de cette proposée par l'exposant de la puissance de x que ce terme renferme, et de diminuer cet exposant lui-même d'une unité. (Nota. $U = Ux^\circ$.)

615. Une équation donc étant donnée, pour savoir si elle a des soluteurs égaux, on formera par la règle précédente la fonction (Σ) , et l'on cherchera le plus grand commun diviseur de cette fonction et du premier membre de la proposée. Si ce plus grand commun diviseur n'existe pas, la proposée n'aura point de soluteurs égaux; s'il existe, il sera composé des facteurs égaux de la proposée, élevés chacun à un degré d'une unité moindre que dans cette proposée elle-même (n° 612).

Ce diviseur commun égalé à zéro sera donc une nouvelle équation à résoudre; mais si les facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. n'étaient qu'au second degré dans la proposée, ils ne seront qu'au premier degré dans le diviseur commun, et la nouvelle équation n'aura point de soluteurs égaux. Si, au contraire, quelqu'un des facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. était au troisième degré, ou au quatrième degré, etc. dans la proposée, ce facteur-là sera, dans le diviseur commun, à un degré plus élevé que le premier, et la nouvelle équation aura encore des soluteurs égaux, dont on reconnaîtra l'existence par la méthode précédente.

En continuant d'abaisser ainsi autant que possible la proposée, on pourra souvent arriver à une équation résoluble.

616. Un exemple éclaircira tout cela.

Soit l'équation

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0:$$

la fonction (Σ) est, par la règle du n° 614,

$$5x^4 - 52x^3 + 201x^2 - 342x + 216;$$

et l'on trouve, pour plus grand commun diviseur,

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18.$$

Égalant ce diviseur à zéro, on pourrait essayer de résoudre l'équation qui en résulterait par les formules du troisième degré; mais si cette équation avait encore des solveurs égaux, on pourrait l'abaisser de nouveau, et la résoudre ainsi avec plus de facilité. On prendra donc comme une nouvelle proposée

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0;$$

la fonction (Σ) sera

$$3x^2 - 16x + 21,$$

et le plus grand commun diviseur

$$x - 3.$$

Il y a donc dans l'équation $x^3 - 8x^2 + etc. = 0$, deux facteurs égaux à $x - 3$, c'est-à-dire qu'elle est divisible par $(x - 3)^2$, ou par $x^2 - 6x + 9$; en essayant cette division, on trouve pour quotient $x - 2$, ce qui donne

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x - 3)^2 (x - 2).$$

De là il résulte qu'il y a dans la proposée les facteurs $(x - 3)^3$ et $(x - 2)^2$ (nos 612, 615), ou, en d'autres termes, qu'elle a trois solveurs égaux à 3, et deux égaux à 2; et c'est là tout puisqu'elle n'est que du cinquième degré.

N. B. Les commençants qui voudront s'exercer à chercher les solveurs égaux, pourront d'abord, au lieu de prendre des équations au hasard, les former par la multiplication de facteurs à volonté, comme dans les exemples suivants:

$$(x - 5)^4 (x + 2) (x - 3) (x + 1) = 0,$$

$$(x + 4)^2 (x - 3)^2 (x - 1) (x + 1) = 0,$$

$$(x + 1) (x - 1) (x + 2) (x - 2) = 0.$$

CHAPITRE VIII.

Des soluteurs rationnels.

617. Soit la proposée

$$nx^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \dots + tx + u = 0;$$

si l'on représente par a un des soluteurs de cette équation, l'on aura

$$na^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} \dots + ta + u = 0;$$

d'où l'on tirera

$$\frac{u}{a} = -(na^{m-1} + pa^{m-2} + qa^{m-3} \dots + t).$$

Cela posé, imaginons que l'exposant m soit rationnel, entier et direct, et que les coefficients $n, p, q, \dots, t, u$, ainsi que le solveur a , soient rationnels et entiers; il est clair que, dans cette hypothèse,

le quotient $\frac{u}{a}$, exprimé par

$$-(na^{m-1} + pa^{m-2} + qa^{m-3} \dots + t),$$

sera aussi rationnel et entier.

En d'autres termes, lorsqu'une équation aura la forme rationnelle et entière, si elle a quelque solveur rationnel et entier, ce solveur se trouvera parmi les nombres qui, divisant le dernier terme de l'équation, donneront des quotients rationnels et entiers.

618. Une équation donc étant proposée, nous commencerons par lui donner la forme rationnelle et entière (nos 364, 365, 370, 372), si elle ne l'a pas déjà; puis, ayant cherché les diviseurs du dernier terme de la transformée, nous les substituerons successivement à l'inconnue dans la proposée, ou dans la transformée; et si ces équations ont quelque solveur rationnel et entier, quelqu'un des diviseurs en question rendra nuls leurs premiers membres, car les solveurs de l'une sont aussi solveurs de l'autre.

619. Quant à la manière de trouver les diviseurs d'une quantité, on distinguera deux cas; 1° si cette quantité est numérique, on opérera comme il est dit dans les nos 214 à 222 de l'Arithmétique d'Euclide; 2° si cette quantité est algébrique, on procédera comme il est

enseigné dans la troisième partie de l'Algèbre de Clairaut, n° xxviii et suivants.

620. Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0,$$

qui a déjà la forme rationnelle et entière; les diviseurs rationnels et entiers de son dernier terme sont $+1, -1, +a, -a, +b, -b, +c, -c, +ab, -ab, +ac, -ac, +bc, -bc, +abc, -abc$; et, parmi ces diviseurs, $+a, +b$ et $+c$, rendent le premier membre nul, et sont par conséquent soluteurs.

Soit encore l'équation

$$x^3 - (2a + 2b)x^2 + (a^2 + 3ab + b^2)x - (a^2b + ab^2) = 0,$$

qui a aussi la forme rationnelle et entière; les diviseurs rationnels et entiers de son dernier terme sont $+1, -1, +a, -a, +b, -b, +ab, -ab, +(a+b), -(a+b), +(a^2+ab), -(a^2+ab), +(ab+b^2), -(ab+b^2), +(a^2b+ab^2), -(a^2b+ab^2)$; et, parmi ces diviseurs, $+a, +b$, et $+(a+b)$ rendent le premier membre nul, et sont par conséquent soluteurs.

Soit de plus l'équation

$$x^2 - 2x - x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0;$$

elle devient, par le n° 370,

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 8x - 8 = 0.$$

Or, les diviseurs de 8 sont $+1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8$; et, parmi ces diviseurs, $+2$ rend nul le premier membre de la proposée, de même que celui de l'équation $x^4 - 4x^3 + etc. = 0$, en sorte qu'il est solveur.

Soit enfin l'équation

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0;$$

elle devient, par le n° 364,

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Or, les diviseurs de 1 sont $+1$ et -1 , qui ne rendent ni l'un ni l'autre nuls les premiers membres des deux équations, en sorte qu'ils ne sont pas soluteurs.

621. Cependant on n'aura pas toujours ainsi tous les solveurs rationnels d'une équation, parce que si ces solveurs rationnels sont fractionnaires, ce procédé ne les fera pas trouver.

622. Mais il est facile de démontrer que, si une équation n'a que des coefficients entiers, et que celui de son premier terme soit l'unité, elle ne peut avoir de soluteurs fractionnaires.

En effet, si dans l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

dont on suppose que les coefficients $P, Q, \dots T, U$, sont entiers, on voulait substituer à x une fraction irréductible, $\frac{a}{b}$, son premier membre deviendrait

$$\frac{a^m}{b^m} + P \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + Q \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \dots + T \frac{a}{b} + U,$$

quantité qui ne peut être égale à zéro : car dans cette supposition elle donnerait, en multipliant par b^{m-1} , et transposant le premier terme,

$$Pa^{m-1} + Qa^{m-2}b \dots + Tab^m + Ub^{m-1} = -\frac{a^m}{b},$$

résultat absurde, puisqu'en supposant que $\frac{a}{b}$ était une fraction irréductible, on a supposé que a n'était pas divisible par b , non plus que a^m (*); en sorte qu'on aurait une suite de nombres entiers ajoutés entre eux, égale à une quantité fractionnaire.

623. Il résulte de là qu'il serait utile de pouvoir faire disparaître d'une équation les coefficients fractionnaires lorsqu'elle en a, et cela sans en donner un au premier terme. Et c'est à quoi l'on parvient en substituant à l'inconnue de cette équation une nouvelle inconnue divisée par le produit des dénominateurs des coefficients fractionnaires; en multipliant ensuite toute l'équation par le diviseur que se trouve avoir le premier terme, et en faisant enfin les réductions convenables. Sur quoi il faut observer, 1^o que, si le premier terme de la proposée avait d'avance un coefficient, ce coefficient devrait être mis au nombre des dénominateurs, comme si l'on eût préalablement divisé l'équation par ce nombre-là; 2^o que, s'il y a des dénominateurs égaux, il ne faut les prendre qu'une fois; que, s'il y en a qui soient parties aliquotes d'autres, il faut les rejeter, et qu'il convient en général de prendre le plus petit multiple des dénominateurs.

(*) On peut prouver cela par un raisonnement analogue à celui des n^{os} 229 à 234.

Par cette règle,

$$x^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{e}{f} = 0$$

devient, en faisant $x = \frac{y}{bdf}$,

$$\frac{y^3}{b^3d^3f^3} + \frac{ay^2}{b^3d^2f^2} + \frac{cy}{bd^2f} + \frac{e}{f} = 0;$$

puis, en multipliant par $b^3d^3f^3$, et réduisant,

$$y^3 + adfy^2 + b^2cdf^2y + b^3d^3ef^3 = 0.$$

De même,

$$ax^3 + \frac{1}{b}x - \frac{1}{c} = 0$$

devient, en faisant $x = \frac{y}{abc}$,

$$\frac{y^3}{ab^2c^2} + \frac{y}{ab^2c} - \frac{1}{c} = 0;$$

puis, en multipliant par ab^2c^2 , et réduisant,

$$y^3 + cy - ab^2c = 0.$$

De même encore,

$$x^3 - \frac{a}{mn}x^2 + \frac{b}{mn}x - \frac{c}{m} = 0$$

devient, en faisant $x = \frac{y}{mn}$,

$$\frac{y^3}{m^3n^3} - \frac{ay^2}{m^2n^2} + \frac{by}{m^2n} - \frac{c}{m} = 0,$$

puis, en multipliant par m^3n^3 , et réduisant,

$$y^3 - ay^2 + bmn^2y - cm^2n^3 = 0.$$

623 bis. Ainsi donc, une équation étant donnée et préparée, si le cas le requiert, par les procédés des nos 365, 370, 372 et 623, si elle a des solveurs rationnels, ils seront entiers, et on les trouvera tous en essayant de substituer à son inconnue les diviseurs rationnels et entiers de son dernier terme.

Par exemple, dans l'équation

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0,$$

que nous avons eue au n° 620, on fera $x = \frac{y}{6}$, ce qui donnera

$$\frac{y^2}{36} - \frac{5y}{36} + \frac{1}{6} = 0, \quad y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Or, les diviseurs de 6 sont $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$; et, parmi ces diviseurs, $+2$ et $+3$ rendent nul le premier membre de l'équation en y , et sont solveurs de cette équation. On a donc $y=2$ ou $y=3$, et par conséquent $x=\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{1}{2}$.

624. Les solveurs rationnels d'une équation étant trouvés et représentés par $\alpha', \beta', \gamma', etc.$ on divisera cette équation, dont on suppose que x est l'inconnue, d'abord par $x - \alpha'$, puis par $x - \beta'$, puis par $x - \gamma', etc.$ ou tout d'un coup par $(x - \alpha')(x - \beta')(x - \gamma')....$; égalant alors à 0 le dernier quotient, s'il n'est pas 1, on aura à résoudre une nouvelle équation d'un degré inférieur à celui de la proposée, et qui n'aura plus de solveurs rationnels, à moins qu'il n'y en ait d'égaux à ceux déjà trouvés, et que l'on n'ait pas commencé par rechercher ces solveurs égaux. Il sera donc à propos d'essayer si ces solveurs trouvés ne satisferaient point encore à la nouvelle équation.

Soit, par exemple, la proposée

$$x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 4 = 0;$$

elle est déjà préparée comme il convient; c'est pourquoi on cherchera d'abord les diviseurs de son dernier terme, qui sont $+1, -1, +2, -2, +4, -4$. En les substituant successivement à x , le seul diviseur $+2$ rend nul le premier membre de l'équation, en sorte qu'elle n'a pas d'autre solveur rationnel. On la divisera donc par $x - 2$, et l'on égalera le quotient à 0, ce qui donnera la nouvelle équation

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0.$$

Avant de conclure qu'elle n'a aucun solveur rationnel, on essaiera le même solveur 2, et l'on trouvera qu'il réussit. Divisant donc encore par $x - 2$, et égalant le quotient à 0, on aura

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

équation qui n'est pas satisfaite lorsqu'on y substitue le nombre 2 à l'inconnue x ; en sorte qu'elle n'a point de solveurs rationnels. Si on la résout comme une équation du second degré, on trouve $x =$

$2 \pm \sqrt{3}$; les quatre soluteurs de la proposée sont donc $2, 2, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$.

624 *bis*. Du reste, la substitution successive des diviseurs du dernier terme d'une équation à la place de son inconnue, pouvant devenir une opération fort longue lorsque ces diviseurs sont nombreux, nous allons faire connaître deux moyens d'abrégier le travail.

1° Soit la proposée

$$x^2 + (2a + 3b)x + 6ab = 0;$$

et supposons qu'on veuille la résoudre par la méthode précédente, quoiqu'elle ne soit que du second degré, on pourra observer d'entrée, qu'en supposant tous ses termes directs, aucun nombre direct mis à la place de x ne réduirait le premier membre à 0; en sorte qu'il n'y aura plus qu'à essayer les diviseurs inverses du dernier terme, ce qui diminuera tout d'un coup de moitié le nombre des essais qu'on aurait faits sans cette remarque.

En général, toute équation qui n'a que des termes directs ne saurait avoir de soluteurs directs réels.

Si la proposée était

$$x^2 - (2a + 3b)x + 6ab = 0,$$

le coefficient du second terme étant supposé inverse, il est clair qu'il faudrait essayer les diviseurs directs de son dernier terme; mais faudrait-il essayer aussi les diviseurs inverses? Si nous mettons, dans la proposée, $-x$ à la place de x , ou, ce qui revient au même, si nous changeons les signes des termes qui contiennent les puissances impaires de x , les soluteurs directs seront changés en soluteurs inverses, et les soluteurs inverses seront changés en soluteurs directs, ce qui est vrai généralement.

Or, la proposée actuelle devient, par ce changement,

$$x^2 + (2a + 3b)x + 6ab = 0,$$

nouvelle équation qui n'a point de soluteurs réels directs; en sorte que la proposée même n'a point de soluteurs réels inverses. On n'essaiera donc que les diviseurs directs.

En opérant ainsi dans tous les cas, on pourra toujours savoir très-vite si l'on doit essayer les diviseurs directs et les diviseurs inverses, ou rejeter les uns ou les autres. Les commençants feront bien d'appliquer ces remarques à tous les exemples précédents.

2° Soit la proposée

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Sx^2 + Tx + U = 0,$$

dans laquelle nous imaginerons que les coefficients $P, Q, etc.$ sont rationnels et entiers, comme on peut toujours l'obtenir. Supposons qu'elle ait au moins un soluteur rationnel représenté par a : ce nombre sera non-seulement rationnel, mais encore entier (n° 622); d'ailleurs, il divisera sans reste le dernier terme de l'équation (n° 617), qui sera elle-même divisible par $x - a$ (n° 387).

Concevons que cette dernière division soit faite, nous aurons le quotient du n° 388, que nous pourrons écrire comme nous l'avons fait dans le n° 389. Et il est évident que si nous multiplions ce quotient par le diviseur $x - a$, nous retrouverons le dividende, c'est à-dire le premier membre de la proposée. Faisons cette multiplication, nous aurons

$$\begin{array}{r} x^{m-1} + P'x^{m-2} + Q'x^{m-3} \dots + R'x^2 + S'x + T' \\ x - a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^m + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} \dots \dots \dots + S'x^2 + T'x \\ - \quad ax^{m-1} - aP'x^{m-2} \dots \dots \dots - aR'x^2 - aS'x - aT' \end{array}$$

comparant alors ce résultat terme par terme avec la proposée, nous en tirerons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} P &= P' - a, & Q &= Q' - aP', & etc. \\ S &= S' - aR', & T &= T' - aS', & U &= -aT', \end{aligned}$$

auxquelles nous pourrons donner ces formes :

Premières formes.

$$\begin{aligned} a + P &= P', & aP' + Q &= Q', & etc. \\ aR' + S &= S', & aS' + T &= T', & U &= -aT'. \end{aligned}$$

Secondes formes.

(Ici l'ordre des équations est renversé.)

$$\begin{aligned} \frac{U}{a} &= -T', & \frac{-T' + T}{a} &= -S', & \frac{-S' + S}{a} &= -R', & etc. \\ \frac{-Q' + Q}{a} &= -P', & \frac{-P' + P}{a} &= -1. \end{aligned}$$

Les premières formes nous disent ceci :

Puisque a et P sont entiers, $a + P$ ou P' l'est aussi, et par conséquent aP' ; mais Q est entier, donc $aP' + Q$ ou Q' l'est aussi, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait trouvé que R' est entier de même que aR' ; alors, comme S est entier, on a $aR' + S$ ou S' entier, de même que aS' ; mais T est entier: donc $aS' + T$ ou T' est aussi entier. On voit par là que les lettres P', Q', R', S', T' , représentent des nombres entiers.

Cela posé, les secondes formes disent:

1° Si l'on divise le dernier terme U , par un de ses diviseurs a , qui soit décidément soluteur, on aura un quotient entier — T' .

2° Si l'on ajoute à ce quotient — T' , le coefficient T de x , et qu'on divise la somme — $T' + T$ par a , on aura un second quotient entier — S' .

3° Si l'on ajoute à ce quotient — S' le coefficient S de x^2 , et qu'on divise la somme — $S' + S$ par a , on aura un troisième quotient entier — R' ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait trouvé le quotient entier — Q' .

4° Si l'on ajoute à ce quotient — Q' le coefficient Q de x^{m-2} , et qu'on divise la somme — $Q' + Q$ par a , on aura un $(m-1)^{\text{me}}$ quotient entier — P' .

5° Si l'on ajoute à ce quotient — P' le coefficient P de x^{m-1} , et qu'on divise la somme — $P' + P$ par a , on aura un m^{me} quotient entier — 1.

Ceux donc des diviseurs du dernier terme de la proposée, qui ne satisferont pas à toutes ces conditions, ne seront pas soluteurs.

Il est facile de prouver que, réciproquement, ceux qui y satisferont seront soluteurs. Pour cela, on suivra l'ordre inverse des équations qui donnent les valeurs des coefficients $P, Q, \text{etc. } S, T, U$, en les considérant, par exemple, sous les formes que nous avons nommées *premières formes*. Si dans $U = -aT'$, on met la valeur de T' , prise dans l'équation précédente, on a $U = -aT - a^2S'$; si dans celle-ci on met la valeur de S' , prise dans l'équation qui précède, on a $U = -aT - a^2S - a^3R'$; en franchissant alors la lacune, et remontant toujours d'équations en équations, on a successivement

$$U = -aT - a^2S \dots - a^{m-2} Q',$$

$$U = -aT - a^2S \dots - a^{m-2} Q - a^{m-1} P',$$

$$U = -aT - a^2S \dots - a^{m-2} Q - a^{m-1} P - a^m.$$

Transposant enfin tout dans le premier membre, on obtient

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \dots + Sa^2 + Ta + U = 0,$$

ce qui prouve que $a = x$ dans la proposée, ou que a est soluteur de cette proposée.

Du reste, le procédé décrit il y a un moment abrège le travail, 1° en ce qu'il évite la peine d'élever aux puissances le diviseur que l'on essaie, comme on est obligé de le faire lorsqu'on le substitue simplement à l'inconnue dans la proposée; 2° en ce que, par cette méthode, le diviseur en essai donne souvent, dès les premières divisions, des quotients fractionnaires, qui prouvent que ce diviseur doit être rejeté sans pousser plus loin le calcul.

Pour appliquer tous ces principes à un exemple, prenons l'équation

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0.$$

Les diviseurs de son dernier terme sont 1, 3, 5 et 15, qu'il faut essayer en +. Pour savoir s'il faut aussi les essayer en —, nous changerons dans la proposée les signes des termes qui contiennent les puissances impaires de x , et nous aurons

$$x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 20x + 15 = 0.$$

Or, comme cette nouvelle équation ne saurait avoir de solveurs réels directs, la proposée n'en saurait avoir d'inverses. Nous n'avons donc à examiner que les nombres + 1, + 3, + 5, et + 15. Mais, comme la substitution immédiate de l'unité à la place d' x est très-facile, nous la ferons d'entrée, et nous verrons que, dans cet exemple, ce nombre ne satisfait pas à l'équation.

Cela posé, nous placerons les diviseurs qui restent à essayer, sur une même ligne horizontale, et, opérant sur chacun d'eux d'après la règle précédente, nous écrirons les résultats comme dans le tableau suivant (*):

(*) L'équation actuelle n'étant que du quatrième degré, les indications de la règle, relativement aux coefficients, doivent être modifiées et appropriées à ce cas, en observant que les coefficients de l'équation générale du quatrième degré sont P, Q, R, S , et que ceux du quotient de cette équation divisée par $x - a$ sont P', Q', R' . Ces indications coïncideront alors avec celles du tableau.

Les. a	$+ 3, + 5, + 15,$
Les. $-R'$	$+ 5, + 3, + 1,$
Les. $-R' + R$	$- 15, - 17, - 19,$
Les. $-Q'$	$- 5,$
Les. $-Q' + Q$	$+ 18,$
Les. $-P'$	$+ 6,$
Les. $-P' + P$	$- 3,$
Les. -1	$- 1.$

Il n'y a donc que le diviseur $+ 3$ qui soutienne l'épreuve jusqu'au bout, et c'est par conséquent le seul qui soit soluteur.

Cela trouvé, on abaissera l'équation en la divisant par $x - 3$; mais le tableau précédent nous évitera cette peine : car généralement ce quotient pour l'équation du quatrième degré est $x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0$, et nous avons dans le tableau les valeurs de $-P'$, de $-Q'$ et de $-R'$. D'après ce simple énoncé, l'on voit d'abord que le quotient cherché doit être

$$x^3 - 6x^2 + 5x - 5 = 0.$$

Si la proposée manquait de tel ou tel terme, le coefficient de ce terme serait 0, et ce coefficient ne changerait rien aux résultats auxquels il devrait être ajouté; on aurait ainsi dans le tableau deux lignes qui contiendraient les mêmes nombres. On pourra voir cela sur l'équation $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$, à laquelle on trouvera les solveurs 6, 3, et -2 .

CHAPITRE IX.

Des solveurs irrationnels et imaginaires.

625. Une équation étant ramenée à cette forme, que nous supposons rationnelle et entière :

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

lorsqu'on a trouvé ses solveurs rationnels α' , β' , γ' , etc. on a par là

même les diviseurs rationnels et du premier degré de son premier membre, savoir $x - \alpha'$, $x - \beta'$, $x - \gamma'$, etc.

Mais, pour trouver ces soluteurs, il faut savoir trouver tous les diviseurs rationnels et entiers de son dernier terme, qui est une quantité algébrique si l'équation elle-même est algébrique, c'est-à-dire si ses coefficients sont des lettres, et non des chiffres. Il faut donc connaître les procédés indiqués au n° 619.

Or, lorsqu'on connaît ces procédés, ou lorsqu'on sait trouver tous les diviseurs rationnels et entiers d'une quantité algébrique rationnelle et entière, on sait donc trouver tous les diviseurs rationnels et entiers du premier membre

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U$$

de l'équation, puisque ce premier membre n'est autre chose qu'une quantité algébrique.

On aura donc par là, non-seulement les diviseurs rationnels entiers, et du premier degré de cette équation, savoir $x - \alpha'$, $x - \beta'$, $x - \gamma'$, etc. mais encore ses diviseurs rationnels entiers et du second degré, de la forme $x^2 + px + q$, si elle en a; et de même ceux du troisième degré de la forme $x^3 + px^2 + qx + r$, toujours si elle en a; et ainsi de suite. Arrêtons-nous seulement aux diviseurs rationnels et entiers du second degré.

626. Lorsqu'on a trouvé les soluteurs rationnels d'une équation, ou ses diviseurs rationnels du premier degré, et qu'on a divisé autant que possible son premier membre par ces diviseurs-là, on obtient une nouvelle équation qui n'a plus de soluteurs rationnels (n° 624), et par conséquent plus de diviseurs rationnels du premier degré. Si donc cette équation a des diviseurs rationnels du second degré, chacun de ces diviseurs rationnels égalé à zéro, et traité comme équation du second degré, se résoudra en deux facteurs, qui seront irrationnels ou imaginaires, et que l'on trouvera par ce moyen.

Il est évident, du reste, qu'une équation, sans avoir de soluteurs rationnels, ni par conséquent de diviseurs rationnels du premier degré, peut avoir des diviseurs rationnels du second degré. Nous avons vu, par exemple (n° 624), que l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ avait deux soluteurs irrationnels, qui sont $x = 2 \pm \sqrt{3}$; et il est facile de voir que l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$ a deux soluteurs imagi-

naires, qui sont $x = 1 \pm \sqrt{-1}$; et par conséquent, si l'on multiplie entre elles ces deux équations, on en formera une du quatrième degré, qui, sans aucun solveur rationnel, aura cependant deux diviseurs rationnels du second degré.

627. Si une équation n'a point de diviseurs rationnels, ni du premier, ni du second degré, mais qu'elle en ait du troisième, du quatrième, on pourra appliquer à ces facteurs-là, en les égalant à zéro, les formules générales du troisième, du quatrième degré.

628. Si une équation n'a point de diviseurs rationnels des quatre premiers degrés, on pourra essayer de lui appliquer une méthode développée dans un chapitre de l'Arithmétique universelle de Newton, chapitre intitulé *Réduction des équations par les diviseurs irrationnels*.

629. Si l'on veut rechercher en particulier les solveurs imaginaires des équations, on trouvera les moyens les plus efficaces à employer pour cela dans l'ouvrage intitulé *Traité de la Résolution des Équations numériques de tous les degrés*, par Lagrange.

630. Enfin, l'on trouvera dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1768, une méthode proposée par le même auteur, pour résoudre les équations algébriques ou littérales, d'un degré quelconque, par le moyen des séries, c'est-à-dire par approximation (n° 414).

Voyez aussi, à cette occasion, le *Traité de la Résolution des Équations numériques*, la *Théorie des Fonctions*, par le même auteur, et enfin les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour l'année 1777, où Laplace a traité le même sujet.

N. B. Nous ne sommes pas entrés dans beaucoup de détails sur l'objet de ce chapitre, parce que nous donnerons, dans les nos 741 et suivants, le moyen de trouver les solveurs irrationnels des équations numériques, et que la recherche des solveurs imaginaires est très-laborieuse et ne se présente guère dans la pratique.

SECONDE SOUS-DIVISION.

*Des problèmes qui fournissent plus ou moins d'équations
que d'inconnues.*

CHAPITRE PREMIER.

Des problèmes qui fournissent plus d'équations que d'inconnues.

631. Un problème qui donnerait entre les trois inconnues x, y, z , quatre équations liées entre elles (n° 447), pourrait être résolu ainsi : on comparerait la dernière équation avec la première pour en éliminer x ; on ferait la même chose entre la dernière et la seconde, et entre la dernière et la troisième, et l'on aurait ainsi trois nouvelles équations en y et z . On comparerait alors la dernière de ces trois avec la première et avec la seconde pour l'élimination d' y , et l'on obtiendrait deux équations finales en z seulement. Alors, si le problème était possible, z devrait avoir au moins une valeur commune dans les deux équations finales, ou, en d'autres termes, les deux équations devraient avoir un diviseur commun, qui serait au moins du premier degré. On chercherait donc ce diviseur commun, et s'il n'existait pas le problème serait impossible ; s'il existait, il donnerait la solution ou les solutions de la question proposée.

632. Un problème qui donnerait entre les trois inconnues x, y et z , cinq équations liées entre elles, pourrait être résolu ainsi : on comparerait la cinquième équation avec la première pour en éliminer x , on ferait la même chose avec la cinquième et la seconde, avec la cinquième et la troisième, et avec la cinquième et la quatrième ; et l'on aurait quatre nouvelles équations en y et z . On comparerait alors la dernière de ces quatre avec la première pour en éliminer y ; on ferait la même chose entre la quatrième et la seconde, et entre la

quatrième et la troisième, et l'on aurait trois équations finales en x , qui devraient avoir un diviseur commun, donnant la solution ou les solutions de la question.

633. Cela suffit pour faire comprendre comment il faudrait opérer dans d'autres cas de cette nature. Lorsqu'on a plus d'équations que d'inconnues, on doit toujours arriver par l'élimination à deux ou plusieurs équations finales à une seule inconnue, et ces équations-là doivent avoir un diviseur commun qu'il faut chercher.

634. Ainsi, le problème 4 du n° 347 C, nous ayant donné les trois équations

$$\begin{aligned} 7x + 12y &= 288 & 12x + 7y &= 358 \\ xy &= 240, \end{aligned}$$

si de la dernière on tire $x = \frac{240}{y}$, et que l'on substitue cette valeur dans les deux autres, on aura les équations finales

$$12y^2 - 288y + 1680 = 0 \quad 7y^2 - 358y + 2880 = 0,$$

qui ont pour diviseur commun $y - 10$; posant donc $y - 10 = 0$, on en tirera $y = 10$, d'où $x = \frac{240}{10} = 24$.

635. De même, le problème 9 du n° 350 C, nous ayant donné les équations

$$\begin{aligned} x + y + xy &= 79 & xx - xy &= 18 \\ x - y &= 2, \end{aligned}$$

si de la dernière on tire $x = y + 2$, et que l'on substitue cette valeur dans les deux autres, on aura les équations finales

$$y^2 + 4y - 77 = 0, \quad 2y - 14 = 0,$$

qui ont pour diviseur commun $y - 7$; posant donc $y - 7 = 0$, on en tirera $y = 7$, d'où $x = 7 + 2 = 9$.

636. Si l'on avait une équation à une inconnue d'un degré plus élevé que le premier, et qu'il y eût une relation connue entre deux ou plusieurs de ses soluteurs, ce cas rentrerait dans celui qui nous occupe.

637. « Supposons d'abord qu'on ait l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

dont les soluteurs soient représentés par α , β , γ et δ , et qu'on sache qu'entre deux de ces soluteurs il existe une relation indiquée par

l'équation $ma + n\beta = k$; m , n et k étant des quantités connues, on pourra trouver α et β d'une manière fort simple: car, α et β étant les soluteurs de l'équation proposée, on aura

$$\alpha^4 + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0$$

$$\beta^4 + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + s = 0;$$

mais si de la dernière de celles-ci on élimine β , au moyen de l'équation $ma + n\beta = k$, l'équation résultante devra nécessairement s'accorder avec l'équation

$$\alpha^4 + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0;$$

et puisque l'une et l'autre seront satisfaites par la même valeur de α , elles auront un facteur commun, qu'on obtiendra en cherchant leur plus grand commun diviseur, et qui fera connaître la valeur de α : on trouverait β de la même manière. »

638. « Il convient d'observer que, dans le cas où les deux soluteurs α et β entreraient semblablement dans la relation donnée, ce qui arriverait si on avait $m = n$, d'où il résulterait

$$m(\alpha + \beta) = k,$$

le diviseur commun dont nous venons de parler monterait au second degré. La raison de ce fait est facile à apercevoir: car alors, soit qu'on élimine α , soit qu'on élimine β , on tombe sur des équations semblables, et qui par conséquent doivent conduire à une équation donnant en même temps l'une et l'autre de ces inconnues, ou ayant deux soluteurs. »

639. « Si la relation proposée était $l\alpha + m\beta + n\gamma = k$, on y joindrait les équations

$$\alpha^4 + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0,$$

$$\beta^4 + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + s = 0,$$

$$\gamma^4 + p\gamma^3 + q\gamma^2 + r\gamma + s = 0,$$

et éliminant, au moyen des deux dernières, β et γ de l'équation $l\alpha + m\beta + n\gamma = k$, on parviendrait à une équation finale qui, ne renfermant plus que α , aurait nécessairement, avec $\alpha^4 + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0$, un diviseur commun qui déterminerait α : on trouverait β et γ d'une manière semblable. »

640. « Si on avait $l = m$, ce qui changerait la relation donnée en $l(\alpha + \beta) + n\gamma = k$, comme il serait indifférent d'y écrire α pour β

et β pour α , le diviseur commun qui donnerait α donnerait aussi β , et serait par conséquent du deuxième degré. Enfin, dans le cas où la relation donnée serait $l(\alpha + \beta + \gamma) = k$, les trois soluteurs α, β, γ , entreraient dans le même diviseur commun, qui serait par conséquent du troisième degré. »

641. « Ce que nous venons de dire par rapport à l'équation du quatrième degré, et à des relations exprimées par des équations du premier degré, peut s'appliquer à un degré quelconque et à des relations quelconques; et on en conclura qu'il faut traiter chacun des soluteurs qui entrent dans la relation donnée comme une inconnue distincte, former les équations résultantes de leur substitution dans l'équation proposée, et joindre ces nouvelles équations avec celle qui exprime la relation donnée, puis éliminer ensuite toutes les inconnues, hors une, que l'on conservera en même temps dans deux équations, lesquelles admettront par conséquent un diviseur commun, qui, suivant le degré dont il sera, fera connaître un ou plusieurs des soluteurs compris dans la relation donnée. »

642. « Prenons pour exemple l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 - q^2x - q^2p = 0,$$

et supposons que l'on sache d'avance que, parmi les soluteurs de cette équation, il y en a deux qui sont égaux, mais de signe contraire: en nommant α et β ces deux soluteurs, nous tirerons d'abord de l'équation proposée

$$\alpha^3 + p\alpha^2 - q^2\alpha - q^2p = 0,$$

$$\beta^3 + p\beta^2 - q^2\beta - q^2p = 0.$$

La relation donnée entre α et β fournit de plus cette troisième équation, $\beta = -\alpha$, en vertu de laquelle la seconde devient

$$-\alpha^3 + p\alpha^2 + q^2\alpha - q^2p = 0,$$

ou, en changeant tous les signes à la fois, et mettant x pour α ,

$$x^3 - px^2 - q^2x + q^2p = 0.$$

Cherchant ensuite le diviseur commun à cette dernière équation et à la proposée, on trouve

$x^2 - q^2$, ce qui donne $x^2 - q^2 = 0$, ou $x = +q$ et $x = -q$. Le diviseur est du second degré: car la relation $\beta = -\alpha$, équivalente

à $\alpha + \beta = 0$, demeure la même lorsqu'on y change α en β , et β en α . » (Lacroix).

643. Si la relation connue entre les soluteurs était une relation d'égalité, c'est-à-dire si l'on savait qu'il y eût dans une équation proposée deux ou plusieurs soluteurs égaux, le diviseur commun que l'on trouverait par la méthode précédente ne serait autre chose que la proposée elle-même, comme il est facile de le voir. Mais nous avons fait connaître dans le n° 615 un moyen propre à trouver les soluteurs égaux d'une équation, que l'on fût ou que l'on ne fût pas averti de leur existence.

644. Quelquefois la forme seule d'une équation donne la relation qu'ont entre eux ses soluteurs. Par exemple, l'équation

$$x^6 + px^4 + qx^2 + r = 0,$$

qui ne contient que les puissances paires de x , ayant par supposition trois de ses soluteurs représentés par α, β, γ , en aura trois autres représentés par $-\alpha, -\beta, -\gamma$: car, si α satisfait à cette équation, il est évident que $-\alpha$ y satisfera aussi; et ainsi de suite.

645. L'équation

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

est un second exemple du cas où la forme de la proposée fait découvrir une relation entre ses soluteurs. « Elle demeure la même lorsqu'on y met $\frac{1}{x}$ au lieu de x , et se trouve seulement écrite dans un

ordre inverse; il faut donc conclure de là que si α est un de ses soluteurs, $\frac{1}{\alpha}$ en est un autre. En nommant γ un soluteur différent des

deux précédents, il y en aura un égal à $\frac{1}{\gamma}$, et enfin ϵ étant un soluteur distinct des quatre que nous venons d'indiquer, donnera un sixième soluteur $\frac{1}{\epsilon}$. On voit par là que, si on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$

ϵ, ζ , les six soluteurs de la proposée, on aura, entre eux, les relations suivantes,

$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \quad \delta = \frac{1}{\gamma}, \quad \zeta = \frac{1}{\epsilon},$$

$$\text{ou } \alpha\beta = 1, \quad \gamma\delta = 1, \quad \epsilon\zeta = 1.$$

646. « Nous ne saurions employer ici le procédé du n° 641; mais on voit facilement qu'en combinant chacun des soluteurs α, γ, ϵ , avec α n correspondant, pour en former un facteur du second degré de la proposée, on aura ces trois facteurs

$$x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1, \quad x^2 - \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)x + 1, \\ x^2 - \left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right)x + 1$$

dans lesquels il n'y a d'inconnu que le coefficient du second terme. Si donc on le désigne par z , la quantité z ne dépendra que d'une équation du troisième degré, dont les soluteurs seront $\alpha + \frac{1}{\alpha}, \gamma + \frac{1}{\gamma}, \epsilon + \frac{1}{\epsilon}$. Quoique ces fonctions ne paraissent pas d'abord renfermer toutes les permutations que leur forme permet de faire entre les soluteurs, il est facile de s'assurer que celles qu'on néglige n'en sont que des répétitions. En effet, en ne supposant aucune relation entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, on aurait

$$\alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad \gamma + \frac{1}{\gamma}, \quad \epsilon + \frac{1}{\epsilon}, \\ \beta + \frac{1}{\beta}, \quad \delta + \frac{1}{\delta}, \quad \zeta + \frac{1}{\zeta};$$

mais puisque, dans l'hypothèse établie,

$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \quad \delta = \frac{1}{\gamma}, \quad \zeta = \frac{1}{\epsilon},$$

les fonctions de la seconde ligne sont les mêmes que celles de la première, et par conséquent l'équation du sixième degré, qui donnerait ces six fonctions pour le cas général, doit s'abaisser ici au troisième degré. »

647. « On peut former cette dernière très-simplement, en divisant par x^3 tous les termes de l'équation proposée

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

et en réunissant ceux qui sont également éloignés des extrêmes, ainsi qu'on le voit ci-dessous

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + p\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + r = 0.$$

Maintenant, si l'on fait $x + \frac{1}{x} = z$, on aura

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2, \quad \text{ou} \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2,$$

dont on tirera $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$, puis $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = z^3$,

ce qui donnera

$$x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = z^3;$$

et, mettant z au lieu de $x + \frac{1}{x}$, il viendra

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + p\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + r = 0,$$

on trouvera

$$z^3 + pz^2(q - 3)z + r - 2p = 0.$$

Lorsqu'on aura déterminé z par cette équation, il ne restera plus, pour obtenir les soluteurs de la proposée, qu'à résoudre les trois équations du second degré,

$$x^2 - z'x + 1 = 0, \quad x^2 - z''x + 1 = 0, \quad x^2 - z'''x + 1 = 0,$$

dans lesquelles z' , z'' , z''' , représentent les trois valeurs de z , et qui se déduisent de $x + \frac{1}{x} = z$.

