

www.e-rara.ch

Des quantités positives et négatives en géométrie

Portalès, L. A. de

Neuchâtel, 1847

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 21574

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-58783>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

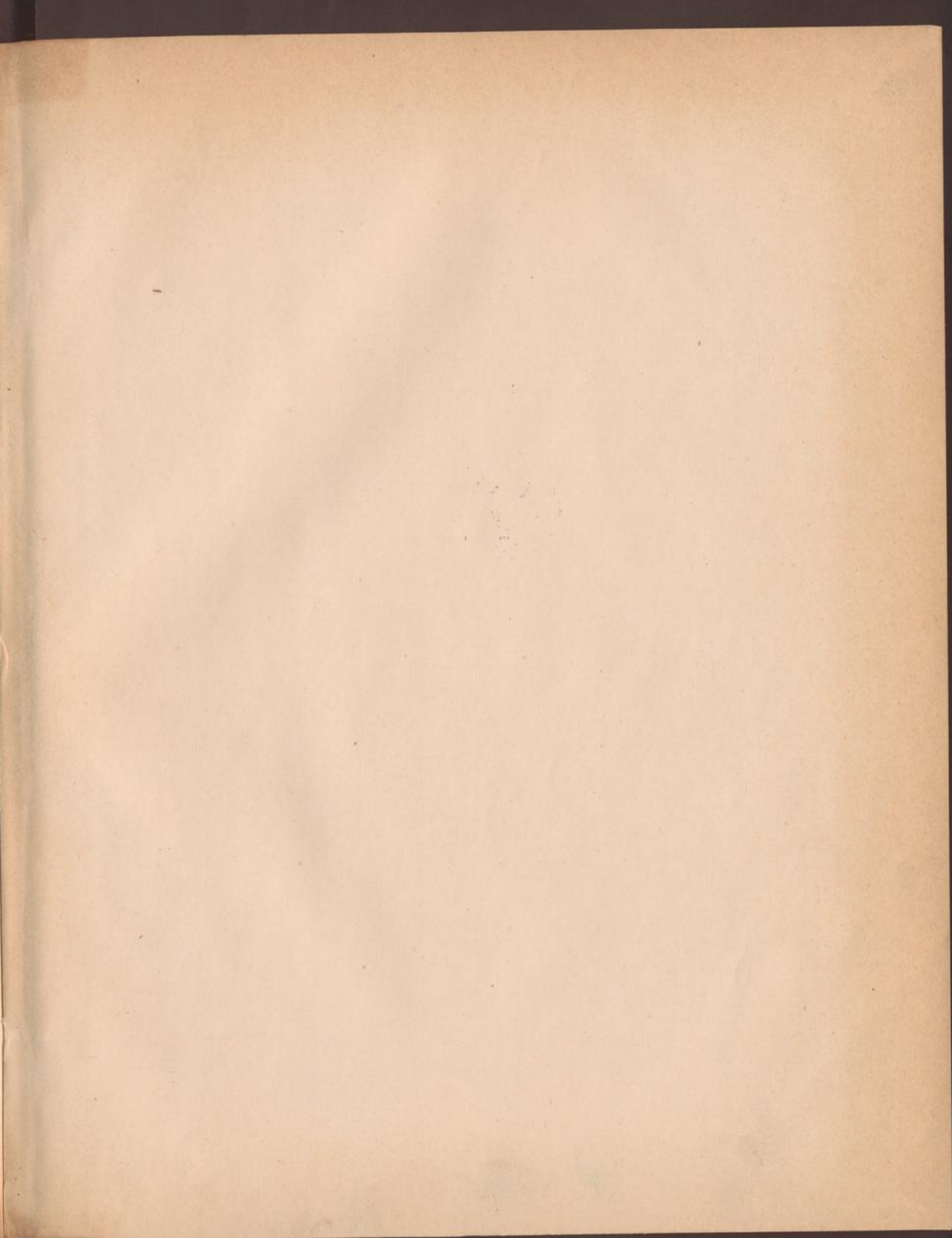
Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

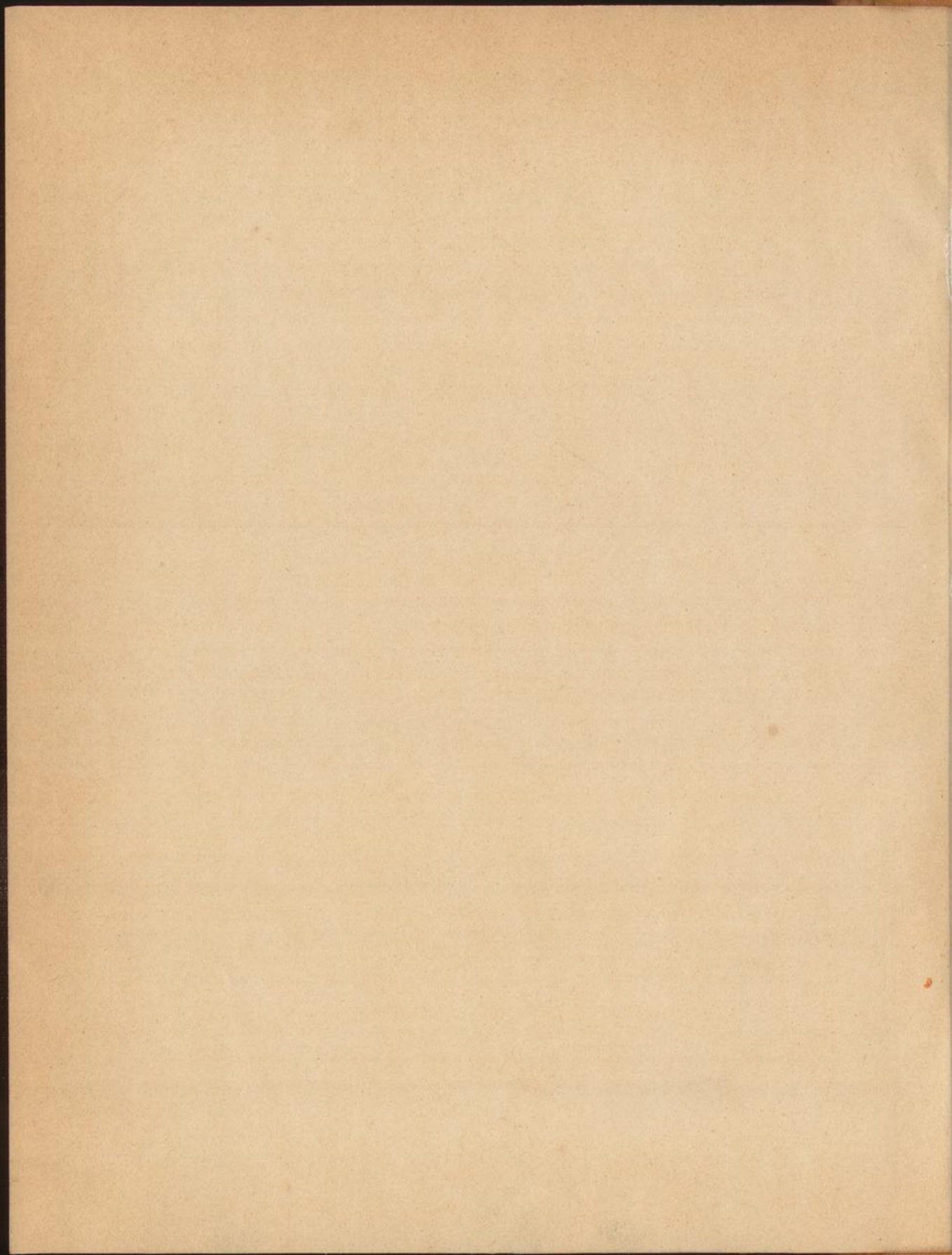


Bar 2574:7

7891:1







DES QUANTITÉS
POSITIVES ET NÉGATIVES
EN GÉOMÉTRIE.