648. « Ce que nous venons de dire sur l'équation

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

est général pour toutes les équations dans lesquelles les termes placés à égales distances du premier et dernier, ont les mêmes coefficients, et qu'on appelle *équations réciproques*, parce qu'elles ne changent pas lorsqu'on y substitue $\frac{1}{x}$ au lieu de x . »

649. « Si l'équation était d'un degré impair; qu'on eût, par exemple,

$$x^5 + px^4 + qx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

on l'écrirait comme il suit :

$$(x^5 + 1) + px(x^3 + 1) + qx^2(x + 1) = 0,$$

ce qui ferait voir qu'elle serait divisible par $x + 1$ (n° 131); et, la division faite, on aurait pour quotient

$$x^4 + (p-1)x^3 - (p-q-1)x^2 + (p-1)x + 1 = 0,$$

équation réciproque du quatrième degré.

« Il sera facile d'opérer sur toute équation réciproque de degré impair comme nous venons de le faire sur celle du cinquième degré. »

650. « Ce qui précède s'applique à l'équation

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \dots + y^2 + y + 1 = 0,$$

déduite de l'équation $y^m - 1 = 0$, divisée par $y - 1$, et qui renferme les $m - 1$ racines de l'unité, différentes de 1. » (Lacroix.)

CHAPITRE II.

Des problèmes qui fournissent moins d'équations que d'inconnues.

651. La théorie relative aux problèmes de ce genre s'étend fort loin; nous n'en examinerons que deux cas: 1° celui d'une seule équation avec deux inconnues, dont une ne monte qu'au premier degré, l'autre étant ou au premier, ou au second, ou au troisième degré, etc. et 2° celui d'une seule équation avec deux inconnues, montant l'une et l'autre au second degré, mais dans laquelle le carré ni de la première ni de la seconde des inconnues n'est multiplié par l'autre inconnue.

652. Le premier cas se divise encore en deux autres: celui où l'inconnue au premier degré ne multiplie point l'autre inconnue et ses puissances (je le désignerai par A), et celui où l'inconnue au premier degré multiplie l'autre inconnue et ses puissances (je le désignerai par B).

653. PREMIER CAS A. Une équation à deux inconnues, dont une au moins n'est qu'au premier degré, et ne multiplie point l'autre inconnue, ni ses puissances, s'il y en a (nos 651, 652).

Cette équation, pour être générale, doit avoir cette forme :

$$ny = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.};$$

en supposant qu'on ait mis dans le premier membre les termes qui renferment y , c'est-à-dire l'inconnue au premier degré, et dans l'autre les termes tout connus et ceux qui renferment x et ses puissances.

654. De là nous tirerons

$$y = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{n}$$

Et si nous supposons successivement à x différentes valeurs, il en résultera autant de valeurs correspondantes pour y . En sorte que, généralement parlant, le nombre des solutions du problème qui a fourni l'équation sera illimité, observation qui s'étend du reste à tous les cas d'une équation à deux inconnues, puisqu'en résolvant cette équation pour une des inconnues, ou en laissant cette inconnue seule dans le premier membre, on aura toujours dans l'autre membre un ou plus d'un terme renfermant la seconde inconnue.

655. Cependant, dans certains cas particuliers, la nature des questions ne permet pas de supposer aux inconnues des valeurs quelconques. Si l'on proposait, par exemple, ce problème :

Un troupeau est composé de moutons et de brebis ; sept fois le nombre des moutons et cinq fois le nombre des brebis, font ensemble 176 : on demande combien il y a des uns et des autres.

En nommant x le nombre des moutons, et y le nombre des brebis, il est clair qu'on ne pourra supposer à ces symboles que des valeurs rationnelles entières et directes.

Dans les cas de cette nature, il peut arriver que le nombre des solutions du problème se trouve limité, et même borné à une seule solution ; mais il peut arriver aussi que ce nombre reste illimité malgré le rejet des quantités irrationnelles, fractionnaires et inverses. C'est ce dont nous aurons bientôt des exemples.

656. Cela posé, reprenons notre équation

$$y = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{n},$$

et supposant que ses coefficients $n, a, b, c, \text{etc.}$ soient entiers, cherchons si on pourrait trouver des nombres entiers qui, mis à la place de x , rendissent le numérateur divisible par n , et donnassent ainsi une valeur entière pour y .

A. On peut douter que cela soit toujours possible; mais, d'un autre côté, ce résultat aura lieu dans bien des cas : car on peut former des équations dans ce but. Par exemple, $13 + 5.3 + 2.3^2 + 4.3^3$ est divisible par 7; et si l'on met x à la place de 3, on aura le polynôme $13 + 5x + 2x^2 + 4x^3$, qui se trouvera divisible par 7, quand on y fera x égal à 3. On verrait même que la division par 7 réussirait encore en faisant l'inconnue x égale à 10, à 17, à 24, etc.

Prenons donc d'abord le cas où le numérateur du second membre de la proposée générale serait en effet divisible par n , lorsqu'on y mettrait un nombre entier, θ , à la place de x . Il est probable que θ possédant cette propriété, le même θ , augmenté ou diminué d'un certain nombre de fois n , rendra aussi le numérateur divisible par n . En d'autres termes, la formule $\theta \pm mn$ (m étant 1 ou 2 ou 3 ou etc.), mise à la place de x , donnera sans doute pour y une valeur entière. Si l'on essaie cette substitution, on trouvera un numérateur composé de deux parties, dont l'une contiendra θ et ses puissances avec les coefficients mêmes de l'équation, et l'autre n et ses puissances avec des coefficients composés en $\theta, m, b, c, d, \text{etc.}$ Désignant ces derniers coefficients par les lettres $b', c', d', \text{etc.}$ on pourra ordonner ainsi les deux parties en question,

$$(a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + \text{etc.}) + (b'n + c'n^2 + d'n^3 + \text{etc.}).$$

Or, la première partie est divisible par n , parce qu'on l'a supposé, et la seconde l'est aussi, comme on le voit au simple coup d'œil.

B. Ainsi donc, si l'on a une seule valeur entière de x , désignée par θ , on en pourra trouver sur-le-champ une infinité d'autres, toutes données par la formule $\theta \pm mn$, dans laquelle m est successivement 1, 2, 3, etc.; et il est évident que ces valeurs formeront une progression excédentive, dont la différence ou la raison sera n , observation qui aidera à former promptement la suite en question (*Voyez l'exemple précédent*).

Il résulte aussi de là que, si l'on pouvait trouver d'autres valeurs entières de x qui ne fussent pas comprises dans la progression dont

nous venons de parler, et qu'on désignât ces valeurs par θ' , θ'' , etc. on formerait, au moyen des formules $\theta' \pm n\alpha$, $\theta'' \pm p\alpha$, etc. dans lesquelles n , p , etc. sont successivement 1, 2, 3, etc. d'autres progressions excédentives, avec la même raison que la première, et dont tous les termes seraient des valeurs entières de x .

C. Cela posé, cherchons à découvrir au moins un terme de chacune de ces progressions, en mettant successivement à la place de x des nombres entiers, à commencer par les plus petits 0, ± 1 , ± 2 , etc. Mais, pour diminuer le nombre de nos essais, déterminons deux limites, entre lesquelles doive se trouver nécessairement un terme de chacune de nos progressions, mais un seulement. Prenons pour ces limites deux fractions de α , qui ne diffèrent que par le signe, en sorte que si l'une est $+\frac{\alpha}{l}$, l'autre soit $-\frac{\alpha}{l}$; quelle sera la valeur de l ? Nous avons dit que les valeurs de x forment des progressions excédentives dont la raison est α , d'où il résulte que si une de ces valeurs est la limite $+\frac{\alpha}{l}$, l'autre valeur en descendant sera $\frac{\alpha}{l} - \alpha$. Mais nous voulons que cette seconde valeur soit la limite inférieure sans s'écarter davantage de la limite supérieure, afin qu'en général chaque progression des x ne puisse pas avoir plus d'un terme entre les limites; ainsi nous poserons l'équation

$$\frac{\alpha}{l} - \alpha = -\frac{\alpha}{l}, \text{ qui nous donnera } l = 2.$$

Les deux limites que nous cherchions seront donc $+\frac{1}{2}\alpha$, et $-\frac{1}{2}\alpha$, entre lesquelles chaque série des valeurs de x ne pourra avoir qu'un terme, à moins que ces valeurs ne tombent sur les limites mêmes. D'ailleurs, celle de ces progressions dont aucun terme ne tombera sur les limites, en aura nécessairement un entre ces mêmes limites, puisque la raison de chacune est α , qui est aussi la différence des limites.

D. Si donc on substitue à x , dans le numérateur de l'équation proposée, tous les nombres entiers qui n'excéderont pas les limites indiquées, et qu'on désigne par α , β , γ , etc. ceux de ces nombres qui rendront le numérateur divisible par α , on sera certain que toutes les valeurs entières de x , propres à la question, seront renfermées dans les formules suivantes :

$$\alpha \pm mD, \quad \beta \pm nD, \quad \gamma \pm pD, \text{ etc.}$$

m, n, p , etc. étant successivement 0, 1, 2, 3, 4, etc.

Ce résultat peut se confirmer de cette manière. Des valeurs θ , θ' , θ'' , etc. nous sommes arrivés à toutes les autres par les formules $\theta \pm mD$, $\theta' \pm nD$, $\theta'' \pm pD$, etc. ce qui donne

$$\theta \pm mD = \alpha, \quad \theta' \pm nD = \beta, \quad \theta'' \pm pD = \gamma, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$\theta = \alpha \mp mD = \alpha \pm mD,$$

$$\theta' = \beta \mp nD = \beta \pm nD,$$

$$\theta'' = \gamma \mp pD = \gamma \pm pD,$$

etc.

E. Remarquons bien que, dans le cas où il y aura en effet entre les limites deux ou plusieurs valeurs entières de x , on obtiendra deux ou plusieurs séries de nombres, qui, mis à la place de x dans l'équation proposée, rendront le numérateur divisible par le dénominateur, et que chacune de ces séries ne pourra avoir plus d'un terme entre les limites (C). D'un autre côté, si aucun des nombres entiers qui n'excèdent pas les limites ne réussit, on sera certain que la proposée n'aura point de solutions entières (A).

F. Avant d'appliquer ces principes à quelques exemples, occupons-nous encore d'une recherche qui n'est pas d'une absolue nécessité, mais qui peut cependant offrir de l'intérêt. Il s'agirait de savoir quelle valeur il faut donner à m pour que la formule $\theta \pm mD$ devienne égale à la limite, bien entendu que, dans cette hypothèse, m pourra être fractionnaire si le cas le requiert.

Supposons que θ soit au-dessus de la limite $+\frac{1}{2}D$, et posons l'équation de condition $\theta - mD = \frac{1}{2}D$, nous en tirerons

$$m = \frac{\theta - \frac{1}{2}D}{D} = \frac{\theta}{D} - \frac{1}{2}.$$

Cette valeur, sous sa seconde forme, prouve visiblement que m ne pourra être un nombre entier, ou que la limite n'appartiendra à la série des valeurs de x , que dans le cas où θ divisé par D vaudra un nombre entier plus $\frac{1}{2}$ ou $e + \frac{1}{2}$, ou $\frac{2e+1}{2}$, ou $\frac{i}{2}$, i étant un nombre impair, parce que $2e+1$ est impair. Or, puisque $\frac{i}{2}$ est la plus simple expression de θ divisé par D , il faut, 1° que θ et D aient un

diviseur commun k ; 2° que le second facteur de θ soit i , et que le second facteur de n soit 2 ; on aura ainsi

$$m = \frac{ik - k}{2k} = \frac{i - 1}{2},$$

valeur entière, puisque $i - 1$ est pair.

En général donc, la valeur de m , qui conduit à la limite, est fractionnaire. Dans ce cas, en augmentant son numérateur d'une ou de plusieurs unités pour rendre la division par n possible, cette valeur de m , ainsi augmentée, fera descendre $\theta - mn$ au-dessous de $+\frac{1}{2}n$. Et si le nombre qu'on a ajouté au numérateur $\theta - \frac{1}{2}n$ de la valeur de m propre à la limite, est plus petit que n , la valeur de $\theta - mn$ se trouvera entre les limites. C'est, dans chacune des progressions formées par les valeurs de x , le terme qui se trouve entre les limites, et qui s'y trouve seul (C).

G. Arrêtons-nous un moment sur le cas particulier où l'on a $n = 1$: les limites sont alors $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, entre lesquelles il n'y a de nombre entier, ou qui puisse être considéré comme tel, que le zéro. Alors la valeur de m , qui conduit à la limite $+\frac{1}{2}$, quand on a θ en dessus de cette limite, est, d'après notre formule générale, $\theta - \frac{1}{2} = \frac{2\theta - 1}{2}$, quantité fractionnaire, parce que $2\theta - 1$ est impair. Ajoutant 1 à son numérateur, elle se réduit à θ ; en sorte que la formule $\theta - mn$ devient $\theta - \theta = 0$.

H. Nous avons dit qu'il fallait essayer pour x tous les nombres entiers qui n'excèdent pas les limites; en sorte qu'on doit essayer les limites elles-mêmes si elles sont des nombres entiers, ou, en d'autres termes, si n est pair. Cependant ces limites, quoique étant des nombres entiers, ne pourront réussir que quand la valeur de m , propre à la limite, sera elle-même un nombre entier, c'est-à-dire dans le cas où l'on aura en même temps $\theta = ik$, et $n = 2k$, ou, ce qui revient au même, quand θ divisé par k ou par $\frac{1}{2}n$ donnera pour quotient un nombre impair i (F).

Mais, comme on n'est point averti de cela d'avance, parce qu'on ne connaît que n , et qu'on ne connaît pas θ , il reste toujours vrai qu'il faut essayer la limite quand elle est un nombre entier.

Du reste, lorsqu'une des limites réussit, l'autre réussit aussi (C). Et

si quelque nombre intermédiaire a la même propriété, il y a plus d'une série de valeurs pour x (E).

657. Appliquons maintenant ces principes à quelques questions particulières, et proposons-nous d'abord ce problème :

Trouver deux nombres entiers et directs, tels que le quadruple du second soit égal à l'unité augmentée du triple du premier, et du quadruple du carré de celui-ci.

En nommant le premier de ces nombres x , et le second y , on aura

$$4y = 1 + 3x + 4x^2;$$

d'où l'on tirera

$$y = \frac{1 + 3x + 4x^2}{4}.$$

Et comme ici $\frac{D}{2} = \frac{4}{2} = 2$, il suffit, pour tomber sur une solution, d'essayer à la place d' x les nombres $-2, -1, 0, +1, +2$ (*). De ces cinq, $+1$ réussit seul, et donne $x = 1$, et $y = 2$.

Les autres valeurs de x étant, par la formule $\alpha \pm mD$, $1 + 4$, $1 + 2 \times 4$, $1 + 3 \times 4$, etc. $1 - 4$, $1 - 2 \times 4$, etc. on a les deux suites

$$x = 1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \text{ etc. } -3, \quad -7, \text{ etc.}$$

$$y = 2, \quad 29, \quad 88, \quad 179, \text{ etc. } +7, \quad +44, \text{ etc.}$$

dont il faut rejeter les derniers termes, parce qu'ils sont inverses dans la suite supérieure. Cependant le nombre des solutions est illimité.

658. Résolvons par la même méthode le problème du n° 655, dont l'équation est

$$7x + 5y = 176.$$

Nous aurons d'abord

$$y = \frac{176 - 7x}{5};$$

et comme ici $\frac{D}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, il suffit, pour tomber sur une solution, d'essayer à la place d' x les nombres $-2, -1, 0, +1, +2$. Le premier réussit seul, et donne $x = -2$, et $y = 38$.

Les autres valeurs de x étant, par la formule $\alpha \pm mD$, $-2 + 5$,

(*) Si l'on n'admettait pas pour quelques moments les solutions inverses, on ne serait pas sûr d'en trouver une en dessous de $\frac{D}{2}$.

$-2+2 \times 5$, $-2+3 \times 5$, $-2+4 \times 5$, $-2+5 \times 5$, $-2+6 \times 5$, etc. $-2-5$, $-2-2 \times 5$, etc. on a les deux suites

$x=3, 8, 13, 18, 23, 28$, etc., $-2, -7, -12$, etc.

$y=31, 24, 17, 10, 3, -4$, etc., $+38, +45, +52$, etc.

dont il faut rejeter les solutions inverses, en sorte que le nombre de celles qui resteront sera borné à cinq.

659. Cherchons aussi à résoudre le problème du n° 347 B, en supposant entière la valeur de chaque pièce de monnaie. L'équation est

$$7x + 12y = 288,$$

d'où l'on tire, en laissant dans le premier membre l'inconnue qui a le plus petit coefficient, pour avoir le moindre diviseur possible,

$$x = \frac{288 - 12y}{7}.$$

Et comme ici $\frac{D}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$, il suffit d'essayer pour y les nombres $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$. Le dernier réussit seul, et donne $y=3$, et $x=36$.

Les autres valeurs de y étant, par la formule $\alpha \pm mD$, $3+7, 3+2 \times 7, 3+3 \times 7$, etc. on a

$$y = 3, 10, 17, \text{ etc.}$$

$$x = 36, 24, 12, \text{ etc.}$$

Mais il est facile de voir qu'on ne peut admettre que les trois solutions indiquées, parce qu'en allant plus loin on tomberait ou sur le zéro ou sur des nombres en $-$, ce que la nature de la question n'admet pas.

660. Le problème du n° 442 donne l'équation $x+y=7$, de laquelle on tire

$$y = 7 - x.$$

Et comme ici $\frac{D}{2} = \frac{1}{2}$, il suffit d'essayer pour x le nombre 0, ce qui donne $x=0$, et $y=7$ (n° 656, G).

Les autres valeurs de x étant, par la formule $\alpha \pm mD$, $0+1, 0+2, 0+3$, etc. on a

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$y = 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Ce sont là toutes les solutions, si l'on n'admet que les nombres entiers et directs; et même, par la nature de la question, les trois dernières reviennent aux trois premières.

661. Si l'on propose ce problème : *Quelqu'un qui n'a que des pièces de 5 francs et des pièces de 24 francs, veut payer une somme de 109 francs; combien doit-il donner des unes et des autres?*

En nommant x le nombre des pièces de 5 francs, et y celui des pièces de 24, on aura

$$5x + 24y = 109,$$

ce qui donnera

$$x = \frac{109 - 24y}{5}.$$

En traitant cette équation par la méthode précédente, on ne trouvera qu'une solution admissible, savoir $y = 1$, et $x = 17$.

662. Si l'on propose cet autre problème : *Quelqu'un achète des chevaux et des bœufs; il paie les uns 31 pièces de 5 francs chaque, et les autres 20, et il se trouve que le prix total des bœufs surpasse de 7 pièces celui des chevaux; combien pouvait-il y avoir de bœufs et de chevaux?*

En nommant x le nombre des chevaux, et y le nombre des bœufs, on aura

$$20y - 31x = 7, \quad \text{et} \quad y = \frac{7 + 31x}{20}.$$

En traitant cette équation par la méthode précédente, on trouvera que le nombre de ses solutions admissibles est illimité, et l'on aura

$$x = 3, 23, 43, 63, \text{ etc.}$$

$$y = 5, 36, 67, 98, \text{ etc.}$$

662 bis. Cherchons à résoudre l'équation

$$y = \frac{14 - 5x + x^2}{8},$$

et décidons qu'on admettra pour x et pour y toutes les valeurs entières, soit en +, soit en —.

Les nombres qui n'excèdent pas les limites + 4 et — 4, sont + 4, + 3, + 2, + 1, 0, — 1, — 2, — 3, — 4, parmi lesquels 3 et 2 réussissent seuls; et les formules $\alpha \pm m\delta$, $\beta \pm n\delta$, deviennent $2 \pm m.8$ et $3 \pm n.8$.

La première donne

$$x = 2, 10, 18, 26, \text{etc.} - 6, -14, -22, \text{etc.}$$

$$y = 1, 8, 31, 70, \text{etc.} + 10, +35, +76, \text{etc.}$$

La seconde donne

$$x = 3, 11, 19, 27, \text{etc.} - 5, -13, -21, \text{etc.}$$

$$y = 1, 10, 35, 76, \text{etc.} + 8, +31, +70, \text{etc.}$$

Il y a ici deux suites de soluteurs en x , parce qu'il y avait deux valeurs de x entre les limites $+4$ et -4 . Nous les avons annoncées au n° 656, E.

Soit proposée l'équation

$$y = \frac{15 - 2x + x^2}{10}.$$

Les limites $+5$ et -5 réussissent, et il en est de même du nombre -3 compris entre ces limites, ce qui nous donnera deux séries de valeurs pour x ; car les deux limites ne fourniront qu'une seule et même suite. Voici les résultats : on a d'abord

$$x = 5, 15, 25, \text{etc.} - 5, -15, \text{etc.}$$

$$y = 3, 21, 59, \text{etc.} + 5, +27, \text{etc.}$$

On a en outre

$$x = 7, 17, 27, \text{etc.} - 3, -13, \text{etc.}$$

$$y = 5, 27, 69, \text{etc.} + 30, +21, \text{etc.}$$

En appelant θ le soluteur $15 = 3.5 = ik$, et n le diviseur $10 = 2.5 = 2k$, on voit que 15 est divisible par 5, moitié de 10, et donne un quotient impair 3, ce qui fait que la limite 5 réussit (n° 656, F, H).

De même, le soluteur 25 est divisible par 5, moitié du dénominateur 10, et donne le quotient impair 5. Le soluteur 35, qui se trouverait aussi dans la première suite, est encore divisible par 5, et donne le quotient impair 7. Enfin, le soluteur 5 divisé par 5 donne le quotient impair 1.

N. B. On pourra s'exercer aussi sur l'équation

$$y = \frac{6 - 3x + x^2}{4},$$

qui est du même genre que la précédente, puis sur l'équation

$$y = \frac{33 - 2x - 5x^2 + x^3}{9},$$

qui donnera trois séries de valeurs pour x , puis encore sur les deux équations

$$y = \frac{24 - 15x + 3x^2}{6} \quad \text{et} \quad y = \frac{25 - 15x + 3x^2}{6}.$$

On trouvera que tous les nombres entiers peuvent être mis à la place de x dans la première, et aucun dans la seconde (E).

662 *ter*. Soit proposé enfin de résoudre en nombres entiers cette équation,

$$y = \frac{20 - 5x + 3x^2}{21}.$$

Il y aurait 21 nombres à essayer pour x ; faisons en sorte de diminuer ces tâtonnements.

Séparons le numérateur du second membre, pour le considérer à part: nous aurons le binôme

$$20 - 5x + 3x^2 \dots (A),$$

qui doit devenir divisible par 21, ou successivement par 7 et par 3. Mettons donc d'abord dans (A), à la place de x , tous les entiers compris entre $+\frac{7}{2}$ et $-\frac{7}{2}$, nous trouverons que -1 et -2 réussissent, et rendent (A) divisible par 7. Laissons pour un moment le second de ces membres; employons le premier, que nous appellerons t , et remarquons que la formule $t + m \cdot 7$ représente toutes les valeurs entières de x , qui peuvent rendre (A) divisible par 7.

Cela posé, mettons en effet $t + 7m$ ou plutôt $-1 + 7m$ dans (A), puis réduisons et divisons par 7, et nous aurons le polynôme

$$4 - 11m + 21m^2 \dots (A'),$$

qui est égal à $\frac{A}{7}$, et qui, pour satisfaire à la proposée, doit être encore divisible par 3.

Essayons pour m les trois nombres compris entre $+\frac{5}{2}$ et $-\frac{5}{2}$, nous trouverons que -1 réussit, et rend (A') divisible par 3. Nommons t' ce nombre -1 , qui en général diffère de t , et nous pourrions affirmer que la formule $t' + n \cdot 3$ ou $t' + 3n$ représentera toutes les valeurs entières de m dans (A').

Mais puisque $t + 7m$ représente toutes les valeurs de x qui rendent (A) divisible par 7, et que $t' + 3n$ représente toutes les valeurs de m qui rendent (A') divisible par 3, il est clair que si l'on met la

seconde formule à la place de m dans la première, on en aura une troisième, qui représentera toutes les valeurs de x qui rendront (A) divisible par 7 et par 3, ou par 21; du moins pour la série que nous examinons.

En faisant cette substitution de la seconde formule dans la première, on trouve

$$t + 7t' + 21n.$$

Cela posé, pour obtenir une valeur d' x , prise dans la série en question, et la seule qui soit contenue entre les limites $+\frac{21}{2}$ et $-\frac{21}{2}$, ou $+10\frac{1}{2}$ et $-10\frac{1}{2}$, il est évident qu'on ne pourra donner à l'indéterminée n d'autre valeur que le zéro, puisqu'on a $t = -1$, et $t' = -1$. On trouvera ainsi -8 pour la valeur d' x cherchée, et il en résultera la série

$$x = 13, 34, 55, 76, \dots -8, -29, -50, \dots$$

En reprenant la seconde valeur de t , qui était -2 , on obtiendrait pour (A') le polynome

$$6 - 17m + 21m^2 \dots (A');$$

dans lequel, essayant les nombres compris entre $+\frac{5}{2}$ et $-\frac{5}{2}$, on ne trouverait que le zéro qui réussît. On aurait donc $t' = 0$, et $t + 7t' + 21n = t + 21n = -2 + 21n$; en sorte qu'il faudrait encore faire $n = 0$ pour avoir la valeur de x tombant entre les limites $+10\frac{1}{2}$ et $-10\frac{1}{2}$. Cette valeur, par la formule $-2 + 21n$, serait égale à -2 , et donnerait la seconde série,

$$x = 19, 40, 61, 82, \dots 2, -23, -44, \dots$$

Ce procédé peut facilement se généraliser, et s'étendre aux diviseurs composés de 3, 4, 5 facteurs, etc. Voyez Lagrange, *Mémoires de Berlin*, année 1768.

663. Du reste, on peut vérifier dans tous ces exemples ce que nous avons dit au n° 656 B, que dans l'équation

$$y = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{n}$$

les valeurs d' x forment toujours une ou plusieurs progressions ex-cédentes, dont la raison, commune à toutes, est n coefficient d' y .

664. De plus, si l'on a $c = 0$, $d = 0$, etc. en d'autres termes, si l'équation n'est que du premier degré en x comme en y , les valeurs

d'y forment aussi une progression excédentive, dont la raison est b , coefficient de x dans le second membre, comme on le voit en mettant $a \pm mb$ à la place de x dans la formule $y = \frac{a+bx}{D}$, car cette formule se change alors en celle-ci,

$$y = \frac{a+bx}{D} \pm mb,$$

dans laquelle m est successivement 0, 1, 2, 3, etc.

665. Cela posé, il est évident que si b est inverse dans le second membre pendant que D est direct dans le premier, on aura $y = \frac{a-bx}{D}$, formule par laquelle on voit manifestement que, lorsque les valeurs d' x iront en augmentant, celles d' y iront en diminuant, c'est-à-dire qu'une des progressions sera croissante, et l'autre décroissante, ce qui amènera nécessairement des termes inverses qui limiteront le nombre des solutions : ce cas aura donc lieu quand la proposée aura cette forme $Dy + bx = a$, c'est-à-dire quand les coefficients d' x et d' y auront le même signe dans le même membre (n^{os} 658, 659, 660, 661).

666. Mais si b est direct dans le second membre, pendant que D est direct dans le premier, on aura $y = \frac{a+bx}{D}$, formule qui prouve que, si les valeurs d' x vont en augmentant, celles d' y iront aussi en augmentant, c'est-à-dire que les deux progressions seront toutes deux croissantes, et par conséquent le nombre des solutions illimité. Ce cas aura donc lieu quand la proposée aura cette forme $Dy - bx = a$, c'est-à-dire quand les coefficients d' x et d' y auront des signes contraires dans le même membre (n^o 662).

667. PREMIER CAS B. Une équation à deux inconnues, dont une au moins n'est qu'au premier degré, et multiplie l'autre inconnue et ses puissances, s'il y en a (n^{os} 651, 652).

Cette équation, pour être générale, doit avoir cette forme

$$(a' + b'x + c'x^2 + \text{etc.})y = a + bx + cx^2 + \text{etc.}$$

en supposant qu'on ait mis dans le premier membre les termes qui renferment y , c'est-à-dire l'inconnue au premier degré, et dans l'autre les termes tout connus et ceux qui renferment x et ses puissances sans renfermer y .

668. De là nous tirerons

$$y = \frac{a + bx + cx^2 + \text{etc.}}{a' + b'x + c'x^2 + \text{etc.}},$$

soit, pour abrégér,

$$a + bx + cx^2 + \text{etc.} = p,$$

$$a' + b'x + c'x^2 + \text{etc.} = q,$$

« en éliminant x de ces deux dernières équations, on en trouvera une de la forme

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + \text{etc.} = 0,$$

entre p et q . Mais, par l'hypothèse, $y = \frac{p}{q}$ ou $p = qy$; substituant cette valeur, l'équation précédente deviendra

$$A + Bqy + Cq + Dq^2y^2 + Eq^2y + Fq^2 + \text{etc.} = 0;$$

tous les termes étant alors divisibles par q , excepté le premier A , il faudra que celui-là le soit aussi, autrement x et y ne pourraient pas avoir des valeurs entières. On cherchera donc tous les diviseurs du nombre A ; en les désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$ et en prenant successivement chacun d'eux pour q , on aura les équations

$$\alpha = a' + b'x + c'x^2 + \text{etc.}$$

$$\beta = a' + b'x + c'x^2 + \text{etc.}$$

etc.

desquelles on cherchera les soluteurs entiers; et ceux de ces soluteurs qui rendront p divisible par q , résoudront la question proposée. » (Lacroix.)

669. Par exemple, le problème du n° 350 B nous a donné l'équation

$$x + y + xy = 79,$$

qui rentre dans le cas actuel, car elle devient d'abord $(1 + x)y = 79 - x$, et donne ensuite

$$y = \frac{79 - x}{1 + x}.$$

On a donc $p = 79 - x$, $q = 1 + x$; éliminant x de ces deux équations, on trouve

$$80 - p - q = 0;$$

en sorte qu'on a $A = 80$, dont les diviseurs sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.

Il faut donc faire successivement

$$\begin{array}{ll} 1 = 1 + x & 2 = 1 + x \\ 4 = 1 + x & 5 = 1 + x \\ 8 = 1 + x & 10 = 1 + x \\ 16 = 1 + x & 20 = 1 + x \\ 40 = 1 + x & 80 = 1 + x \end{array}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{array}{ll} x = 0 & x = 1 \\ x = 3 & x = 4 \\ x = 7 & x = 9 \\ x = 15 & x = 19 \\ x = 39 & x = 79; \end{array}$$

or, chacune de ces valeurs, mise à la place de x dans les équations $p = 79 - x$ et $q = 1 + x$, rend p divisible par q ; en sorte que l'on a

$$\begin{array}{l} x = 0, 1, 3, 4, 7, 9, 15, 19, 39, 79, \\ y = 79, 39, 19, 15, 9, 7, 4, 3, 1, 0. \end{array}$$

Mais en rejetant les cinq dernières solutions, qui reviennent aux cinq premières par la nature du problème, et en rejetant aussi la première solution, parce que 0 n'est pas un nombre, il ne reste que quatre manières de satisfaire au problème par des nombres entiers et directs, savoir en prenant 1 et 39, ou 3 et 19, ou 4 et 15, ou 7 et 9.

670. SECOND CAS. Une seule équation à deux inconnues, montant l'une et l'autre au second degré, mais dans laquelle le carré, ni de la première, ni de la seconde des inconnues, n'est multiplié par l'autre inconnue (n° 651).

Cette équation, pour être générale, doit avoir cette forme

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0;$$

or, « elle revient à

$$y^2 + \left(\frac{ex+c}{f} \right) y = - \frac{a+bx+dx^2}{f},$$

et donne par conséquent

$$y = - \frac{ex+c}{2f} \pm \frac{\sqrt{(ex+c)^2 - 4f(a+bx+dx^2)}}{2f},$$

ou, ce qui revient au même,

$$2fy + ex + c = \pm \sqrt{(ex + c)^2 - 4f(a + bx + dx^2)}.$$

En développant et ordonnant, par rapport à x , la quantité soumise au radical, on lui donnera la forme $m + nx + px^2$, dans laquelle

$$c^2 - 4af = m, \quad 2ce - 4bf = n, \quad e^2 - 4df = p.$$

Si on ne demande pour x et y que des nombres rationnels, soit entiers, soit fractionnaires, la difficulté du problème se réduira à trouver des valeurs de x , qui rendent la quantité $m + nx + px^2$, égale à un carré parfait, et ce carré étant désigné par t^2 , on aura

$$2fy + ex + c = \pm t.$$

Pour obtenir x , résolvons l'équation $m + nx + px^2 = t^2$, nous trouverons

$$x = -\frac{n}{2p} \pm \frac{\sqrt{n^2 - 4mp + 4pt^2}}{2p},$$

ou

$$2px + n = \pm \sqrt{4pt^2 + n^2 - 4pm};$$

faisant $4p = A$, et $n^2 - 4pm = B$, nous aurons

$$2px + n = \pm \sqrt{At^2 + B}.$$

Par ce résultat, la question est ramenée à déterminer t , de manière que $\sqrt{At^2 + B}$ soit un carré : car, ce carré étant u^2 , les deux inconnues x et y ne dépendront plus que des équations du premier degré,

$$2fy + ex + c = t, \quad 2px + n = u,$$

dont les coefficients c, e, f, n et p , sont rationnels, ainsi que les quantités t et u . »

671. « La détermination de t , par la condition énoncée ci-dessus, ou, ce qui est la même chose, la résolution de l'équation $u = \sqrt{At^2 + B}$ en nombres rationnels, renferme en général de grandes difficultés. L'un des cas les plus simples a lieu lorsque A est un carré; en représentant ce carré par a^2 , on aura

$$u = \sqrt{a^2 t^2 + B};$$

et supposant $u = at + \gamma$, il viendra

$$at + \gamma = \sqrt{a^2 t^2 + B};$$

carrant les deux membres, et réduisant, on trouvera

$$2\gamma at + \gamma^2 = B, \quad \text{et} \quad t = \frac{B - \gamma^2}{2a\gamma};$$

prenant pour γ un nombre rationnel, t deviendra un nombre rationnel, ainsi que u , et il en sera de même de x et y . »

672. « Lorsque B est un carré représenté par β^2 , l'équation proposée se résout encore avec la même facilité que tout-à-l'heure, en supposant $u = vt + \beta$, ce qui donne

$$(vt + \beta)^2 = At^2 + \beta^2,$$

équation qui se réduit à

$$v^2 t^2 + 2\beta vt = A t^2,$$

ou, en divisant par t , à

$$v^2 t + 2\beta v = A t, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{2\beta v}{A - v^2}.$$

673. « Enfin, si la quantité $At^2 + B$ peut être décomposée en deux facteurs rationnels, $at + \beta$, $a't + \beta'$, en sorte qu'on ait

$$(at + \beta)(a't + \beta') = At^2 + B,$$

on fera $u = v(at + \beta)$, ce qui donnera

$$v^2 (at + \beta)^2 = (at + \beta)(a't + \beta');$$

supprimant le facteur commun $at + \beta$, on trouvera

$$v^2 (at + \beta) = a't + \beta' \quad \text{et} \quad t = \frac{\beta' - \beta v^2}{a'v^2 - a'}.$$

674. Dans tous les cas, « quand on connaît une valeur rationnelle de t , on peut en déduire facilement autant d'autres qu'on le veut, qui satisfont à l'équation proposée. Pour le prouver, soit α la valeur donnée de t , et β celle de u , qui en résulte, on aura

$$\beta = \sqrt{A\alpha^2 + B} \quad \text{ou} \quad \beta^2 = A\alpha^2 + B;$$

retranchant cette équation de $u^2 = At^2 + B$, il vient

$$u^2 - \beta^2 = A(t^2 - \alpha^2) \quad \text{ou} \quad u^2 = A(t^2 - \alpha^2) + \beta^2.$$

Mais si on fait $u = (t - \alpha)v + \beta$, il viendra, après l'élevation au carré et la substitution dans l'équation précédente,

$$v^2 (t - \alpha)^2 + 2\beta v(t - \alpha) = A(t^2 - \alpha^2);$$

divisant tout par $t - \alpha$, on trouvera

$$v^2 (t - \alpha) + 2\beta v = A(t + \alpha),$$

d'où on tirera

$$t = \frac{2\beta\nu - Aa - \alpha\nu^2}{A - \nu^2},$$

formule qui donnera des nombres rationnels pour t , lorsqu'on en prendra de tels pour ν . »

675. « Il est facile de faire autant d'applications qu'on voudra des formules ci-dessus ; c'est pourquoi nous nous bornerons aux deux suivantes : Trouver deux nombres, x et y , tels que la somme ou la différence de leurs carrés soit égale à un carré donné, β^2 . Les équations à résoudre sont

$$y^2 + x^2 = \beta^2, \quad y^2 - x^2 = \beta^2,$$

et conduisent à

$$y = \sqrt{\beta^2 - x^2}, \quad y = \sqrt{\beta^2 + x^2},$$

expressions qui se rapportent immédiatement au cas du n° 672. On fera $y = \nu x - \beta$, ce qui donnera pour l'une

$$(\nu x - \beta)^2 = \beta^2 - x^2,$$

et pour l'autre

$$(\nu x - \beta)^2 = \beta^2 + x^2.$$

En développant ces équations, on tirera de la première

$$x = \frac{2\beta\nu}{\nu^2 + 1}, \text{ et de la seconde } x = \frac{2\beta\nu}{\nu^2 - 1};$$

substituant ces valeurs dans celles de y , on aura

$$y = \frac{\beta(\nu^2 - 1)}{\nu^2 + 1} \quad \text{et} \quad y = \frac{\beta(\nu^2 + 1)}{\nu^2 - 1};$$

assignant ensuite des valeurs rationnelles à β et à ν , on en obtiendra pareillement de telles pour x et pour y . »

« Si on prend $\beta = 5$, les équations proposées deviendront

$$y^2 + x^2 = 25, \quad y^2 - x^2 = 25;$$

on aura dans la première

$$x = \frac{10\nu}{\nu^2 + 1}, \quad y = \frac{5(\nu^2 - 1)}{\nu^2 + 1},$$

dans la seconde

$$x = \frac{10\nu}{\nu^2 - 1}, \quad y = \frac{5(\nu^2 + 1)}{\nu^2 - 1}.$$

On ne peut supposer $\nu = 1$, car l'une des expressions de y donnerait

alors $\frac{9}{2}$, et l'autre $\frac{10}{0}$; mais en faisant successivement $\nu = 2$, $\nu = 3$, $\nu = 4$, etc. les solutions de la première équation seront

$$\begin{array}{lll} x=4, & x=3, & x=\frac{40}{17}, \text{ etc.} \\ y=3, & y=4, & y=\frac{75}{17}, \text{ etc.} \end{array}$$

et celles de la seconde,

$$\begin{array}{lll} x=\frac{20}{3}, & x=\frac{30}{8}, & x=\frac{40}{15}, \\ y=\frac{25}{3}, & y=\frac{50}{8}, & y=\frac{85}{15}. \end{array}$$

On ne parvient point à des nombres entiers dans cette dernière, lorsqu'on ne donne que des valeurs entières à ν ; mais si on fait $\nu = \frac{5}{2}$, il en résulte

$$x=12 \quad \text{et} \quad y=13. \text{ »}$$

676. « Rien n'est plus facile que de résoudre la seconde question en nombres entiers, lorsque β^2 est impair : car, la différence entre le carré de a et celui de $a+1$ étant $2a+1$, il suffira de poser l'équation

$$2a+1=\beta^2, \text{ de laquelle on tirera } a=\frac{\beta^2-1}{2};$$

et prenant $x=a$, et $y=a+1$, il en résultera

$$y^2 - x^2 = \beta^2.$$

Dans l'exemple proposé, où $\beta^2=25$, on trouve

$a=\frac{24}{2}=12$, et par conséquent $x=12$, et $y=13$, comme ci-dessus. »

677. « Nous ne pousserons pas plus loin la résolution des équations indéterminées : ceux qui voudront s'appliquer en particulier à cette branche d'analyse, pourront consulter les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1769, et le second volume de l'*Algèbre* d'Euler; ils y trouveront la solution complète de l'équation $u = \sqrt{At^2 + B}$, par Lagrange, et beaucoup d'autres recherches non moins intéressantes. »

678. « Les nombres, considérés en eux-mêmes, indépendamment de tout système de numération et de toute question particulière, ont des propriétés très-remarquables : plusieurs sont relatives à leur divisibilité les uns par les autres, d'autres à leur décomposition en puissances parfaites. Bachet de Meziriac, qui commenta le premier avec succès l'ouvrage que Diophante nous a laissé sur l'Arithmétique,

ou plutôt l'analyse numérique, remarqua qu'un nombre quelconque est toujours, ou un carré, ou la somme de deux carrés, ou celle de trois, ou enfin celle de quatre au plus :

10, par exemple, est la somme des deux carrés 1 et 9,

24, celle des trois carrés, 4, 4, et 16,

39, celle des quatre carrés, 1, 4, 9, et 25.

Cette proposition fut démontrée ensuite par Fermat, l'un des plus grands géomètres dont la France s'honore, et qui enrichit de remarques le commentaire de Bachet; mais l'écrit où il se proposait de réunir les grandes découvertes qu'il avait faites sur la théorie des nombres, ne nous est point parvenu, et la propriété précédente n'était qu'un simple fait prouvé par l'expérience, jusqu'à ce que Lagrange l'eût démontrée en 1770, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*. Euler a prouvé cette proposition d'une manière un peu plus simple, dans la deuxième partie de l'année 1777 des *Actes de l'Académie de Pétersbourg*. »

« En 1770, Wilson fit connaître la propriété suivante des nombres premiers: Si n désigne un nombre premier quelconque, le produit $1.2.3.....(n-1)$, augmenté de l'unité, sera divisible par n .

Par exemple, soit $n=7$, on a

$$1.2.3.....(n-1) = 1.2.3.4.5.6 = 720;$$

en ajoutant l'unité, il vient 721, qui, divisé par 7, donne 103 pour quotient. C'est encore Lagrange qui démontra le premier la vérité de cette proposition (*Mém. de Berlin*, année 1771). »

« Il est bon de remarquer que les propriétés des nombres correspondent à des questions d'analyse indéterminée; celle que nous avons citée la première revient à prouver que l'équation

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = A$$

peut toujours être résolue en nombres entiers, quelque nombre entier que l'on prenne pour A , la seconde propriété suppose que dans l'équation

$$1.2.3.....(n-1) + 1 = nx$$

x est toujours un nombre entier, lorsque n est un nombre premier. »

« Ces recherches n'ont guère été tentées que par les plus grands géomètres de notre siècle. Ils ont démontré la plupart des propositions dont Fermat ne nous avait laissé que l'énoncé; leurs travaux sont consignés dans les recueils des Académies de Paris, de Berlin et de Pétersbourg; et la *Théorie des Nombres*, publiée par M. Legendre, est un *Traité* complet sur cette matière. » (Lacroix.)

Voyez aussi les *Recherches arithmétiques* de M. Gauss, traduites par M. Poulet-Delisle.

APPENDICE

A LA SECONDE PARTIE.

(Dans le corps de l'ouvrage, nous nous sommes attachés à développer, ou du moins à esquisser, les théories et les méthodes de calcul les plus générales. Dans cette Appendice nous ferons connaître plusieurs méthodes particulières, souvent plus simples et plus faciles, dans la pratique, que les méthodes générales; et de plus, nous présenterons à nos lecteurs des exercices sur les cas les plus fréquents de la résolution des équations.)

CHAPITRE PREMIER.

De diverses méthodes d'élimination dans les équations du premier degré.

679. REPRÉSENTONS généralement deux équations à deux inconnues par les formules suivantes :

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

Pour y appliquer la méthode générale d'élimination du n° 479, nous les écrirons ainsi,

$$(A) \dots x + \frac{by - c}{a} = 0, \quad x + \frac{b'y - c'}{a'} = 0 \dots (B).$$

Désignant alors par α la valeur d' x de (A), et substituant cette valeur dans (B), nous aurons

$$\alpha + \frac{b'y - c'}{a'} = 0.$$

Or, l'équation (A) donne $P = \frac{by - c}{a}$; et comme elle n'a qu'un

soluteur, il est évident que $S_1 = \alpha$. Mais en général $S_1 = -P$; on a donc ici $\alpha = -\frac{by-c}{a}$, et par conséquent

$$-\frac{by-c}{a} + \frac{b'y-c'}{a'} = 0.$$

De là on tire, en multipliant toute l'équation par aa' ,

$$-ba'y + ca' + ab'y - ac' = 0,$$

ce qui donne successivement

$$(ab' - ba')y = ac' - ca',$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Mais comme la première équation donne $x = \frac{c-by}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y$, si l'on met ici, à la place de y , sa valeur, on aura

$$x = \frac{c}{a} - \frac{abc' - bca'}{a(ab' - ba')} = \frac{acb' - bca' - abc' + bca'}{a(ab' - ba')} = \frac{acb' - abc'}{a(ab' - ba')} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Faisons ici deux observations, qui ont quelque importance :

1° Après avoir trouvé la valeur de y , on aurait pu la substituer dans (B), pour obtenir la valeur de x , au lieu de la substituer dans (A).

2° On aurait pu, en commençant l'élimination, ordonner les deux équations proposées pour l'inconnue y , au lieu de les ordonner pour l'inconnue x . On aurait alors obtenu la valeur de x avant celle de y .

Les commençants seront très-bien de faire tous ces calculs, pour se les rendre familiers.

680. Maintenant nous allons arriver aux mêmes valeurs de x et de y , par des méthodes souvent plus simples.

Reprenons les équations

$$ax + by = c,$$

$$a'x + b'y = c';$$

multiplions la première par a' , et la seconde par a , elles deviendront

$$aa'x + ba'y = ca',$$

$$aa'x + ab'y = ac';$$

retranchons alors la première de celles-ci de la seconde, nous obtiendrons

$$(ab' - ba')y = ac' - ca';$$

et le reste se fera comme dans le numéro précédent.

On pourrait aussi multiplier la première équation par b' , et la seconde par b , puis retrancher le second produit du premier; on aurait alors une équation en x , qui donnerait immédiatement la valeur de cette inconnue.

681. On remarquera qu'en multipliant les équations comme nous l'avons fait, le but était d'obtenir deux nouvelles équations, dans lesquelles l'inconnue à éliminer eût le même coefficient : car alors, en retranchant une des équations de l'autre, cette inconnue devait disparaître. Pour cela donc, il faut multiplier la première équation par le coefficient que l'inconnue à éliminer a dans la seconde équation, et multiplier la seconde équation par le coefficient que cette même inconnue a dans la première.

Voilà la règle générale : mais, 1° Si l'inconnue à éliminer avait d'avance le même coefficient dans les deux équations, il serait inutile de faire la multiplication dont nous venons de parler; 2° Si l'un des coefficients en question était partie aliquote de l'autre, il suffirait de multiplier l'équation qui contiendrait celui-là, par le quotient du second coefficient divisé par le premier. 3° Si les deux coefficients avaient un facteur commun moindre qu'eux, il suffirait de multiplier chacun de ces coefficients par le facteur particulier à l'autre.

Il n'est pas moins évident que, si les termes qui contiennent dans les deux équations l'inconnue à éliminer, ont des signes contraires, au lieu de soustraire une équation de l'autre, il faudra les additionner.

Par exemple, si l'on avait $ax + by = c$, $-ax + my = n$, il suffirait, pour éliminer x , d'ajouter les deux équations, sans aucune multiplication.

Si l'on avait $ax - bmy = c$, $dx + by = e$, il suffirait, pour éliminer y , d'ajouter les deux équations, après avoir multiplié la seconde par m .

Si l'on avait $abx + my = n$, $acx + py = q$, il suffirait, pour éliminer x , de multiplier la première équation par c , et la seconde par b , et de retrancher ensuite un des résultats de l'autre.

682. Voici encore un autre procédé propre à résoudre les équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

La première donne $x = \frac{c - by}{a}$, et la seconde donne $x = \frac{c' - b'y}{a'}$.

Or, comme ce sont là deux expressions d'une même quantité, on peut les équaler, ce qui fournit l'équation en y

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}.$$

Multipliant le tout par aa' , on a

$$ca' - ba'y = ac' - ab'y;$$

et de là on tire, comme ci-devant,

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'.$$

Ce procédé consiste, comme on voit, à tirer des deux équations deux valeurs d'une même inconnue, et à équaler ces deux valeurs.

683. On pourrait enfin opérer ainsi,

Tirer d'une des deux équations la valeur d'une des inconnues, pour substituer cette valeur à la place de la même inconnue dans l'autre équation.

La première équation donnant ici $x = \frac{c - by}{a}$, si l'on met cette valeur à la place de x dans la seconde équation, on aura

$$\frac{ca' - ba'y}{a} + b'y = c',$$

d'où l'on tirera successivement

$$ca' - ba'y + ab'y = ac',$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'.$$

684. Comme que l'on opère, les équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c',$$

donnent pour x et pour y les valeurs suivantes,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

au moyen desquelles on peut résoudre tous les problèmes à deux équations et deux inconnues.

Si l'on compare, par exemple, à ces formules les équations

on aura

$$x + y = 20, \quad 8x + 6y = 130,$$

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 20,$$

$$a' = 8, \quad b' = 6, \quad c' = 130,$$

$$cb' - bc' = -10, \quad ac' - ca' = -30,$$

$$ab' - ba' = -2,$$

d'où l'on conclura $x = 5$, et $y = 15$.

Si on leur compare les deux équations du n° 347 A, on aura

$$a = 7, \quad b = 12, \quad c = 288,$$

$$a' = 12, \quad b' = 7, \quad c' = 358,$$

$$cb' - bc' = -2280, \quad ac' - ca' = -950,$$

$$ab' - ba' = -95,$$

d'où l'on conclura $x = 24$, et $y = 10$.

Si on leur compare les équations en x et y du n° 446, on aura

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 7,$$

$$a' = 1, \quad b' = -1, \quad c' = 1,$$

$$cb' - bc' = -8, \quad ac' - ca' = -6,$$

$$ab' - ba' = -2,$$

d'où l'on conclura $x = 4$, et $y = 3$.

Du reste, dans ces trois cas particuliers, nous n'aurions pas eu à diviser — par —, mais + par +, pour trouver x et y , si les secondes équations eussent été écrites les premières.

685. Si l'on a trois équations en x, y , et z , « on pourra d'abord éliminer x entre la première et la seconde, puis entre la première et la troisième; on parviendra ainsi à deux équations, qui ne renfermeront plus que y et z , et entre lesquelles on éliminera ensuite y . »

Ce procédé peut s'étendre à quatre équations avec quatre inconnues, à cinq équations avec cinq inconnues, et ainsi de suite.

« Si l'on effectue le calcul, l'équation finale à laquelle on parviendra, aura un facteur commun à tous ses termes, et ne sera par conséquent pas la plus simple que l'on puisse obtenir. »

686. « Bezout a donné une méthode fort simple pour éliminer à la fois toutes les inconnues hors une, et par laquelle on ramène immédiatement la question à des équations qui contiennent une inconnue de moins que les proposées; quoique ce procédé ne soit nécessaire que lorsqu'il s'agit des équations à trois inconnues, je

commenceraï par l'appliquer à celles qui n'en contiennent que deux, afin d'embrasser le sujet en entier. »

« Soient les deux équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c' :$$

en multipliant la première par une quantité, m , qui soit indéterminée, il viendra

$$amx + bmy = mc ;$$

et retranchant de ce résultat l'équation

$$a'x + b'y = c' ,$$

on aura

$$amx - a'x + bmy - b'y = cm - c' ,$$

$$\text{ou } (am - a')x + (bm - b')y = cm - c' . »$$

« Puisque rien ne détermine la quantité m , nous pouvons supposer qu'elle soit telle que $bm = b'$. Dans ce cas, le terme multiplié par y disparaissant, on a

$$x = \frac{cm - c'}{am - a'} ;$$

mais, à cause de $bm = b'$, il résulte $m = \frac{b'}{b}$:

$$\text{donc } x = \frac{\frac{cb'}{b} - c'}{\frac{ab'}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} . »$$

« Au lieu de supposer $bm = b'$, si nous faisons $am = a'$, le terme affecté de x s'évanouirait, et nous aurions

$$y = \frac{cm - c'}{bm - b'} .$$

La valeur de m ne serait plus la même que tout à l'heure : car on aurait

$$m = \frac{a'}{a} ;$$

et, en substituant dans l'expression de y , on trouverait

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} .$$

En changeant les signes du numérateur et du dénominateur de cette valeur, son dénominateur sera le même que celui de x , puisqu'on aura

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

687. « Occupons-nous maintenant des trois équations

$$ax + by + cz = d,$$

$$a'x + b'y + c'z = d',$$

$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

L'analogie nous conduira aisément à multiplier la première et la seconde par deux quantités indéterminées, m et n , à les ajouter ensemble, et à en retrancher la troisième : car, par ce moyen, elles seront employées toutes en même temps, et les deux nouvelles quantités m et n , dont nous pouvons disposer à notre gré, pourront être déterminées de manière à faire disparaître en même temps du résultat deux des inconnues. En opérant ainsi, et réunissant les termes qui multiplient une même inconnue, nous aurons

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''.$$

« Posons qu'on fasse disparaître x et y , il faudra pour cela que

$$am + a'n = a'', \quad bm + b'n = b'',$$

et alors il viendra

$$z = \frac{dm + d'n - d''}{cm + c'n - c''}.$$

« Des deux équations dans lesquelles m et n sont les inconnues, il est facile de conclure la valeur de ces quantités au moyen des résultats obtenus dans le numéro précédent : car il suffit de changer dans ceux-ci x en m , y en n , et d'écrire, au lieu des lettres

$$\left. \begin{matrix} a, b, c \\ a', b', c' \end{matrix} \right\}, \text{ les lettres } \left\{ \begin{matrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{matrix} \right\};$$

ce qui donnera

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'}, \quad n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Substituant ces valeurs dans celle de z , et réduisant tous les termes au même dénominateur, on trouvera

$$z = \frac{d(b'a'' - a'b'') + d'(ab'' - ba'') - d''(ab' - ba')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') - c''(ab' - ba')}.$$

« Si on avait fait évanouir les termes affectés de x et de z , on aurait eu y ; les lettres m et n auraient dépendu des deux équations

$$am + a'n = a'', \quad cm + c'n = c'';$$

et, en opérant comme ci-dessus, on aurait trouvé

$$y = \frac{d(c'a'' - a'c'') + d'(ac'' - ca'') - d''(ac' - ca')}{b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') - b''(ac' - ca')}.$$

« Enfin, en posant les équations

$$bm + b'n = b'', \quad cm + c'n = c'',$$

on fait disparaître les termes multipliés par y et par z , et il vient

$$x = \frac{d(c'b'' - b'c'') + d'(bc'' - cb'') - d''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a''(bc' - cb')}.$$

« Ces valeurs étant développées de manière à avoir leurs termes alternativement directs et inverses, et changeant en même temps les signes du numérateur et ceux du dénominateur dans la première et dans la troisième, on pourra leur donner les formes suivantes :

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

688. « Soient les quatre équations

$$a x + b y + c z + d u = e,$$

$$a' x + b' y + c' z + d' u = e',$$

$$a'' x + b'' y + c'' z + d'' u = e'',$$

$$a''' x + b''' y + c''' z + d''' u = e''';$$

on multipliera la première par m , la seconde par n , la troisième par p , et on les ajoutera : en retranchant ensuite la quatrième, on trouvera

$$(am + a'n + a''p - a''')x + (bm + b'n + b''p - b''')y + (cm + c'n + c''p - c''')z + (dm + d'n + d''p - d''')u = em + e'n + e''p - e'''.$$

Pour avoir u , on posera

$$am + a'n + a''p = a''',$$

$$bm + b'n + b''p = b''',$$

$$cm + c'n + c''p = c''',$$

et il viendra

$$u = \frac{em + e'n + e''p - e'''}{dm + d'n + d''p - d'''}$$

« Les équations précédentes qui doivent donner m , n et p , se résoudre par le moyen des formules trouvées pour le cas de trois inconnues. Cette marche doit paraître très-commode et très-simple; mais l'observation de la forme des résultats que nous avons obtenus, nous fournira le moyen de les retrouver sans calcul. »

689. « Pour remonter au premier anneau de la chaîne, prenons l'équation à une inconnue $ax = b$, nous en tirerons

$$x = \frac{b}{a},$$

où l'on voit que le numérateur est le terme tout connu b , et le dénominateur le coefficient a de l'inconnue. Les deux équations

$$ax + by = c,$$

$$a'x + b'y = c',$$

nous ont donné

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

« Le dénominateur se compose encore des lettres a , a' , b , b' , qui multiplient les inconnues, et voici comment : on écrit d'abord la lettre a à côté de la lettre b , ce qui donne ab ; on échange ensuite a et b entre eux pour avoir ba , et en affectant cet arrangement du signe —, il vient $ab - ba$; on met enfin un accent à la seconde lettre de chaque terme : voilà le dénominateur $ab' - ba'$ formé. »

« Voyons à présent de quelle manière peut s'en tirer le numérateur. Il est facile d'apercevoir que pour celui de x , on change les a en c , et les b en c pour celui de y ; car, de cette manière, on trouve pour l'un $cb' - bc'$, et pour l'autre $ac' - ca'$. Le numérateur se conclut donc du dénominateur, dans le cas de deux inconnues, comme dans celui d'une seule, en changeant le coefficient de l'inconnue qu'on cherche, dans le terme tout connu, et en conservant d'ailleurs les accents tels qu'ils sont. »

« La seule inspection des valeurs résultantes des équations à trois inconnues, suffit pour montrer qu'elles n'échappent point à cette règle. A l'égard de leur dénominateur, il faut un peu plus d'attention pour en reconnaître la formation. Cependant puisque le dénominateur, dans le cas de deux inconnues, présente tous les arrangements possibles des deux lettres a et b qui multiplient les inconnues, il est naturel de penser que le dénominateur commun à trois inconnues doit renfermer tous les arrangements des trois lettres a, b, c ; et pour former ces arrangements avec ordre, on s'y prend de la manière suivante. »

« On forme d'abord les arrangements $ab—ba$ des deux lettres a et b ; à la suite du premier ab , on écrit la troisième lettre c , ce qui donne abc ; et faisant passer cette lettre par toutes les places, avec l'attention de changer le signe chaque fois, et de ne pas troubler l'ordre respectif de a et de b , il en résulte

$$abc - acb + cab.$$

Opérant de même sur le second arrangement de deux lettres — ba , on trouve

$$-bac + bca - cba;$$

réunissant ces produits aux trois précédents, puis marquant la seconde lettre d'un accent, et la troisième de deux, on trouve

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$

résultat conforme à celui que présentent les formules obtenues immédiatement. »

« Il est facile de conclure de là que, pour former le dénominateur dans le cas de quatre inconnues, il faudrait introduire la lettre d dans chacun des six produits

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba; »$$

on aurait ainsi

$$\begin{aligned} abcd - abdc + adbc - dacb - acbd + acdb - adcb + dacb + cabd \\ - cadb + cdab - dcab - bacd + badc - bdac + dbac + bcad \\ - bcda + bdca - dbca - cbad + cbda - cdba + dcba; \end{aligned}$$

et dans chacun de ces termes « la seconde lettre porterait un accent, la troisième deux, et la quatrième trois. Les numérateurs des

inconnues u , z , y et x , se concluraient par la règle énoncée plus haut (*). »

690. « Pour faire servir ces formules à la résolution des équations numériques, il faudra comparer les équations proposées terme à terme avec les équations générales des numéros précédents. »

« Pour résoudre, par exemple, les trois équations

$$7x + 5y + 2z = 79,$$

$$8x + 7y + 9z = 122,$$

$$x + 4y + 5z = 55,$$

il faudra comparer, terme à terme, ces équations à celles du n° 687, ce qui donnera

$$a = 7, \quad b = 5, \quad c = 2, \quad d = 79,$$

$$a' = 8, \quad b' = 7, \quad c' = 9, \quad d' = 122,$$

$$a'' = 1, \quad b'' = 4, \quad c'' = 5, \quad d'' = 55.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions générales des inconnues x , y et z , et effectuant les opérations indiquées, on trouvera

$$x = 4, \quad y = 9, \quad z = 3.$$

« Il est important de remarquer que les mêmes expressions serviraient encore quand les équations proposées n'auraient pas tous leurs termes affectés du signe $+$, comme semblent le supposer les équations générales dont ces expressions sont tirées. Si l'on avait, par exemple,

$$3x - 9y + 8z = 41,$$

$$-5x + 4y + 2z = -20,$$

$$11x - 7y - 6z = 37,$$

il faudrait, en comparant les termes de ces équations à leurs correspondants dans les équations générales, avoir égard aux signes, ce qui donnerait

$$a = +3, \quad b = -9, \quad c = +8, \quad d = +41,$$

$$a' = -5, \quad b' = +4, \quad c' = +2, \quad d' = -20,$$

$$a'' = +11, \quad b'' = -7, \quad c'' = -6, \quad d'' = +37,$$

(*) « Laplace, dans la seconde partie des *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1772, page 294, a démontré *a priori* ces règles. »

et ensuite déterminer, conformément aux règles, le signe que doit avoir chaque terme des expressions générales de x, y, z , d'après les signes des facteurs dont il est composé. C'est ainsi qu'on trouverait, par exemple, que le premier terme du dénominateur commun, qui est $a' b' c''$, devenant $+3 \times +4 \times -6$, change de signe, et produit -72 . En faisant la même attention à l'égard des autres termes, tant des numérateurs que des dénominateurs, prenant d'une part la somme de ceux qui sont directs, et de l'autre celle de ceux qui sont inverses, on trouvera

$$x = \frac{2774 - 2834}{592 - 622} = \frac{-60}{-30} = +2,$$

$$y = \frac{3022 - 2932}{592 - 622} = \frac{+90}{-30} = -3,$$

$$z = \frac{3859 - 3889}{592 - 622} = \frac{-30}{-30} = +1. »$$

(Lacroix).

CHAPITRE II.

Exercice sur la résolution des problèmes du premier degré à autant d'équations que d'inconnues.

691. Pour commencer cet exercice, reprenons la question du n° 2 dans l'Introduction.

Si nous appelons x le nombre des femmes, celui des hommes sera $20 - x$; la dépense des femmes sera donc $6x$, et celle des hommes $160 - 8x$, en sorte qu'on aura l'équation

$$160 - 8x + 6x = 130,$$

d'où l'on tirera successivement

$$\begin{aligned} 160 - 2x &= 130, & 30 - 2x &= 0, \\ 2x &= 30, & x &= 15. \end{aligned}$$

Il y a donc dans l'auberge 15 femmes et 5 hommes, comme nous le savions déjà.

692. Les questions des n^{os} 5, 6 et 7, pourraient se résoudre de la même manière; c'est ce que nous verrons généralement en représentant celle de la fin du n^o 19, qui les renferme toutes.

Nommant x la seconde partie du nombre n , la première sera $n-x$, ce qui conduira à l'équation

$$an - ax + bx = d,$$

de laquelle on tirera

$$an - d = ax - bx, \quad (a-b)x = an - d,$$

$$x = \frac{an - d}{a - b};$$

c'est la valeur de la seconde partie.

Ainsi, la première partie $n - x$ deviendra

$$n - \frac{an - d}{a - b} = \frac{an - bn - an + d}{a - b} = \frac{d - bn}{a - b},$$

comme nous l'avions déjà trouvée au n^o 19.

Si l'on multiplie cette première partie par a , et la seconde par b , on aura

$$\frac{ad - abn}{a - b}, \quad \frac{abn - bd}{a - b};$$

et si l'on ajoute ces deux produits, on obtiendra

$$\frac{ad - abn + abn - bd}{a - b} = \frac{(a - b)d}{a - b} = d,$$

comme le demande la question.

693. En nommant x la première partie, comme au n^o 19, on trouve

$$x = \frac{d - bn}{a - b}.$$

Alors la seconde partie $n - x$ devient

$$n - \frac{d - bn}{a - b} = \frac{an - bn - d + bn}{a - b} = \frac{an - d}{a - b},$$

comme nous venons de le trouver dans le numéro précédent.

En multipliant la première par a , et la seconde par b , on aura donc les produits de ce même numéro, et leur somme se réduira toujours à d .

694. Ayant représenté la première partie par x , on pourrait raisonner ainsi : cette première partie, multipliée par a , formera le produit ax , qui, étant retranché de d , donnera $d - ax$ pour la valeur de la seconde partie déjà multipliée par b . Donc cette seconde partie vaut $\frac{d - ax}{b}$, ce qui conduit à l'équation

$$x + \frac{d - ax}{b} = n,$$

d'où l'on tire facilement

$$x = \frac{d - bn}{a - b}.$$

De même, en représentant la seconde partie par x , la première, multipliée par a , serait $d - bx$; et l'on aurait

$$x + \frac{d - bx}{a} = n,$$

d'où l'on tirerait

$$x = \frac{an - d}{a - b}.$$

695. Veut-on résoudre la question particulière du n° 22 par la formule du n° 693,

$$x = \frac{d - bn}{a - b},$$

qui désigne le nombre des tuyaux de fer, on aura $n = 10$, $a = 8$, $b = -5$, $d = 41$, et par conséquent $bn = -50$, ce qui donnera

$$x = \frac{41 + 50}{8 + 5} = 7,$$

comme au n° 23.

696. Veut-on résoudre la même question par la formule du n° 692,

$$x = \frac{an - d}{a - b},$$

qui désigne le nombre des tuyaux de fonte, on aura les mêmes valeurs pour les lettres n , a , b , d , ce qui donnera $an = 80$, et

$$x = \frac{80 - 41}{8 + 5} = 3.$$

697. Une chose à observer, c'est que le problème qui nous occupe, peut, avec une seule et même inconnue, donner deux équations également vraies, mais dont une ne mène à rien : c'est ce que l'on comprendra facilement par l'exemple particulier du n° 2, dans lequel, non-seulement la dépense des hommes jointe à celle des femmes, égale la dépense totale; mais encore le nombre des hommes, plus celui des femmes, égale le nombre total. En sorte que, nommant x le nombre des hommes, et $20 - x$ celui des femmes, on a

$$x + 20 - x = 20.$$

Mais cette équation étant identique (n° 466), et donnant $20 = 20$, ou $x = x$, ou $0 = 0$, etc. prouve que l'on peut prendre pour x le nombre que l'on voudra. C'est qu'en effet, en posant l'équation précédente, on n'a point eu égard à toutes les conditions du problème; on a négligé celle qui est relative à la dépense, et l'on n'a exprimé que ceci : c'est que le nombre des hommes, joint à celui des femmes, équivaut à 20. Or, il est clair qu'avec cette seule condition, il peut y avoir le nombre d'hommes que l'on voudra, pourvu qu'il soit entier, direct, et au-dessous de 20.

En nommant x le nombre des femmes, et $20 - x$ celui des hommes, on aurait eu la même équation.

En général, en nommant x l'une des deux parties du nombre n , l'autre sera $n - x$, et l'on pourra poser l'équation

$$x + n - x = n,$$

qui est identique, parce qu'elle n'exprime que la même condition qui a déjà été exprimée en nommant les deux parties x et $n - x$.

En général, quand il s'agit, dans un problème, de trouver deux quantités déterminées par deux conditions liées entre elles, on peut le résoudre avec une inconnue. Pour cela, après avoir choisi cette inconnue, il faut représenter, au moyen d'une des deux conditions, n'importe laquelle, la seconde quantité à trouver, puis faire l'équation avec l'autre condition. Car si on voulait tirer l'équation de la condition déjà employée, cette équation serait identique.

Mais du reste, les problèmes de ce genre peuvent aussi se résoudre avec deux inconnues, comme nous allons le voir pour celui qui nous occupe.

698. Pour plus de facilité, reprenons encore le cas particulier du

n° 2, et nommons x le nombre des hommes, et y celui des femmes.

Nous aurons les deux équations

$$x + y = 20, \quad 8x + 6y = 130.$$

Multiplions la première par 6, elle deviendra $6x + 6y = 120$; retranchons cette nouvelle équation de la seconde, nous aurons $2x = 10$, et par conséquent $x = 5$, et $y = 15$ (n° 684).

699. Après avoir établi les deux équations ci-dessus, si nous eussions multiplié la première par 8, nous aurions eu $8x + 8y = 160$; retranchant alors de là la seconde équation, nous aurions obtenu $2y = 30$, et par conséquent $y = 15$, et $x = 5$.

700. Dans le problème général (n° 19), en nommant x la première partie du nombre n , et y la seconde, nous aurons

$$x + y = n, \quad ax + by = d;$$

multipliant la première équation par b , nous trouverions $bx + by = bn$; retranchant ce résultat de la seconde équation, nous obtiendrons $ax - bx = d - bn$, d'où nous tirerions, comme ci-devant,

$$x = \frac{d - bn}{a - b}.$$

La seconde partie $y = n - x$ se trouverait comme au n° 693, et le problème se vérifierait comme au n° 692. Mais on peut aussi trouver la seconde partie y , en multipliant la première équation $x + y = n$ par a pour avoir $ax + ay = an$, et en retranchant de ce résultat la seconde équation; ce qui donne $ay - by = an - d$, d'où l'on tire

$$y = \frac{an - d}{a - b}.$$

Du reste, il est bien clair qu'on aurait pu nommer la première partie y , et la seconde x , ce qui ne vaut presque pas la peine d'être remarqué.

701. Le problème du n° 346 nous a conduits à l'équation

$$\frac{x}{2} - 3000 + \frac{x}{3} - 1000 + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 600 = x,$$

qui est la même que celle-ci :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - x = 3400.$$

Si nous la multiplions par 60, elle deviendra

$$30x + 20x + 15x + 12x - 60x = 204000,$$

ou, ce qui revient au même,

$$17x = 204000;$$

de là on tire $x = 12000$, valeur de l'héritage. En sorte que l'aîné des fils reçoit 3000 francs, le second 3000, le troisième 3000, et le quatrième 3000. Ils sont donc également partagés.

702. Si nous eussions appelé x la part du premier, en y ajoutant 3000 fr. nous aurions eu la moitié de l'héritage, en sorte que l'héritage entier eût été représenté par $2x + 6000$.

Cela posé, la part du second aurait été $\frac{2x}{5} + 1000$, celle du troisième $\frac{x}{2} + 1500$, et celle du quatrième $\frac{2x}{5} + 1800$. On aurait donc eu l'équation

$$x + \frac{2x}{5} + 1000 + \frac{x}{2} + 1500 + \frac{2x}{5} + 1800 = 2x + 6000,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} + \frac{2x}{5} - x = 1700;$$

multipliant donc par 30, on aurait trouvé

$$20x + 15x + 12x - 30x = 51000,$$

ou, en réduisant,

$$17x = 51000,$$

ce qui aurait donné $x = 3000$, et par conséquent l'héritage 12000, et tout le reste comme nous l'avons vu dans le numéro précédent.

703. On voit, d'après cela, comment il faudrait procéder si l'on voulait prendre pour inconnue la part du second, ou celle du troisième, ou celle du quatrième. Mais il est à remarquer que si l'on représentait par x la part du troisième, l'héritage serait $4x$, le premier prendrait $2x - 3000$, et l'on n'aurait de fractions que dans la part du second et dans celle du quatrième, en sorte que l'équation

en serait plus simple. Un heureux choix d'inconnues produit souvent ce teffet.

704. Si l'on faisait l'héritage. x ,

la part du premier. t ,

celle du second. u ,

celle du troisième. y ,

celle du quatrième. z ,

on aurait les équations

$$t + u + y + z = x,$$

$$t = \frac{x}{2} - 3000,$$

$$u = \frac{x}{3} - 1000,$$

$$y = \frac{x}{4},$$

$$z = \frac{x}{5} + 600;$$

et mettant dans la première, à la place de t, u, y, z , les valeurs que donnent les autres, on retrouverait celle du n° 701.

705. Le problème du n° 347, A, donne les deux équations

$$7x + 12y = 288, \quad 12x + 7y = 358.$$

Si l'on multiplie la première par 7, et la seconde par 12, on aura

$$49x + 84y = 2016,$$

$$144x + 84y = 4296.$$

Si l'on retranche la première de ces deux équations de la seconde, on obtiendra $95x = 2280$, d'où l'on tirera $x = 24$.

Mais les deux premières équations donnant

$$y = \frac{288 - 7x}{12}, \quad y = \frac{358 - 12x}{7},$$

si l'on substitue 24 à x dans l'une ou l'autre de ces formules, on trouvera $y = 10$.

Il est facile de vérifier ces valeurs de x et de y (n° 684).

706. Si, au lieu de multiplier la première équation par 7, et la seconde par 12, on eût multiplié la première par 12, et la seconde par 7, on aurait eu

$$84x + 144y = 3456,$$

$$84x + 49y = 2506.$$

Retranchant alors la seconde de ces équations de la première, on aurait trouvé $95y = 950$, d'où l'on aurait tiré $y = 10$; et de là on aurait conclu x .

707. On pourrait résoudre ce problème avec une seule inconnue, comme nous allons le voir. (Consultez le n° 697.)

Nommons x la valeur d'une pièce de la première espèce, sept pièces vaudront $7x$; retranchant ce produit de 288, on aura 288 — $7x$ pour la valeur de 12 pièces de la seconde espèce, en sorte qu'une de ces pièces-là vaudra $\frac{288 - 7x}{12}$.

Mais, par la seconde condition,

$$12x + 7 \left(\frac{288 - 7x}{12} \right) = 358;$$

c'est donc là l'équation à résoudre.

Multiplions-la par 12, elle deviendra

$$144x + 7(288 - 7x) = 4296,$$

d'où l'on tirera successivement

$$144x + 2016 - 49x = 4296,$$

$$95x = 2280,$$

$$x = 24.$$

Substituant 24 à x dans la valeur d'une pièce de la seconde espèce représentée par $\frac{288 - 7x}{12}$, on aura 10 pour cette valeur.

On aurait pu prendre pour inconnue la valeur d'une pièce de la seconde espèce. Du reste, on pourra opérer de même dans tous les cas semblables à celui-ci (n° 697).

708. Le problème, ou plutôt les problèmes du n° 445, ne méritent guère de nous arrêter.

L'équation du premier est $7x = 35$, de laquelle on tire $x = 5$.

L'équation du second est $\frac{2y}{5} = 36$, qui donne $2y = 180$, et $y = 90$.

L'équation du troisième est $4z - 12 = 20$, d'où conclut $4z = 32$, et $z = 8$.

709. La question du n° 446 se décompose en deux autres. La seconde, qui est la plus simple, donne l'équation $8z = 40$, en sorte que $z = 5$.

La première donne les deux équations

$$x + y = 7,$$

$$x - y = 1;$$

ajoutant ces deux équations, on trouve

$$2x = 8, \text{ et } x = 4,$$

d'où résulte $y = 3$.

Retranchant au contraire la seconde équation de la première, on obtient

$$2y = 6, \text{ et } y = 3,$$

d'où résulte $x = 4$ (n° 684).

710. Pour résoudre ce problème avec une inconnue en nommant x le premier des deux nombres cherchés, le second serait alors $7 - x$; retranchant le second du premier, on aurait, par la seconde condition du problème,

$$x - 7 + x = 1,$$

d'où l'on tirerait facilement $x = 4$.

711. Voici maintenant quelques nouveaux problèmes du premier degré à autant d'équations que d'inconnues. Nous résoudrons le premier, et nous laisserons les lecteurs s'exercer sur les autres. Les résultats de ceux-ci seront indiqués dans une espèce de table placée à la fin de l'ouvrage.

Étant donnée la somme s et la différence d de deux nombres inconnus, trouver ces deux nombres.

Nommons le plus grand x , et le plus petit y , nous aurons

$$x + y = s, \quad x - y = d;$$

ajoutant ces deux équations, premier membre avec premier membre, et second avec second, nous obtiendrons $2x = s + d$, d'où nous tirerons

$$x = \frac{s + d}{2} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d.$$

Retranchant en revanche la seconde équation de la première, il nous viendra $2y = s - d$, et il en résultera

$$y = \frac{s-d}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d.$$

Pour s'exercer, on reprendra encore ce problème, et on le résoudra de plusieurs manières,

1° Avec deux inconnues, en suivant, pour l'élimination, le procédé du n° 682 ;

2° Avec deux inconnues, en suivant le procédé du n° 683 ;

3° et 4° Avec une inconnue, représentant l'autre par la première condition (n° 697) ;

5° et 6° Avec une inconnue, représentant l'autre par la seconde condition.