(Avec un Atlas de 27 Planches.)

DES QUANTITÉS
POSITIVES ET NÉGATIVES
EN GÉOMÉTRIE.

PAR

LE C^{te} L.-A. DE POURTALÈS.

NEUCHÂTEL (Suisse)

J. GERSTER, LIBRAIRE.



PARIS

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

QUAI DES AUGUSTINS, N^o 55.

1847



DES QUANTITES

POSITIVES ET NEGATIVES

EN GEOMETRIE

DE G. L. A. DE W. DE W.

7891:1



INTRODUCTION.

Les formules que l'on rencontre dans la trigonométrie et dans l'application de l'algèbre à la géométrie, ne s'appliquent pas seulement aux figures d'après lesquelles elles ont été établies, mais à toutes celles qui résultent des transformations que peuvent subir ces figures d'après la loi de continuité. Pour donner à ces formules cette signification générale, il faut, comme on sait, avoir égard aux changemens de signe de certaines quantités telles que les abscisses, les ordonnées, les sinus, cosinus etc. et opérer conformément aux règles des signes. Mais il me semble que dans les ouvrages destinés à l'enseignement on se repose trop sur ce qu'on appelle la généralité de l'algèbre, d'où résulte un certain défaut d'évidence qu'on ne rencontre pas dans la méthode purement géométrique et qui a peut-être retardé l'adoption générale pour l'enseignement, ailleurs qu'en France, de la méthode algébrique, nommée ordinairement méthode analytique.

Pour donner à cette dernière le degré d'évidence dont elle est susceptible, il faut mettre au jour le mécanisme de la règle des signes relativement à ces formules fondamentales d'où découlent toutes les autres dans les différentes branches d'étude. Telles sont dans la trigonométrie rectiligne celles qui donnent le sinus et le cosinus de la somme algébrique de deux arcs, et dans la trigonométrie sphérique celle qui établit une relation entre le cosinus d'un angle et les sinus et cosinus des trois côtés d'un triangle.

C'est ce que j'ai essayé de faire à l'égard des formules les plus importantes de la trigonométrie, de l'application de l'algèbre à la géométrie, du calcul différentiel et de la mécanique.

Le but principal de cet ouvrage est de compléter, sous ce rapport, les excellens traités que nous possédons sur l'application de l'algèbre à la géométrie.

Je crois utile de le faire précéder ici de quelques considérations générales sur les quantités positives et négatives et sur les règles des signes.

En arithmétique on ne considère les nombres que sous le rapport de leur grandeur absolue. Dans l'algèbre et dans ses applications à la géométrie et à la mécanique, on distingue les quantités en *positives* et *négatives* d'après le sens dans lequel elles sont prises. Ainsi,

par exemple, s'il s'agit d'un problème dans lequel doivent figurer les sommes dues à un négociant et celles qu'il doit lui-même, on représentera les premières par des nombres positifs et les dernières par des nombres négatifs. Si un point parcourt sur une droite différentes distances, on regardera comme positives celles qui sont parcourues dans un sens et comme négatives celles qui sont parcourues dans le sens contraire.

S'il est question de forces parallèles, on regardera comme positives celles qui tirent dans un sens et comme négatives celles qui tirent dans le sens contraire.

Lorsqu'il s'agit de nombres représentés par des chiffres, on désigne les nombres positifs par le signe $+$ (plus) et les nombres négatifs par le signe $-$ (moins), ainsi $+5$ est positif et -5 est négatif.

Mais lorsqu'il s'agit de quantités représentées par des lettres, le signe $+$ signifie que la quantité est prise dans son sens propre, et le signe $-$ signifie qu'elle est prise en sens contraire de son sens propre.

Par exemple, lorsque x a pour valeur $+3$, $+x$ signifie $+3$ et $-x$ signifie -3 ; mais lorsque x a pour valeur -3 , $+x$ signifie -3 , et $-x$ signifie $+3$.

L'*addition algébrique* consiste à joindre ensemble des quantités de même espèce, en conservant à chacune d'elles leur sens, positif ou négatif. Ainsi pour indiquer que la quantité $+3$ doit être ajoutée à -5 , on écrit $-5 + 3$. Pour indiquer que -7 doit être ajoutée à $+4$, on écrit $+4 - 7$. Si l'on a $-2ab + b^2$ à ajouter à a^2 , on écrit $a^2 - 2ab + b^2$, et ainsi de suite.

Le résultat d'une addition algébrique s'appelle *somme algébrique*. On peut le simplifier de deux manières. 1° En ajoutant, comme en arithmétique, les quantités de même espèce et de même signe. Ainsi $-5 - 3$ se réduit à -8 ; $+5a^2b + 3a^2b$ se réduit à $+8a^2b$. 2° En supprimant deux quantités de même espèce, égales et de signe contraire. Par exemple, $5 - 7$ étant égal à $5 - 5 - 2$, se réduit à -2 par la suppression des quantités $+5$ et -5 qui se détruisent. De même $4bc^2 - 9bc^2 = 4bc^2 - 4bc^2 - 5bc^2 = -5bc^2$.

La *soustraction algébrique* a pour but de trouver l'une des deux parties d'une somme algébrique dont on connaît l'autre partie. D'après cela il est évident que la partie cherchée se forme en changeant les signes de tous les termes de la partie connue et en la joignant à la somme donnée.

Par exemple, si $a^2 - 2ab$ est la somme algébrique et $-c^2 + de^3$ la partie donnée, on trouve que la partie cherchée est $a^2 - 2ab + c^2 - de^3$. En effet si on ajoute les deux parties, en effaçant les termes qui se détruisent, on retrouve $a^2 - 2ab$ pour leur somme algébrique. Soit encore 12 la somme algébrique de deux nombres dont l'un est 15, on trouvera $12 - 15$ ou -3 pour l'autre nombre.

Le résultat d'une soustraction algébrique peut s'appeler *différence* par analogie avec l'arithmétique, mais il faut étendre l'acception de ce mot. Ce résultat se simplifie, s'il y a lieu, comme celui d'une addition.

Il est des cas où l'on pourrait être tenté de prendre une addition pour une soustraction. Par exemple, soient P' et P'' deux points de l'axe des x , dont les abscisses sont $OP' = x'$

et $OP'' = x''$. Si l'on veut exprimer la distance du point P'' au point P' , on aura la formule

$$P''P' = P''OP' = -x'' + x'. \quad \text{Voyez n° 2 de l'ouvrage.}$$

Or si l'on écrivait $P''P' = x' - x''$, non seulement l'opération ne pourrait plus être représentée par un tracé continu d'une manière naturelle; mais l'on s'imaginerait facilement qu'il est question d'une soustraction; tandis qu'en réalité il s'agit d'exprimer le tracé $P''OP'$, c'est-à-dire, de faire la somme algébrique de $-x''$ et de $+x'$.

La *multiplication* en arithmétique consiste à trouver un nombre appelé produit qui soit composé avec un autre nombre appelé multiplicande, comme un troisième nombre appelé multiplicateur est composé avec l'unité. Toute multiplication arithmétique suppose donc une proportion dont le premier terme est l'unité, le second le multiplicateur, le troisième le multiplicande et le quatrième le produit. Par exemple, la multiplication $3 \times 5 = 15$ suppose la proportion $1 : 3 :: 5 : 15$.

En algèbre le multiplicande et le multiplicateur étant affectés des signes $+$ ou $-$, il s'agit de déterminer le signe qui en résulte pour le produit. On prend alors pour point de départ l'unité positive, c'est-à-dire que le premier terme de la proportion est $+1$.

Prenons pour exemple de quantités positives et négatives, les distances comptées sur une même droite ou sur des droites parallèles, telles que sont les abscisses et les ordonnées.

Soit $y = 3x$ l'équation d'une droite qui passe par l'origine et qui est telle que l'ordonnée est toujours triple de l'abscisse. Cette équation suppose la proportion $+1 : +3 :: x : y$.

Or dès qu'on suppose les termes d'une proportion susceptibles des signes $+$ ou $-$, ce qui est nécessaire quand on entre dans le domaine de l'algèbre, on doit admettre sans peine ce principe : que lorsque les termes du premier rapport sont de même signe, les termes du second rapport doivent aussi être de même signe, et que lorsque les termes du premier rapport sont de signe contraire, les termes du second rapport doivent aussi être de signe contraire.

La géométrie confirme ici pleinement ce principe. En effet pour la droite MN (fig. 224, planche dernière) qui représente l'équation $y = 3x$, on a la proportion $+1 : +3 :: x : y$. L'abscisse et l'ordonnée sont toutes deux positives dans la partie OM, prolongée jusqu'à l'infini, et toutes deux négatives dans la partie ON prolongée de la même manière.

L'équation $y = -3x$ ou la proportion $+1 : -3 :: x : y$, et représentée par la droite RS (fig. 225). On voit que dans la partie OR l'abscisse est négative et l'ordonnée positive et que dans la partie OS l'abscisse est positive et l'ordonnée négative. Ainsi les termes du second rapport sont ici toujours de signe contraire comme ceux du premier. Ce principe peut s'énoncer de cette manière : Lorsque le second terme (multiplicateur) est de même signe que le premier terme ($+1$), c'est-à-dire positif, le quatrième terme (produit) est de même signe que le troisième (multiplicande). Et lorsque le multiplicateur est de signe contraire à $+1$, c'est-à-dire négatif, le produit est de signe contraire à celui du multiplicande.

Enfin on arrive par là à cette règle, que le produit est positif lorsque les deux facteurs sont de même signe, et négatif lorsque les facteurs sont de signe contraire.

Cette règle suffit pour déterminer le signe du produit d'un nombre quelconque de facteurs. Ainsi le produit des facteurs $+a$, $-b$, $-c$, $+d$ est $+abcd$. En effet le produit des deux premiers facteurs est négatif. En le multipliant par $-c$, on a un résultat positif et en multipliant ce résultat par $+d$, on a un produit final positif.

Il est facile de voir que le produit d'un nombre quelconque de facteurs est positif lorsque le nombre des facteurs négatifs est pair, et qu'il est négatif lorsque ce nombre est impair.

Dans les proportions telles que

$$+1 : +3 :: x : y, \qquad +1 : -3 :: x : y,$$

on peut considérer le quatrième terme comme un dividende, le troisième comme un diviseur et le second comme le quotient. Or le principe établi à l'égard des signes peut s'exprimer ainsi. Lorsque les termes du second rapport sont de même signe, le second terme de la proportion est de même signe que $+1$, c'est-à-dire positif, et lorsque les termes du second rapport sont de signe contraire, le second terme de la proportion est de signe contraire à $+1$, c'est-à-dire négatif.

En d'autres mots, le quotient est positif lorsque le dividende et le diviseur sont de même signe, et négatif lorsque le dividende et le diviseur sont de signe contraire.

Telles sont les règles des signes dont ce qui précède ne doit cependant pas être considéré comme une démonstration rigoureuse.

Il est des cas où ces règles se démontrent en toute rigueur. Soient a , b , c , d des nombres entiers positifs. Si l'on a à soustraire $b - c$ de a , dans le cas où $a > b$ et $b > c$, on dira que $a - b$ est un résultat trop faible de c unités, puisque ce n'est que l'excès de b sur c qu'il faut retrancher de a , et que par conséquent le véritable résultat est $a - b + c$.

De là on conclut la règle des signes pour la soustraction; mais cette démonstration ne s'applique pas au cas où les inégalités auraient lieu en sens contraire.

Si l'on avait $a - b$ à multiplier par $c - d$, dans le cas de $a > b$, et $c > d$, on multiplierait d'abord $a - b$ par c et l'on remarquerait que le produit ac est trop fort de b unités répétées c fois, puisque ce n'est que l'excès de a sur b qui doit être multiplié par c . On en conclurait ainsi que le produit de $a - b$ par c est $ac - bc$. Mais, ajouterait-on, le multiplicateur donné est $c - d$ et non pas c , donc le produit obtenu surpasse le produit cherché de $a - b$ unités répétées d fois, ou de $ad - bd$ unités. Le véritable produit est donc $ac - bc - (ad - bd)$ ou, en vertu de la règle des signes pour la soustraction, $ac - bc - ad + bd$. On conclut enfin de ce résultat les règles des signes pour la multiplication, et beaucoup d'auteurs n'en donnent pas d'autre démonstration.

Cette démonstration peut s'étendre facilement au cas où les quantités a , b , c , d sont des fractions, pourvu qu'on ait toujours $a > b$ et $c > d$; mais elle est inapplicable au cas où les inégalités n'ont pas lieu dans ce sens. Car si l'on avait $a < b$ on ne pourrait

plus parler de l'excès de a sur b sans admettre implicitement une quantité négative isolée, ce que ne comporte pas la démonstration. Par exemple, $5 - 7$ ne signifie autre chose que $5 - 5 - 2$ ou simplement -2 .

Les démonstrations de ce genre sont donc insuffisantes.

Si l'on pouvait les étendre aux cas où les quantités à soustraire, dans le sens arithmétique du mot, sont plus grandes que celles dont on doit les soustraire, ces démonstrations s'appliqueraient tout de suite aux quantités négatives isolées. Pour prouver, par exemple, que $-b$ multiplié par $-d$ donne $+bd$, on partirait du produit

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Et si l'on pouvait supposer $a < b$ et $c < d$, rien n'empêcherait de supposer $a = 0$ et $c = 0$, ce qui réduirait ce produit à

$$-b \times -d = +bd. \quad (\text{Clairaut. } \textit{Elém. d'alg. n}^\circ 70).$$

Lacroix pour prouver que le produit de $-a$ par $+b$ est $-ab$, remarque que le produit de $a - a$ par $+b$ doit être $ab - ab$, parce que le multiplicande étant égal à zéro, le produit doit aussi être zéro, et que le premier terme étant ab , le second doit nécessairement être $-ab$, pour détruire ce premier. (*El. d'alg. n}^\circ 62*).