Du reste, nous voyons encore ici ce que nous avons déjà vu dans la note du n° 540, c'est que *le plus grand de deux nombres quelconques est égal à la moitié de la somme des deux, augmentée de la moitié de leur différence, et que le plus petit est égal à la moitié de la somme diminuée de la moitié de la différence.*

Ainsi, en ajoutant x avec y , ou $\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ avec $\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$, on a s ; et en retranchant la seconde quantité de la première, on a d .

712. Passons aux autres problèmes que nous avons annoncés dans le numéro précédent. Les deux premiers sont des cas particuliers de celui que nous venons de voir. On les calculera, soit immédiatement, soit au moyen du principe général des n°s 540 et 711. Mais on remarquera que, pour appliquer ce principe, il est souvent plus commode d'opérer ainsi : 1° pour avoir le plus grand des deux nombres, ou ajoutera la différence à la somme, et on prendra la moitié du tout ; 2° pour avoir le plus petit, on retranchera la différence de la somme, et on prendra la moitié du reste. C'est la traduction des valeurs de x et de y , sous leurs premières formes

$$x = \frac{s+d}{2}, \quad y = \frac{s-d}{2}.$$

PROBLÈME I. L'âge de Newton, et celui de Descartes réunis, font 139 ans ; Newton a vécu 31 ans de plus que Descartes. Combien ont-ils vécu chacun ? (Lemoine.)

PROBLÈME II. Une frégate française et une frégate anglaise se sont canonnées pendant trois heures, et le nombre total des coups tirés

de part et d'autre pendant le combat se monte à 429; la frégate française a tiré 89 coups de plus que la frégate anglaise. Combien chaque frégate a-t-elle tiré de coups de canon? (Lemoine.)

PROBLÈME III. Du temps que les animaux parlaient, un mulet et un âne chargés de sacs faisaient voyage ensemble; l'âne se plaignait de sa charge. De quoi te plains-tu? dit le mulet: si tu me donnais un de tes sacs, j'en aurais alors deux fois plus que toi, tandis que si je t'en donnais à présent un des miens, nous en aurions chacun le même nombre. Combien en avaient-ils l'un et l'autre? (Anthologie grecque.)

On résoudra ce problème avec deux inconnues, successivement de trois manières, par les n^{os} 680, 682, 683; puis avec une inconnue, de quatre manières, comme au n^o 711.

PROBLÈME IV. Dis-moi, illustre Pythagore, combien de disciples fréquentent ton école? Je vais te le dire, répond le philosophe. Une moitié d'entre eux étudient les mathématiques, un quart la physique, une septième partie écoute en silence, et il y a de plus trois femmes. (Idem.)

On fera x égal d'abord au nombre des disciples, puis au quart, puis à la septième partie.

PROBLÈME V. Diophante, célèbre mathématicien d'Alexandrie, passa la sixième partie de sa vie dans l'enfance, et la douzième dans la jeunesse; il se maria alors, et ce ne fut qu'après avoir encore vécu la septième partie de sa vie et cinq ans de plus avec son épouse, qu'il en eut un fils. Diophante survécut de quatre ans à ce fils, et parvint à un âge double du sien. Combien d'années avait donc Diophante quand il mourut? (Idem.)

On fera x égal à l'âge de Diophante, puis à la douzième, puis à la septième, puis à l'âge du fils.

PROBLÈME VI. Une mère partage entre ses trois enfants, René, Félix et Victor, un certain nombre d'oranges; elle donne d'abord à René la moitié de ce nombre d'oranges, plus la moitié d'une orange; puis à Félix la moitié de ce qui lui reste, plus la moitié d'une orange; et enfin, à Victor, la moitié de ce qui lui reste, quand les deux autres sont servis, plus la moitié d'une orange, et tout cela sans en entamer aucune. Le partage fait, il ne reste plus d'oranges à la mère. Combien chaque enfant en a-t-il eu? (Lemoine.)

PROBLÈME VII. Trouver un nombre tel que, si du double de ce nombre on soustraie 1, et qu'on multiplie le reste par 2, qu'ensuite on soustraie 2 du résultat, et qu'on divise le reste par 4, la quantité résultante de ces opérations soit de 1 plus petite que le nombre cherché. (Euler.)

PROBLÈME VIII. J'ai acheté quelques aunes de drap à raison de 7 écus pour 5 aunes; j'ai revendu ce drap à raison de 11 écus pour 7 aunes, et j'ai gagné 100 écus sur le tout. Combien y avait-il de drap? (Euler.)

PROBLÈME IX. Quelqu'un achète 12 pièces de drap pour 140 écus: deux sont blanches, trois sont noires, et sept sont bleues. Une pièce de drap noir coûte deux écus de plus qu'une pièce de drap blanc, et une pièce de drap bleu coûte trois écus de plus qu'une noire. On demande le prix de chaque sorte. (Euler.)

PROBLÈME X. Quelqu'un a deux gobelets d'argent avec un seul couvercle pour les deux; le premier gobelet pèse 12 onces, et si l'on y met le couvercle, il pèse ainsi deux fois plus que l'autre gobelet; mais si l'on couvre en revanche le second gobelet, celui-ci pèse de cette manière trois fois plus que le premier gobelet découvert. Il s'agit de trouver le poids du second gobelet et celui du couvercle. (Euler.)

On résoudra ce problème de sept manières, comme on a fait pour le problème III.

PROBLÈME XI. Un père laisse à sa mort quelques enfants, avec un bien qu'ils partagent de la manière suivante: le premier reçoit d'abord cent écus et la dixième partie du reste; le second tire ensuite deux cents écus et la dixième partie de ce qui reste alors; le troisième prend, après que les deux premiers sont servis, trois cents écus et la dixième partie de ce qui reste, et ainsi de suite. Il se trouve à la fin que le bien a été partagé également entre tous les enfants. On demande de combien était l'héritage, combien il y avait d'enfants, et combien chacun a reçu. (Euler.)

PROBLÈME XII. Un capitaine a trois compagnies: la première est de Suisses, la seconde de Souabes, la troisième de Saxons; il veut donner un assaut avec une partie de ces troupes, et il promet une récompense de 901 écus sur le pied suivant, que chaque soldat de

la compagnie qui montera à l'assaut recevra 1 écu, et que le reste de l'argent sera distribué également aux soldats des autres compagnies. Or, il se trouve que si les Suisses donnent l'assaut, chaque soldat des autres compagnies reçoit un demi-écu; que si ce sont les Souabes, chacun des autres reçoit un tiers d'écu; enfin, que si ce sont les Saxons, chacun des autres reçoit un quart d'écu. On demande de combien d'hommes était chaque compagnie. (Euler.)

PROBLÈME XIII. Un changeur a deux espèces de monnaie : il faut a pièces de la première pour faire un écu; il faut b pièces de la seconde pour faire la même somme; quelqu'un vient, et demande c pièces pour un écu. Combien le banquier lui donnera-t-il de pièces de chaque espèce pour le satisfaire? (Euler.)

PROBLÈME XIV. Trois personnes, A , B , C , font ensemble quelques parties de jeu :

Dans la première partie, chacun des joueurs B et C double son argent, au détriment de A .

Dans la seconde partie, A et C doublent chacun leur avoir actuel, au détriment de B .

Dans la troisième partie enfin, c'est A et B qui doublent leur avoir du moment, au détriment de C .

Il se trouve alors que chacun des joueurs possède une somme égale, représentée par a .

On demande avec combien d'argent chacun a commencé le jeu?

Euler, auteur de ce problème, après avoir désigné par x , y , et z , les enjeux des trois joueurs, représente par m la somme de ces enjeux, et pose l'équation $x + y + z = m$, quoique cette valeur ne soit supposée connue; c'est qu'il a indiqué comme un moyen de faciliter la résolution de ces sortes de problèmes, l'introduction d'une nouvelle inconnue arbitraire; et il en donne cet exemple.

Il ajoute que, lorsqu'on est un peu habitué à ces calculs, on juge assez facilement ce qu'il est le plus convenable de faire.

PROBLÈME XV. Équations à résoudre. Quand on aura trouvé les valeurs des inconnues, on les vérifiera immédiatement, en mettant ces valeurs à la place des inconnues dans les équations mêmes. Nous ne les indiquerons point à la fin de l'ouvrage.

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{12} - 20 - \frac{x}{6} = \frac{3x}{4} - 8,$$

$$(5a - 2x)(2a - c) - 4a^2 = 8x(c - 2a) - ab,$$

$$\frac{ax}{6b} - \frac{2c^2x}{ab} + 4a = \frac{4bc^2x}{3a^3} - \frac{5a^3}{4b^2} + \frac{2c^2}{a} - \frac{3b}{2},$$

$$\frac{4a^2x}{a-b} - a^2 = \frac{8a^3 - b^2x}{3a} - 6ax + \frac{a^2b^2 + b^3x}{a^2 - b^2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = 51 \\ 4x - 9y = 21 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 30 \\ 3x + 8y = 64 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12x - 6y = 5 \\ 16x - 15y = 2 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12} \\ \frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{6} - 2x + 6 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12x - 7y + 2z = 95 \\ 4x + 3z = 47 \\ 11y - 2z = 5 \end{array} \right\}.$$

CHAPITRE III.

Méthode pour résoudre les problèmes du premier degré à moins d'équations que d'inconnues.

713. Reprenons le problème du n° 347 B, dont l'équation est

$$7x + 12y = 288,$$

et supposons d'ailleurs que chaque pièce de monnaie dont il s'agit ici ait une valeur entière.

De cette équation on tire

$$x = \frac{288 - 12y}{7} = 41 - y + \frac{1 - 5y}{7} \dots (A)$$

comme on le voit en divisant par 7, d'abord 288 qui donne $41 + \frac{1}{7}$, puis $-12y$ qui donne $-y - \frac{5y}{7}$, et rapprochant les entiers des entiers, et les fractions des fractions.

Or, puisque x est entier, sa valeur est entière; mais 41 et y sont l'un et l'autre entiers, donc $\frac{1 - 5y}{7}$ est aussi entier. Nous pourrions donc faire $\frac{1 - 5y}{7} = e$, cette lettre désignant le nombre entier égal à la septième partie de $1 - 5y$. De cette équation nous tirerons $1 - 5y = 7e$, puis

$$y = \frac{1 - 7e}{5} = \frac{1}{5} - e - \frac{2e}{5} = -e + \frac{1 - 2e}{5} \dots (B).$$

Or, comme y est entier, sa valeur est entière; mais e est entier, donc $\frac{1 - 2e}{5}$ est aussi entier. Nous ferons donc $\frac{1 - 2e}{5} = e'$, cette lettre accentuée désignant le nombre entier qui est la cinquième partie de $1 - 2e$. De cette équation nous tirerons $1 - 2e = 5e'$, puis

$$e = \frac{1 - 5e'}{2} = \frac{1}{2} - 2e' - \frac{e'}{2} = -2e' + \frac{1 - e'}{2} \dots (C).$$

Or, comme e est entier, sa valeur est entière; mais $2e'$ est entier, donc $\frac{1 - e'}{2}$ est aussi entier. Nous ferons donc $\frac{1 - e'}{2} = e''$, cette lettre accentuée à double désignant le nombre entier, qui est la moitié de $1 - e'$.

De cette équation nous tirerons $1 - e' = 2e''$, puis $e' = 1 - 2e''$.

Mettant cette valeur de e' dans l'équation (C), nous trouverons $e = 5e'' - 2$.

Mettant ensuite cette valeur de e dans l'équation (B), nous obtiendrons $y = 3 - 7e''$. Mettant enfin cette valeur de y dans l'équation (A), nous aurons $x = 36 + 12e''$.

Les valeurs d' x et d' y auront donc pour expression ces deux formules,

$$x = 36 + 12e'', \quad y = 3 - 7e'',$$

dans lesquelles nous pourrions mettre pour e'' tout nombre entier qui ne rendra inverse ni x ni y , car des pièces de monnaie ne peuvent avoir une valeur en moins. Or, la première admettrait pour e'' tous les nombres directs; mais ils sont tous rejetés par la seconde. La seconde admettrait tous les nombres inverses; mais ils sont rejetés par la première, à l'exception de -1 et de -2 . L'une et l'autre permettent d'ailleurs qu'on suppose $e'' = 0$. En mettant donc successivement à la place de e'' , 0, -1 , -2 , on aura

$$x = 36, \quad 24, \quad 12,$$

$$y = 3, \quad 10, \quad 17,$$

comme nous l'avons déjà trouvé au n° 659.

714. On saisira suffisamment l'esprit de cette méthode en l'appliquant encore à un ou deux exemples.

Le problème du n° 655 donne cette équation,

$$7x + 5y = 176,$$

de laquelle on tire, en laissant dans le premier membre l'inconnue qui a le plus petit coefficient, et cela pour avoir le moindre diviseur possible,

$$x = \frac{176 - 7x}{5} = 35 - x + \frac{1 - 2x}{5} \dots (A).$$

Faisant $\frac{1 - 2x}{5} = e$, on a $1 - 2x = 5e$, et

$$x = \frac{1 - 5e}{2} = -2e + \frac{1 - e}{2} \dots (B).$$

Faisant $\frac{1 - e}{2} = e'$, on a $1 - e = 2e'$, et $e = 1 - 2e'$.

Mettant cette valeur de e dans (B), on trouve $x = 5e' - 2$. Mettant ensuite cette valeur de x dans (A), on obtient $y = 38 - 7e'$.

Les valeurs d' x et d' y sont donc

$$x = 5e' - 2, \quad y = 38 - 7e'.$$

La première admet pour e' tous les nombres entiers directs; mais la seconde les rejette, excepté les cinq premiers. La seconde admet le zéro et tous les nombres inverses; mais la première rejette tout cela. On fera donc e' égal à 1, 2, 3, 4, 5, et l'on aura

$$x = 3, 8, 13, 18, 23,$$

$$y = 31, 24, 17, 10, 3,$$

comme nous l'avons déjà trouvé au n° 658.

Le problème du n° 661 donne l'équation

$$5x + 24y = 109;$$

on en tire

$$x = \frac{109 - 24y}{5} = 21 - 4y + \frac{4 - 4y}{5} \dots (A).$$

Faisant $\frac{4 - 4y}{5} = e$, on a $4 - 4y = 5e$, et

$$y = \frac{4 - 5e}{4} = 1 - e - \frac{e}{4} \dots (B).$$

Faisant $\frac{e}{4} = e'$, on a $e = 4e'$.

Mettant cette valeur de e dans l'équation (B), on trouve $y = 1 - 5e'$. Mettant ensuite cette valeur de y dans l'équation (A), on obtient $x = 17 + 24e'$. On a donc

$$x = 17 + 24e' \quad , \quad y = 1 - 5e'.$$

La première formule admet pour e' le zéro et tous les nombres directs; mais la seconde rejette les nombres directs. La seconde formule admet pour e' le zéro et tous les nombres inverses; mais la première rejette tous les nombres inverses. Il ne reste donc qu'à faire $e' = 0$, ce qui donne

$$x = 17, \quad \text{et} \quad y = 1,$$

comme au numéro cité.

715. Pour rendre plus facile l'application du procédé, on peut disposer les opérations sous la forme de tableau, comme nous allons le faire en reprenant le problème du n° 662, qui n'admet que des solutions directes et entières, et dont l'équation est

$$20y - 31x = 7.$$

Nous aurons successivement

$$y = \frac{7+31x}{20} = \frac{7}{20} + x + \frac{11x}{20} = x + \frac{7+11x}{20}, \quad \frac{7+11x}{20} = e,$$

$$7+11x=20e,$$

$$x = \frac{20e-7}{11} = e + \frac{9e}{11} - \frac{7}{11} = e + \frac{9e-7}{11}, \quad \frac{9e-7}{11} = e',$$

$$9e-7=11e',$$

$$e = \frac{11e'+7}{9} = e' + \frac{2e'}{9} + \frac{7}{9} = e' + \frac{2e'+7}{9}, \quad \frac{2e'+7}{9} = e'',$$

$$2e'+7=9e'',$$

$$e' = \frac{9e''-7}{2} = 4e'' + \frac{e''}{2} - \frac{7}{2} = 4e'' + \frac{e''-7}{2}, \quad \frac{e''-7}{2} = e''',$$

$$e''-7=2e''',$$

$$\frac{e''-7}{2} = 2e''' + 7. \text{ Donc, en remontant,}$$

$$e' = \frac{18e''' + 63 - 7}{2} = 9e''' + 28,$$

$$e = \frac{99e''' + 308 + 7}{9} = 11e''' + 35,$$

$$x = \frac{220e''' + 700 - 7}{11} = 20e''' + 63,$$

$$y = \frac{620e''' + 1953 + 7}{20} = 31e''' + 98,$$

$$x = 20e''' + 63, \quad y = 31e''' + 98,$$

$$e''' = -3, -2, -1, 0, +1, \text{ etc.}$$

$$x = 3, 23, 43, 63, 83, \text{ etc.}$$

$$y = 5, 36, 67, 98, 129, \text{ etc.}$$

715 bis. Soit encore proposé de trouver les valeurs entières des inconnues x et y dans l'équation $42x + 30y = 41$, si du moins il est possible qu'elles aient de semblables valeurs.

En suivant la marche indiquée, on arrivera bientôt à la fraction $\frac{5}{6}$, qu'il faudrait faire égale à un nombre entier, ce qui n'est pas possible. On en conclura que les inconnues x et y ne peuvent pas avoir toutes deux des valeurs entières. Cela posé, en prenant pour y une

valeur quelconque, entière ou fractionnaire, en plus ou en moins; on trouvera facilement la valeur correspondante de x , et le nombre des solutions sera illimité.

Arrêtons-nous un moment sur ce cas : les coefficients de x et de y , dans l'équation $42x + 30y = 41$, ont un facteur commun 6, qui ne divise pas 41, en sorte qu'on peut donner à la proposée cette forme, $7x + 5y = \frac{41}{6}$. Il est donc évident qu'en donnant à x et à y des valeurs entières, le premier membre ne sera jamais égal au second. Il est d'ailleurs facile de généraliser cette observation. Soit la proposée générale $amx + bmy = c$, on aura $ax + by = \frac{c}{m}$. Alors, si a , b , c , m , sont des entiers, et que m ne divise pas c , on ne pourra satisfaire à l'équation en donnant aux deux inconnues à la fois des valeurs entières.

716. Nous terminerons ces exercices sur une équation à deux inconnues, par deux remarques plus ou moins importantes :

1° En donnant un peu d'attention à la suite des opérations qu'exige la méthode précédente, convenablement généralisée, et aux formules définitives qui expriment les valeurs de x et de y , on retrouvera les propriétés énoncées aux nos 663, 664, 665 et 666 ;

2° On pourrait ramener la théorie actuelle à celle des fractions continues; mais cela donnerait quelque peine aux commençants, sans avoir d'utilité pratique (*Voyez les Additions à l'Algèbre d'Euler*).

717. Nous venons d'examiner le cas d'une équation à deux inconnues. Voyons-en d'autres :

Si l'on avait deux équations, (A) et (B), renfermant trois inconnues, x , y et z , on comparerait (A) et (B) pour en éliminer x , et l'on obtiendrait une équation en y et z , sur laquelle on opérerait comme ci-devant. Ayant trouvé $y = a + be$ et $z = c + de$, on substituerait ces valeurs dans (A) ou dans (B) pour avoir celle de x exprimée en e .

Si l'on avait trois équations, (A), (B) et (C), renfermant quatre inconnues, u , x , y et z , on comparerait (A) et (B) pour en éliminer u ; on ferait la même chose entre (A) et (C), et l'on trouverait ainsi deux équations, (A') et (B'), qui ne renfermeraient plus que les inconnues x , y et z . Alors on opérerait comme dans le cas précédent.

Il faudrait suivre la même marche pour le cas de quatre équations

à cinq inconnues, pour celui de cinq équations à six inconnues, et en général pour celui de m équations à $m+1$ inconnues.

Appliquons ces principes à deux exemples :

1° Cherchons les valeurs directes et entières des inconnues x, y , et z , dans les deux équations suivantes,

$$3x + 5y + 7z = 560,$$

$$9x + 25y + 49z = 2920.$$

En éliminant x , et divisant ensuite par 2, on aura

$$5y + 14z = 620;$$

cherchant alors les valeurs entières de y et de z , on trouvera $y = 124 - 14e'$, et $z = 5e'$. Substituant ces valeurs à la place d' y et de z dans l'une ou l'autre des équations proposées, on obtiendra $3x = 35e' - 60$. On aura donc

$$3x = 35e' - 60, \quad y = 124 - 14e', \quad z = 5e'.$$

La première et la dernière de ces équations font rejeter pour e' le zéro et tous les moins. La dernière admet tous les plus; mais la seconde ne veut pas qu'on élève e' au-dessus de 8. Enfin, des nombres 1 à 8 inclusivement, la première n'admet que 3 et 6, ce qui donne ces deux solutions

$$1^\circ \dots e' = 3, \quad x = 15, \quad y = 82, \quad z = 15,$$

$$2^\circ \dots e' = 6, \quad x = 50, \quad y = 40, \quad z = 30.$$

2° Résolvons ce problème de Lacroix :

Trouver un nombre entier qui, étant divisé par 2, donne pour reste 1; étant divisé par 3, donne pour reste 2; et étant divisé par 5, donne pour reste 3.

En nommant u le nombre cherché, x, y et z les quotients entiers qu'il donne lorsqu'on le divise par 2, par 3, par 5, on aura

$$\frac{u}{2} = x + \frac{1}{2}, \quad \frac{u}{3} = y + \frac{2}{3}, \quad \frac{u}{5} = z + \frac{3}{5}, \text{ ou}$$

$$u = 2x + 1, \quad u = 3y + 2, \quad u = 5z + 3.$$

Éliminant u entre la première et la seconde, puis entre la première et la troisième, on trouvera

$$(A) \dots 2x + 1 = 3y + 2, \quad 2x + 1 = 5z + 3 \dots (B).$$

Éliminant encore x entre ces deux équations, on obtiendra

$$3y + 2 = 5z + 3, \quad \text{ou} \quad 3y - 5z = 1.$$

Cherchant alors les valeurs entières et directes de y et de z dans cette dernière équation, on aura $y = 5e' - 3$ et $z = 3e' - 2$. On substituera ces valeurs dans (A) ou dans (B) pour obtenir la valeur de x exprimée en e' , et cette valeur sera $2x = 15e' - 8$. Substituant enfin ces trois valeurs de x , y et z , dans une des trois équations primitives, on trouvera $u = 15e' - 7$, c'est-à-dire qu'on aura ces quatre équations de condition :

$$u = 15e' - 7, \quad 2x = 15e' - 8, \quad y = 5e' - 3, \quad z = 3e' - 2.$$

Toutes quatre rejettent le zéro et tous les moins. La première et les deux dernières admettraient tous les plus; mais la seconde rejette les nombres impairs. Ainsi, nous avons

$$e' = 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \text{ etc.}$$

$$u = 23, \quad 53, \quad 83, \quad 113, \text{ etc.}$$

$$x = 11, \quad 26, \quad 41, \quad 56, \text{ etc.}$$

$$y = 7, \quad 17, \quad 27, \quad 37, \text{ etc.}$$

$$z = 4, \quad 10, \quad 16, \quad 22, \text{ etc.}$$

718. Il faudrait encore suivre la même marche pour le cas de m équations à $m + n$ inconnues, n étant plus grand que 1; mais alors la dernière équation finale contiendrait $1 + n$ inconnues: car, comme m désigne le nombre des équations, et que ce nombre est réduit à l'unité par l'élimination, $m + n$ devient $1 + n$.

Supposons que l'on soit arrivé ainsi à l'équation finale

$$2x + 3y + 4z = 20;$$

et voyons ce qu'il y aurait à faire pour trouver les valeurs des inconnues x , y , et z . Cet exemple et le suivant nous fourniront des directions pour en résoudre d'autres de cette espèce.

On a d'abord

$$x = \frac{20 - 3y - 4z}{2} = 10 - y - 2z - \frac{y}{2},$$

d'où l'on conclut $\frac{y}{2} = e$, et $y = 2e$.

Mettant cette valeur dans celle d' x , on a

$$x = 10 - 2e - 2z - e = 10 - 2z - 3e.$$

Rapprochant x et y , on voit que

$$x = 10 - 2z - 3e,$$

$$y = 2e.$$

Or, x, y et z devant être des entiers directs et plus grands que zéro, la seconde équation rejette pour e le zéro et tous les nombres inverses. La première rejette pour e tous les nombres directs au-dessus de 2 : car si l'on faisait $e = 3$, et $z = 1$, plus petite valeur que puisse avoir cette quantité, la valeur d' x serait inverse. On fera donc e égal d'abord à 1, et ensuite à 2. Mais pendant que e vaut 1, z peut valoir 1, 2 et 3, comme il est facile de le voir; et pendant que e vaut 2, z ne peut valoir que 1; en sorte que l'on aura ces quatre solutions,

$$e = 1, 1, 1, 2.$$

$$z = 1, 2, 3, 1.$$

$$y = 2, 2, 2, 4.$$

$$x = 5, 3, 1, 2.$$

En opérant d'une manière analogue sur l'équation

$$3x + 4y + 5z = 26,$$

on en tirera

$$x = 6 - z + 4e,$$

$$y = 2 - 2z - 3e;$$

ce qui donnera ces trois solutions,

$$e = -1, -1, -2,$$

$$z = 1, 2, 3,$$

$$y = 3, 1, 2,$$

$$x = 3, 4, 1.$$

CHAPITRE IV.

Quelques procédés d'élimination pour tous les degrés.

719. Je suppose deux équations en x et y de degrés quelconques, et dont on veuille éliminer une des inconnues; on parviendra quelquefois à ce but plus promptement que par la règle générale du n° 479.

1° Si les deux équations contiennent une seule et même puissance de l'inconnue à éliminer, on pourra opérer, ou comme au n° 681, ou comme au n° 682, ou comme au n° 683. C'est ce que l'on verra facilement sur les équations

$$ax^m + b = 0, \quad a'x^m + b' = 0,$$

dans lesquelles les symboles a, b, a', b' , ou quelques-uns d'entre eux, renferment une ou plusieurs puissances d' y (n° 375); on en tirera, par l'un ou par l'autre des procédés indiqués, l'équation finale

$$ab' - ba' = 0;$$

2° Si les deux équations ont cette forme,

$$ax^m + bx^{2m} + cx^{3m} + \text{etc.} + k = 0, \quad a'x^m + b' = 0,$$

c'est-à-dire, si l'une d'elles ne contient qu'une même puissance de x , comme x^m (x étant l'inconnue à éliminer), et que l'autre ne contienne de cette inconnue que les puissances x^m, x^{2m}, x^{3m} , etc. on pourra opérer comme au n° 683. La seconde équation donnant

$$x^m = -\frac{b'}{a'},$$

on fera le carré, le cube, etc. de cette quantité; et, substituant ces valeurs dans la première équation, on aura un résultat sans x .

3° Si les deux équations ne rentrent pas dans les cas précédents, on pourra encore tirer parti de la règle des n°s 680, 681, comme nous allons le voir sur un ou deux exemples.

Soient les équations

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \dots (A)$$

$$a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0, \dots (B),$$

on multipliera la première par a' , et la seconde par a ; et, retranchant l'un des résultats de l'autre, on aura une équation de cette forme :

$$a''x^2 + b''x + c'' = 0, \dots (A').$$

On multipliera encore la première équation par d' , et la seconde par d ; et, retranchant l'un des résultats de l'autre, on aura une équation de cette forme, $a'''x^3 + b'''x^2 + c'''x = 0$, que l'on divisera par x , et qui deviendra

$$a'''x^2 + b'''x + c''' = 0 \dots (B').$$

En opérant alors sur (A') et sur (B') comme sur (A) et sur (B), on obtiendra deux équations du premier degré en x .

Soient les équations

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

on multipliera la première par a' , et la seconde par ax ; et, retranchant l'un des résultats de l'autre, on aura une équation de cette forme:

$$a''x^2 + b''x + c'' = 0.$$

Comparant alors les deux équations du second degré, on les abaissera au premier comme dans l'exemple précédent.

N. B. Appliquez cette méthode aux équations particulières des nos 451, 456, 472.

720. Du reste, avec un peu d'habitude du calcul, on trouvera souvent des moyens d'abrégier encore le travail. Nous allons voir cela dans deux exemples tirés de l'*Arithmétique universelle* de Newton.

Soient les équations

$$x^2 - \frac{2y^2}{a} \cdot x - y^2 = 0, \quad x^2 - 2y \cdot x - \frac{y^4}{a^2} = 0,$$

dont on veuille éliminer x .

En comparant la première avec l'équation générale du second degré

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

on a $P = -\frac{2y^2}{a}$ et $Q = -y^2$; en sorte qu'on trouve par la formule générale des nos 516 et 540,

$$x = \frac{y^2}{a} \pm \sqrt{\frac{y^4}{a^2} + y^2}.$$

En comparant la seconde équation proposée avec l'équation générale, on a $P = -2y$, et $Q = -\frac{y^4}{a^2}$; en sorte qu'on trouve, par la formule citée,

$$x = y \pm \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{a^2}}.$$

Égalant ces deux valeurs d' x , et effaçant ensuite de part et d'autre les termes égaux, on obtient $\frac{y^2}{a} = y$, et par conséquent $y^2 = ay$, et $y = a$.

Soient encore les équations

$$x + y + \frac{y^2}{x} = 20, \quad x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140,$$

dont on veuille éliminer x .

La première donne $x + \frac{y^2}{x} = 20 - y$, d'où l'on tire, en carrant les deux membres, $x^2 + 2y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y + y^2$; puis, en retranchant de part et d'autre y^2 ,

$$x^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y;$$

or, le premier membre de cette nouvelle équation étant identique avec le premier membre de la seconde équation proposée, les deux seconds membres sont égaux, c'est-à-dire que l'on a

$$400 - 40y = 140,$$

qui est l'équation finale en y .

CHAPITRE V.

Exercice sur la résolution des problèmes du second degré, à autant d'équations que d'inconnues.

721. Les problèmes du second degré à une équation et une inconnue, peuvent tous se résoudre par la formule des nos 516 et 540; les exemples suivants feront comprendre comment on doit opérer pour parvenir à ce but.

722. Le problème du n° 348, nous a donné cette équation,

$$\frac{2023xx}{3} + 85xx + \frac{595xx}{3} = 3830\frac{2}{3};$$

multiplions-la par 3, elle deviendra

$$2023xx + 255xx + 595xx = 11492,$$

et se réduira par conséquent à

$$2873xx = 11492.$$

Divisant alors par 2873, et transportant tout dans le premier membre, nous aurons

$$x^2 - 4 = 0;$$

comparant enfin cette équation, ainsi préparée, à l'équation générale du second degré, nous trouverons $P=0$, $Q=-4$, et nous obtiendrons par la formule des n^{os} 516 et 540

$$x = \pm \sqrt{4} = \pm 2.$$

(Voyez le n^o 541.)

Le soluteur direct nous apprend donc que le troisième joueur se retire avec 2 fois 5 écus, ou avec 10 écus, d'où il résulte que le second se retire avec 34 écus, et le premier avec 79 écus et $\frac{1}{3}$, ce qui satisfait au problème, comme il est facile de le vérifier.

Le soluteur inverse, en revanche, n'est ici d'aucun usage : car, l'équation primitive ne contenant d'autre puissance d' x que le carré, reste la même lorsqu'on y change le signe d' x (n^{os} 26, 35); et d'ailleurs, d'après les conditions du problème, si le troisième joueur se retirait avec une dette, il devrait en être de même des deux autres, ce qui serait absurde puisqu'on supposerait ces dettes provenir de la partie qu'ils font ensemble.

Cependant, au moyen des règles sur les signes, le nombre -2 , considéré comme abstrait, satisfait à l'équation comme le nombre $+2$.

723. Le problème du n^o 349 nous a donné cette équation,

$$\frac{xx}{100} = x - 24;$$

multiplions-la par 100, et transportons tout dans le premier membre, nous aurons

$$x^2 - 100x + 2400 = 0;$$

comparons alors cette équation à l'équation générale, nous trouverons $P=-100$, $Q=2400$, et nous obtiendrons, par la formule,

$$x = 50 \pm 10.$$

(Voyez le n° 543, 1°.)

Le cheval avait donc coûté ou 60 ou 40 pièces de cinq francs; en sorte que ce problème a deux solutions directes aussi bonnes l'une que l'autre, ce qu'il est essentiel de remarquer.

724. Le problème du n° 356 nous avait donné cette équation,

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)^n \cdot a = \left(\frac{100-x}{100}\right) a - b;$$

faisons-y $n=2$, et représentons, pour abrégé, le nombre 100 par la lettre c , nous aurons

$$\left(\frac{c-x}{c}\right)^2 \cdot a = \left(\frac{c-x}{c}\right) a - b,$$

d'où nous tirerons successivement

$$\frac{c^2 - 2cx + x^2}{c^2} = \frac{c-x}{c} - \frac{b}{a},$$

$$c^2 - 2cx + x^2 = c^2 - cx - \frac{bc^2}{a},$$

$$x^2 - cx + \frac{bc^2}{a} = 0.$$

Cette équation, comparée à l'équation générale du second degré, donne $P = -c$, et $Q = \frac{bc^2}{a}$, d'où l'on tire, par la formule,

$$x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{bc^2}{a}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$x = \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}c \sqrt{1 - \frac{4b}{a}},$$

parce que $\frac{1}{4}c^2 - \frac{bc^2}{a} = \frac{1}{4}c^2 \left(1 - \frac{4b}{a}\right).$

725. On peut aussi résoudre les équations du second degré par d'autres méthodes que celles des numéros cités, et il ne sera pas inutile que nous fassions connaître ces méthodes.

Étant donnée l'équation générale

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

dont on demande les deux soluteurs, on observera d'abord que, par le n° 404, la somme de ces soluteurs est $-P$, et que, par le n° 408, leur produit est Q . En sorte que tout problème du second degré revient à celui-ci : *Étant donnés la somme $-P$ de deux nombres et leur produit Q , trouver ces deux nombres.*

D'un autre côté, nous savons (n° 711) que le plus grand de deux nombres quelconques est égal à la moitié de la somme des deux, augmentée de la moitié de leur différence, et que le plus petit est égal à la moitié de la somme diminuée de la moitié de la différence.

Or, comme nous connaissons la somme $-P$ des deux soluteurs en question, et par conséquent la moitié $-\frac{1}{2}P$ de cette somme, il ne reste plus, pour avoir le plus grand et le plus petit, que de trouver leur différence ou la moitié de leur différence. Le problème précédent revient donc encore à celui-ci : *Étant donnés la moitié de la somme $-\frac{1}{2}P$ et le produit Q de deux nombres, trouver la moitié de leur différence.*

Si l'on nomme y la moitié de cette différence, on aura

$$\left(-\frac{1}{2}P + y\right)\left(-\frac{1}{2}P - y\right) = Q,$$

ou, en effectuant la multiplication (n° 118),

$$\frac{1}{4}P^2 - y^2 = Q,$$

d'où l'on tirera

$$y = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q},$$

en sorte que le plus grand des soluteurs est

$$-\frac{1}{2}P + \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q},$$

et le plus petit

$$-\frac{1}{2}P - \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}.$$

Ce sont les deux valeurs de x trouvées aux n°s 516 et 540.

726. Pour résoudre encore d'une autre manière l'équation du second degré,

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

l'on observera que si le premier membre était un carré parfait, en extrayant de part et d'autre la racine, l'équation serait abaissée au premier degré. Mais si l'on compare ce premier membre au carré d'un binôme quelconque, lequel carré contient toujours trois termes, savoir le carré du premier terme de ce binôme, le double du produit des deux, et le carré du second (n° 265); si l'on fait, dis je,

cette comparaison, on verra, 1^o que le premier terme x^2 de l'équation peut bien être considéré comme le carré du premier terme du binôme, en sorte que le premier terme de ce binôme serait x . On verra, 2^o que le second terme $+Px$ de l'équation peut aussi être assimilé au second terme du carré du binôme : car ce terme $+Px$ peut être pris pour le double produit des deux, ou pour le double du second, multiplié par le premier. Mais le premier est x , donc $+P$ est le double du second, ou $+\frac{1}{2}P$ est le second. Quant au troisième terme $+Q$ de l'équation, il faudrait, pour qu'il fût égal au troisième terme du carré du binôme $x+\frac{1}{2}P$; il faudrait, dis-je, qu'il valût $(\frac{1}{2}P)^2$ ou $\frac{1}{4}P^2$, ce qui n'a pas lieu généralement, mais seulement dans quelques cas particuliers.

Si l'on avait donc, je le répète, $x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2$ pour premier membre de la proposée, on pourrait abaisser l'équation par l'extraction de la racine. Or, cette forme est facile à obtenir ; il suffit pour cela d'ajouter $\frac{1}{4}P^2$ au premier membre de la proposée, et d'en retrancher Q , ce qui est très-permis, pourvu qu'on fasse la même addition et la même soustraction dans le second membre. On aura ainsi

$$x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P^2 - Q;$$

extrayant alors de part et d'autre la racine, on trouvera (n^o 484, note)

$$x + \frac{1}{2}P = \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q},$$

d'où l'on tirera

$$x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}.$$

727. Mais il est clair qu'on n'aurait pas eu besoin de retrancher Q des deux membres, si on l'eût d'entrée transporté dans le second, ou si l'on eût tout de suite donné à la proposée cette forme

$$x^2 + Px = -Q.$$

Ainsi donc, l'équation étant préparée comme nous venons de le dire, on ajoutera à ses deux membres le carré de la moitié du coefficient de x , puis on extraira de part et d'autre la racine ; cette équation sera par là abaissée au premier degré, et se résoudra sans peine.

Du reste, la racine du premier membre, quand on aura complété le carré, sera toujours x plus ou moins la moitié du coefficient de x dans la proposée, $+$ quand ce coefficient sera en plus, et $-$ quand il sera en moins.

Ce procédé étant le plus facile de tous, nous allons l'appliquer à quelques exemples. Mais nous invitons les commençants à compléter d'abord un certain nombre de carrés, pour en acquérir l'habitude. En voici quelques-uns d'incomplets, sur lesquels ils pourront s'exercer :

$$x^2 + 6x; \quad x^2 + 5x; \quad x^2 - 10x; \quad x^2 - 2x;$$

$$x^2 - 7x; \quad x^2 + \frac{5}{4}x; \quad x^2 - \frac{5}{2}x; \quad x^2 - x.$$

N. B. Les nombres fractionnaires s'écrivent sous la forme de fractions, comme ceux qu'on voit dans ces exemples; et quand x n'a point de coefficient, son coefficient est 1.