Mais $a - a$ étant un binôme, cette démonstration ne s'étend pas aux quantités isolées. Elle est donc encore insuffisante.

Un autre auteur (Reynaud. *El. d'alg.*) a fait découler les règles des signes pour la multiplication, de la définition même de cette règle, en étendant un peu le sens de cette définition.

Quand le multiplicande a le signe $+$, dit-il, le produit a le signe du multiplicande, car le multiplicateur positif $+b$ étant formé de l'addition de b unités, le produit sera la somme de b unités égales au multiplicande, etc.

Quand le multiplicateur a le signe $-$, le produit a un signe contraire au multiplicande, car le multiplicateur négatif $-b$ étant composé de la soustraction de b unités, on obtiendra le produit en retranchant b fois le multiplicande, etc.

Mais il me semble qu'on a quelque peine à considérer un multiplicateur isolé $+b$ comme étant formé de l'addition de b unités, et un multiplicateur isolé $-b$ comme composé de la soustraction de b unités. Car une quantité isolée n'est ni ajoutée ni soustraite.

Je crois que les règles des signes devraient plutôt s'appuyer sur une induction bien faite et que toutes les démonstrations qu'on en a données et qu'on pourra essayer d'en donner ne satisferont jamais complètement. C'est ce que paraissait admettre M. Bourdon dans la préface à la 2^{me} édition de ses éléments d'algèbre; mais le passage auquel je fais allusion a été supprimé dans les éditions suivantes.

Quoi qu'il en soit, les règles des signes étant une fois admises, elles constituent un principe qui fait la base de l'algèbre.

Par exemple quand on dit que -3 est racine de l'équation

..

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0,$$

on entend par là que cette équation sera satisfaite en remplaçant x par -3 et en observant les règles des signes.

En effet $x = -3$ donne $x^3 = -27$, $-6x^2 = -54$, $-13x = +39$, et l'on a

$$-27 - 54 + 39 + 42 = -81 + 81 = 0.$$

Le présent ouvrage offrira d'un bout à l'autre la confirmation de ces règles en ce qui concerne la géométrie. On remarquera en particulier comment une somme algébrique est représentée par la résultante d'un tracé continu et comment cette manière d'ajouter et soustraire les lignes sert de base à la démonstration de plusieurs théorèmes généraux.

On verra combien il est important d'avoir égard au sens selon lequel une ligne est décrite ou supposée décrite. Dans la géométrie élémentaire, il est vrai, ce fait n'a presque aucune importance; mais il en est tout autrement dans la trigonométrie et dans la géométrie analytique. On peut regretter de n'avoir pas de termes techniques qui fassent connaître si une ligne est considérée seulement par rapport à sa position, abstraction faite de sa direction, ou, au contraire, si l'on doit avoir égard à sa direction. Dans ce dernier cas j'indique ordinairement la ligne, en écrivant, selon l'ordre voulu, les lettres qui indiquent ses points et en plaçant, au-dessous, une ligne ponctuée. Ainsi AB étant une ligne, droite ou courbe, je désigne cette ligne par AB ou par BA selon que je la considère comme dirigée de A vers B ou de B vers A.

Il est des lignes indéfinies qui n'ont pas, à proprement parler, de sens par elles-mêmes; mais sur lesquelles on trace des lignes positives ou négatives. Tel est, par exemple, l'axe des x qui est comme une voie (*via*) sur laquelle on exécute des tracés (*itineraria*) positifs ou négatifs.

Lorsque les départs ont lieu de l'origine des coordonnées, on a les *abscisses* positives ou négatives. Dans ce cas particulier les distances négatives sont directement opposées aux distances positives; mais en général ce n'est point cette *opposition* qui caractérise le sens positif ou négatif. Toute distance AB, tracée sur l'axe des x , sera positive si le sens de A en B est celui qu'on a choisi pour le sens positif. Au contraire BA serait, dans ce cas, une distance négative.

Cette notion des lignes positives ou négatives, selon qu'elles sont tracées dans un sens ou dans un autre, s'applique aussi aux aires des secteurs, engendrées autour d'un point par un rayon vecteur, comme on le verra à la fin du chapitre IX, page 77.

Dans les deux derniers chapitres je m'occupe de quelques formules de la mécanique, importantes sous le point de vue des quantités positives et négatives. De cette manière le lecteur pourra parcourir en peu de temps un champ assez étendu et voir la théorie de ces quantités dans ses principales applications à la géométrie prise dans un sens tout-à-fait général.

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction	page 1
Errata.	page IX
Chapitre I. <i>De l'addition et de la soustraction des lignes.</i>	page 1
Des distances comptées sur une même droite	n° 1
Expression de la distance de deux points situés sur un même axe.	» 2
Une somme de distances ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces distances	» 3
La projection de la résultante d'une ligne brisée est égale à la somme des projections des parties de cette ligne	» 4
Deux polygones dont les côtés sont égaux et parallèles deux à deux, ont des projections égales	» 5
S'ils ont la même origine, leurs résultantes coïncident	Ibid.
Chapitre II. <i>De la multiplication et de la division des lignes droites exprimées en nombres</i>	page 5
Remarque sur l'usage des signes $+$ et $-$ appliqués aux lignes	n° 6
De la proportion géométrique	» 7
Proportion entre les abscisses, les ordonnées et les rayons vecteurs de deux points pris sur l'axe des x	» 8
Equation de la ligne droite	» 9
Chapitre III. <i>Du double signe des radicaux du second degré.</i>	page 9
De l'ordonnée d'un cercle.	n° 10
Réponse aux objections de Carnot, relatives à la notion ordinaire des quantités positives et négatives en géométrie.	» 11
Chapitre IV. <i>Des lignes trigonométriques</i>	page 14
Définitions	n° 12
De la proportion par quotient appliquée aux lignes trigonométriques comparées entre elles	» 13
De la proportion appliquée aux abscisses, ordonnées et rayons vecteurs comparés aux lignes trigonométriques	» 14
Du sinus-verse en particulier.	» 15
Chapitre V. <i>Des projections des lignes droites.</i>	page 21
Formules générales	n° 16
Projection du périmètre d'un polygone	» 17
Cosinus de l'angle de deux droites	» 18
Transformation des coordonnées rectangles en coordonnées rectangles ou obliques	» 19
Equation du plan.	» 20
Formules $\sin(\omega + 90^\circ) = \cos \omega$, $\cos(\omega + 90^\circ) = -\sin \omega$	» 21
Projections sur les x et les y d'un rayon vecteur r et de son conjugué s	» 22

Transformation des coordonnées rectangles, dans un même plan, au moyen d'un seul angle	n° 25
Sinus et cosinus de la somme algébrique de deux arcs	» 24
Des lignes trigonométriques des angles complémentaires, supplémentaires et reverses	» 25
Chapitre VI. <i>De la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique</i> . . .	page 58
Chapitre VII. <i>Des formules d'Euler</i>	» 45
Chapitre VIII. <i>Des axes principaux. Commentaire sur le n° 380 du Traité de mécanique de Poisson</i>	» 51
Chapitre IX. <i>Des formules principales du calcul différentiel sous le point de vue des signes + et - (*)</i>	» 55*
Du signe de la différentielle première et de la différentielle seconde de l'ordonnée d'une courbe.	n° 29
Du contact des courbes	» 50
Du signe de la sous-tangente et de la sous-normale	» 51
Du signe du rayon de courbure et de la normale	» 52
Des coordonnées polaires	» 53
Transformation des coordonnées rectangles et de leurs différentielles en coordonnées polaires	» 54
De la sous-tangente exprimée en coordonnées polaires et de son signe	» 55
De la différentielle d'un secteur	» 56
Chapitre X. <i>Examen de quelques formules employées dans la statique</i> . . .	page 82
Des moments par rapport à un point	n° 57
Des couples.	» 58
Des moments et des couples représentés par des aires.	même n°, page 91
Remarque sur une inexactitude de rédaction que l'on rencontre dans plusieurs traités de statique	n° 59
Des moments par rapport à un plan.	» 40
Remarque sur le centre des forces parallèles.	» 41
Chapitre XI. <i>De quelques formules différentielles employées en mécanique</i> . . .	page 104
Différentielles des cosinus représentés par $a, a', a'', b, b', b'',$ etc.	n° 42
Du mouvement de rotation et de sa décomposition.	» 45
Des quantités p, q, r , introduites par Euler	» 44
Formule $da = (br - cq)dt$ et ses analogues	» 45
Des vitesses exprimées par $qz' - ry', rx' - pz', py' - qx'$	» 46
Remarque générale sur les formules rappelées dans ce chapitre	» 47
Addition. Sur quelques formules relatives au mouvement d'un corps autour d'un point fixe	» 48
» Expression de la somme des forces vives.	» 49
Note A, relative au n° 2.	page 121
Note B, relative au n° 6.	» 122
Note C. Addition au n° 18	» 122
Note D, relative au n° 58, sur le plan maximum des aires	» 125

(*) Les pages 53, 54, 55, 56, ont été comptées à double. Elles sont marquées la seconde fois d'un *.

ERRATA.

nécessaire à corriger

(Les fautes les plus essentielles sont marquées du signe +).

- corrige* {
- + Page 2, ligne dernière, $O'OP$, lisez : $OO'P$.
 - " 3, " 2, supprimez : et par conséquent $O'O = -a$.
 - + " " 3, $O'OP = -a + x'$, lisez : $OO'P = a + x'$.
 - " " 5, ajoutez : voyez note (A).
 - " " 10 en remontant : de distances, lisez : des distances.
 - + " 4, " 16, effacez : ou obliques.
 - " 5, " 9 en remontant : ajoutez : voyez note (B).
 - " 6, " 5 en remontant, les points, lisez : des points.
 - " 8, ligne de tête, DIRECTES, lisez : DROITES.
 - " 9, " 3, $\alpha - OG$, lisez : $\alpha = OG$.
 - " " 6 en remontant, $y -$, lisez : $y =$
 - " 14, " 13 en remontant, GBB , lisez : GB .
 - + " 15, " 5, l'axe correspondant, lisez : l'arc correspondant.
 - " 16, " 20, de l'axe des abscisses, ajoutez : et compté de C en A.
 - " " 22, de l'axe des ordonnées, ajoutez : et compté de C en D.
 - " " 25, à la fin de la ligne, ajoutez : On le compte alors de C en B, de C en B', etc.
 - + " " 26, dans un sens positif, ajoutez : comme abscisse, comme ordonnée, ou comme rayon vecteur.
 - " 19, " 12, $C'q$, lisez : $C'q'$.
 - " 20, " 12 en remontant, EC , lisez : EG .
 - " " 8 en remontant, à la fin de la ligne, ajoutez : de E en C.
 - + " 22, " 18, à la fin de la ligne, ajoutez : $= 0$.
 - " 23, " 19, dont, lisez : donc.
 - " 25, " 4, ajoutez : voyez note (C).
 - + " 27, " 13, $-\frac{\cos \beta}{p} - \frac{\cos \gamma}{p}$, lisez : $-\frac{\cos \beta}{p} y - \frac{\cos \gamma}{p} z$
 - " 34, " 12, 18° , lisez : 180° .
 - + " 41, " 13 en remontant, $\frac{OA}{OE} \cos AOE$, lisez : $\frac{OA}{OE} = \cos AOE$.
 - + " 43, " 15, DG , lisez : DF .
 - + " 46, " 8, $\psi + 90^\circ$, lisez : $\varphi + 90^\circ$.
 - + " " 9, de l'angle ψ , lisez : de l'angle φ .
 - + " " 22, $\psi = NOx'$, lisez : $\varphi = NOx'$.

- + Page 48, " 1, *effacez* = zKz .
 + " 51, " 7 en remontant, $f'u - g$, *lisez* : $f'u - g'$.
 + " 53, " 3 en remontant, OA , *lisez* : OA' .
 + " 56, ligae 6 en remontant, Ox , *lisez* : Ox' .
 + " 53° " 16, $\varphi' + 180^\circ$, *lisez* : $\psi' + 180^\circ$.
 + " 55° " 13, la ligne, *lisez* : le signe.
 " 56° " 1 en remontant, d'une astérisque, *lisez* : d'un astérisque.
 " 58, " 13 en remontant, $N''n$, *lisez* : $N''N$.
 + " 60, " 6 en remontant, $AR - x$, *lisez* : $AR - x'$.
 + " 69, " 13 et 14 en remontant, OB , *lisez* : QB .
 " 71, " 11, *supprimez* : comme mesurant l'angle négatif $\mu CM'$.
 + " " dernière, $- udt \cos (t - m)$, *lisez* : $+ udt \cos (t - m)$.
 " 72, " 4, 478, *lisez* : 480.
 " 73, " 4, l'angle YAx , *lisez* : xAY .
 " 74, " 11 en remontant, conséquences, *lisez* : conséquens.
 " 76, " 12 et 13, KM' , *lisez* : Km' .
 " 77, " 13, *effacez* §.
 " 85, " 19, λ lorsque, *lisez* : Lorsque.
 " 91, " 8 en remontant, l'air, *lisez* : l'aire.
 " 93, " 18, *ajoutez* : Voyez note D.
 + " 100, " 5 en remontant, $P + P' : P$, *lisez* : $P + P' : P'$.
 + " 101, " 8, QH' , *lisez* : $Q'H$.
 + " 106, " 8 en remontant, rectangle en m , rectangle en f .
 " 107, " 12, l'arc MB , *lisez* : l'arc mB .
 " " 23, $MM' \cos 10z'$, *lisez* : $MM' \cos 10x'$.
 " " 5 en remontant, $MM', \cos 10z'$, *lisez* : $MM' \cos 10z'$.
 " 109, " 7, égal, *lisez* : égale.
 " " 20, $x'O'z'$, *lisez* : $x'Oz'$.
 " 111, " 15, mm , *lisez* : mm' .
 " 116, " 8, position, *lisez* : positive.

DES QUANTITÉS

POSITIVES ET NÉGATIVES

EN GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE I^{er}.

DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION DES LIGNES.