Faisons encore observer, avant d'aller plus loin, que si l'équation proposée est déjà un carré parfait, comme

$$x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2 = 0,$$

on peut immédiatement en extraire la racine, sans rien transposer et sans rien ajouter. On a ainsi $x + \frac{1}{2}P = 0$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}P$. Il semble alors qu'on n'a qu'un soluteur, parce qu'il n'y a en effet qu'un nombre qui satisfasse à l'équation. Mais on dit cependant qu'elle a deux soluteurs égaux, parce qu'elle est composée de deux facteurs égaux du premier degré, et qu'on peut lui donner cette forme.

$$(x + \frac{1}{2}P)(x + \frac{1}{2}P) = 0.$$

Voyez les nos 390, 391, 392, 393.

Voici maintenant quelques problèmes particuliers :

728. On cherche un nombre tel qu'en l'ajoutant à 10, et en le retranchant de 10, la somme multipliée par la différence donne 51.

(Euler.)

Nommant ce nombre x , on a $(10 + x)(10 - x) = 51$, ou $100 - xx = 51$, ou

$$xx = 49;$$

ajoutant de part et d'autre le carré de la moitié du coefficient de x , qui, dans ce cas, est nul; puis extrayant la racine, on obtient

$$x = \pm 7.$$

Mais cette équation du reste n'est autre chose qu'une équation à deux termes, à laquelle on peut immédiatement appliquer l'extraction de la racine (nos 434, 541).

Le nombre cherché est donc 7, comme l'indique le soluteur direct.

Quant au soluteur inverse, il n'a d'usage ici qu'à la faveur des règles sur les signes : car l'équation $100 - xx = 51$ ne peut être modifiée par le changement du signe de x , puisqu'elle ne contient d'autre puissance de l'inconnue que le carré (n° 35).

Si on voulait prendre l'équation sous cette forme $(10 + x)(10 - x) = 51$, et y changer le signe de x , elle deviendrait $(10 - x)(10 + x) = 51$, c'est-à-dire qu'elle resterait la même, ainsi que la question qu'il s'agissait de résoudre (*).

729. *Trouver un nombre tel que, si l'on multiplie sa moitié par son tiers, et qu'au produit l'on ajoute la moitié du nombre qu'on cherche, le résultat soit 30.* (Euler.)

Nommant ce nombre x , on aura

$$\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x = 30;$$

multipliant cette équation par 6, elle deviendra

$$x^2 + 3x = 180;$$

ajoutant alors de part et d'autre le carré de la moitié du coefficient de x , on trouvera

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{729}{4};$$

extrayant des deux côtés la racine, on obtiendra

$$x + \frac{3}{2} = \pm \frac{27}{2};$$

d'où l'on tirera enfin

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}.$$

C'est-à-dire que le nombre cherché sera, ou 12, ou - 15 (Voyez le n° 542).

Le premier satisfait au problème, et le second y satisfait aussi, du moins à la faveur des règles sur les signes. Mais sans cela voici quel est l'usage de ce soluteur - 15 : il faut, à cause du signe d'inversion, remonter à la première équation du problème, et y changer le signe de x (n° 35), elle devient par là

$$\frac{1}{6}xx - \frac{1}{2}x = 30,$$

et nous apprend que le nombre 15 répond à cette question : *Trou-*

(*) L'équation du second degré à deux termes peut être généralement représentée par $x^2 - a^2 = 0$, ou par $a^2 - x^2 = 0$, ou par $(a+x)(a-x) = 0$; or, l'on voit évidemment dans cette dernière forme que l'équation ne saurait changer par le changement du signe de x dans les deux termes qui contiennent cette lettre.

ver un nombre tel que si l'on multiplie sa moitié par son tiers, et que du produit on retranche la moitié du nombre qu'on cherche, le résultat soit 30.

Si cette question eût été proposée la première, et qu'on eût résolu l'équation

$$\frac{1}{6}xx - \frac{1}{2}x = 30,$$

on en aurait tiré x égal à 15 ou à - 12.

730. Avant de passer à de nouveaux problèmes, il serait bon que les commençants reprissent ceux que nous avons déjà vus, pour essayer de les résoudre avec d'autres inconnues.

Nous avons supposé que le troisième joueur, dans la question du n° 348, se retirait avec x fois 5 écus; mais on aurait pu supposer qu'il se retirait avec x écus. On aurait aussi pu nommer x l'argent du premier joueur, ou celui du second, ou poser en fait que le premier joueur se retirait avec x fois 7 écus, ou encore que le second joueur se retirait avec x fois 17 écus. Il sera bon d'essayer chacune de ces manières.

731. On peut aussi résoudre ce problème avec trois inconnues.

Si l'on suppose que le premier joueur se retire avec z fois 7 écus, ou avec $7z$ écus, le second avec y fois 17 écus, ou $17y$ écus, le troisième avec x fois 5 écus, ou $5x$ écus, on aura les équations

$$z = \frac{17y}{3}, \quad y = x,$$

$$119zy + 85yx + 35zx = 3830\frac{2}{3};$$

et en substituant dans la dernière les valeurs de y et de z tirées des deux premières, on obtiendra une équation finale en x , qui sera précisément celle des n°s 348 et 722.

732. On pourra supposer aussi que le premier joueur se retire avec x écus, le second avec y écus, et le troisième avec z écus, ce qui donnera les équations

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{3}, \quad \frac{y}{17} = \frac{z}{5},$$

$$xy + yz + xz = 3830\frac{2}{3}.$$

733. Si dans le problème du n° 728, on nommait la somme x , et la différence y , le nombre cherché serait représenté par $x - 10$ ou par $10 - y$, en sorte qu'on aurait les deux équations

$$x - 10 = 10 - y, \quad xy = 51;$$

mettant dans la seconde la valeur d' y , prise dans la première, on trouverait

$$xx - 20x = -51;$$

ajoutant de part et d'autre le carré de la moitié du coefficient de x , ou le carré de -10 , on obtiendrait

$$xx - 20x + 100 = 49;$$

puis, en extrayant la racine, et transposant,

$$x = 10 \pm 7.$$

Le premier soluteur donne 17 pour la somme de 10 et du nombre cherché, en sorte que ce nombre est 7.

Le second soluteur donnerait 3 pour la somme de 10 et du nombre cherché, en sorte que ce nombre serait -7 .

734. Si l'on nommait seulement x la somme, le nombre serait $x - 10$, et la différence $10 - x + 10 = 20 - x$, ce qui donnerait l'équation

$$20x - xx = 51,$$

qui revient à celle du numéro précédent.

735. Si l'on nommait x la différence, le nombre serait $10 - x$, et la somme $10 + 10 - x = 20 - x$, ce qui donnerait encore la même équation; mais ce serait alors le second soluteur 3 qui répondrait à la question, au lieu du premier 17.

736. Si dans le problème du n° 729, on nomme x la moitié du nombre qu'on cherche, ce nombre sera $2x$, et son tiers sera $\frac{2x}{3}$, en sorte qu'on aura l'équation

$$\frac{2xx}{3} + x = 30,$$

qui deviendra successivement

$$2xx + 3x = 90$$

$$xx + \frac{3}{2}x = 45$$

$$xx + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{729}{16}$$

$$x + \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{27}{4}.$$

Le soluteur direct 6 apprend donc que le nombre cherché est 12.

737. Si dans ce même problème on nomme x le tiers du nombre cherché, ce nombre sera $3x$, et sa moitié $\frac{3x}{2}$, en sorte qu'on aura

$$\frac{3xx}{2} + \frac{3x}{2} = 30$$

$$3xx + 3x = 60$$

$$xx + x = 20$$

$$xx + x + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Le soluteur direct 4 donnera encore 12 pour le nombre cherché. Du reste, cette dernière opération fait voir que les équations de tels ou tels problèmes peuvent être beaucoup simplifiées par un heureux choix des inconnues.

738. Si l'on avait représenté par x le produit, l'équation aurait été bien moins simple; on aurait eu $30 - x$ pour la moitié du nombre cherché, ce qui aurait donné $60 - 2x$ pour le nombre même, et $\frac{60 - 2x}{3}$ pour son tiers; multipliant alors la moitié par le tiers, on aurait trouvé un produit, qu'on aurait égalé à x , ce qui aurait donné

$$\frac{2xx - 120x + 1800}{3} = x$$

$$2xx - 120x + 1800 = 3x$$

$$xx - \frac{123}{2}x = -900$$

$$xx - \frac{123}{2}x + \frac{15129}{16} = \frac{729}{16}$$

$$x - \frac{123}{4} = \pm \frac{27}{4}$$

$$x = \frac{123}{4} \pm \frac{27}{4}$$

Le premier soluteur aurait donné pour le nombre cherché un nom-

bre inverse; mais le second soluteur 24, substitué à la place d' x dans la fonction $60 - 2x$, qui exprime ce nombre, aurait encore donné 12 pour sa valeur.

739. Sans varier sur le choix de l'inconnue d'un problème, on peut cependant varier dans la manière d'en établir l'équation; c'est ce que l'on verra en comparant le raisonnement que nous avons fait dans le n° 349, avec celui de Lacroix, que nous allons transcrire ici, le problème du cheval étant tiré de l'Algèbre de cet auteur.

« Si l'on me disait ce que le cheval a coûté, je vérifierais ce nombre de cette manière : je le retrancherais de 100, et je ferais cette règle de trois. Si 100 se réduisent au nombre que vient de me donner la soustraction, à combien le nombre prétendu doit-il se réduire? Ayant trouvé ce quatrième terme, il devrait être égal à 24.

« Nommons donc x le nombre cherché, c'est-à-dire le nombre de pièces de 5 francs que le cheval a coûté. Alors, puisque 100 francs sont supposés se réduire à $100 - x$, je trouverai à combien x doit être réduit en faisant cette règle de trois, $100 : 100 - x :: x :$; le quatrième terme sera $\frac{(100 - x)x}{100}$ ou $\frac{100x - xx}{100}$; puis donc qu'on suppose que le prix du cheval a été réduit à 24 pièces de 5 francs, il faut que $\frac{100x - xx}{100} = 24$. » (n° 723).

740. Voici quelques problèmes dont on trouvera les solutions à la fin de l'ouvrage.

PROBLÈME I. Trouver un nombre tel qu'étant son triple de son carré, on ait 10 pour différence. (Lemoine.)

PROBLÈME II. Je vous donnerai les pièces d'or que j'ai dans cette bourse, disait un père à son fils qui étudiait les mathématiques, si vous pouvez en deviner le nombre : il est tel que son quintuple surpasse de 12 la moitié de son carré. (Lemoine.)

PROBLÈME III. Est-il possible de trouver un nombre dont le carré, augmenté de 20, donne 16 pour somme? (Lemoine.)

PROBLÈME IV. Quelques négociants établissent un facteur à Archangel, et chacun d'eux met en fonds dix fois autant d'écus qu'ils sont d'associés; d'ailleurs l'appointement du facteur est fixé pour chaque cent écus du capital à deux fois autant d'écus qu'il y a d'associés. Or, il arrive que, si l'on multiplie la centième partie de cet

appointement par $2\frac{2}{9}$, on trouve le nombre des associés. On demande quel est ce nombre. (Euler.)

PROBLÈME V. Quelqu'un achète un certain nombre de pièces de drap; il paie pour la première 2 écus, pour la seconde 4, pour la troisième 6, pour la quatrième 8, et ainsi de suite: et toutes les pièces ensemble lui coûtent 110 écus. Combien y a-t-il de pièces? (Euler.)

PROBLÈME VI. Quelqu'un a acheté plusieurs pièces de drap pour 180 écus. S'il avait reçu pour la même somme 3 pièces de plus, il aurait eu la pièce à 3 écus de meilleur marché. Combien a-t-il acheté de pièces? (Euler.)

PROBLÈME VII. Deux paysannes portent ensemble 100 œufs au marché; l'une en porte plus que l'autre, et cependant le produit est le même pour l'une et pour l'autre. La première dit à la seconde: Si j'avais eu tes œufs au lieu des miens, j'aurais retiré 15 sous. L'autre lui répond: Si j'avais eu les tiens au lieu des miens, j'aurais retiré 6 sous et $\frac{2}{3}$. Combien d'œufs chacune a-t-elle porté au marché? (Euler.)

PROBLÈME VIII. Un marchand a un certain nombre d'aunes d'une étoffe; un autre marchand a 3 aunes de plus de la même étoffe, et ils vendent tous les deux leur étoffe, mais à des prix différents, et la somme de ces deux ventes ensemble est de 35 écus. Alors le premier marchand dit au second: Si j'avais eu autant d'étoffe que vous, j'en aurais retiré 24 écus. L'autre répond: Si je n'avais pas eu plus d'étoffe que vous, je n'en aurais retiré que 12 écus $\frac{1}{2}$. Combien d'aunes avaient-ils chacun? (Euler.)

PROBLÈME IX. Un homme ayant placé une somme a dans une entreprise où il perd d'année en année, et toujours dans la même proportion, retire ses fonds. Il calcule alors que s'il eût pu les retirer après la seconde année, il eût perdu b cette année-là. On demande à combien pour c montait sa perte par an.

Partez de cette supposition, il perdait x pour c par an.

PROBLÈME X. Résolvez les équations suivantes:

$$x^2 = r^2 - rx \dots \dots \dots (A),$$

$$2rb = 2x\sqrt{4r^2 - x^2} \dots \dots \dots (B),$$

$$2rb = x\sqrt{4r^2 - d^2} + d\sqrt{4r^2 - x^2} \dots \dots \dots (C),$$

$$2bx = a\sqrt{4x^2 - d^2} + d\sqrt{4x^2 - a^2} \dots \dots \dots (D).$$

CHAPITRE VI.

Méthode pour trouver par approximation les soluteurs irrationnels des équations numériques.

741. On nomme *équations numériques* celles dont tous les coefficients sont donnés en nombres, c'est-à-dire en chiffres. Les autres sont des *équations algébriques* ou *littérales*.

742. Nous n'avons point dans cet ouvrage considéré séparément ces deux classes d'équations, parce que tout ce que nous avons dit jusqu'à présent des équations, convenait également aux unes et aux autres; aussi, quoique nous en ayons souvent vu de numériques, nous ne les avons employées que comme des exemples au moyen desquels les commençants pouvaient plus facilement saisir ce que nous exprimions cependant d'une manière générale.

743. Si nous résolvons par la méthode du second degré l'équation $x^2 - 2x - 5 = 0$, nous trouverons pour ses deux soluteurs $1 + \sqrt{6}$, et $1 - \sqrt{6}$; mais $\sqrt{6} = 2.45$, à un centième près (n° 340), en sorte que les deux soluteurs ci-dessus peuvent aussi être exprimés par 3.45, et -1.45 , ces nombres désignant les valeurs des deux soluteurs, approchées jusqu'aux centièmes. Or, le but de ce chapitre est de faire connaître une méthode particulière aux équations numériques, et par laquelle on trouve ainsi par approximation la valeur des soluteurs irrationnels que ces équations, de quelque degré qu'elles soient, peuvent contenir, approximation que l'on pousse du reste aussi loin qu'on le veut.

744. Mais la méthode dont il s'agit ici reposant sur quelques principes que nous ne connaissons pas encore, et dont plusieurs sont propres aux équations numériques, nous commencerons par exposer ces principes, après avoir cependant fait observer avec Lacroix « qu'il y a des équations littérales qui se transforment sur-le-champ en équations numériques. »

« Si l'on avait, par exemple,

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0,$$

en faisant $y = px$, il viendrait

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = 0,$$

résultat divisible par p^3 , et qui se réduit à

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0.$$

Cette dernière équation ayant un solveur rationnel $x = -7$, fait voir que la proposée a aussi un solveur rationnel, savoir $y = -7p$.

N. B. « L'équation en y est de celles que l'on appelle *équations homogènes*, parce qu'en faisant abstraction des coefficients numériques, chacun de ses termes renferme le même nombre de facteurs. »

745. Cela posé, venons aux principes dont nous avons parlé.

Soit l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0;$$

si l'on y substitue à x le nombre 1, son premier membre se réduit à -3 ; et si l'on y substitue à x le nombre 2, son premier membre se réduit à $+8$, d'où il résulte que ni 1 ni 2 ne sont solveurs de la proposée.

Mais puisqu'on peut considérer le 0 comme compris entre les deux quantités -3 et $+8$, que nous venons de trouver, il paraît hors de doute qu'au moins un des nombres capables de donner, par leur substitution à la place de x , le résultat 0, doit être compris entre les nombres 1 et 2, qui ont donné les résultats -3 et $+8$; en d'autres termes, la proposée doit avoir au moins un de ses solveurs entre 1 et 2. Du reste, ce solveur, ou ces solveurs, s'il y en a plus d'un, ne sauraient être imaginaires, car on ne peut pas dire que les symboles imaginaires soient compris entre des quantités réelles. En outre, dans ce cas-ci, ils ne pourront être entiers, parce qu'ils tombent entre 1 et 2; et ils ne pourront être fractionnaires, à cause de la forme de l'équation (n° 622). Ils seront donc nécessairement irrationnels.

746. Pour démontrer d'une manière rigoureuse que notre proposée a nécessairement au moins un solveur plus grand que 1, et plus petit que 2, nous l'écrirons ainsi,

$$(x^3 + 3x^2) - (5x + 2) = 0,$$

et nous verrons, 1° que puisque le nombre 1, mis à la place de x , donne le résultat -3 , on a, par cette substitution, la partie directe,

que j'appellerai D , plus petite que la partie inverse, que j'appellerai I , ou $(x^3 + 3x^2) < (5x + 2)$; et en effet, $x^3 + 3x^2 = 4$, tandis que $5x + 2 = 7$.

Nous verrons, 2° que puisque le nombre 2, mis à la place de x , donne le résultat $+8$, on a, par cette substitution, la partie directe D plus grande que la partie inverse I , ou $(x^3 + 3x^2) > (5x + 2)$; et en effet, $x^3 + 3x^2 = 20$, tandis que $5x + 2 = 12$.

Nous verrons, 3° que plus x augmentera dans l'équation, plus les parties D et I augmenteront chacune de leur côté, ce qui est une suite nécessaire de la forme de ces parties, qui n'ont que des termes directs, et qui ne contiennent que des puissances entières et directes de l'inconnue.

Cela posé, représentons par trois lignes droites la grandeur des trois quantités x , D et I . Si x a un pouce, D aura 4 pouces, et I aura 7 pouces; et d'après ce que nous avons dit, en faisant augmenter x par un mouvement continu, D et I augmenteront aussi par un mouvement continu; enfin, lorsque x aura deux pouces, D aura 20 pouces, et I en aura 12, c'est-à-dire que nous aurons

En commençant le mouvement,

En finissant le mouvement,

$$x = 1, D = 4, I = 7.$$

$$| \quad x = 2, D = 20, I = 12.$$

Mais la ligne D , qui était d'abord plus petite que la ligne I , se trouve finalement plus grande, quoiqu'elles aient l'une et l'autre augmenté par un mouvement continu, ce qui prouve, 1° que le mouvement de D a été plus rapide que celui de I ; 2° qu'il y a eu un moment, pendant le mouvement, où la longueur des deux lignes s'est trouvée la même, et où par conséquent leur différence, comparable au premier membre de l'équation, était nulle. A ce moment, le mouvement n'étant point terminé, la longueur de x était entre un et deux pouces; et c'est cette valeur qui peut rendre nul le premier membre de l'équation, ou qui désigne un de ses solveurs.

747. On raisonnera de la même manière sur tout autre exemple dans lequel la proposée ne contiendra que des puissances entières et directes de l'inconnue, et où, substituant successivement à la place de cette inconnue, deux nombres directs, on aura obtenu deux résultats de signe contraire; et l'on en conclura donc que cette pro-

posée a au moins un soluteur réel compris entre les deux nombres substitués (*).

748. Supposons maintenant qu'une équation, de la nature des précédentes, et que nous désignerons par (A), donne deux résultats de signe contraire lorsqu'on y met successivement $-p$ et $-q$ à la place de x , et voyons ce qui en doit résulter.

Il est clair que mettre $-p$ à la place d' x dans cette équation, revient à y changer d'abord les signes des termes qui contiennent les puissances impaires de x , pour avoir une nouvelle équation (B), et à substituer ensuite $+p$ à la place d' x dans (B); dans ces deux cas le résultat est nécessairement le même; et ce que nous disons de $-p$, on peut le dire de $-q$.

Donc, puisque $-p$ et $-q$, mis pour x dans (A), donnent deux résultats de signe contraire, il est clair que $+p$ et $+q$, mis pour x dans (B), donnent deux résultats de signe contraire. Donc (B) a au moins un soluteur réel entre $+p$ et $+q$. Donc (A), dont les solveurs ne diffèrent de ceux de (B) que par les signes (n° 624 bis), a au moins un soluteur réel entre $-p$ et $-q$.

749. Supposons ensuite qu'une équation, toujours de la nature des précédentes, donne deux résultats de signe contraire lorsqu'on y met successivement $+p$ et $-q$ à la place d' x ; si nous y mettons $+0$ à la place d' x , il est évident que cette équation, comme toute autre, donnera alors pour résultat son dernier terme (**), qui sera direct ou inverse, et par conséquent de signe contraire à l'un des deux résultats obtenus par la substitution de $+p$ et de $-q$. On aura donc au moins un soluteur, ou entre $+0$ et $+p$, ou entre -0 et $-q$, et à plus forte raison entre $+p$ et $-q$.

750. Supposons enfin qu'une équation de forme quelconque,

(*) La proposée peut dans tel ou tel cas avoir plus d'un soluteur entre les deux nombres substitués; car il n'est point dit que les mouvements de D et de I , quoique continus, soient uniformes; ils peuvent être variés de manière à ce que les longueurs des deux lignes soient plus d'une fois égales dans un espace donné.

(**) Tous les termes d'une équation contenant toujours x , excepté le dernier (n° 377), si l'on fait $x=0$, on a pour résultat le dernier terme, les autres étant nécessairement nuls.

donne deux résultats de signe contraire lorsqu'on y met successivement deux nombres différents à la place de son inconnue ; si dans la première substitution on avait $D > I$, dans la seconde on aura $D < I$, et réciproquement. En représentant donc encore par des lignes les quantités x , D et I , on comprendra que la ligne D , qui était d'abord plus grande ou plus petite que I , n'a pu se trouver finalement plus petite dans le premier cas, ou plus grande dans le second, sans qu'il y ait eu un instant d'égalité entre elles, ce qui sera arrivé ainsi, x augmentant, ou les deux parties D et I auront augmenté, la plus petite plus promptement que l'autre, ou les deux parties D et I auront diminué, la plus grande plus promptement que l'autre, ou des deux parties D et I la plus grande aura diminué pendant que la plus petite augmentait, ou enfin l'une de ces deux parties n'aura point changé pendant que l'autre, si elle était plus grande, aura diminué, ou que, si elle était plus petite, elle aura augmenté (*).

751. Donc, « si l'on a une équation quelconque, et que l'on trouve deux nombres tels qu'étant substitués successivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent des résultats de signe contraire, l'équation aura nécessairement au moins un solveur réel dont la valeur sera entre ces deux nombres. » (Lagrange) (**).

752. Le principe que nous venons de démontrer nous sera bientôt très-utile ; mais nous devons en établir d'autres.

Supposons une équation algébrique ou numérique, dont le premier terme ait pour coefficient ± 1 , et dont tous les autres coefficients soient égaux entre eux, et aient le même signe, semblable ou non à celui du premier terme ; cette équation aura cette forme

$$x^m \pm Rx^{m-1} \pm Rx^{m-2} \dots \pm Rx \pm R = 0,$$

et nous pourrons l'écrire ainsi,

$$x^m \pm R(x^{m-1} + x^{m-2} \dots + x + 1) = 0.$$

(*) Les commençants feront bien de vérifier cela sur des équations de différentes formes, en inscrivant, dans de petits tableaux, les valeurs de x , de D et de I , au commencement et à la fin du mouvement supposé, comme au n° 716.

(**) Il ne faut pas perdre de vue que ces solveurs peuvent, suivant les cas, être entiers, fractionnaires, ou irrationnels, mais non imaginaires.

Or, $x^{m-1} + x^{m-2} \dots + x + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1}$ (n° 127), on aura donc

$$x^m \pm R \left(\frac{x^m - 1}{x - 1} \right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^m \pm \left(\frac{R}{x - 1} x^m - \frac{R}{x - 1} \right) = 0.$$

Maintenant, si l'on cherche la différence qu'il y a entre la grandeur du premier terme et la grandeur de la somme de tous les autres, abstraction faite du signe du premier terme et du signe général de la somme des autres, cette différence aura pour expression

$$x^m - \frac{R}{x - 1} x^m + \frac{R}{x - 1}$$

Si donc on supposait $\frac{R}{x - 1} = 1$, cette même différence deviendrait

$$x^m - x^m + 1 = 1.$$

Mais supposer $\frac{R}{x - 1} = 1$, c'est supposer $R = x - 1$, ou $x = R + 1$.

Ainsi donc, si l'on met à la place d' x , dans cette équation, le coefficient commun R augmenté de l'unité, le premier terme x^m surpassera par sa grandeur la somme de tous les autres, abstraction faite du signe de ce premier terme et du signe général de la somme en question, et la différence de ces deux quantités sera toujours 1.

Mais si le second terme et les suivants, ayant le même coefficient, n'avaient pas tous le même signe, leur somme serait alors nécessairement plus petite, du moins en faisant abstraction de son signe général, comme on le veut ici, et par conséquent, si l'on mettait encore $R + 1$ dans l'équation à la place de x , le premier terme surpasserait la somme de tous les autres d'une quantité plus grande que dans le premier cas.

Si le second terme et les suivants, ayant tous le même signe, n'avaient pas tous le même coefficient, alors il y aurait un de ces coefficients, répété ou non, qui serait plus grand que chacun des autres, et que l'on reconnaîtrait facilement lorsque l'équation serait

numérique. Par cette inégalité de coefficients, la somme du second terme et des suivants serait moindre que si tous les coefficients étaient égaux au plus grand, que nous appellerons toujours R . Par conséquent, si l'on mettait $R+1$ dans l'équation à la place d' x , le premier terme surpasserait la somme de tous les autres d'une quantité plus grande que dans le premier cas.

Enfin, si le second terme et les suivants n'avaient ni tous le même signe, ni tous le même coefficient, et que l'on mît à la place d' x dans l'équation le plus grand coefficient augmenté de l'unité, le premier terme aurait une double raison pour l'emporter sur la somme de tous les autres.

753. Cela posé, il ne sera pas difficile de démontrer, pour le cas des équations numériques, que toute équation de degré impair a au moins un solveur réel, et que si le premier terme de l'équation est direct, ce solveur est de signe contraire à celui du dernier terme, qu'autrement il est de même signe. Nous prendrons des exemples particuliers, mais nous raisonnerons généralement.

Considérons, 1° une équation de degré impair, dont le premier terme soit direct, et le dernier inverse, comme

$$x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0;$$

mettons dans cette équation $+0$ à la place d' x , elle se réduira à son dernier terme, et nous aurons un résultat inverse (ici -1).

Mettons ensuite, à la place d' x , le plus grand coefficient de l'équation, augmenté de l'unité, et pris en $+$ (ici $+7$), le premier terme l'emportera sur la somme de tous les autres, et nous aurons par conséquent un résultat direct, le second terme et les suivants fussent-ils même tous inverses (ce résultat est ici $+19781$).

La proposée aura donc entre 0 et $R+1$ (ici entre 0 et 7), au moins un solveur réel et direct, et par conséquent de signe contraire à celui de son dernier terme.

Considérons, 2° une équation de degré impair, dont le premier terme soit direct, et le dernier aussi, comme (A);

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0, \dots (A)$$

changeons les signes des termes qui contiennent les puissances impaires de x , nous aurons une nouvelle équation

$$-x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0,$$

dont le premier terme sera inverse, et le dernier toujours direct; et cette équation d'ailleurs aura les mêmes soluteurs que (A), mais avec des signes contraires (n° 624 bis). Changeons actuellement tous les signes de cette nouvelle équation, cela ne changera rien à ses soluteurs, et nous obtiendrons une équation

$$x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0 \dots (B)$$

de degré impair, dont le premier terme sera direct, et le dernier inverse. Cette équation (B) aura donc au moins un solveur réel direct. Et par conséquent l'équation (A) aura au moins un solveur réel inverse, c'est-à-dire de signe contraire à celui de son dernier terme.

Considérons, 3^e une équation de degré impair, et dont le premier terme soit inverse; en changeant tous ses signes, on ne changera rien à ses soluteurs, et l'on retombera dans un des deux cas précédents. Mais en changeant tous les signes, on a changé celui du dernier terme; en sorte que si on ne les eût pas changés, le solveur en question, au lieu d'avoir un signe contraire à celui du dernier terme, aurait le même signe que lui.

Le principe est donc démontré.

754. On prouvera tout aussi facilement, que toute équation de degré pair, dont le premier terme est direct, et le dernier inverse, ou dont le premier est inverse, et le dernier direct, a au moins deux soluteurs réels, l'un direct, et l'autre inverse.

Considérons, 1^o une équation de degré pair, dont le premier terme soit direct, et le dernier inverse, comme

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0;$$

mettons dans cette équation $+0$ à la place d' x , elle se réduira à son dernier terme, et nous aurons un résultat inverse (ici -2).

Mettons ensuite, à la place d' x , le plus grand coefficient de l'équation, augmenté de l'unité, et pris en $+$ (ici $+4$), le premier terme l'emportera sur la somme de tous les autres, et nous aurons par conséquent un résultat direct, le second terme et les suivants fussent-ils même inverses (ce résultat est ici $+178$).

La proposée aura donc entre 0 et $R+1$ (ici entre 0 et 4), au moins un solveur réel et direct.

Ce n'est pas tout : si nous changeons, dans la proposée, les signes des termes qui contiennent les puissances impaires de x , nous aurons une nouvelle équation

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x - 2 = 0,$$

dont le premier terme sera toujours direct, et le dernier toujours inverse, et qui aura par conséquent au moins un solveur réel et direct. Mais les solveurs de cette transformée ne diffèrent de ceux de la proposée que par leurs signes ; donc la proposée aura au moins un solveur réel et inverse ; donc elle a au moins deux solveurs réels, l'un direct et l'autre inverse.

Considérons, 2^o une équation de degré pair, dont le premier terme soit inverse, et le dernier direct ; changeons tous les signes de cette équation, ses solveurs ne seront point changés, et l'équation rentrera dans le cas que nous venons d'examiner ; donc le principe est démontré.

755. Si l'on n'a pour but que de rendre la partie directe d'une équation supérieure à la partie inverse, on y parviendra souvent en substituant à x un nombre moindre que le plus grand coefficient augmenté de l'unité ; car, après avoir changé tous les signes de l'équation pour rendre le premier terme direct, s'il ne l'est pas déjà, on pourra mettre à part, pour quelques moments, les autres termes directs, en cas qu'il y en ait ; alors le plus grand coefficient de ceux qui resteront, ne sera que le plus grand coefficient inverse : ce nombre-là augmenté de l'unité, et mis en $+$ à la place de x , rendra comme à l'ordinaire le premier terme supérieur à la somme de ceux qu'on aura conservés, c'est-à-dire à la somme des termes inverses ; on aura donc un résultat direct, auquel on ajoutera les termes directs qui avaient été écartés, et qui ne feront qu'augmenter le résultat déjà direct.

De même, si l'on n'a pour but que de rendre la partie inverse d'une équation supérieure à la partie directe, après avoir changé tous les signes pour rendre le premier terme inverse, s'il ne l'est pas déjà, on pourra suivre une marche analogue à celle que nous venons de tracer, et substituer à x le plus grand coefficient direct augmenté de l'unité.

756. Supposons donc une équation dont le coefficient du premier

terme soit $+1$, si l'on met à la place de l'inconnue le plus grand coefficient inverse augmenté de l'unité, et pris en $+$, on aura un résultat direct; et si l'on met successivement à la place d' x des nombres de plus en plus grands, à partir du plus grand coefficient inverse augmenté de l'unité, on aura des résultats directs de plus en plus grands: en sorte que tous les soluteurs de l'équation seront moindres que $S + 1$, S désignant le plus grand coefficient inverse.

Tous les soluteurs directs seront donc compris entre 0 et $S + 1$, c'est-à-dire que le plus grand coefficient inverse, augmenté de l'unité, et pris en $+$, sera la plus grande limite des soluteurs directs de la proposée.

Changeant ensuite les signes des termes qui contiennent les puissances impaires de l'inconnue, et rendant direct le premier terme de la transformée, s'il se trouvait inverse après le changement, on verrait que le plus grand coefficient inverse de cette transformée, augmenté de l'unité, serait une limite de ses soluteurs directs, et par conséquent des soluteurs inverses de la proposée (*).

757. Tout cela posé, venons à la méthode d'approximation pour les soluteurs irrationnels des équations numériques, méthode qui est le but principal de ce chapitre (n° 743). Nous l'appliquerons tout de suite à des exemples particuliers, qui suffiront pour la faire très-bien connaître.

Reprenons l'équation du n° 743,

$$x^2 - 2x - 5 = 0,$$

et supposant que nous ne connaissions point ses soluteurs, cherchons-les autrement que par les méthodes propres au second degré.

D'abord, par le principe du n° 754, ces deux soluteurs sont réels, l'un direct, et l'autre inverse. Ensuite, par le n° 622, ils ne peuvent être fractionnaires. Ils sont donc, ou rationnels entiers, ou irrationnels. Mais aucun des diviseurs entiers du dernier terme, savoir $+1$, -1 , $+5$, -5 , ne satisfait à l'équation; donc ses soluteurs sont irrationnels.

(*) La considération de ces limites est souvent utile dans la recherche des soluteurs rationnels; elle peut faire éviter l'essai de plusieurs diviseurs du dernier terme.

Cherchons d'abord celui qui est direct : par le n° 756, il doit être plus petit que 6. Essayons donc de mettre successivement à la place de x les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6, pour voir si nous n'obtiendrons point des résultats de signe contraire (n° 751). C'est ce qui a lieu, en effet, par les substitutions de 3 et de 4, qui donnent -2 et $+3$. Le solveur direct est donc entre 3 et 4, c'est-à-dire qu'il est égal à 3, plus une fraction illimitée. Ayant trouvé cela, voici, à proprement parler, où commence la méthode en question.

Désignons par $\frac{1}{\beta}$ la fraction qu'il faut ajouter à 3 pour avoir x ; nous aurons $x = 3 + \frac{1}{\beta}$, le caractère β devant être un nombre direct, et plus grand que 1, afin que $\frac{1}{\beta}$ soit une véritable fraction additive. Mettons ensuite $3 + \frac{1}{\beta}$ à la place de x dans la proposée, elle deviendra

$$\left. \begin{array}{l} 9 + \frac{6}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \\ - 6 - \frac{2}{\beta} \\ - 5 \end{array} \right\} = 0,$$

ou, en réduisant et changeant les signes,

$$2 - \frac{4}{\beta} = \frac{1}{\beta^2} = 0,$$

ou, enfin, en multipliant par β^2 , et divisant par 2,

$$\beta^2 - 2\beta - \frac{1}{2} = 0.$$

Maintenant, nous devons avoir β direct, et plus grand que 1; mais par le n° 756, il doit être plus petit que 3; nous essaierons donc à la place de β , 1, 2 et 3, et nous trouverons $-1\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $+2\frac{1}{2}$; ce qui nous prouvera que β est entre 2 et 3. Nous ferons donc $\beta = 2 + \frac{1}{\gamma}$, γ devant aussi être direct, et plus grand que 1, et nous mettrons cette valeur à la place de β dans l'équation précédente, qui deviendra ainsi

$$\left. \begin{array}{l} 4 + \frac{4}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \\ - 4 - \frac{2}{\gamma} \\ - \frac{1}{2} \end{array} \right\} = 0,$$

ou, en réduisant, changeant les signes, et multipliant par $2\gamma^2$,

$$\gamma^2 - 4\gamma - 2 = 0.$$

Nous devons avoir γ direct, et plus grand que 1; mais il doit être plus petit que 5: nous essaierons donc pour γ , 1, 2, 3, 4 et 5, et nous trouverons -5 , -6 , -5 , -2 et $+3$, d'où nous concluons que γ est entre 4 et 5. Nous ferons donc $\gamma = 4 + \frac{1}{\delta}$, δ devant à son tour être direct, et plus grand que 1, et nous mettrons cette valeur à la place de γ dans l'équation précédente, qui deviendra

$$\left. \begin{array}{l} 16 + \frac{8}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \\ - 16 - \frac{4}{\delta} \\ - 2 \end{array} \right\} = 0,$$

ou, en réduisant, changeant les signes, multipliant par δ^2 , et divisant par 2,

$$\delta^2 - 2\delta - \frac{1}{2} = 0.$$

Sans aller plus loin, nous observerons que cette équation en δ est la même que celle en β , en sorte qu'elle doit nous donner les mêmes résultats; nous aurons donc $\delta = 2 + \frac{1}{\epsilon}$. On tirerait de là une équation en ϵ nécessairement la même que celle en γ , et l'on en conclurait $\epsilon = 4 + \frac{1}{\zeta}$, etc.

Nous avons eu successivement

$$x = 3 + \frac{1}{\beta}, \quad \beta = 2 + \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = 4 + \frac{1}{\delta}, \quad \delta = 2 + \frac{1}{\epsilon},$$

$$\epsilon = 4 + \frac{1}{\zeta}, \quad \text{etc.}$$

d'où il résulte

$$x = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

On peut tirer de là, par le principe du n° 170, des fractions convergentes vers la valeur de x ; ces fractions sont celles-ci (n° 172) :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & \text{etc.} \\ \frac{1}{0} & \frac{3}{1} & \frac{7}{2} & \frac{31}{9} & \frac{69}{20} & \frac{307}{89} & \text{etc.} \end{array}$$

auxquelles on appliquera tout ce que nous avons dit dans les n°s 178 à 186 *bis* inclusivement.

Si nous réduisons en décimales la fraction $\frac{69}{20}$, nous trouverons 3.45 pour la valeur directe de x , comme au n° 743. Cette quantité est un peu trop grande (n° 184); mais comme la véritable valeur de x tombe entre $\frac{51}{9}$ et $\frac{69}{20}$ (n° 185), et que ces deux fractions ne diffèrent entre elles que de $\frac{1}{180}$ (n° 178), l'erreur dont il s'agit est encore moindre que cela.