1. Ces opérations ne peuvent s'appliquer qu'à des distances comptées sur une même droite, ou sur une même courbe. Elles ne sont, à proprement parler, qu'une seule et même opération qui est l'addition algébrique, et se fondent sur ce principe, c'est que si l'on convient de prendre comme positives les distances comptées dans un sens, il faut prendre comme négatives celles qui sont comptées dans le sens contraire.

Pour indiquer qu'une distance AS (fig. 1) est égale à la somme algébrique des distances AB, BC, CD, DS, j'écrirai

$$AS = ABCDS$$

.....

On peut se représenter un point mobile qui se transporte de A en B, puis de B en C, de C en D et enfin de D en S.

En supposant que le sens positif est de gauche à droite on a fig. 1.

$$AB = 3, \quad BC = -4, \quad CD = 8, \quad DS = -2$$

donc

$$AS = ABCDS = 3 - 4 + 8 - 2 = 5.$$

.....

Dans la fig. 2 on a

$$AB = -5, BC = 7, CD = 3, DS = -9$$

$$AS = ABCDS = -5 + 7 + 3 - 9 = -4$$

Appliquons cette manière de compter les distances à quelques exemples familiers.

2. Soit 0 l'origine des abscisses (fig. 3) et $OP' = x'$, $OP'' = x''$. Pour exprimer la distance de P'' à P' , au moyen des abscisses x' et x'' , on a la formule

$$P''P' = P''OP'$$

et l'on peut se représenter un point mobile qui se transporte de P'' en 0, et ensuite de 0 en P' .

Or on a toujours $P''O = -x''$; car OP'' étant l'abscisse que nous avons désignée par x'' , $P''O$ est cette abscisse comptée en sens contraire.

On a d'ailleurs $OP' = x'$, ainsi

$$P''P' = P''OP' = -x'' + x'$$

exemple : (fig. 3).

$$1^{\circ} \quad x' = 8, \quad x'' = 5, \quad P''OP' = -x'' + x' = -5 + 8 = 3$$

$$2^{\circ} \quad x' = 5, \quad x'' = 8, \quad P''OP' = -x'' + x' = -8 + 5 = -3$$

$$3^{\circ} \quad x' = 5, \quad x'' = -8, \quad P''OP' = -x'' + x' = 8 + 5 = 13$$

$$4^{\circ} \quad x' = -8, \quad x'' = 5, \quad P''OP' = -x'' + x' = -5 - 8 = -13$$

$$5^{\circ} \quad x' = -8, \quad x'' = -5, \quad P''OP' = -x'' + x' = 5 - 8 = -3$$

$$6^{\circ} \quad x' = -5, \quad x'' = -8, \quad P''OP' = -x'' + x' = 8 - 5 = 3$$

On remarquera que la formule $P''P' = P''OP'$ donne non seulement la valeur numérique de $P''P'$, mais aussi son signe, c'est-à-dire que la distance $P''P'$ est positive lorsque pour aller de P'' en P' on marche dans le sens positif, ce qui a lieu lorsque P'' est à gauche de P' . Dans le cas contraire, $P''P'$ est négative.

C'est par une formule semblable que l'on change l'origine des coordonnées. Soit 0 l'origine des abscisses désignées par x et 0' l'origine des abscisses désignées par x' (fig. 4). On aura pour un point P,

$$x = OP \text{ et } x' = O'P$$

$$OP = O'O + O'P$$

Si l'on désigne par a l'abscisse du point O' comptée de l'origine O , on aura

$$OO' = a, \text{ et par conséquent } O'O = -a$$

donc

$$x = OP = OO' + O'P = a + x'$$

On voit par ce qui précède que cette formule se prête à toutes les combinaisons possibles quant à la situation relative des points O' , O et P . *Voyez note A*

Cherchons à exprimer l'abscisse du point M , milieu de la ligne $P''P'$ (fig. 3) on aura

$$OM = OP''M = OP'' + \frac{P''P'}{2} = OP'' + \frac{P''O + OP'}{2}$$

Si l'on fait $OP' = x'$, $OP'' = x''$, d'où $P''O = -x''$, il vient

$$OM = x'' + \frac{-x'' + x'}{2} = \frac{x' + x''}{2}$$

Cette formule est tout-à-fait générale en ayant égard aux signes de x' et de x'' .

Par exemple, fig. 3,

$$1^{\circ} OM = \frac{8+5}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$

$$3^{\circ} OM = \frac{5-8}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$$5^{\circ} OM = \frac{-8-5}{2} = -\frac{13}{2} = -6,5.$$

5. Une somme de nombres, positifs ou négatifs, étant indépendante de l'ordre dans lequel ils sont rangés, il est également évident qu'une somme de distances positives ou négatives, telle que nous les considérons, restera la même quel que soit l'ordre selon lequel on prendra ces distances, chacune dans le sens qui lui convient.

Supposons, par exemple, qu'un point mobile partant de A parcourt sur une droite AO (fig. 4) les distances $-5 + 7 + 3 - 9$, et qu'un second point, partant aussi de A , parcourt de distances égales et de même sens, mais dans cet ordre : $+7 - 9 - 5 + 3$; il est évident que les deux points mobiles arriveront en définitive au même point d'arrêt.

Cette proposition si simple servira à démontrer d'une manière générale plusieurs théorèmes importants.

4. Soit $ABCDE$ un polygone, plan ou gauche (fig. 5). Projetons ses côtés sur une droite TAU et soient b, c, d, e les projections des points B, C, D, E . On aura

$$Ae = Abcde.$$

Ainsi la projection Ae de la droite AE qui ferme le polygone est égale à la somme algébrique des projections des côtés du polygone. Nous ferons fréquemment usage de cette importante proposition.

On peut, si l'on veut, se représenter un point mobile qui parcourt le polygone dans le sens ABCDE et dont la projection sur TU parcourt, en même temps, les distances $Abcde$.

La droite AE qui ferme le polygone ABCDE peut s'appeler la *résultante* du contour ABCDE. Nous adopterons cette dénomination proposée par M. Lefébure de Fourcy.

3. Soit un second polygone AMNPQ (fig. 5) composé de côtés égaux, parallèles et de même sens que ceux du polygone ABCDE qui portent les mêmes numéros, mais disposés dans un ordre différent. Soient de plus m, n, p, q les projections sur TAU, des points M, N, P, Q

Comme les projections de deux côtés égaux, parallèles et de même sens, sont évidemment égales et de même sens, on aura, en vertu du théorème du N° 3.

$$Abcde = Amnpq$$

$$\text{d'où } Ae = Aq$$

Ainsi les projections des résultantes des deux contours sont égales et de même sens. Si les polygones partent, comme ici, d'une origine commune A, les projections Ae et Aq coïncideront.

Si l'on mène trois axes, rectangulaires ou obliques, par le point A, origine commune des périmètres ABCDE et AMNPQ composés de côtés égaux parallèles et de même sens, les projections des résultantes AE et AQ sur chacun de ces axes coïncideront respectivement. Donc ces résultantes coïncident l'une et l'autre avec la diagonale du parallélogramme construit sur ces projections, donc elles coïncident entre elles.

Ainsi lorsqu'on a deux polygones qui partent de la même origine et dont les côtés sont égaux, parallèles et de même sens, mais disposés dans un ordre différent, les résultantes de ces polygones se confondent en une seule et même droite.

Cette dernière proposition a son application dans la statique. Supposons en effet que M soit un point matériel sollicité par des forces représentées en grandeur et en direction par les droites MA, MB, MC, MD et ME (fig. 6); on sait que si l'on construit le polygone MAbcde composé de côtés égaux, parallèles et de même sens que ces droites, la droite Me qui ferme ce polygone représente en grandeur et en direction la résultante des forces. Nous venons de voir que cette droite ne change pas lorsqu'on change l'ordre des côtés, comme, par exemple, MCnpqe; donc la résultante des forces est la même dans quelque ordre que l'on opère leur composition.

Nous reprendrons au chapitre 3^{me} la théorie de la projection des lignes, lorsque nous aurons parlé des lignes trigonométriques. Nous aurions pu renvoyer à ce chapitre les quatre n°s qui précèdent; mais nous avons voulu faire entrevoir tout de suite le parti qu'on peut tirer de l'addition algébrique des lignes.

CHAPITRE II.

DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES LIGNES DROITES EXPRIMÉES EN NOMBRES.

Remarque sur l'usage des signes $+$ et $-$ appliqués aux lignes.

6. Les signes $+$ et $-$ ne peuvent s'appliquer qu'à des distances comptées sur une même droite ou sur des droites parallèles, ou sur une même courbe comme la circonférence du cercle. Ces signes s'appliquent donc

1° Aux distances comptées parallèlement aux abscisses. Telles sont les abscisses elles-mêmes, les cosinus et les cotangentes. Nous supposons que CA (fig. 7) est le côté positif de l'axe des abscisses désignées par x .

2° Aux distances comptées parallèlement aux ordonnées, savoir, les ordonnées elles-mêmes, les sinus et les tangentes. Nous prendrons CD pour le côté positif de l'axe des ordonnées désignées par y .

3° Aux arcs comptés sur la circonférence dont le centre est à l'origine des coordonnées. On prendra pour origine de ces arcs le point A où la circonférence est rencontrée par le côté positif de l'axe des abscisses. Le sens positif de ces arcs est de A vers D, en allant des x positives vers les y positives. C'est ce qui sera justifié par la suite.

Nous appellerons *arcs directeurs* les arcs dont il est ici question.

4° A des distances comptées sur un axe CR mobile autour de l'origine C et que nous nommerons l'axe tournant des r , ou simplement l'axe des r .

A chaque position de cet axe telle que CR, correspond un arc directeur AB qui détermine cette position. Le côté positif de l'axe des r est celui qui passe par l'extrémité de l'arc directeur correspondant.

C'est sur l'axe tournant des r que se comptent les rayons vecteurs, les sécantes et les cosécantes.

5° Enfin il sera quelquefois utile de considérer un second axe tournant CS constamment perpendiculaire à l'axe CR et que nous nommerons l'axe des s . Si l'on prend l'arc BE = 90° et dans le sens positif, CE sera le côté positif de l'axe des s , conjugué de CR.

Lorsque l'arc directeur AB est nul, l'axe CR coïncide avec les x positives et l'axe CS avec les y positives.

La fig. 8 suppose que l'arc directeur de l'axe CR est l'arc positif ADB ou si l'on veut l'arc négatif AB.

En prenant BE = 90° dans le sens positif, on aura toujours CE pour le côté positif des s .

De la proportion géométrique.

7. La proportion géométrique ou par quotient s'applique tout naturellement aux côtés de deux triangles lorsque ces côtés sont parallèles. Ces triangles sont ordinairement construits sur deux droites qui se coupent, et ont pour sommet commun le point d'intersection de ces droites.

Ces côtés sont alors susceptibles des signes $+$ et $-$ et la proportion a lieu même en ayant égard à ces signes.

La proportion $a : b :: c : d$ donnant les équations

$$ad = bc, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

on reconnaîtra qu'une proportion est vraie, quant aux signes, à l'un de ces trois caractères :

1° Les extrêmes et les moyens doivent être à la fois de même signe ou de signe contraire.

2° Il en est de même des deux termes de chaque rapport.

3° Il en est de même encore des antécédents et des conséquents.

Les signes des quatre termes sont susceptibles des huit combinaisons suivantes :

1 ^{re} combinaison	$+$	$+$	$+$	$+$	}
2 ^e "	$-$	$-$	$-$	$-$	}
3 ^e "	$+$	$+$	$-$	$-$	}
4 ^e "	$-$	$-$	$+$	$+$	}
5 ^e "	$+$	$-$	$+$	$-$	}
6 ^e "	$-$	$+$	$-$	$+$	}
7 ^e "	$+$	$-$	$-$	$+$	}
8 ^e "	$-$	$+$	$+$	$-$	}

8. Soient Cx , Cy , CR (fig. 9) les côtés positifs des axes des x , des y et des r .

Comparons entre eux les rayons vecteurs, les abscisses et les ordonnées de deux points m et m' situés sur l'axe des r .

En combinant les diverses positions de l'axe CR et les points m et m' on aura les seize figures désignées par fig. 9. 1° fig. 9. 2°..... fig. 9. 16°

Les triangles Cpm et $Cp'm'$ dont les côtés sont parallèles et qui sont construits sur les droites Cx et CR qui se coupent en C , sont dans le cas des triangles mentionnés au n° précédent.

La proportion $Cp : pm :: Cp' : p'm'$

ou $x : y :: x' : y'$

offre la 1^{re} combinaison en fig. 1^o et 12^o

la 2^e » » fig. 4^o et 9^o

la 3^e » » fig. 2^o et 11^o

la 4^e » » fig. 3^o et 10^o

la 5^e » » fig. 8^o et 13^o

la 6^e » » fig. 5^o et 16^o

la 7^e » » fig. 7^o et 14^o

la 8^e » » fig. 6^o et 15^o

La proportion $Cp : Cm :: Cp' : Cm'$

ou $x : r :: x' : r'$

offre la 1^{re} combinaison en fig. 1^o et 13^o

la 2^e » » fig. 4^o et 16^o

la 3^e » » fig. 2^o et 14^o

la 4^e » » fig. 3^o et 15^o

la 5^e » » fig. 8^o et 12^o

la 6^e » » fig. 5^o et 9^o

la 7^e » » fig. 7^o et 11^o

la 8^e » » fig. 6^o et 10^o

La proportion $pm : Cm :: p'm' : Cm'$

ou $y : r :: y' : r'$

donne la 1^{re} combinaison en fig. 1^o et 5^o

la 2^e » » fig. 4^o et 8^o

la 3^e » » fig. 2^o et 6^o

la 4^e » » fig. 3^o et 7^o

la 5^e » » fig. 12^o et 16^o

la 6^e » » fig. 9^o et 13^o

la 7^e » » fig. 11^o et 15^o

la 8^e » » fig. 10^o et 14^o

On conclut de ce qui précède que les proportions

$$x : y :: x' : y'$$

$$x : r :: x' : r'$$

$$y : r :: y' : r'$$

sont tout-à-fait générales en ayant égard aux signes.

On peut rendre raison de ce fait de la manière suivante.