Pour trouver le solveur inverse de la proposée, on y changera les signes des puissances impaires de x , ce qui donnera la nouvelle équation

$$x^2 + 2x - 5 = 0,$$

dont on cherchera, par la méthode précédente, le solveur direct; et ce solveur, pris en —, sera le solveur inverse de la proposée. Nous abandonnons ce calcul aux commençants.

758. Du reste, il est bon d'observer ici que les fractions continues sont dites *périodiques* lorsqu'elles ont un nombre de termes illimité, et que les mêmes dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre. C'est ce qui a eu lieu dans le numéro précédent.

On démontre qu'on peut trouver la somme de toute fraction de cette espèce par la résolution d'une équation du second degré; et réciproquement que tout solveur irrationnel d'une équation du second degré peut toujours se réduire à une fraction continue périodique. (Je renvoie pour cela au *Traité de la Résolution des Équations numériques*, par Lagrange.)

759. Soit, pour second exemple, l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0:$$

elle a, par le n° 753, au moins un soluteur réel et inverse; et par le n° 572, ses soluteurs sont tous trois réels, et elle est en outre dans le cas irréductible; en sorte qu'on n'y appliquerait pas avec avantage les formules du n° 569. On pourrait trouver ces soluteurs par approximation, au moyen des principes posés dans les n°s 578 et 579; mais nous allons employer pour cela la méthode propre aux équations numériques.

D'abord, les soluteurs ne peuvent être tous trois inverses parce que l'équation manque de second terme (n°s 410, 576); il y en aura donc au moins un de direct, et nous commencerons par la recherche de celui-là.

La plus grande limite des soluteurs directs étant 8, nous substituerons successivement à x les nombres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$$

et nous aurons les résultats suivants,

$+7, +1, +1, +13, +43, +97, +181, +301, +463$,
qui sont tous de même signe, quoique nous soyons sûrs que l'équation ait au moins un soluteur entre 0 et 8. Cela nous fera comprendre qu'au lieu d'un soluteur direct, il doit y en avoir deux très-rapprochés l'un de l'autre; en sorte qu'ils tombent tous deux entre les mêmes nombres entiers consécutifs. S'il arrivait, par exemple, qu'en substituant dans une équation les nombres 2, $2\frac{1}{2}$ et 3, on eût pour premier résultat un $+$, pour second un $-$, et pour troisième un $+$, on en conclurait l'existence d'un soluteur entre 2 et $2\frac{1}{2}$, et celle d'un autre soluteur entre $2\frac{1}{2}$ et 3; mais ces deux soluteurs n'auraient point été aperçus, si l'on n'eût substitué dans l'équation que les nombres 2 et 3, parce qu'on n'aurait eu alors que les deux résultats de même signe $+$ et $+$. Pour ne pas tomber dans cet inconvénient, il faudrait qu'il y eût toujours entre deux nombres consécutifs, pris dans la suite de ceux que l'on substitue, une différence moindre que la plus petite différence qui existe entre deux des soluteurs de la proposée. On trouvera dans l'ouvrage de Lagrange des moyens de parvenir à ce but; et nous nous contenterons ici d'une espèce de tâtonnement, souvent plus expéditif que les méthodes rigoureuses.

En observant que les résultats que nous avons obtenus par nos différentes substitutions, vont d'abord en diminuant, pour augmen-

ter ensuite, en sorte que le 0 est compris entre les deux résultats $+1$ et $+1$, qui proviennent des substitutions 1 et 2, nous serons portés à croire que les deux solveurs en question tombent entre ces nombres 1 et 2. Nous essaierons donc de substituer à x le nombre $1\frac{1}{2}$, en comparant le résultat que donnera ce nombre avec ceux qu'ont donnés les nombres 1 et 2; si cela ne réussit pas, nous substituerons encore $1\frac{1}{4}$ et $1\frac{5}{4}$, en comparant les résultats avec les précédents, etc.

Mais $1\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ donne $-\frac{1}{8}$; en sorte qu'on a pour les nombres 1, $1\frac{1}{2}$, 2, les résultats $+1$, $-\frac{1}{8}$, $+1$: ce qui indique un solveur entre 1 et $1\frac{1}{2}$, et un autre entre $1\frac{1}{2}$ et 2.

Faisons $x = 1 + \frac{1}{\beta}$, la proposée deviendra, après les réductions et multiplications convenables,

$$\beta^3 - 4\beta^2 + 3\beta + 1 = 0.$$

Comme il y a deux solveurs entre 1 et 2, β doit avoir deux valeurs directes, et plus grandes que 1, ou, ce qui revient au même, l'équation en β doit avoir deux solveurs directs au-dessus de l'unité. En substituant à β , les nombres 1, 2, 3, 4, 5, les résultats apprennent qu'une des valeurs de β est entre 1 et 2, et l'autre entre 2 et 3.

Servons-nous d'abord de la première, et faisons $\beta = 1 + \frac{1}{\gamma}$, l'équation précédente deviendra

$$\gamma^3 - 2\gamma^2 - \gamma + 1 = 0,$$

et ne donnera pour γ qu'une valeur directe au-dessus de 1, savoir entre 2 et 3. Nous ferons donc encore $\gamma = 2 + \frac{1}{\delta}$, et l'équation précédente donnera

$$\delta^3 - 3\delta^2 - 4\delta - 1 = 0,$$

d'où l'on tirera une valeur de δ entre 4 et 5, et ainsi de suite.

Un des solveurs directs sera donc

$$x = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \text{etc.},$$

et les fractions convergentes vers ce solveur seront

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad \text{etc.}$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{22}{13} \quad \text{etc.}$$

Reprenons la seconde valeur de β , et faisons $\beta = 2 + \frac{1}{\gamma}$, cette valeur, substituée dans l'équation en β , donnera

$$\gamma^3 + \gamma^2 - 2\gamma - 1 = 0,$$

d'où l'on tirera la valeur de γ entre 1 et 2. Faisons donc $\gamma = 1 + \frac{1}{\delta}$,

l'équation précédente deviendra

$$\delta^3 - 3\delta^2 - 4\delta - 1 = 0,$$

d'où l'on conclura δ entre 4 et 5, et ainsi de suite.

Le second soluteur direct sera donc

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

et les fractions convergentes vers ce soluteur seront

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad \text{etc.}$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{19}{14} \quad \text{etc.}$$

Si l'on voulait pousser plus loin l'approximation de ces soluteurs, on remarquerait que les deux équations en δ ont été les mêmes, d'où il résulte qu'on obtiendrait depuis là les mêmes résultats pour tous les deux; il suffirait donc d'en calculer un.

Revenons au soluteur inverse de la proposée, et commençons par le rendre direct : en changeant dans l'équation les signes des puissances impaires de x , nous aurons $-x^3 + 7x + 7 = 0$, ou

$$x^3 - 7x - 7 = 0.$$

Substituant les nombres 0, 1, 2, 3, 4, nous trouverons des résultats inverses jusqu'à 3, et un résultat direct pour 4. Nous n'irons pas plus loin, parce qu'il n'y a qu'un soluteur à chercher, et que nous le

savons actuellement tomber entre 3 et 4. Nous ferons $x = 3 + \frac{1}{\beta}$,

et nous aurons

$$\beta^3 - 20\beta^2 - 9\beta - 1 = 0.$$

L'inverse devant ici, par la forme de l'équation, l'emporter sur le direct, tant qu'on ne mettra pas pour β une quantité un peu grande, au lieu de substituer d'abord les plus petits nombres pour aller jusqu'aux plus grands, nous suivrons une marche rétrograde, et nous commencerons par la limite 21 pour descendre vers le 0. Mais comme 21 et 20 donnent tout de suite deux résultats de signe contraire, nous ferons $\beta = 20 + \frac{1}{7}$, sans faire d'autres substitutions, puisque l'équation en x ne pouvant plus avoir qu'un solveur, celle en β ne peut donner pour ce caractère qu'une valeur au-dessus de 1. Nous aurons donc

$$181\gamma^3 - 391\gamma^2 - 40\gamma - 1 = 0,$$

équation que nous laisserons sous cette forme. La plus grande limite est ici $\frac{391}{181} + 1$, c'est-à-dire un peu plus de 3; nous substituerons donc depuis 4 en descendant, parce qu'il y a beaucoup d'inverse dans l'équation. Les nombres 4 et 3 donnant d'abord deux résultats de signe contraire, nous ferons $\gamma = 3 + \frac{1}{\delta}$, et ainsi de suite.

Le solveur direct de $x^3 - 7x - 7 = 0$, sera donc

$$x = 3 + \frac{1}{20} + \frac{1}{3} + \text{etc.};$$

en sorte que le solveur inverse de la proposée $x^3 - 7x + 7 = 0$, sera la même valeur prise en moins, ou

$$x = -3 - \frac{1}{20} - \frac{1}{3} + \text{etc.}$$

De là, on tirera les fractions convergentes inverses

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 3 & 20 & 3 & \text{etc.} \\ -\frac{1}{0}, & -\frac{3}{1}, & -\frac{61}{20}, & -\frac{186}{61} & \text{etc.} \end{array}$$

760. On pourra s'exercer encore sur l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

que l'on reconnaîtra d'abord, par les n^{os} 572 et 753, n'avoir qu'un solveur réel direct et deux imaginaires.

On trouvera $\alpha=2, \beta=10, \gamma=1, \delta=1, \epsilon=2, \zeta=1, \eta=3, \text{etc.}$; en sorte qu'on aura

$$x = 2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \text{etc.},$$

ou l'on exprimera cette valeur par les fractions convergentes

0	2	10	1	1	2	1	3	<i>etc.</i>
$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{23}{11}$	$\frac{44}{21}$	$\frac{111}{53}$	$\frac{155}{74}$	$\frac{576}{275}$	<i>etc.</i>

761. Il est bien clair du reste, que cette méthode fera trouver par approximation les racines des puissances imparfaites. Voici, par exemple, comment il faudrait chercher par son moyen la racine carrée de 2.

Posant $x = \sqrt{2}$, carrant les deux membres, et transportant tout dans le premier, on aurait

$$x^2 - 2 = 0;$$

cette équation a, par le n^o 754, deux solveurs réels, l'un direct et l'autre inverse; et par le n^o 756, la limite, soit de l'un, soit de l'autre, est 3. Substituant à x les nombres 0, 1, 2, 3, on trouvera un changement de signe de 1 à 2; on fera donc $x = 1 + \frac{1}{\beta}$, ce qui donnera l'équation

$$\beta^2 - 2\beta - 1 = 0,$$

dans laquelle mettant pour β , 1, 2 et 3, on trouvera un changement de signe de 2 à 3. En sorte que l'on fera $\beta = 2 + \frac{1}{\gamma}$, ce qui donnera

$$\gamma^2 - 2\gamma - 1 = 0;$$

cette équation étant la même que la précédente, donnera les mêmes résultats, qui reviendront sans cesse. On aura donc; sans aller plus loin,

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{etc.}$$

valeur dont les fractions convergentes qui suivent, approchent de plus en plus

0	1	2	2	2	2	2	etc.
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	etc.

(Voyez le n° 758).

On pourra chercher aussi la racine troisième de 2, en faisant $x = \sqrt[3]{2}$, d'où $x^3 - 2 = 0$; et ainsi pour d'autres racines et pour d'autres nombres.

CHAPITRE VII.

Exercice sur la résolution des problèmes de degrés plus élevés que le second.

762. Le problème du n° 351 nous avait donné cette équation,

$$3x^3 + 10x^3 = 13000,$$

qu'il est bien facile de résoudre. On en tire d'abord $13x^3 = 13000$, puis $x^3 = 1000$, ce qui donne

$$x = 10.$$

Il y a donc 10 capitaines, comme on peut le vérifier.

Si l'on multiplie ce nombre par les deux racines cubiques imaginaires de l'unité (n° 488), on aura les deux autres solveurs de la proposée, qui sont

$$-5 + 5\sqrt{-3}, \quad -5 - 5\sqrt{-3}.$$

Ces soluteurs satisfont comme l'autre à l'équation, mais ne sont d'aucun usage pour la solution du problème.

763. Le problème du n° 354 nous avait donné cette équation,

$$x^4 - 1 = 624.$$

On en tire $x^4 = 625$, ce qui donne

$$x = 5.$$

Il y a donc 5 jetons dans chaque rangée, ce que l'on pourra vérifier.

Si l'on multiplie ce nombre par les trois racines quatrièmes de l'unité, différentes de 1 (n° 488), on aura les trois autres soluteurs de la proposée, savoir,

$$-5, \quad +5\sqrt{-1}, \quad -5\sqrt{-1},$$

lesquels satisferont à l'équation, mais ne serviront point à la solution du problème.

764. Du reste, nous n'aurions pas de peine actuellement à résoudre l'équation

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

qui, dans le n° 488, devait nous conduire aux trois racines quatrièmes de l'unité, différentes de 1.

Cette équation, par le n° 753, a un soluteur réel inverse. Or, ce soluteur, s'il est rationnel, ne peut être que -1 , nombre qui réduit en effet à 0 le premier membre de la proposée. Divisant donc ce premier membre par $x + 1$, on aura un quotient du second degré qu'on égalera à 0, et qui donnera les soluteurs $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

765. Le problème du n° 352 nous avait donné l'équation

$$\frac{8240x + 40xxx}{100} = 10xx + 224,$$

d'où l'on peut tirer successivement

$$8240x + 40x^3 = 1000x^2 + 22400$$

$$40x^3 - 1000x^2 + 8240x - 22400 = 0$$

$$x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0.$$

Cette équation, par le n° 753, a au moins un soluteur réel direct; voyons d'abord si ce soluteur ne serait point rationnel: peut-être dans cette recherche trouverons-nous les autres soluteurs.

Les diviseurs du dernier terme sont (*Arithmét.* n° 220) 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 80, 112, 140, 280, 560, qu'il suffit d'essayer en $+$, car il est facile de voir par le n° 624 *bis*, que l'équation n'a aucun solveur réel inverse. Du reste, on ne peut éliminer aucun de ces diviseurs, puisque la limite des solveurs directs est 561. Mais si nous trouvions un seul de ces solveurs, nous pourrions abaisser l'équation au second degré, et avoir ainsi facilement les deux autres. Essayons donc d'abord un certain nombre de nos diviseurs, en opérant comme au n° 624 *bis*; et formons le tableau suivant, après nous être assurés par la substitution immédiate de l'unité qu'elle ne satisfait pas à l'équation

$+2,$	$+$	4,	$+$	5,	$+$	7,	$+$	8,	$+$	10,	$+$	14
$-280,$	$-$	140,	$-$	112,	$-$	80,	$-$	70,	$-$	56,	$-$	40
$-74,$	$+$	66,	$+$	94,	$+$	126,	$+$	136,	$+$	150,	$+$	166
-37					$+$	18,	$+$	17,	$+$	15		
-62					$-$	7,	$-$	8,	$-$	10		
-31					$-$	1,	$-$	1,	$-$	1.		

Ce tableau nous apprend que les nombres 7, 8 et 10, satisfont à l'équation; en sorte que connaissant ainsi les trois solveurs, qui sont non-seulement réels, mais encore rationnels, nous n'avons pas besoin d'essayer les autres diviseurs du dernier terme de l'équation.

Il y a donc ou 7, ou 8, ou 10 associés, ce que l'on peut vérifier.

766. Le problème du n° 355 nous avait donné l'équation

$$x^4 - x^3 - 44x^2 + 49x - 245 = 0,$$

qui a, par le n° 754, au moins deux solveurs réels, l'un direct, et l'autre inverse. Voyons donc d'abord si ces solveurs réels sont rationnels.

Les diviseurs de 245 sont 1, 5, 7, 35, 49, 245, qu'il faut essayer tous, soit en $+$, soit en $-$; car la limite directe et la limite inverse sont également 246 (n° 756). Après avoir donc substitué immédiatement $+1$ et -1 , et avoir vu que ces nombres ne réussissent pas, nous formerons le tableau suivant,

$$\begin{aligned}
&+ 5, - 5, + 7, - 7, + 35, - 35, + 49, - 49, + 245, - 245, \\
&- 49, + 49, - 35, + 35, - 7, + 7, - 5, + 5, - 1, + 1, \\
&0, + 98, + 14, + 84, + 42, + 56, + 44, + 54, + 48, + 50, \\
&+ 2, - 12 \\
&- 42, - 56 \\
&- 6, + 8 \\
&- 7, + 7 \\
&- 1, - 1,
\end{aligned}$$

qui nous prouvera que $+7$ et -7 satisfont à la proposée, et qu'elle n'a point d'autre soluteur rationnel que ces deux-là.

Nous abaisserons donc cette proposée en divisant son premier membre par $(x-7)(x+7)$ ou par x^2-49 : le quotient sera x^2-x+5 ; en sorte que nous n'aurons plus à résoudre que l'équation

$$x^2 - x + 5 = 0,$$

qui nous donnera $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-19}$.

Les quatre soluteurs sont donc $+7$, -7 , $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-19}$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-19}$, d'où il résulte que la garnison était de 7 fois cent hommes, ou de 700 hommes.

767. Le problème du n° 350 A nous avait donné les deux équations

$$x + y + xy = 79,$$

$$xx - xy = 18.$$

De la première on tire facilement,

$$y = \frac{79 - x}{x + 1}.$$

Substituant cette valeur dans la seconde, elle devient d'abord

$$xx - \frac{79x - xx}{x + 1} = 18;$$

puis, en multipliant par $x+1$, transposant et réduisant

$$x^3 + 2x^2 - 97x - 18 = 0;$$

et sous cette forme on voit qu'elle a au moins un soluteur réel direct.

Or, les diviseurs de son dernier terme sont 1, 2, 3, 6, 9, 18, qu'il faut essayer tous, soit en $+$, soit en $-$. Comme $+1$ et -1 ne réussissent pas, on fera

$$\begin{array}{rcl}
 + 2, - 2, + 3, - 3, + 6, - 6, + 9, - 9, + 18, - 18 \\
 - 9, + 9, - 6, + 6, - 3, + 3, - 2, + 2, - 1, + 1 \\
 - 106, - 88, - 103, - 91, - 100, - 94, - 99, - 95, - 98, - 96 \\
 - 53, + 44 & & - 11, \\
 - 51, + 46 & & - 9, \\
 - 23 & & - 1,
 \end{array}$$

et l'on verra que le seul soluteur rationnel de l'équation est 9. Divisant donc son premier membre par $x - 9$, ou cherchant le quotient par le tableau (n° 624 bis), on aura

$$x^2 + 11x + 2 = 0,$$

équation qui donnera $x = -\frac{11}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{113}$.

Le soluteur rationnel 9 étant mis pour x dans la valeur d' y , on trouve $y = 7$; en sorte que les deux nombres sont 9 et 7.

On pourrait aussi faire usage des deux autres valeurs de x , si l'on voulait admettre les nombres irrationnels.

768. Le problème du n° 353 nous avait donné cette équation,

$$x^2y + 2y^2x + 3x^2 + 4y^2 + 18x + 4y = 144,$$

que l'on peut écrire ainsi,

$$(2x + 4)y^2 + (x^2 + 4)y = (144 - 18x - 3x^2),$$

et qu'il devient, en divisant tout par le coefficient de y^2 ,

$$y^2 + \frac{x^2 + 4}{2x + 4}y = \frac{144 - 18x - 3x^2}{2x + 4}.$$

Traitant alors cette équation comme une équation du second degré en y , et opérant par la méthode du n° 727, on trouvera

$$y = -\frac{x^2 + 4}{4x + 8} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 + 4}{4x + 8}\right)^2 + \frac{144 - 18x - 3x^2}{2x + 4}}.$$

Supposant que les nombres demandés doivent être entiers et directs, on essaiera de substituer à x les nombres 1, 2, 3, etc. afin d'admettre ceux qui donneront à y des valeurs entières et directes.

Le nombre 2 donnera $y = -\frac{1}{3} \pm \frac{7}{3}$; en sorte que la question sera résolue en faisant $x = 2$, et $y = 3$, comme on peut le vérifier.

769. Le problème du n° 356 nous avait donné l'équation

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)^n a = \left(\frac{100-x}{100}\right) a - b;$$

faisons $n=3$, et représentons, pour abrégér, le nombre 100 par la lettre c , nous aurons

$$\left(\frac{c-x}{c}\right)^3 . a = \left(\frac{c-x}{c}\right) a - b,$$

d'où nous tirerons successivement

$$\frac{c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3}{c^3} = \frac{c-x}{c} - \frac{b}{a}$$

$$c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3 = c^3 - c^2x - \frac{bc^3}{a}$$

$$x^3 - 3cx^2 + 2c^2x - \frac{bc^3}{a} = 0.$$

Posant de nouveau $x = y + c$, pour faire évanouir le second terme (n° 510), et substituant, nous obtiendrons

$$y^3 - c^2y - \frac{bc^3}{a} = 0.$$

Comparant cette équation à l'équation générale, sans second terme du troisième degré, qui est en y , $y^3 + Qy + R = 0$, nous aurons

$Q = -c^2$ et $R = -\frac{bc^3}{a}$, en sorte que le premier soluteur en y sera,

après les réductions (n° 569),

$$c \sqrt[3]{\frac{b}{2a}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{27}} + c \sqrt[3]{\frac{b}{2a} - \sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{27}}},$$

auquel, ajoutant c , on aura le premier soluteur de l'équation en x .

770. Soit proposée l'équation

$$x^{10} - \frac{15}{2}x^9 + \frac{25}{2}x^8 + \frac{5}{2}x^7 - \frac{75}{2}x^6 + 41x^5 + 9x^4 - 46x^3 + 22x^2 + 12x - 4 = 0 \dots (A).$$

En la multipliant par 2, elle prendra la forme rationnelle et entière (n° 617), et nous pourrons rechercher d'abord si elle n'aurait point de solveurs rationnels et entiers.

Les diviseurs du dernier terme -8 de la transformée, sont 1, 2,

4 et 8, qu'il faut essayer tous, soit en $+$, soit en $-$. Le seul diviseur -1 réussit, en sorte que l'équation n'a que ce soluteur rationnel et entier (n° 618).

Il faut donc diviser la proposée (A) par $x+1$, ce qui donne

$$x^9 - \frac{15}{2}x^8 + 19x^7 - \frac{55}{2}x^6 - 20x^5 + 61x^4 - 52x^3 + 6x^2 + 16x - 4 = 0 \dots (B),$$

équation qui n'est pas satisfaite lorsqu'on y met -1 à la place de x , d'où il résulte que (A) n'a pas deux soluteurs égaux à -1 , et que par conséquent (B) n'a point de soluteurs rationnels et entiers. Il faut donc voir si (B) n'a point de soluteurs rationnels et fractionnaires,

et pour cela, il faut en faire disparaître les fractions, en posant $x = \frac{y}{2}$ (n° 623), ce qui donne

$$y^9 - 15y^8 + 76y^7 - 132y^6 - 320y^5 + 1952y^4 - 3328y^3 + 768y^2 + 4096y - 2048 = 0 \dots (C).$$

Les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. qu'il faudrait à la rigueur essayer tous, soit en $+$, soit en $-$; mais en commençant, comme à l'ordinaire, par l'unité, on trouve que -1 réussit; en sorte que l'on a $y = -1$, et par conséquent $x = -\frac{1}{2}$. Sans essayer les autres diviseurs, on divisera (B) par $x + \frac{1}{2}$, ce qui donnera

$$x^8 - 8x^7 + 23x^6 - 28x^5 - 6x^4 + 64x^3 - 84x^2 + 48x - 8 = 0 \dots (D),$$

équation qui ne peut avoir de soluteurs rationnels fractionnaires (n° 622), et qui n'en a pas non plus d'entiers, car on les aurait trouvés dans (A) ou dans (B). Les huit soluteurs de (D) sont donc ou tous irrationnels, ou tous imaginaires, ou elle en a des uns et des autres. Mais cette équation étant encore d'un degré assez élevé, il serait avantageux de pouvoir l'abaisser, ce à quoi l'on parviendrait facilement si elle avait des soluteurs égaux (n° 611); cherchons donc si cela a lieu.

Nous tirerons de (D), par le n° 614, la fonction

$$8x^7 - 56x^6 + 138x^5 - 140x^4 - 24x^3 + 192x^2 - 168x + 48;$$

cherchant le plus grand commun diviseur de cette fonction et du premier membre de (D), comme il est dit au n° 615, nous trouverons pour ce plus grand commun diviseur

$$x^2 - 2x + 2;$$

faisant $x^2 - 2x + 2 = 0$, et résolvant cette équation par la méthode du second degré, nous aurons

$$x = 1 \pm \sqrt{-1},$$

d'où nous concluons que l'équation (D) a deux soluteurs égaux à $1 + \sqrt{-1}$, et deux égaux à $1 - \sqrt{-1}$ (n^{os} 615, 616), et qu'elle est par conséquent divisible par $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, ou par $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$. Cette division faite donne

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 2 = 0 \dots (E),$$

équation qui doit fournir les quatre derniers soluteurs de (A), puisque nous en avons déjà six, savoir un rationnel entier, un rationnel fractionnaire, et quatre imaginaires égaux deux à deux.

Mais l'équation (E) a par sa forme au moins deux soluteurs réels, l'un direct, et l'autre inverse, que l'on peut chercher par approximation. Or, le direct, ou les directs, s'il y en a plusieurs, doivent être, chacun à part, plus petits que 5. Substituant donc à x les nombres 0, 1, 2, etc. nous trouverons des résultats de signe contraire de 0 à 1, de 1 à 2, et de 3 à 4, ce qui nous prouvera qu'il y a un soluteur entre 0 et 1, un entre 1 et 2, et un entre 3 et 4. Changeant ensuite les signes des puissances impaires de x , pour avoir

$$x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x - 2 = 0,$$

et substituant à x les nombres 0, 1, 2, nous trouverons deux résultats de signe contraire de 1 à 2, ce qui nous prouvera, sans autres substitutions, que le soluteur inverse, le seul qui reste après les trois précédents, est entre 1 et 2, ou plutôt entre -1 et -2 . Opérant enfin comme dans les n^{os} 757 et suivants, pour avoir la valeur approchée des quatre soluteurs de (E), nous trouverons,

1^o Pour celui qui est entre 0 et 1 (n^o 172),

	3	1	2	1	etc.
$x =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{15}$	etc.

2^o Pour celui qui est entre 1 et 2,

	0	1	2	2	2	2	etc.
$x =$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	etc.

3° Pour celui qui est entre 3 et 4,

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \text{etc.} \\
 x = & \frac{1}{0} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{11}{3} & \frac{15}{4} & \frac{41}{11} & \text{etc.}
 \end{array}$$

4° Pour celui qui est entre -1 et -2 , la même valeur que pour celui qui est entre 1 et 2, abstraction faite du signe.

Les dix soluteurs de la proposée, en réduisant le second et les quatre derniers en décimales, sont donc

$$-1, -0.5, 1 + \sqrt{-1}, 1 + \sqrt{-1}, 1 - \sqrt{-1}, 1 - \sqrt{-1}, 0.27\ldots, \\
 1.41\ldots, 3.73\ldots, -1.41\ldots$$

771. On fera bien de s'exercer à résoudre aussi les équations finales des n°s 458 et 463, pour substituer leurs soluteurs dans les équations (A) et (B), qui ont donné ces équations finales.

Du reste, immédiatement après avoir trouvé ces soluteurs, et avant de les introduire dans les équations (A) et (B), il faudra les vérifier, en les substituant à l'inconnue, dans l'équation finale même qui les aura donnés.

772. Voici quelques problèmes dont on trouvera les solutions à la fin de l'ouvrage.

PROBLÈME I. On a deux nombres : leur différence est 12, leur produit multiplié par leur somme fait 14560. Quels sont ces nombres? (Euler).

PROBLÈME II. Trouver deux nombres dont la différence soit 18, et qui soient tels que, si l'on multiplie ensemble leur somme et la différence de leurs cubes, on obtienne 275184. (Euler.)

PROBLÈME III. Je cherche deux nombres dont la différence soit 720, et tels que, si je multiplie le plus petit par la racine carrée du plus grand, il me vienne 20736. (Euler.)

PROBLÈME IV. Quelques personnes forment une société de commerce, et chacune d'elles met en fonds dix fois autant d'écus qu'il y a de personnes; elles gagnent ensemble, sur chaque centaine d'écus, six écus au delà d'un nombre d'écus égal à leur nombre; le profit total est de 392 écus. On demande combien il y a d'associés. (Euler.)

PROBLÈME V. Résoudre l'équation $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$.

ADDITIONS

A TOUT L'OUVRAGE.

CHAPITRE PREMIER.

Des séries ou des suites.

§ I.

Principes et définitions.

773. ON nomme *série* ou *suite*, une succession de nombres qui croissent ou décroissent suivant une même loi.

Quand les termes de la suite deviennent de plus en plus grands, la série est *divergente*; et quand ils deviennent de plus en plus petits, la série est *convergente* (n^{os} 128, 153).

En outre, on appelle *suite finie* celle dont le nombre des termes est limité, et *suite infinie* celle que l'on suppose continuée sans fin.

774. Nous nous sommes déjà occupés, dans les n^{os} 127 et suivants, des séries qui naissent de la division; mais d'autres séries se sont présentées à nous dans plusieurs occasions encore, car toutes les opérations de calcul peuvent amener des suites finies ou infinies.

Ainsi, l'addition répétée et la soustraction répétée, conduisent aux progressions excédentives croissantes et décroissantes, qui sont des séries divergentes et convergentes (n^o 74).

De même, la multiplication répétée et la division répétée conduisent aux progressions quotitives croissantes et décroissantes, qui sont aussi des séries divergentes et convergentes (n^o 94).

Et d'ailleurs, les additions ou soustractions répétées d'un même nombre sont des multiplications, et les multiplications et divisions répétées par un même nombre sont des élévations aux puissances.

Enfin, nous avons vu des suites finies ou infinies provenir du développement des fractions ordinaires en fractions continues, et des extractions de racines par approximation, dans le cas des quantités incommensurables (nos 160 à 188, et 326 à 333).

Ces observations suffisent sans doute pour faire comprendre que la théorie des suites est une des plus importantes de l'algèbre. Mais pour la traiter dans son ensemble, et pour l'approfondir, il faudrait plus d'espace que nous ne pouvons lui en consacrer dans ces *Éléments*.

775. Nous venons de dire que les progressions quotitives étaient comprises dans la classe des séries; il faut remarquer, à cet égard, que chaque terme de ces séries-là se forme au moyen du terme précédent multiplié par la raison, quantité constante, en sorte que la suite ne dépend que du premier terme et de la raison : telle est la progression

$$5, 20, 80, 320, \text{etc.} \dots (A).$$

Cela posé, formons une série de la manière suivante : commençons-la par deux nombres pris à volonté, comme 1 et 4; et pour avoir le troisième terme de la suite, multiplions respectivement le premier et le second par deux autres nombres pris aussi à volonté, comme 3 et 5, puis ajoutons les deux produits 3 et 20 : nous aurons 23 pour le terme cherché. Continuons ainsi de former chaque terme, au moyen des deux précédents, en les multipliant par les mêmes facteurs 3 et 5, et en ajoutant toujours les deux produits : le quatrième sera $4.3 + 23.5 = 127$, le cinquième $23.3 + 127.5 = 704$, le sixième $127.3 + 704.5 = 3901$, etc. et nous aurons la suite

$$1, 4, 23, 127, 704, 3901, \text{etc.} \dots (B).$$

Formons encore une suite en prenant trois premiers termes à volonté, comme 1, 3, 5, et en les multipliant respectivement par trois nombres pris aussi à volonté, comme 2, — 4, 6, pour former le quatrième terme par l'addition des trois produits : ce quatrième terme sera $1.2 - 3.4 + 5.6 = 20$. En continuant de la même manière, on trouvera pour le cinquième terme $3.2 - 5.4 + 20.6 = 106$,

pour le sixième $5.2 - 20.4 + 106.6 = 566$, etc. et la suite sera
 $1, 3, 5, 20, 106, 566$, etc. (C).

On pourrait former d'autres suites de ce genre au moyen des quatre premiers termes pris à volonté et de quatre multiplicateurs, ou de cinq premiers termes pris à volonté et de cinq multiplicateurs, et ainsi de suite.

Or, toutes les séries de ce genre ont été nommées des *séries récurrentes*, parce qu'il faut, pour former chacun de leurs termes, recourir aux termes précédents. On dit d'ailleurs que ces séries sont du premier ordre, du second ordre, du troisième ordre, etc. suivant la nécessité où l'on est de recourir au terme précédent seulement, ou aux deux précédents, ou aux trois précédents, etc. Et d'ailleurs l'assemblage des facteurs, toujours les mêmes, par lesquels on multiplie les termes qui précèdent celui dont il s'agit, s'appelle l'*échelle de relation*. Cette échelle n'a qu'un terme, 4, dans notre suite (A); elle en a deux, 3 et 5, dans notre suite (B); elle en a trois, 2, -4 et +6, dans notre suite (C), etc.

776. On voit par là que toutes les progressions quotitives sont des séries récurrentes du premier ordre, et réciproquement, que toutes les séries récurrentes du premier ordre sont des progressions quotitives. A cette classe appartiennent la plupart des suites que nous avons examinées dans les nos 127 et suivants, comme il est facile de le voir.

Cependant une progression quotitive quelconque peut être considérée comme une série récurrente d'un ordre quelconque. Soit la progression

$$\div a : b : c : d : e : f : g : \text{etc.}$$

dont la raison est r : on aura simultanément

$$b = ar, \quad c = br, \quad d = cr, \quad \text{etc.}$$

et de là on tirera d'abord, en multipliant la première de ces égalités par le nombre arbitraire θ ,

$$b\theta = ar\theta, \quad \text{ou} \quad a.r\theta - b.\theta = 0.$$

Ajoutant alors cette valeur nulle au second membre de l'égalité $c = br$, il viendra

$$c = b.r + a.r\theta - b.\theta = a.r\theta + b(r - \theta),$$

c'est-à-dire que le troisième terme c de la progression vaudra le premier multiplié par r^θ , plus le second multiplié par $r - \theta$.

On prouvera de même que le quatrième terme d vaut le second multiplié par r^θ , plus le troisième multiplié par $r - \theta$, et ainsi de suite.

Maintenant, puisqu'on a eu

$$c = a \cdot r^\theta + b(r - \theta), \text{ et } d = b \cdot r^\theta + c(r - \theta),$$

si on multiplie la première de ces égalités par le nombre arbitraire λ , on obtiendra

$$c\lambda = a \cdot r^\theta \lambda + b(r\lambda - \theta\lambda), \text{ ou } ar^\theta \lambda + b(r\lambda - \theta\lambda) - c\lambda = 0.$$

Ajoutant alors cette valeur nulle au second membre de l'égalité $d = b \cdot r^\theta + c(r - \theta)$, et faisant les réductions, on aura

$$d = a \cdot r^\theta \lambda + b(r^\theta + r\lambda - \theta\lambda) + c(r - \theta - \lambda),$$

c'est-à-dire que le quatrième terme d de la progression quotitive vaudra le premier multiplié par $r^\theta \lambda$, plus le second multiplié par $r^\theta + r\lambda - \theta\lambda$, et plus encore le troisième multiplié par $r - \theta - \lambda$.

On prouvera de même que le cinquième terme e vaut le second multiplié par $r^\theta \lambda$, plus le troisième multiplié par $r^\theta + r\lambda - \theta\lambda$, et plus encore le quatrième multiplié par $r - \theta - \lambda$, et ainsi de suite.

Ainsi la même progression quotitive peut être considérée comme une série récurrente du premier ordre, du second ordre, et du troisième ordre. Et l'on prouverait de même qu'elle peut être considérée comme appartenant à tous les ordres supérieurs au troisième.

On prouverait encore qu'une série récurrente d'un ordre quelconque peut être considérée comme appartenant à tous les ordres supérieurs à celui-là.

777. Du reste, puisqu'il faut aussi, dans une progression excédentive, recourir au premier terme pour former le second, au second pour former le troisième, et ainsi de suite, ces progressions pourraient être considérées comme formant un genre particulier de séries récurrentes.

Mais pour rester dans le genre excédentif, et faire ici par addition ce que nous avons fait par multiplication dans les progressions quotitives, si nous prenions

$$\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot \text{etc.}$$

et qu'après avoir écrit $b = a + r$, $c = b + r$, etc. nous ajoutassions le nombre arbitraire θ aux deux membres de la première égalité, afin d'avoir une nouvelle égalité à ajouter à la seconde, ce nombre θ disparaîtrait de lui-même, et nous ne trouverions que $c = a + 2r$, comme on le trouve sans l'addition de θ .

Essayons donc de ramener les progressions excédentes aux séries récurrentes du genre des progressions quotitives.

Pour cela, après avoir écrit $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, etc. faisons $b\theta = a\theta + r\theta$, et ajoutons cette égalité à l'équation $c = b + r$, nous aurons après les réductions

$$c = a.\theta + b(1 - \theta) + r(1 + \theta);$$

on trouverait de même,

$$d = b\theta + c(1 - \theta) + r(1 + \theta),$$

etc.

etc.

Reprenant ensuite cette dernière valeur de c , la multipliant par λ , et ajoutant les deux produits à la dernière valeur de d , on obtiendrait

$$d = a.\theta\lambda + b(\theta + \lambda - \theta\lambda) + c(1 - \theta - \lambda) + r(1 + \theta + \lambda + \theta\lambda);$$

on trouverait de même,

$$e = b.\theta\lambda + c(\theta + \lambda - \theta\lambda) + d(1 - \theta - \lambda) + r(1 + \theta + \lambda + \theta\lambda)$$

etc.

etc.

On pourrait rattacher ainsi une progression excédente à des séries récurrentes de différents ordres.

Mais ces séries seront tout-à-fait identiques avec celles qu'on peut appeler quotitives, si l'on fait évanouir dans les formules précédentes le terme en r . Pour cela il suffira de faire $\theta = -1$, $\lambda = -1$, etc.

Nous aurons ainsi,

$$c = a(-1) + b(+2),$$

$$d = b(-1) + c(+2),$$

etc.

ce qui prouve que toute progression excédente est une série récurrente proprement dite, du second ordre, dont l'échelle est

$$-1, +2.$$

Mais nous aurons encore

$$d = a(+1) + b(-3) + c(+3),$$

$$e = b(+1) + c(-3) + d(+3),$$

etc.

et la même progression excédentive sera une série récurrente proprement dite du troisième ordre, dont l'échelle sera

$$+1, -3, +3.$$

Si l'on cherche les échelles des ordres plus relevés, et qu'on les rapproche de celles que nous venons de trouver, on pourra en former le tableau suivant,

2^{me} ordre, échelle $-1, +2,$

3^{me} ordre..... $+1, -3, +3,$

4^{me} ordre..... $-1, +4, -6, +4,$

5^{me} ordre..... $+1, -5, +10, -10, +5,$

etc.

etc.

Et l'on remarquera que ces nombres sont les coefficients des puissances successives du binôme $\alpha - \beta$, en les prenant dans un ordre inverse depuis le dernier au second, et leur donnant des signes contraires.

Le lecteur fera bien d'appliquer les principes du n° 776 à différentes progressions quotitives, et ceux de ce numéro 777 à différentes progressions excédentives.

778. Nous avons vu dans les numéros 127 et suivants, puis dans les numéros 160 à 188, et enfin dans les numéros 326 à 333, que des quantités finies qui ont peu de termes, se développent souvent en séries finies ou infinies.

On peut donc se proposer en général ce problème :

Étant donnée une quantité finie, la développer en une série finie ou infinie.

Réciproquement, on pourra se proposer cet autre problème :

Étant donnée une série, trouver la quantité dont elle est supposée être le développement, ou, comme on dit, faire la somme de cette série (n° 154).

Nous allons nous occuper successivement de ces deux problèmes.

§ II.

*Du développement en séries des quantités finies.**1° Formules pour les progressions excédentives et quotitives en général.*

779. On pourrait demander de développer un nombre entier en une progression excédentive finie, dont ce nombre entier fût la somme.

En nommant le premier terme α , le dernier ω , la raison r , le nombre des termes n , et la somme s , on se souviendrait, 1° qu'un terme quelconque est égal au premier, plus la raison multipliée par le nombre des termes qu'il y a avant celui dont il s'agit; 2° que la somme de tous les termes est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes (*Arithm.* n°s 661, 666), ce qui donnerait ces deux formules,

$$\omega = \alpha + r(n-1) \quad , \quad s = (\alpha + \omega) \frac{1}{2} n.$$

Des cinq quantités que contiennent ensemble ces deux équations, trois étant connues ou prises à volonté, on trouvera les deux autres par l'élimination entre ces mêmes équations.

Soit 120 le nombre entier à développer, nous aurons $s = 120$; faisons ensuite $n = 10$, et $\alpha = 3$, les formules précédentes nous donneront $r = 2$, et $\omega = 21$; la suite sera donc

$$120 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21.$$

Ayant toujours $s = 120$, si l'on faisait $n = 12$, et $\alpha = 0$, on trouverait $r = \frac{20}{11}$, et $\omega = 20$, ce qui donnerait

$$120 = 0 + \frac{20}{11} + \frac{40}{11} + \frac{60}{11} + \frac{80}{11} + \dots + 20.$$

780. On pourrait demander aussi de développer un nombre entier en une progression quotitive finie, dont cet entier fût la somme.

Conservons les caractères précédents, et souvenons-nous d'abord qu'un terme quelconque vaut le premier, multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qu'il y a avant celui dont il s'agit; souvenons-nous encore que, pour trouver la somme de tous les termes, il faut 1° faire le produit du dernier par la raison; 2° retrancher de ce produit le premier, et 3° diviser le

reste par la raison, moins l'unité (*Arith.* n^{os} 668, 676); nous aurons les deux formules suivantes,

$$\omega = \alpha \times r^{n-1}, \quad s = \frac{\omega \cdot r - \alpha}{r - 1},$$

dans lesquelles trois quantités étant connues ou prises à volonté, on déterminera les deux autres par l'élimination.

Soit $s = 1023$, et faisons $\alpha = 1$, et $n = 10$, nous trouverons $r =$
 $\sqrt[10]{1024} = 2$, et $\omega = r^9 = 512$, en sorte que la progression sera

$$1023 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512.$$

781. Du reste, dans les progressions excédentes et quotitives, les trois quantités qui doivent être données, pourraient être fixées de manière à rendre la solution du problème impossible.

2° Formules pour les progressions quotitives infinies.

782. Remarquons maintenant une différence essentielle entre les progressions excédentes et les progressions quotitives. Dans la première espèce, une quantité finie ne peut jamais donner un développement sans fin : car, en partant d'un nombre donné, si on voulait faire croître la progression sans fin, la limite vers laquelle elle tendrait serait infiniment grande en plus, et si on voulait la faire décroître sans fin, la limite serait infiniment grande en moins. Dans la progression quotitive, en faisant croître les termes sans fin, on a aussi une limite infiniment grande; mais en les faisant décroître sans fin, ils ont pour limite zéro. C'est ainsi que nous avons trouvé dans le n^o 156.

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

La raison de cette progression est $\frac{1}{2}$; ses termes tendent vers la limite zéro, et la somme de toute la progression tend vers la limite 2. On dit alors, pour abrégé, que 2 est la somme de la progression.

Nous avons aussi eu dans le même numéro

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \text{etc.}$$

La raison est ici $-\frac{1}{2}$, les termes tendent vers la limite zéro, et la somme tend vers la limite $\frac{1}{5}$.

783. Cela posé, si on nous donnait un nombre entier à développer en progression quotitive infinie, nous prendrions dans les formules

précédentes (n° 780) pour la limite des termes, c'est-à-dire que nous ferions $\infty = 0$: alors la seconde formule deviendrait

$$s = \frac{-\alpha}{r-1} = \frac{\alpha}{1-r}.$$

Si le nombre entier était 2, α ne pourrait ni surpasser 2, ni être égal à 2. En faisant $\alpha = 1$, on retrouverait la série

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

Mais en faisant $\alpha = 1 \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$, on trouverait $r = \frac{1}{8}$, et l'on aurait

$$2 = \frac{9}{4} + \frac{7}{32} + \frac{7}{256} + \frac{7}{2048} + \text{etc.}$$

Soit encore 40 à développer de la même manière, et soit en même temps $r = \frac{1}{5}$. Substituant ces valeurs dans la formule, on trouvera $\alpha = \frac{80}{5}$, et la série sera

$$40 = \frac{80}{5} + \frac{80}{9} + \frac{80}{27} + \frac{80}{81} + \frac{80}{245} + \text{etc.}$$

3° Développements par la division.

784. On voit par ce qui précède qu'un nombre s entier ou fractionnaire, peut être considéré comme la somme ou plutôt la limite d'une progression quotitive infinie. On voit de plus qu'en nommant α le premier terme de cette progression, et r sa raison, on peut donner à s la forme $\frac{\alpha}{1-r}$; mais cette formule indique une division.

Essayons donc de diviser en effet α par $1-r$, et nous obtiendrons par cette opération la série

$$s = \alpha + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \text{etc.}$$

Voyez le chapitre IV de la première partie, p. 79, et entre autres les n°s 136 à 142 et 147 à 152.

Par exemple, dans le premier développement de 2 (n° 783), après avoir fait $\alpha = 1$, et avoir trouvé $r = \frac{1}{2}$, si on eût divisé immédiatement 1 par $1 - \frac{1}{2}$, ou 2 par $2 - 1$, sans réduire les diviseurs, et à la manière des quantités algébriques, on aurait eu la série $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$ Dans le second développement de 2 (n° 783), après avoir fait $\alpha = 1 \frac{5}{4}$, et trouvé $r = \frac{1}{8}$, si on eût divisé $\frac{9}{4}$ par $1 - \frac{1}{8}$, ou 14 par $8 - 1$, toujours sans réduire les diviseurs, et à la manière des quantités algébriques, on aurait eu la série $\frac{9}{4} + \frac{7}{32} + \frac{7}{256} + \text{etc.}$

Enfin, dans le développement de 40 (n° 783), après avoir fait $r = \frac{1}{3}$ et trouvé $\alpha = \frac{80}{3}$, si on eût divisé $\frac{80}{3}$ par $1 - \frac{1}{3}$, ou 80 par 3 — 1, on aurait eu la série $\frac{80}{3} + \frac{80}{9} + \frac{80}{27} + \text{etc.}$

785. Puisque nous avons repris le développement des quantités finies par le procédé de la division, ce qui suppose que ces quantités se présentent sous la forme fractionnaire, essayons d'étendre un peu plus cette matière; mais souvenons-nous que nous n'avons point à examiner le cas où le dénominateur serait monome (n°s 137, 138).

Nous avons eu au n° 136

$$\frac{a+b+c+\text{etc.}}{m+n+p+\text{etc.}} = \frac{a}{m} - \frac{a}{m^2}n + \frac{a}{m^3}n^2 - \frac{a}{m^4}n^3 + \text{etc.}$$

Cependant, si en refaisant la division on tenait compte des lettres $b, c, \text{etc. } p, q, \text{etc.}$ la série se présenterait sous une forme plus générale, et deviendrait

$$\frac{a+b+c+\text{etc.}}{m} - \frac{a+b+c+\text{etc.}}{m^2}(n+p+\text{etc.}) + \frac{a+b+c+\text{etc.}}{m^3}(n+p+\text{etc.})^2 - \frac{a+b+c+\text{etc.}}{m^4}(n+p+\text{etc.})^3 + \text{etc.}$$

Mais en désignant $a+b+c+\text{etc.}$ par a' et $n+p+\text{etc.}$ par n' , elle reprendrait immédiatement sa première forme.

Il résulte de là que le numérateur de la fraction proposée se comporte comme un monome, et le dénominateur comme un binome. C'est cette forme que nous avons examinée dans les n°s 140 et suivants.

786. Pour arriver, si cela se peut, à quelque chose de nouveau, considérons avec quelque attention les termes de la série générale que nous venons de trouver, et nous remarquerons, 1° que ces termes contiennent les puissances successives du polynome $n+p+\text{etc.}$ qui est, en quelque sorte, la seconde partie du diviseur; 2° que ces puissances sont divisées par celles du monome m , première partie du même diviseur, de manière à ce que celles-ci soient toujours d'une unité plus élevées que les précédentes; 3° enfin, que le dividende $a+b+c+\text{etc.}$ de la fraction proposée se retrouve comme facteur, et sans aucune modification quelconque, dans chacun des termes de la série.

Si donc nous faisons les lettres $p, q, \text{etc.}$ égales à quelques puis-

sances de n , nous obtiendrions des séries qui marcheraient suivant les puissances de n , affectées de certains coefficients; et il en serait de même si nous mettions aussi telles ou telles puissances de n dans le dividende. Je dis qu'il faudrait remplacer les lettres n , p , q , etc. par des puissances de n , et non par n même, pour éviter un diviseur purement binôme, cas que nous avons déjà suffisamment examiné.

Essayons donc de développer d'abord la fraction

$$\frac{a}{m+n+n^2}.$$

En la rapportant à la formule générale du numéro précédent, elle deviendrait

$$\frac{a}{m} - \frac{a}{m^2}(n+n^2) + \frac{a}{m^3}(n+n^2)^2 - \frac{a}{m^4}(n+n^2)^3 + \text{etc.}$$

Développant ensuite les puissances de $n+n^2$, effectuant les multiplications, et ordonnant enfin pour n , nous obtiendrions

$$\frac{a}{m} - \frac{a}{m^2}n + \frac{a-am}{m^3}n^2 - \frac{a-2am}{m^4}n^3 + \text{etc.}$$

Mais nous trouverions aussi la même suite en divisant immédiatement a par $m+n+n^2$, comme on peut le voir par l'opération que nous allons figurer

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} a \\ -a - \frac{a}{m}n - \frac{a}{m}n^2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} m+n+n^2 \\ \hline \frac{a}{m} - \frac{a}{m^2}n + \frac{a-am}{m^3}n^2 - \frac{a-2am}{m^4}n^3 + \text{etc.} \end{array} \right. \\
 \hline
 \begin{array}{c} -\frac{a}{m}n - \frac{a}{m}n^2 \\ + \frac{a}{m}n + \frac{a}{m^2}n^2 + \frac{a}{m^2}n^3 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \frac{a-am}{m^2}n^2 + \frac{a}{m^2}n^3 \\ - \frac{a-am}{m^2}n^2 - \frac{a-am}{m^3}n^3 - \frac{a-am}{m^3}n^4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -\frac{a-2am}{m^3}n^3 - \frac{a-am}{m^3}n^4 \\ + \frac{a-2am}{m^3}n^3 + \frac{a-2am}{m^4}n^4 + \frac{a-2am}{m^4}n^5 \end{array} \\
 \hline
 + \text{etc.}
 \end{array}$$

Du reste, si l'on multiplie le premier terme de cette série par $-\frac{n^2}{m}$, et le second par $-\frac{n}{m}$, on obtiendra $-\frac{a}{m^2}n^2$ et $+\frac{a}{m^3}n^2$; ajoutant ces deux produits, après avoir réduit le premier au dénominateur m^3 , on aura le troisième terme de la série. Multipliant encore par les mêmes nombres le second terme et le troisième, et ajoutant les deux produits, on aura le quatrième terme, et ainsi de suite, d'où il résulte que cette série est une série récurrente du second ordre, dont l'échelle de relation est $-\frac{n^2}{m}, -\frac{n}{m}$ (n° 775), savoir le troisième terme et le second terme du dénominateur de la proposée, divisés l'un et l'autre par le premier, et pris avec des signes contraires.

787. Nous pourrions aussi, pour plus de généralité, donner aux puissances de n différents coefficients, et développer par exemple les fractions suivantes,

$$\frac{a+bn}{a+\beta n+\gamma n^2}, \quad \frac{a+bn+cn^2}{a+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3}, \quad \frac{cn^2+bn+a}{\delta n^3+\gamma n^2+\beta n+a},$$

$$\frac{an+bn^2}{an^2+\beta n^3+\gamma n^4}, \quad \frac{an+bn^3}{a+\beta n^2+\gamma n^4}, \quad \frac{1+2n-n^3}{1-n-n^2}$$

etc. etc.

Mais comme on peut obtenir ces développements par un procédé plus commode et plus court que le procédé de la division, nous allons le faire connaître, après avoir cependant dit un mot de celui que présente encore la formule du binôme.

4° Développements par la formule du binôme.

788. Nous avons vu dans les n°s 328 à 335 qu'on pouvait développer en séries infinies, par la formule du binôme, les quantités irrationnelles d'un degré quelconque. Mais comme cette même formule s'applique aussi aux puissances en moins (n° 336), il est facile d'en conclure qu'on peut obtenir par son moyen tous les développements que donne une division continue.

Par exemple, pour trouver les séries que nous avons eues au n° 784, comme valeurs des quantités suivantes

$$\frac{\alpha}{1-r}, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{2}{2-1}, \frac{\frac{7}{4}}{1-\frac{1}{8}} \text{ ou } \frac{14}{8-1}, \frac{\frac{80}{5}}{1-\frac{1}{5}} \text{ ou } \frac{80}{3-1},$$

il aurait suffi d'écrire

$$\alpha(1-r)^{-1}, 1(1-\frac{1}{2})^{-1}, \text{ ou } 2(2-1)^{-1}, \frac{7}{4}(1-\frac{1}{8})^{-1}, \text{ ou } 14(8-1)^{-1},$$

$$\frac{80}{5}(1-\frac{1}{5})^{-1}, \text{ ou } 80(3-1)^{-1},$$

et les développements que la formule du binôme eût donnés, se seraient trouvés les mêmes que ceux du numéro cité.

Nous aurions trouvé aussi les séries des n^{os} 785 et 786, en développant les formules $(a+b+c+etc.)(m+n+p+etc.)^{-1}$ et $\alpha(m+n+n^2)^{-1}$. Enfin, on pourrait développer de la même manière les fractions du n^o 787.

Mais nous ne nous arrêterons pas sur ce procédé, et nous passerons à celui qui est le plus commode, le plus prompt, et qui fait d'ailleurs ressortir le mieux la loi de ces développements (n^o 787).

5^o *Développements par la méthode des coefficients indéterminés.*

789. Pour préparer l'exposition de la théorie dont il s'agit ici, nous allons reprendre le procédé de la division, et développer par son moyen une fraction particulière. Nous obtiendrons par exemple

$$\frac{1+n}{3-2n-3n^2} = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}n + \frac{19}{27}n^2 + \frac{83}{81}n^3 + \frac{337}{243}n^4 + etc.$$

et nous en prendrons l'occasion de faire sur ce développement une remarque qui pourra s'étendre à tous les autres développements de ce genre.

Il est évident que cette équation est une équation identique, puisque le second membre n'est que le développement du premier. Il ne s'agit point ici de trouver la valeur de n , mais seulement de donner une autre forme à la fraction proposée, comme si l'on écrivait

$$2n \text{ à la place de } \frac{6n^2}{3n}. \text{ L'équation } \frac{6n^2}{3n} = 2n \text{ est identique, et elle a}$$

lieu indépendamment de la valeur de n , ou pour toutes les valeurs qu'on voudra donner à cette lettre. De même le développement ci-dessus conservera sa forme, quelque valeur que l'on donne à n , et les coefficients seront les mêmes pour toutes les valeurs de cette lettre.

Or, puisque n peut passer, comme nous venons de le dire, par

tous les degrés de grandeur, depuis les plus petits jusqu'aux plus grands, sans que la forme du développement change, ou sans que les coefficients changent, on dit que n est une quantité variable, comme le serait, par exemple, la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence d'un cercle sur le diamètre, si on faisait mouvoir cette perpendiculaire depuis une des extrémités de ce diamètre jusqu'à l'autre, en passant par le centre. Mais on est convenu de désigner les quantités variables par les dernières lettres de l'alphabet x, y, z , etc. et les constantes par les autres lettres. En sorte que dès à présent nous mettrons dans toutes nos fractions proposées et dans leurs développements x à la place de n , bien entendu qu'il ne faudra pas considérer x comme une inconnue, ni l'équation en x comme devant donner la valeur de cette lettre.

Remarquons encore que si, dans la fraction à développer, le premier terme du numérateur est constant, ou ne contient point d' x , et qu'il en soit de même du premier terme du dénominateur, le premier terme du développement ne contiendra point d' x non plus. (Voyez la formule générale du n° 785.)

790. Tout cela posé, et combiné avec ce que nous avons déjà vu précédemment, il est clair que si on développe, par un procédé quelconque, la fraction

$$\frac{a + bx + cx^2 + \dots + kx^{n-1}}{a + \beta x + \gamma x^2 + \dots + \alpha x^{n-1} + \lambda x^n},$$

on aura une série de cette forme

$$M + Nx + Px^2 + Qx^3 + Rx^4 + Sx^5 + \text{etc.}$$

dans laquelle les lettres M, N, P, Q , etc. représenteront les coefficients des puissances de x .

Ce sont ces coefficients, composés des lettres a, b, c , etc. α, β, γ , etc. et indépendants de x , qu'il faudrait déterminer, puisqu'ils ne le sont point encore, et on les nomme en conséquence *coefficients indéterminés*.

Pour expliquer le procédé en question, prenons d'abord quelques exemples simples, et faisons, pour commencer,

$$\frac{a}{a + \beta x} = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.}$$

Multipliant alors les deux membres de cette équation par $\alpha + \beta x$, et transposant α dans le second membre, nous aurons

$$0 = \begin{cases} \alpha M + \alpha N x + \alpha P x^2 + \alpha Q x^3 + \text{etc.} \\ -\alpha + \beta M x + \beta N x^2 + \beta P x^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

Et comme ce second membre doit se réduire à zéro pour toute valeur qu'on voudra donner à x , il faut que la somme des coefficients de chaque puissance de x , dans ce même second membre, se réduise séparément à 0. Ainsi l'on aura

$$\alpha M - \alpha = 0, \alpha N + \beta M = 0, \alpha P + \beta N = 0, \alpha Q + \beta P = 0, \\ \alpha R + \beta Q = 0, \text{etc.}$$

De la première équation, on tirera la valeur de M ; puis on la substituera à M dans la seconde, pour tirer de celle-ci la valeur de N ; on mettra cette valeur de N dans la troisième équation, pour obtenir celle de P , et ainsi de suite. On trouvera ainsi

$$M = +\frac{\alpha}{\alpha}, N = -\frac{\beta\alpha}{\alpha^2}, P = +\frac{\beta^2\alpha}{\alpha^3}, Q = -\frac{\beta^3\alpha}{\alpha^4}, R = +\frac{\beta^4\alpha}{\alpha^5}, \text{etc.}$$

et la proposée deviendra

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta x} = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\beta\alpha}{\alpha^2}x + \frac{\beta^2\alpha}{\alpha^3}x^2 - \frac{\beta^3\alpha}{\alpha^4}x^3 + \text{etc.}$$

comme on l'aurait trouvé par la division continue ou par la formule du binôme.

791. Du reste, on peut, des équations partielles qui nous ont donné les valeurs des coefficients, tirer les équations suivantes,

$$M = \frac{\alpha}{\alpha}, N = -\frac{\beta}{\alpha}M, P = -\frac{\beta}{\alpha}N, Q = -\frac{\beta}{\alpha}P, R = -\frac{\beta}{\alpha}Q, \text{etc.}$$

par lesquelles on voit que chaque coefficient, depuis le second, est égal à celui qui le précède, multiplié par $-\frac{\beta}{\alpha}$, en sorte que ces coefficients forment par eux-mêmes, et indépendamment de x , une progression quotitive, dont la raison est $-\frac{\beta}{\alpha}$. La série, avec les puissances de x , est donc aussi une progression quotitive, dont la raison est $-\frac{\beta}{\alpha}x$, ou une série récurrente du premier ordre, dont l'échelle

de relation est $-\frac{\beta}{\alpha}x$; et remarquez que cette échelle de relation n'est autre chose que le second terme du dénominateur de la proposée, divisé par le premier, et pris avec un signe contraire.

Cette simple observation nous fera trouver très-vite, et sans aucune des méthodes précédentes, tous les développements de cette espèce, car le premier terme de la série sera toujours $\frac{\alpha}{\alpha}$. Ainsi,

$$\frac{5}{1-2x} = 5 + 10x + 20x^2 + 40x^3 + 80x^4 + \text{etc.}$$

parce que le premier terme est $\frac{5}{1}$ ou 5, et que l'échelle de relation est $+\frac{2x}{1}$ ou $2x$, c'est-à-dire le second terme du dénominateur divisé par le premier, et pris avec un signe contraire.

De même,

$$\frac{3}{2+x} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + \frac{3}{32}x^4 - \text{etc.}$$

parce que le premier terme est $\frac{3}{2}$, et que l'échelle de relation est $-\frac{x}{2}$ ou $-\frac{1}{2}x$.

792. Appliquons encore la méthode des coefficients indéterminés à quelques exemples de plus en plus composés, mais qui aient toujours une certaine régularité. Soit

$$\frac{\alpha + bx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, puis transposant $\alpha + bx$, on aura

$$0 = \begin{cases} + \alpha M + \alpha Nx + \alpha Px^2 + \alpha Qx^3 + \text{etc.} \\ - \alpha + \beta Mx + \beta Nx^2 + \beta Px^3 + \text{etc.} \\ - bx + \gamma Mx^2 + \gamma Nx^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} \alpha M - \alpha &= 0, & \alpha N + \beta M - b &= 0, \\ \alpha P + \beta N + \gamma M &= 0, & \alpha Q + \beta P + \gamma N &= 0, \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$M = \frac{a}{\alpha}, \quad N = -\frac{\beta a - \alpha b}{\alpha^2},$$

$$P = +\frac{\beta^2 a - \alpha \gamma a - \alpha \beta b}{\alpha^3}, \quad \text{etc.}$$

et la proposée deviendra

$$\frac{a + bx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{a}{\alpha} - \frac{\beta a - \alpha b}{\alpha^2} x + \frac{\beta^2 a - \alpha \gamma a - \alpha \beta b}{\alpha^3} x^2 - \text{etc.}$$

793. Du reste, pour découvrir plus facilement la loi des coefficients, on aurait pu les écrire ainsi,

$$M = \frac{a}{\alpha}, \quad N = \frac{\beta}{\alpha} M + \frac{b}{\alpha},$$

$$P = -\frac{\gamma}{\alpha} M - \frac{\beta}{\alpha} N,$$

$$Q = -\frac{\gamma}{\alpha} N - \frac{\beta}{\alpha} P,$$

$$R = -\frac{\gamma}{\alpha} P - \frac{\beta}{\alpha} Q,$$

$$S = -\frac{\gamma}{\alpha} Q - \frac{\beta}{\alpha} R,$$

etc.

et l'on aurait vu que chaque coefficient, depuis le troisième, se forme au moyen des deux précédents, multipliés respectivement par $-\frac{\gamma}{\alpha}$ et par $-\frac{\beta}{\alpha}$, en sorte que ces coefficients forment une série récurrente

du second ordre, dont l'échelle de relation est $-\frac{\gamma}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha}$. Quant au développement de la proposée, c'est aussi une série récurrente du second ordre, dont l'échelle de relation est $-\frac{\gamma x^2}{\alpha}, -\frac{\beta x}{\alpha}$, c'est-à-dire le troisième terme du dénominateur divisé par le premier, et le second divisé aussi par le premier, mais l'un et l'autre avec un signe contraire.

794. Si l'on faisait

$$\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.}$$

on trouverait, en suivant la même marche,

$$M = \frac{a}{a}, \quad N = -\frac{\beta}{a} M + \frac{b}{a},$$

$$P = -\frac{\gamma}{a} M - \frac{\beta}{a} N + \frac{c}{a},$$

$$Q = -\frac{\delta}{a} M - \frac{\gamma}{a} N - \frac{\beta}{a} P,$$

$$R = -\frac{\delta}{a} N - \frac{\gamma}{a} P - \frac{\beta}{a} Q,$$

$$S = -\frac{\delta}{a} P - \frac{\gamma}{a} Q - \frac{\beta}{a} R,$$

etc. etc.

et l'on verrait que chaque coefficient, depuis le quatrième, se trouve, au moyen des trois précédents, multipliés respectivement par $-\frac{\delta}{a}$, $-\frac{\gamma}{a}$, $-\frac{\beta}{a}$, en sorte que ces coefficients forment une série récurrente du troisième ordre, dont nous venons d'indiquer l'échelle de relation. La série elle-même, avec les puissances de x , forme une série récurrente du troisième ordre, dont l'échelle de relation n'est autre chose que le quatrième terme du dénominateur de la proposée, divisé par le premier, plus le troisième divisé par le premier, plus encore le second divisé par le premier, et pris tous trois avec des signes contraires. Il sera facile d'étendre cela aussi loin qu'on le voudra. L'échelle de relation des séries de ce genre sera toujours déterminée par le dénominateur de la proposée, et elle aura n termes si la plus haute puissance de x est n .

795. Quant aux n premiers termes de la série, la loi en est facile à saisir aussi : on a toujours

$$M = \frac{a}{a},$$

$$N = -\frac{\beta}{a} M + \frac{b}{a},$$

$$P = -\frac{\gamma}{a} M - \frac{\beta}{a} N + \frac{c}{a},$$

$$Q = -\frac{\delta}{a} M - \frac{\gamma}{a} N - \frac{\beta}{a} P + \frac{d}{a},$$

etc.

Mais si quelqu'une des lettres b , c , d , etc. manque dans le numérateur de la proposée, il faudra l'égaliser à zéro.

796. Voici un exemple particulier assez remarquable, qu'on pourra calculer immédiatement par les principes des numéros précédents.

$$\frac{1+x}{1-x-x^2} = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{11} + x^{12} + \text{etc.}$$

L'échelle de relation est $+x^2, +x$; mais pour que la loi générale puisse s'observer dans la formation des termes, il faut faire attention à ceci, c'est que les termes en x^1, x^4, x^7, x^{10} , etc. manquent, c'est-à-dire que l'on a $N=0, R=0, V=0$, etc.

797. Observons maintenant que nous nous sommes attachés à des formules qu'on peut appeler régulières, et dans lesquelles entre autres x s'élève à une puissance plus haute dans le dénominateur que dans le numérateur. Voyons donc ce qu'il y aurait à faire pour ramener à cette forme les quantités qui s'en écarteraient un peu.

1° Si les puissances de x allaient en décroissant dans le numérateur, ou dans le dénominateur, ou dans les deux, on les rendrait croissantes par le retournement.

2° Si tous les termes d'une de ces quantités ou des deux, contiennent la variable x , on diviserait ou le numérateur, ou le dénominateur, ou tous les deux par la plus petite puissance de x qu'ils contiendraient, pour avoir dans chacune de ces quantités un terme sans x , comme a et α . Alors, quand le développement serait trouvé, on le multiplierait par la fonction d' x , qui aurait servi de diviseur.

3° S'il manquait quelque puissance de x entre les puissances extrêmes, le coefficient de cette puissance serait zéro.

4° Enfin, si les puissances de x montaient dans le numérateur au même degré que dans le dénominateur, ou à un degré supérieur, on retournerait ces quantités pour diviser la première par la seconde, jusqu'à ce qu'on eût un reste, dans lequel la plus haute puissance de x se trouvât dans le dénominateur de ce reste. Ce serait alors ce reste qu'il faudrait développer en série, après avoir de nouveau retourné le numérateur et le dénominateur pour faire décroître les puissances de x qu'ils contiendraient encore.

Ces diverses précautions sont nécessaires pour qu'on puisse retrouver dans les développements les lois que nous avons indiquées.

Nous allons donner un exemple de chacun de ces cas, à l'exception du premier, qui est tout simple.

Exemple du 2^{me} cas.

$$\frac{3}{2x-x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{3}{2-x} \right) = \frac{3}{x} \left(\frac{1}{2-x} \right) = \frac{3}{x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{32}x^4 + \text{etc.} \right) = \frac{3}{2x} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x^3 + \text{etc.}$$

La loi s'observe depuis le second terme $\frac{3}{4}$, et l'échelle de relation est $\frac{1}{2}x$.

Exemple du 3^{me} cas.

$$\frac{a+bx}{a+\gamma x^2+\epsilon x^4} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}x - \frac{\gamma a}{a^3}x^2 - \frac{\gamma b}{a^2}x^3 + \frac{\gamma^2 a - a\epsilon a}{a^3}x^4 + \frac{\gamma^2 b - a\epsilon b}{a^3}x^5 - \text{etc.}$$

L'échelle de relation est de quatre termes,

$$-\frac{\epsilon x^4}{a}, -\frac{0x^3}{a}, -\frac{\gamma x^2}{a}, -\frac{0x}{a} \text{ (n° 794).}$$

Quant aux quatre premiers termes de la série, voyez le n° 795.

Exemple du 4^{me} cas.

$$\frac{3+4x}{1+2x} = \frac{4x+3}{2x+1} = 2 + \frac{1}{2x+1} = 2 + \frac{1}{1+2x} = 2 + 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \text{etc.}$$

La loi s'observe depuis le second terme 1 de la série, et l'échelle de relation est $-2x$; mais si on réunissait les deux premiers termes, en écrivant $3-2x+4x^2-8x^3+\text{etc.}$ la loi n'aurait plus lieu que depuis le terme $-2x$.

$$\frac{1+2x-x^3}{1-x-x^2} = \frac{-x^3+2x+1}{-x^2-x+1} = x-1 + \frac{2}{-x^2-x+1} = x-1 +$$

$$\frac{2}{1-x-x^2} = x-1 + 2+2x+4x^2+6x^3+10x^4+16x^5+\text{etc.}$$

La loi s'observe depuis le troisième terme 2, et l'échelle de relation est $+x^2, +x$; mais si on réunissait les quatre premiers termes en écrivant $1+3x+4x^2+6x^3+10x^4+16x^5+\text{etc.}$ la loi n'aurait plus lieu que depuis le terme $4x^2$.

798. Si le dénominateur de la fraction proposée était une puissance parfaite du binome $m \pm nx$, on obtiendrait facilement la série, d'après les principes précédents (nos 791, 793, 794, 795), pourvu qu'on eût soin de développer d'abord la puissance de ce dénominateur. Nous n'examinerons en particulier que le cas où ce dénominateur aurait le signe moins au second terme, parce que ce cas offre quelques résultats intéressants. On trouvera par exemple

$$\frac{a+bx}{(m-nx)^2} = \frac{a+bx}{m^2-2mnx+n^2x^2} = \frac{a}{m^2} + \frac{2na+mb}{m^3}x + \frac{3n^2a+2mn^2b}{m^4}x^2 + \frac{4n^3a+3mn^2b}{m^5}x^3 + \frac{5n^4a+4mn^3b}{m^6}x^4 + etc.$$

L'échelle de relation est $-\frac{n^2x^2}{m}$, $+\frac{2nx}{m^2}$. Mais si l'on fait $m=1$, $n=1$, et $x=1$, la série devient une progression excédentive,

$$a + (2a+b) + (3a+2b) + (4a+3b) + etc.$$

dont la raison est $a+b$. Cependant cette progression, cas particulier de la formule précédente, reste toujours une série récurrente du second ordre, dont l'échelle n'est plus que $-1, +2$ (n° 777).

Quant à la fraction proposée, elle se présente alors sous cette forme $\frac{a+b}{0}$, et on pourrait la développer ainsi (nos 157, 158),

$$a+b+a+b+a+b+a+b+a+b+etc. = a+a+a+a+... + b+b+b+b+b+b+...$$

ce qui est évidemment égal à la série ci-dessus lorsqu'on écrit ainsi cette même série,

$$a+2a+3a+4a+... + b+2b+3b+etc.$$

Cette observation pourra s'étendre aux exemples suivants.

799. Si on développait encore par les principes des nos 794, 795, la fraction

$$\frac{a+bx}{(m-nx)^3} = \frac{a+bx}{m^3-3m^2nx+3mn^2x^2-n^3x^3},$$

on trouverait une série récurrente du troisième ordre, dont l'échelle serait $+\frac{n^3x^3}{m^3}$, $-\frac{3mn^2x^2}{m^3}$, $+\frac{3m^2nx}{m^3}$, et si l'on faisait ensuite $m=1$, $n=1$, et $x=1$, on obtiendrait comme cas particulier la suite,

$$a + (3a + b) + (6a + 3b) + (10a + 6b) + \text{etc.}$$

série récurrente toujours du troisième ordre, mais dont l'échelle de relation n'est plus que $+1, -3, +3$.

Cela posé, si on prenait les différences de chaque terme de cette série avec le précédent, on aurait la suite

$$a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b) + \text{etc.}$$

qui ne serait autre chose que la progression excédentive du numéro précédent. Mais cette progression serait-elle encore une série récurrente du troisième ordre, avec la même échelle $+1, -3, +3$?

La chose est démontrée par le n° 777. Essayons cependant de l'envisager sous un point de vue plus général.

800. Soit $a + b + c + d + e + f + g + \text{etc.}$ une série récurrente du troisième ordre, dont l'échelle de relation est $m + n + p$, on a

$$\begin{aligned} d &= ma + nb + pc, & e &= mb + nc + pd, \\ f &= mc + nd + pe, & g &= md + ne + pf, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Prenons les différences des termes consécutifs de la série, elles formeront cette autre suite,

$$(b - a) + (c - b) + (d - c) + (e - d) + (f - e) + (g - f) + \text{etc.}$$

Or, par les équations précédentes, on a le quatrième terme

$$e - d = mb + nc + pd - ma - nb - pc = m(b - a) + n(c - b) + p(d - c),$$

le cinquième

$$f - e = mc + nd + pe - mb - nc - pd = m(c - b) + n(d - c) + p(e - d),$$

etc. etc.

d'où il résulte que ces différences forment une série récurrente du même ordre avec la même échelle.

Par le même principe, les différences des différences, ou les différences secondes, les différences des différences, ou les différences troisièmes, etc. formeraient toujours des séries récurrentes du même ordre avec la même échelle.

Et la même chose se démontrerait de la même manière pour les séries récurrentes de tous les ordres.

Ainsi la progression excédentive que nous avons tirée du déve-

loppement de la fraction $\frac{a+bx}{(m-nx)^3}$ est une série récurrente du troisième ordre, dont l'échelle est $+1, -3, +3$ (n° 777, 799).

801. Si on développait les fractions

$$\frac{a+bx}{(m-nx)^4}, \quad \frac{a+bx}{(m-nx)^5}, \quad \frac{a+bx}{(m-nx)^6}, \text{ etc.}$$

on obtiendrait des séries récurrentes du quatrième ordre, du cinquième ordre, du sixième ordre, etc. Faisant alors $m=1, n=1, x=1$, et prenant les différences secondes, ou troisièmes, ou quatrièmes, etc. des termes des nouvelles séries, on retomberait toujours sur la formule générale des progressions excédentes. Quant aux échelles, elles seraient, pour le quatrième ordre, $-1, +4, -6, +4$, pour le cinquième ordre, $+1, -5, +10, -10, +5$, pour le sixième ordre, $-1, +6, -15, +20, -15, +6$, etc.

Ces nombres sont, comme nous l'avons déjà vu au n° 777, les coefficients des puissances successives du binôme $a-\beta$, mais ils sont pris en ordre inverse, depuis le dernier au second, et avec des signes contraires.

Du reste, on trouverait des résultats tout-à-fait semblables en développant des fractions de cette forme générale

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\dots+kx^{p-1}}{(m-nx)^p}.$$

Mais nous ne nous occuperons pas du cas où le dénominateur serait une puissance d'un polynome quelconque.

§ III.

De la sommation des séries.

802. Nous avons vu des quantités finies se développer en séries finies ou infinies, et la plupart de ces suites se sont trouvées récurrentes.

Cependant les suites que nous avons tirées des extractions de racines (n°s 326 à 333) n'appartenaient pas à cette classe. Et l'on conçoit qu'il doit exister une infinité de séries autres que des racines, qui ne seront pas non plus récurrentes. Car on peut former des séries

à volonté, sans les faire découler d'aucune quantité finie donnée d'avance.

C'est ainsi que nous avons vu les nombres constants 1, 1, 1, 1, 1, 1, etc. donner naissance aux nombres naturels, ceux-ci aux nombres triangulaires, ces derniers aux nombres pyramidaux, etc. Et nous avons donné à toutes ces suites le nom générique de *nombres figurés* (n^{os} 287 à 294). Nous allons en retracer ici le tableau

<i>Nombres constants</i>	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
<i>Nombres naturels</i>	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
<i>Nombres triangulaires</i>	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,
<i>Nombres pyramidaux</i>	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,
.....	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,
<i>etc.</i>								

Chacun des termes de ces suites se forme par l'addition des termes de la suite précédente jusqu'à celui de même rang. Ainsi, le cinquième terme 35 des nombres pyramidaux est égal aux cinq premiers nombres triangulaires. Le huitième terme des nombres triangulaires est égal aux huit premiers nombres naturels, et ainsi des autres.

On pourrait aussi dire que le n^{me} terme d'une des suites quelconques est égal au terme précédent de cette suite, plus le n^{me} de la suite supérieure.

Les suites des nombres figurés proviennent, comme on voit, d'une même progression excédentive, qui est celle des nombres naturels. Voici d'autres suites qui proviennent de différentes progressions excédentives commençant toutes par l'unité, et dont les différences sont 1, 2, 3, 4, etc. Chacune de ces progressions fournit une des séries en question, en prenant pour le n^{me} terme de celle-ci la somme des n premiers termes de la progression génératrice. C'est ce que l'on voit dans le tableau suivant

<i>Progr. diff.</i>	1.... 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.
<i>N. triangul.</i>	 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc.
<i>Progr. diff.</i>	2.... 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc.
<i>N. carrés.</i>	 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc.
<i>Progr. diff.</i>	3.... 1, 4, 7, 10, 13, 16, etc.
<i>N. pentagones.</i>	 1, 5, 12, 22, 35, 51, etc.
<i>Progr. diff.</i>	4.... 1, 5, 9, 13, 17, 21, etc.
<i>N. hexagones.</i>	 1, 6, 15, 28, 45, 66, etc.
<i>etc.</i>	<i>etc.</i>

Ces séries de nombres triangulaires, carrés, pentagones, hexagones, etc. s'appellent les suites des *nombres polygones*, parce qu'on peut les arranger en polygones, d'après les principes du n° 290.

Souvent on considère aussi les séries formées par les diverses puissances des nombres naturels.

Puissances 0 ou nombres constants...	1, 1, 1, 1, etc.
Puissances 1 ^{res} ou nomb. nat. mêmes..	1, 2, 3, 4, etc.
Puissances 2 ^{mes} ou nomb. carrés....	1, 4, 9, 16, etc.
Puissances 3 ^{mes} ou cubes.....	1, 8, 27, 64, etc.
Puissances 4 ^{mes}	1, 16, 81, 256, etc.
<i>etc.</i>	<i>etc.</i>

Nous donnerons enfin, comme exemple d'une série formée sans développement, la série harmonique ou inverse des nombres naturels,

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \text{ etc.}$$

(Voyez l'*Arithmétique d'Émile*, note xv.)

803. Cela posé, faisons une distinction : les séries que nous voulons sommer sont nécessairement ou finies ou infinies.

Dans le premier cas, sommer une série c'est véritablement chercher la somme proprement dite de tous ses termes. C'est ainsi que nous avons appris à sommer les progressions excédentes et quotitives.

Dans le second cas, sommer une série c'est chercher la quantité finie qui, par son développement, a donné la suite dont il s'agit (n° 778).

804. PREMIER CAS. *Somme proprement dite d'une série finie.* Le nombre des suites que l'on sait sommer est malheureusement assez petit, et pour l'ordinaire on est réduit à chercher des moyens de rendre la série aussi convergente que possible, pour qu'en faisant l'addition effective de ses premiers termes, on ait un résultat suffisamment approché de la valeur que l'on cherche (*Revoyez les n^{os} 326 à 333*).

Cependant on sait sommer, par l'algèbre élémentaire, les suites des nombres figurés, celles des nombres polygones, celles des puissances des nombres naturels, et quelques autres suites qui dérivent de celles-là; mais nous ne nous arrêterons point sur ce sujet : car « l'utilité de ces suites n'étant pas grande, on néglige aujourd'hui, avec raison, d'en parler beaucoup dans les cours de mathématiques. » (Lagrange, dans l'*Algèbre d'Euler*.)

On a aussi des méthodes plus ou moins élémentaires pour sommer un certain nombre de termes dans une série récurrente; mais quand on applique ces méthodes à des cas particuliers, les calculs deviennent souvent impraticables, et, par cette raison, nous ne nous arrêterons pas non plus à développer ces méthodes.

805. SECOND CAS. *Somme d'une série infinie.* Il s'agit proprement ici, comme nous l'avons déjà dit (n^o 803), de découvrir la quantité qui, par son développement, a donné la série.

Nous ne nous occuperons que des séries récurrentes, et nous n'en dirons qu'un mot : car, soit dans ce second cas, soit dans le précédent, la sommation des séries doit en général être traitée par les méthodes transcendantes.

Soit $M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.}$ une série récurrente du second ordre, qui ait pour échelle de relation $-\frac{\gamma}{\alpha}x^2, -\frac{\beta}{\alpha}x$, on aura

$$Px^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}x^2 \cdot M - \frac{\beta}{\alpha}x \cdot Nx,$$

$$Qx^3 = -\frac{\gamma}{\alpha}x^2 \cdot Nx - \frac{\beta}{\alpha}x \cdot Px^2,$$

$$Rx^4 = -\frac{\gamma}{\alpha}x^2 \cdot Px^2 - \frac{\beta}{\alpha}x \cdot Qx^3,$$

etc.

Ajoutant par colonnes verticales, et représentant par Σ la fraction génératrice ou la somme cherchée, on obtiendra

$$\Sigma - M - Nx = -\frac{\gamma}{\alpha} x^2 \cdot \Sigma - \frac{\beta}{\alpha} x (\Sigma - M);$$

d'où l'on tirera facilement

$$\Sigma = \frac{(M + Nx) + \frac{\beta}{\alpha} x \cdot M}{1 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} x^2}.$$

On trouverait de même pour le troisième ordre, l'échelle de relation étant $-\frac{\delta}{\alpha} x^3$, $-\frac{\gamma}{\alpha} x^2$, $-\frac{\beta}{\alpha} x$,

$$\Sigma = \frac{(M + Nx + Px^2) + \frac{\beta}{\alpha} x(M + Nx) + \frac{\gamma}{\alpha} x^2 \cdot M}{1 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} x^2 + \frac{\delta}{\alpha} x^3};$$

pour le quatrième ordre,

$$\Sigma = \frac{(M + Nx + Px^2 + Qx^3) + \frac{\beta}{\alpha} x(M + Nx + Px^2) + \frac{\gamma}{\alpha} x^2(M + Nx) + \frac{\delta}{\alpha} x^3 \cdot M}{1 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} x^2 + \frac{\delta}{\alpha} x^3 + \frac{\epsilon}{\alpha} x^4};$$

et ainsi de suite.

Appliquons la première de ces formules à la série (B) du n° 775; $1 + 4 + 27 + 127 + \text{etc.}$ dont l'échelle de relation est $+3$, $+5$. Pour la rendre plus générale, et pour éviter les réductions des quantités purement numériques, nous l'écrirons ainsi,

$$1 + 4x + 27x^2 + 127x^3 + 704x^4 + \text{etc.}$$

et l'échelle de relation deviendra $+3x^2$, $+5x$, c'est-à-dire qu'on aura $-\frac{\beta}{\alpha} x = +5x$, et $-\frac{\gamma}{\alpha} x^2 = +3x^2$, et par conséquent

$$\Sigma = \frac{1 + 4x - 5x}{1 - 5x - 3x^2} = \frac{1 - x}{1 - 5x - 3x^2}.$$

806. Si, après avoir fait $x = 1$, on voulait réduire la fraction génératrice, on obtiendrait $0 = 1 + 4 + 27 + 127 + 704 + \text{etc.}$ ce qui prouve bien que chercher la fraction génératrice d'une série n'est pas à la rigueur la sommer (Voyez les n°s 152 à 156).

Cependant, dans la série en x , en faisant cette variable égale à une fraction suffisamment petite, comme $\frac{1}{10}$, par exemple, la fraction génératrice peut être considérée comme la somme, ou du moins comme la limite de la série convergente.

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{25}{100} + \frac{137}{1000} + \frac{704}{10000} + \text{etc.}$$

car plus on prend de termes dans cette série, plus on approche de la valeur de la fraction génératrice, ce qui peut facilement se généraliser.

807. Nous venons de dire que si on a la fraction génératrice d'une série convergente, cette fraction finie en est la somme ou la limite : mais il ne faudrait pas en conclure que si une série non récurrente marche vers le zéro, elle a pour limite une quantité finie. On démontre, par exemple, que la série harmonique dont nous avons déjà parlé plusieurs fois

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$$

a une somme ou une limite infiniment grande.

Nous ne nous arrêtons pas à cette démonstration ; mais nous ferons observer que les séries partielles renfermées dans celles-là ont des limites assez remarquables. Par exemple, la progression quotitive $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ a pour limite 2 (n° 783), tandis que la progression $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \text{etc.}$ n'a pour limite que $\frac{2}{3}$, que la progression $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \text{etc.}$ n'a pour limite que $\frac{2}{5}$, et ainsi de suite. La première progression, quoique infinie, s'approche sans cesse du nombre 2 sans jamais l'atteindre, pendant que les quatre premiers termes seuls de la série harmonique valent déjà $2\frac{1}{12}$ (Voyez les réflexions contenues dans l'Encyclopédie à l'article *Série*).

808. Pour terminer ce qui a rapport à notre sujet actuel, on pourra rechercher encore la fraction génératrice de la suite (C) (n° 775), et celle de la série du n° 789.

809. Du reste, on trouvera dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, année 1772, une méthode donnée par Lagrange pour reconnaître si une série proposée est récurrente. Cette méthode fait trouver l'échelle de relation, et conduit à la fraction génératrice.

810. Nous ne nous arrêtons point ici, ni sur le retour des suites, qu'on appelle aussi *méthode inverse des séries*, ni sur le développe-

ment des exponentielles et des logarithmes, ni sur les séries circulaires. La matière des séries, traitée d'une manière générale et plus ou moins approfondie, ne nous semble pas appartenir aux éléments proprement dits. Nous avons seulement eu pour but d'en développer avec quelque soin les premiers principes, pour qu'on eût ensuite plus de facilité à lire les ouvrages où la matière est traitée dans son ensemble (*Voyez le Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, in-4°, par M. Lacroix, avec *le Traité des différences et des séries* du même auteur. La table de ce dernier ouvrage indique d'ailleurs tous les mathématiciens qui ont travaillé sur cette matière).

CHAPITRE II.

De l'intérêt composé.

811. Nous avons traité de l'intérêt simple dans l'Arithmétique (n° 619); nous allons parler de l'intérêt composé ou de l'intérêt sur intérêt. Je me bornerai à transcrire ici un Chapitre de l'Algèbre d'Euler, dans lequel cette matière est traitée d'une manière fort claire. Il faudra du reste revoir le Chapitre des logarithmes dans l'Arithmétique.

On demande principalement dans le calcul de l'intérêt composé, à quelle somme monte un capital donné après un certain nombre d'années, si on joint annuellement l'intérêt au capital, et que de cette manière on augmente continuellement ce capital. On part, pour résoudre cette question, de ce que 100 écus placés à 5 pour cent se changent au bout d'une année en un capital de 105 écus. Soit le capital $= a$, on trouvera ce qu'il vaut au bout de l'année, en disant :

si 100 donne 105, que donne a ? la réponse est $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, ce que

l'on peut aussi écrire de cette manière $\frac{21}{20} \cdot a$, ou de celle-ci $a +$

$$\frac{1}{20} \cdot a.$$

812. Ainsi, quand on ajoute au capital actuel sa vingtième partie, on obtient la valeur du capital pour l'année prochaine. Ajoutant à celui-ci son vingtième, on sait ce que vaut le capital donné après deux ans, et ainsi de suite. Il est donc facile d'apprécier les accroissements successifs et annuels du capital, et de continuer ce calcul aussi loin qu'on voudra.

813. Supposons un capital qui soit présentement de 1000 écus, qu'il soit placé à cinq pour cent, et qu'on joigne chaque année l'intérêt au capital. Comme ce calcul ne tarde pas à conduire à des fractions, nous nous servirons des fractions décimales, mais sans les pousser plus loin que jusqu'aux millièmes parties d'un écu, vu que des parties plus petites n'entrent pas ici en considération.

Le capital donné de 1000 écus vaudra

	écus.
après 1 an.....	1050
	52 , 5
après 2 ans.....	1102 , 5
	55 , 125
après 3 ans.....	1157 , 625
	57 , 881
après 4 ans.....	1215 , 506
	60 , 775
après 5 ans.....	1276 , 281
	etc.

814. On peut continuer de la même manière pour autant d'années qu'on voudra; mais lorsque le nombre des années est fort grand, le calcul devient long et ennuyeux; voici comment on peut l'abréger :

Soit le capital présent $= a$, et puisqu'un capital de 20 écus vaut 21 écus au bout de l'année, le capital a vaudra $\frac{21}{20} a$ après un an. Le même capital montera l'année suivante à $\frac{21^2}{20^2} \cdot a = \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot a$. Ce capital de deux ans vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot a$ l'année d'après; ce qui sera donc le capital de trois ans. Celui-ci augmentant de même, le capital donné

vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^4 \cdot a$ au bout de quatre ans. Il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^5 \cdot a$ au bout de cinq ans. Après un siècle il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \cdot a$; et en général $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$ sera la valeur de ce capital après n années; et cette formule servira à déterminer la quantité du capital après un nombre quelconque d'années.

815. La fraction $\frac{21}{20}$, qui est entrée dans ce calcul, se fonde sur ce que les intérêts ont été comptés à 5 pour cent, et que $\frac{21}{20}$ est autant que $\frac{105}{100}$. Que si les intérêts se comptaient à 6 pour cent, le capital a monterait à $\left(\frac{106}{100}\right) \cdot a$ au bout d'un an, à $\left(\frac{106}{100}\right)^2 \cdot a$ au bout de deux ans, et à $\left(\frac{106}{100}\right)^n \cdot a$ au bout de n années.

Mais si les intérêts ne sont que de 4 pour cent, le capital a ne vaudra que $\left(\frac{104}{100}\right)^n \cdot a$ après n ans.

816. Or, il est aisé, lorsque le capital a , ainsi que le nombre des années, est donné, de résoudre ces formules par les logarithmes : car s'il est question de celle que nous avons trouvée dans la première supposition, on prendra le logarithme de $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$, qui est $= \log.$

$\left(\frac{21}{20}\right)^n + \log. a$, parce que la formule en question est le produit de

$\left(\frac{21}{20}\right)^n$ et de a ; et comme $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ est une puissance, on aura $L. \left(\frac{21}{20}\right)^n$

$= n L. \frac{21}{20}$. Ainsi le logarithme du capital cherché est $= n L. \frac{21}{20} +$

$L. a$. De plus, le logarithme de la fraction $\frac{21}{20} = L. 21 - L. 20$.

817. Soit à présent le capital $= 1000$ écus, et qu'on demande de combien il sera au bout de 100 ans, en comptant les intérêts à 5 pour cent.

Nous avons ici $n = 100$. Le logarithme du capital cherché sera par conséquent $= 100 L. \frac{21}{20} + L. 1000$, et voici comment on évalue cette quantité :

$$\begin{array}{r}
 \text{L. } 21 = 1,3222193 \\
 \text{soustrayant L. } 20 = 1,3010300 \\
 \hline
 \text{L. } \frac{21}{20} = 0,0211893 \\
 \text{multipliant par } 100 \\
 \hline
 100 \text{ L. } \frac{21}{20} = 2,1189300 \\
 \text{ajoutant L. } 1000 = 3,0000000 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\text{logarithme du capital cherché} = 5,1189300$$

On voit par la caractéristique de ce logarithme, que le capital cherché sera un nombre de six chiffres, et en effet ce capital se trouve = 131501 écus.

818. Un capital de 3452 livres à 6 pour cent, de combien sera-t-il après 64 ans ?

Nous avons ici $a = 3452$, et $n = 64$. Donc le logarithme du capital cherché = $64 \text{ L. } \frac{53}{50} + \text{L. } 3452$, ce qu'on calcule de cette manière :

$$\begin{array}{r}
 \text{L. } 53 = 1,7242759 \\
 \text{soustrayant L. } 50 = 1,6989700 \\
 \hline
 \text{L. } \frac{53}{50} = 0,0253059 \\
 \text{multipl. par } 64 \dots 64 \text{ L. } \frac{53}{50} = 1,6195776 \\
 \text{L. } 3452 = 3,5380708 \\
 \hline
 5,1576484.
 \end{array}$$

Et en prenant le nombre de ce logarithme, on trouve le capital cherché égal à 143763 livres.

819. Quand le nombre des années est fort grand, comme il s'agit de multiplier ce nombre par le logarithme d'une fraction, il pourrait provenir une assez grande erreur de ce que les logarithmes ne se trouvent calculés dans les tables que jusqu'à 7 chiffres de décimales. C'est pourquoi il faudra employer des logarithmes poussés à un plus grand nombre de figures, comme on l'a fait dans l'exemple suivant.

Un capital d'un écu restant placé à 5 pour cent pendant 500 ans, et les intérêts s'y joignant annuellement, on demande à quelle

somme se montera ce capital après les 500 années. On a ici $a = 1$ et $n = 500$; par conséquent, le logarithme du capital cherché est égal à $500 L \frac{21}{20} + L. 1$, ce qui produit ce calcul

$$\begin{array}{r} L. 21 = 1, 322219294733919 \\ \text{soustrayant } L. 20 = 1, 301029995663981 \\ \hline L. \frac{21}{20} = 0, 021189299069938, \end{array}$$

multipliant par 500, on a 10,594649534969000.

Voilà donc le logarithme du capital cherché, lequel sera par conséquent égal à 39323200000 écus.

820. Si on ne se contentait pas de joindre annuellement l'intérêt au capital, et qu'on voulût encore l'augmenter tous les ans d'une nouvelle somme $= b$, le capital actuel, que nous nommerons a , s'accroîtrait chaque année de la manière qu'on verra

$$\begin{array}{ll} \text{après 1 an} & \frac{21}{20} \cdot a + b, \\ \text{après 2 ans} & \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot a + \frac{21}{20} \cdot b + b, \\ \text{après 3 ans} & \left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot a + \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot b + \frac{21}{20} \cdot b + b, \\ \text{après 4 ans} & \left(\frac{21}{20}\right)^4 \cdot a + \left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot b + \left(\frac{21}{20}\right) \cdot b + b, \\ \text{après } n \text{ ans} & \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} \cdot b + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} \cdot b \dots + \frac{21}{20} \cdot b + b. \end{array}$$

Ce capital consiste, comme on voit, en deux parties, dont la première $= \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$, et dont l'autre prise à rebours forme la série $b + \frac{21}{20} \cdot b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot b \dots + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} \cdot b$.

Cette suite est évidemment une progression géométrique, dont l'exposant est égal à $\frac{21}{20}$. Nous en chercherons donc la somme en multipliant d'abord le dernier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} \cdot b$ par l'exposant $\frac{21}{20}$; nous aurons $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot b$. Soustrayant ensuite le premier terme b , il reste $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot b - b$; et divisant enfin par l'exposant moins 1, c'est-à-dire par $\frac{1}{20}$, nous trouverons la somme cherchée $= 20 \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot b - 20b$, dont le capital cherché est $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a + 20 \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot b - 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot (a + 20b) - 20b$.

821. Le développement de cette formule exige qu'on calcule séparément son premier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot (a + 20b)$, ce qui se fait en prenant son logarithme, qui est $n L. \frac{21}{20} + L. (a + 20b)$, car le nombre qui répond à ce logarithme dans les tables sera la valeur de ce premier

terme. Si l'on soustrait ensuite $20b$ de cette quantité, on connaît le capital cherché.

822. *Question.* Quelqu'un a un capital de 1000 écus placé à cinq pour cent; il y ajoute annuellement 100 écus outre les intérêts : on demande la valeur de ce capital au bout de vingt-cinq ans.

Nous avons ici $a = 1000$, $b = 100$, $n = 25$: voici donc le plan de l'opération,

$$L. \frac{21}{20} = 0,021189299.$$

Multipliant par 25, on a $25 L. \frac{21}{20} = 0,5297324750$.

$$L. (a + 20b) = 3,4771213135$$

$$= 4,0068537885.$$

Ainsi la première partie, ou le nombre qui répond à ce logarithme, est 10159,1 écus, et si l'on en soustrait $20b = 2000$, on trouve que le capital en question vaudra, après 25 ans, 8159,1 écus.

823. Puis donc que ce capital de 1000 écus va toujours en augmentant, et qu'après vingt-cinq ans il se monte à 8159 $\frac{1}{10}$ écus, on peut faire la question, en combien d'années il montera jusqu'à 1000000 écus.

Soit n ce nombre d'années, et puisque $a = 1000$, $b = 100$, le capital sera au bout de n ans : $(\frac{21}{20})^n (3000) - 2000$, somme qui doit faire 1000000 d'écus : de là résulte donc cette égalité ou équation,

$$3000 (\frac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Ajoutant des deux côtés 2000, on a

$$3000 (\frac{21}{20})^n = 1002000.$$

Divisant de part et d'autre par 3000, il vient $(\frac{21}{20})^n = 334$.

Prenant les logarithmes, on a $n L. \frac{21}{20} = L. 334$; et divisant par $L. \frac{21}{20}$, on obtient $n = \frac{L. 334}{L. \frac{21}{20}}$. Or, $L. 334 = 2,5237465$, et $L. \frac{21}{20} = 0,0211893$; donc $n = \frac{2,5237465}{0,0211893}$. Et si l'on multiplie enfin les

deux termes de cette fraction par 10000000, on aura $n = \frac{25237465}{211893}$, ce qui fait cent dix-neuf ans un mois sept jours, et c'est là le temps après lequel le capital de 1000 écus se sera accru jusqu'à 1000000 d'écus.

824. Mais si on supposait que quelqu'un, au lieu d'augmenter annuellement son capital d'une certaine somme fixe, le diminuât en employant, chaque année, une certaine somme pour son entretien, on aurait les gradations suivantes pour les valeurs de ce capital a , année par année, en le supposant placé à 5 pour cent, et en entendant par b la somme qu'on en ôte annuellement:

$$\begin{aligned} \text{après 1 an,} & \quad \frac{21}{20} \cdot a - b, \\ \text{après 2 ans,} & \quad \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot a - \frac{21}{20} \cdot b - b, \\ \text{après 3 ans,} & \quad \left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot a - \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot b - \frac{21}{20} \cdot b - b, \\ \text{après } n \text{ ans,} & \quad \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} \cdot b - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} \cdot b \dots - \left(\frac{21}{20}\right) \cdot b - b. \end{aligned}$$

825. Ce capital consiste donc en deux parties, l'une est $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$, et l'autre, qui doit en être soustraite, forme, en prenant les termes en rétrogradant, la progression géométrique suivante,

$$b + \left(\frac{21}{20}\right) \cdot b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot b \dots + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} \cdot b.$$

Nous avons déjà trouvé ci-dessus la somme de cette progression $= 20 \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot b - 20b$; si donc on soustrait cette quantité de $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$, on aura le capital cherché, après n ans, $= \left(\frac{21}{20}\right)^n (a - 20b) + 20b$.

826. On aurait pu tirer aussi cette formule immédiatement de la précédente: car de même qu'on ajoutait, dans la supposition précédente, annuellement la somme b , on ôte à présent chaque année la même somme b . On n'a donc qu'à mettre dans la formule précédente partout $-b$ à la place de $+b$. Il faut remarquer principalement ici que, si $20b$ est plus grand que a , la première partie devient négative, et par conséquent que le capital va toujours en diminuant. Cela se comprend aisément: car si on ôte plus du capital annuellement qu'il ne s'y joint d'argent en intérêts, il est clair que ce capital doit devenir continuellement plus petit, et qu'à la fin il doit même se réduire absolument à rien. C'est ce que nous allons éclaircir par un exemple.

827. *Question.* Quelqu'un a un capital de 100000 écus placé à 5 pour cent; il lui faut chaque année 6000 écus pour son entretien: cela fait plus que les intérêts de son argent, lesquels ne se montent qu'à 5000 écus: par conséquent le capital ira toujours en diminuant. On demande en combien de temps il s'évanouira tout-à-fait. Supposons ce nombre d'années $= n$, et puisque $a = 100000$, et $b = 6000$, nous

savons qu'après n ans la valeur du capital sera $= - 20000 \left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$, ou $120000 - 20000 \left(\frac{21}{20}\right)^n$. Ainsi le capital se réduira à zéro lorsque $20000 \left(\frac{21}{20}\right)^n$ se montera à 120000 écus, ou lorsque $20000 \left(\frac{21}{20}\right)^n$ égalera 120000. Divisant des deux côtés par 20000, on a $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$. Prenant les logarithmes, on a $L. \frac{21}{20} = L. 6$. Divisant par $L. \frac{21}{20}$, il vient $n = \frac{L. 6}{L. \frac{21}{20}} = \frac{0,7781513}{0,0211893}$, ou $n = \frac{7781513}{211893}$, donc $n = 36$ ans 8 mois 22 jours, au bout duquel temps il ne restera plus rien du capital.

828. Il sera bon de faire voir aussi comment, en partant des mêmes principes, on peut calculer les intérêts pour des temps plus courts que des années entières. On se sert pour cela de la formule $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$ trouvée plus haut, qui exprime la valeur d'un capital placé à 5 pour cent après n années : car si le temps est de moins d'un an, l'exposant n devient une fraction, et le calcul se fait par les logarithmes comme auparavant. Si on demandait, par exemple, la valeur du capital après un jour, on ferait $n = \frac{1}{365}$; si c'est après deux jours, $n = \frac{2}{365}$, et ainsi de suite.

829. Soit le capital $a = 100000$ écus placé à 5 pour cent : à combien montera-t-il en huit jours de temps?

Nous avons $a = 100000$, et $n = \frac{8}{365}$; par conséquent le capital cherché $= \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} \cdot 100000$. Le logarithme de cette quantité est $= L. \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + L. 100000 = \frac{8}{365} L. \frac{21}{20} + L. 100000$. Or, $L. \frac{21}{20} = 0,0211893$; multipliant par $\frac{8}{365}$, on a

$$0,0004644,$$
 ajoutant $L. 100000 = 5,0000000,$
 la somme est $\dots = 5,0004644$.

Le nombre de ce logarithme se trouve $= 100107$. Ainsi, dans les premiers huit jours, les intérêts du capital font déjà 107 écus.

830. Dans cette matière se présentent aussi les questions d'estimer la valeur présente d'une somme d'argent qui ne serait payable que dans quelques années. On considérera que puisque 20 écus en argent comptant montent à 21 écus en douze mois, il faut que réciproquement 21 écus, qu'on ne pourrait toucher qu'au bout d'un an, ne valent actuellement que 20 écus. Si donc on exprime par a une somme dont

le paiement écherrait au bout d'un an, la valeur présente de cette somme est $\frac{20}{21} a$. Ainsi, pour trouver combien un capital a , payable seulement au bout d'un certain temps, vaudrait une année plus tôt, il faudra le multiplier par $\frac{20}{21}$; pour trouver sa valeur deux ans avant l'échéance, on le multipliera par $(\frac{20}{21})^2$, et en général sa valeur n ans avant l'échéance s'exprimera $(\frac{20}{21})^n \cdot a$.

831. Supposons qu'un homme ait à tirer pendant cinq années consécutives une rente annuelle de cent écus, et qu'il veuille la céder pour de l'argent comptant, en comptant les intérêts à 5 pour cent; si on demande combien il doit recevoir, voici comment il faudra raisonner :

Pour 100 écus échus,

après 1 an il reçoit 95,238.

après 2 ans..... 90,705.

après 3 ans..... 86,385.

après 4 ans..... 82,272.

après 5 ans..... 78,355.

somme des 5 termes 432,955.

Ainsi le possesseur de la rente ne peut prétendre en argent comptant que 432,955 écus, ou 1298 livres 17 sous 3 $\frac{5}{6}$ deniers.

832. On remarquera que si une telle rente devait durer un nombre d'années beaucoup plus grand, le calcul, de la manière que nous l'avons fait, deviendrait très-pénible : voici les moyens de le faciliter;

Soit la rente annuelle = a , commençant dès à présent, et durant n années, elle vaudra actuellement,

$$a + \left(\frac{20}{21}\right)a + \left(\frac{20}{21}\right)^2 \cdot a + \left(\frac{20}{21}\right)^3 \cdot a + \left(\frac{20}{21}\right)^4 \cdot a \dots + \left(\frac{20}{21}\right)^n \cdot a.$$

Voilà une progression géométrique, et tout se réduit à en trouver la somme. On multipliera donc le dernier terme par l'exposant : le

produit est $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} \cdot a$; soustrayant le premier terme, il reste

$\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} \cdot a - a$; divisant enfin par l'exposant moins 1, c'est-à-dire par $-\frac{1}{21}$, ou, ce qui revient au même, multipliant par -21 , on aura

la somme cherchée $= -21 \left(\frac{20}{21} \right)^{n+1} .a + 21a$, ou bien $21a - 21 \left(\frac{20}{21} \right)^{n+1} .a$; et ce second terme qu'il s'agit de soustraire se calcule facilement par les logarithmes. (*Voyez* l'article de l'Intérêt composé, dans les *Tables de Logarithmes* de Gardiner.)

SOLUTIONS DES PROBLÈMES.

N° 712.

- I. Newton 85 ans, Descartes 54.
- II. La frégate française 259, l'anglaise 170.
- III. Le mulet 7 sacs, l'âne 5.
- IV. Vingt-huit disciples.
- V. Quatre-vingt-quatre ans.
- VI. René 4, Félix 2, Victor 1.
- VII. L'équation est identique, tous les nombres sont bons (n° 466).
- VIII. Cinq cent quatre-vingt-trois aunes $\frac{1}{3}$.
- IX. Une pièce de drap blanc 8 écus $\frac{1}{4}$, une de drap noir 10 $\frac{3}{4}$, et une de bleu 13 $\frac{1}{4}$.
- X. Le second gobelet 16 onces, le couvercle 20.
- XI. L'héritage 8100 écus, neuf enfants, pour chacun d'eux 900 écus.
- XII. Celle des Suisses de 265, celle des Soudanais de 583, celle des Saxons de 689.
- XIII. 1^{re} espèce $\frac{a(c-b)}{a-b}$ pièces,
2^e espèce $\frac{b(a-c)}{a-b}$ pièces.
- XIV. $x = \frac{15}{8}a$, $y = \frac{7}{8}a$, $z = \frac{1}{2}a$.

N° 740.

I. Les soluteurs sont $+5$ et -2 . Le premier résout la question même, le second la question rectifiée. (Voyez les n°s 729 et 542.)

II. Les deux soluteurs sont 6 et 4, tous deux directs (Voyez le n° 543, 1°). Ces deux nombres satisfont donc tous deux à l'équation, qui ne doit pas être modifiée. Si on voulait y changer le signe de x , les deux soluteurs seraient les mêmes, mais tous deux inverses (n° 543, 1°), ce qui indiquerait une fausse supposition.

III. On trouve $x = \pm \sqrt{-4}$, symbole imaginaire, ou symbole d'impossibilité (n°s 216, 259, 262, 541).

IV. On doit trouver $x = \pm 15$. Le nombre direct est le seul de quelque usage; on ne trouve point de seconde question liée à la première (n°s 541, 728).

V. Les deux soluteurs sont 10 et -11 . Il y a donc 10 pièces.

Comme l'équation est $x^2 + x = 110$, le nombre 10 répond aussi à cette question: *Trouver un nombre tel que, ajouté à son carré, il fasse 110*; et le nombre 11 répond à celle-ci: *Trouver un nombre tel que, retranché de son carré, il fasse 110*.

VI. Les deux soluteurs sont 12 et -15 . Il y a donc 12 pièces: observation analogue à celle du problème précédent pour la valeur en moins.

VII. Les deux soluteurs sont 40 et -200 . La première paysanne avait donc 40 œufs, et la seconde 60: observation analogue à celle du problème V, pour la valeur en moins.

VIII. Les deux soluteurs sont 15 et 5. Le premier marchand avait donc 15 aunes, et le second 18; ou le premier 5, et le second 8.

IX. Les deux soluteurs sont

$$x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{bc^2}{a}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$x = \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}c \sqrt{1 - \frac{4b}{a}}.$$

Voyez les n°s 356, 724.

X. Les soluteurs de (A) sont

$$x = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}r^2},$$

auxquels on peut donner ces deux formes,

$$-\frac{1}{2}r \pm \frac{1}{2}r\sqrt{5}, \quad \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1).$$

Les soluteurs de (B) sont

$$x = \pm \sqrt{2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - r^2b^2}} \quad (\text{n}^\circ 517),$$

dont on peut changer la forme par le n^o 519. Ils deviendront ainsi,

$$x = \pm \sqrt{r^2 + \frac{1}{2}rb} \pm \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}rb}.$$

Les soluteurs de (C) sont

$$= \frac{b}{2r} \sqrt{4r^2 - d^2} \pm \frac{d}{2r} \sqrt{4r^2 - d^2}.$$

En partant de l'équation on a suivi cette marche. On a transposé le premier radical, élevé les deux membres au carré (n^o 370, A), effectué la multiplication indiquée dans le second membre, effacé les termes égaux dans les deux, ordonné la nouvelle équation, pour la résoudre par le procédé ordinaire.

Les soluteurs de (D) sont

$$x = \frac{abd}{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - d^2)^2}}.$$

Pour les trouver, on a transposé le premier radical, élevé au carré, réduit et divisé par le facteur commun. Cela fait, on a de nouveau transposé pour isoler le radical, puis élevé au carré en l'indiquant dans le membre sans radical, encore transposé et réduit; enfin, on a extrait de part et d'autre la racine.

N^o 772.

I. Ces deux nombres sont 14 et 26.

II. Ces deux nombres sont 4 et 22.

III. Ces deux nombres sont 576 et 1296.

IV. Il y avait 14 associés.

V. Les soluteurs sont $3 + \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$, qu'on pourra développer par approximation.

FIN.

TABLE DES CHAPITRES.

INTRODUCTION.

	Pages.
CHAP. I ^{er} . Naissance des caractères généraux et de l'Algèbre.	1
CHAP. II. Naissance des quantités directes et des quantités inverses.	16
CHAP. III. Notions préliminaires sur le but de toute opération de calcul et sur les équations.	30

PREMIÈRE PARTIE.

DES ÉQUATIONS QUI SONT RÉSOLUES DÈS QU'ELLES SONT POSÉES,
OU DES OPÉRATIONS FONDAMENTALES.

SECTION I.

<i>Des opérations sur les quantités simples.</i>	32
--	----

SECTION II.

Des opérations sur les quantités composées, monomes et polynomes.

CHAP. I ^{er} . Observations préliminaires.	39
CHAP. II. De l'addition, de la soustraction, et de la réduction des quantités composées.	41
CHAP. III. De la multiplication et de la division des quantités composées.	45
CHAP. IV. Notions sur les séries qui naissent de la division.	79
CHAP. V. Des fractions continues.	96
CHAP. VI. Du plus grand commun diviseur et de la plus grande commune mesure. — Premières notions sur les incommensurables.	116
CHAP. VII. De l'élevation aux puissances, et de l'extraction des racines dans les monomes. — Nouveaux détails sur les incommensurables.	134

CHAP. VIII. Des opérations sur les quantités radicales et sur celles qui ont des exposants fractionnaires	147
CHAP. IX. De l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines dans les quantités de deux ou plusieurs termes. — De la formule du binôme.	157

APPENDICE A LA PREMIÈRE PARTIE.

Des permutations et des combinaisons.	189
---------------------------------------	-----

SECONDE PARTIE.

DES ÉQUATIONS QUI NE SONT PAS RÉSOLUES DÈS QU'ELLES SONT POSÉES ,
ET DE LEUR RÉOLUTION.

SECTION I.

Généralités relatives aux équations, et changements préparatoires qu'on peut leur faire subir.

CHAP. I. Nouveaux exemples de questions qui fournissent des équations à résoudre, et division de ces équations en plusieurs classes et degrés.	197
CHAP. II. Des premières opérations sur les équations, et de quelques changements qu'on peut leur faire subir par l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et les extractions de racines. — Notions sur la décomposition des équations, sur leur abaissement, et sur l'évanouissement des radicaux.	206
CHAP. III. Propriétés générales des équations. — Fonctions symétriques de leurs solveurs.	212

SECTION II.

De la résolution des équations.

PREMIÈRE SOUS-DIVISION.

DES PROBLÈMES QUI FOURNISSENT AUTANT D'ÉQUATIONS QUE D'INCONNUES.	241
§ I.	
Des problèmes à plusieurs inconnues et autant d'équations, et de l'élimination.	245

§ II.

Des problèmes à une inconnue et une équation.

CHAP. I ^{er} . Des équations à deux termes.	261
CHAP. II. De l'évanouissement des termes au moyen d'une seule indéterminée. — De la résolution des équations du second degré, et en général de l'équation $x^{2m} + Bx^m + A = 0$. — De l'extraction des racines dans les quantités composées d'une partie commensurable et d'un radical du second degré.	277
CHAP. III. De l'évanouissement des termes au moyen de deux ou plusieurs indéterminées. — Comment cela peut conduire à résoudre les équations du troisième et du quatrième degré, et en général les équations $x^{3m} + Cx^{2m} + Bx^m + A = 0$, et $x^{4m} + Dx^{3m} + Cx^{2m} + Bx^m + A = 0$.	291
CHAP. IV. De la résolution des équations du second degré par la recherche de certaines fonctions des soluteurs. — Nature de ces soluteurs.	294
CHAP. V. De la résolution des équations du troisième degré par la recherche de certaines fonctions des soluteurs. — Nature de ces soluteurs.	303
CHAP. VI. De la résolution des équations du quatrième degré par la recherche de certaines fonctions des soluteurs. — Nature de ces soluteurs.	322
CHAP. VII. Des soluteurs égaux.	325
CHAP. VIII. Des soluteurs rationnels.	339
CHAP. IX. Des soluteurs irrationnels et imaginaires.	348

SECONDE SOUS-DIVISION.

DES PROBLÈMES QUI FOURNISSENT PLUS OU MOINS D'ÉQUATIONS QUE D'INCONNUES.

CHAP. I ^{er} . Des problèmes qui fournissent plus d'équations que d'inconnues.	351
CHAP. II. Des problèmes qui fournissent moins d'équations que d'inconnues.	358

APPENDICE A LA SECONDE PARTIE.

CHAP. I ^{er} . De diverses méthodes d'élimination dans les équations du premier degré.	379
CHAP. II. Exercice sur la résolution des problèmes du premier degré à autant d'équations que d'inconnues.	390
CHAP. III. Méthode pour résoudre les problèmes du premier degré à moins d'équations que d'inconnues.	403
CHAP. IV. Quelques procédés d'élimination pour tous les degrés.	411
CHAP. V. Exercice sur la résolution des problèmes du second degré à autant d'équations que d'inconnues.	414
CHAP. VI. Méthode pour trouver par approximation les solutions irrationnels des équations numériques.	426
CHAP. VII. Exercice sur la résolution des problèmes de degrés plus élevés que le second.	444

ADDITIONS A TOUT L'OUVRAGE.

CHAP. I ^{er} . Des séries ou des suites.	
§ I. Principes et définitions.	453
§ II. Du développement en séries des quantités finies.	
1 ^o Formules pour les progressions excédentives et quotitives en général.	459
2 ^o Formules pour les progressions quotitives infinies.	460
3 ^o Développement par la division.	461
4 ^o Développement par la formule du binome.	464
5 ^o Développement par la méthode des coefficients indéterminés.	465
§ III. De la sommation des séries.	475
CHAP. II. De l'intérêt composé.	481
SOLUTIONS des problèmes proposés dans les n ^{os} 712, 740 et 772.	490