Lorsque deux points situés sur le rayon vecteur sont du même côté par rapport à l'origine, leurs abscisses x et x' sont de même signe, ainsi que leurs ordonnées y et y' et

leurs rayons vecteurs r et r' , ensorte que dans ces proportions les antécédens sont de même signe et les conséquens aussi de même signe.

Lorsque les deux points sont situés l'un sur le côté positif et l'autre sur le côté négatif du rayon vecteur, leurs abscisses x et x' sont de signe contraire, ainsi que leurs ordonnées y et y' et leurs rayons vecteurs r et r' . Dans ce cas, les antécédens sont de signe contraire et les conséquens aussi de signe contraire.

La règle des signes est donc applicable aux proportions ci-dessus, et ce fait est de la plus grande importance dans la trigonométrie rectiligne et dans l'application de l'algèbre à la géométrie.

Equation de la ligne droite.

9. En désignant par x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque d'une droite passant par l'origine, et par a l'ordonnée qui correspond à l'abscisse $x = +1$: on voit par ce qui précède qu'on aura toujours la proportion

$$y : x :: a : 1$$

en ayant égard aux signes de a , x et y

Cette proportion donne

$$y = ax$$

qui est donc l'équation d'une droite passant par l'origine (*).

Cherchons maintenant l'équation d'une droite CD qui ne passe pas par l'origine (fig. 10, 11, 12, 13.)

Menons par l'origine une droite AB parallèle à CD et dont l'équation sera $y = ax$. Désignons par b la valeur de l'ordonnée AC qui correspond à l'abscisse zéro et que l'on nomme l'ordonnée à l'origine.

Soit PM l'ordonnée d'un point quelconque M dont l'abscisse est AP, et soit O le point où cette ordonnée rencontre la parallèle AB.

$$\text{On aura toujours } \underline{PO} = ax \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{de plus } \underline{OM} = \underline{AC} = b \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\text{donc } \underline{PM} = \underline{POM} = ax + b \quad . \quad (3)$$

$$\text{mais } \underline{PM} = y \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\text{donc enfin } y = ax + b \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

est l'équation générale d'une droite.

Les équations (1) (2) (3) (4) supposent qu'on a égard aux signes de toutes les quantités qui y entrent. Il suit de là que dans l'équation (5) il faut avoir égard aux signes de a , b , x et y .

(*) Lorsque les axes sont rectangulaires a est, comme on sait, la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec le côté positif des x , la partie de cette droite située du côté des y positives.

CHAPITRE III.

DU DOUBLE SIGNE DES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

10. Soient $\alpha = OG$, $\beta = GC$ l'abscisse et l'ordonnée du centre d'un cercle (fig. 14) et $x = OP$, $y = PM$ l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la circonférence. Abaissons CS perpendiculaire sur PM. On aura

$$\overline{CM}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{SM}^2$$

$$\text{mais } CS = GP = \overline{GO} + \overline{OP} = -\alpha + x$$

$$SM = SPM = -\beta + y$$

et si l'on pose $CM = r$, on aura

$$r^2 = (-\alpha + x)^2 + (-\beta + y)^2 \text{ d'où}$$

$$(y - \beta)^2 = r^2 - (x - \alpha)^2$$

$$y = \beta \pm \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}$$

Le radical est égal à $\sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2} = SM$ abstraction faite du signe. Si l'on suppose SM positive comme dans la figure, on aura

$$+\sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2} = SM \quad \text{et} \quad -\sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2} = S\mu.$$

Les deux valeurs de y données par la formule ci-dessus sont donc

$$y = PSM = PM$$

$$y = PS\mu = P\mu.$$

Lorsque le centre est sur l'axe des abscisses (fig. 15) on a $\beta = 0$ et

$$y = \pm \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2},$$

Enfin si le centre est à l'origine, on a $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}. \quad (\text{fig. 16}).$$

11. Carnot, dans sa *Géométrie de position* (Dissertation préliminaire), faisait cette objection : Comme $P\mu = -PM$ (fig. 16), on a $\mu P + PM = 0$ ou $\mu M = 0$, résultat absurde. (Je remplace les lettres employées par Carnot par celles de ma figure).

Mais Carnot dans l'équation

$$\mu P + PM = 0$$

pose μP au lieu de P_μ , ce qui change entièrement la question.

Si l'on a égard au sens des lignes, on aura les résultats qui suivent et qui n'offrent plus rien d'absurde. En désignant par u la valeur absolue de PM ou de P_μ , il vient en effet :

$$\mu PM = u + u = 2u$$

$$MP_\mu = -u - u = -2u$$

$$PMP = u - u = 0$$

Remplaçant dans cette dernière MP par P_μ qui est égale et de même sens, on aurait

$$PMP = 0 = PM + P_\mu$$

Cette dernière addition algébrique, $PM + P_\mu$, ne peut pas, comme les autres, être représentée par un tracé continu; mais le résultat n'en est pas moins nul; car la somme de deux lignes égales et de signe contraire est égale à zéro.

Les objections du genre de celle que nous venons de citer pouvaient tirer quelque force de la notion imparfaite qu'on se faisait des lignes négatives, que l'on considérait comme des lignes dans une position opposée à celle des lignes positives, telles que sont les abscisses négatives relativement aux abscisses positives. Mais dans la théorie que je propose, toute ligne, par exemple, tracée sur l'axe des abscisses dans le sens positif, est positive, quelle que soit sa position absolue sur cet axe.

Ainsi 0 étant l'origine, et le sens positif étant celui qui est indiqué par la flèche (fig. 17), les lignes AB , $A'B'$, $A'B''$ sont positives, tandis que les lignes BA , $B'A'$, $B''A''$ sont négatives.

Selon Carnot, l'exemple suivant suffit pour renverser toute la doctrine qu'il attaque.

D'un point K pris hors d'un cercle donné (fig. 18), soit proposé de mener une droite Kmm' , telle que la portion mm' interceptée dans le cercle soit égale à une droite donnée.

Du point K et par le centre du cercle menons une droite KAB qui rencontre la circonférence en A et B . Faisons $KA = a$, $KB = b$, $mm' = c$, $Km = x$.

On aura

$$ab = x(c+x) \text{ ou } x^2 + cx - ab = 0 \text{ d'où}$$

$$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$$

Le point m répond au signe supérieur, et le point m' au signe inférieur. Donc, dit l'auteur, quoique les deux racines de l'équation soient l'une positive et l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K . Ainsi la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposé, porte à faux.

Je réponds à cette objection, que les deux racines ne doivent pas être prises dans le même sens. En effet, si O est le milieu de la corde mm' , on a

$KO = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$, et en appelant x' et x'' les deux racines, il vient

$$x' = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab} - \frac{1}{2}c = KOm = Km$$

$$x'' = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab} = m'OK = m'K.$$

Km étant le sens positif, la seconde racine $m'K$ est comptée de m' en K dans le sens négatif. De cette manière la somme des racines, $-c$, s'exprime ainsi :

$$x'' + x' = m'Km = m'm = -c$$

Supposons maintenant que le point K se transporte entre A et B (fig. 19), on aura

$$ab = x(c-x) \quad \text{ou} \quad x^2 - cx + ab = 0$$

Cette équation se déduit de celle relative au cas précédent en changeant les signes de a et de c . En effet, le sens positif sur les deux lignes étant km et KB (fig. 18), on voit qu'à mesure que le point K entre dans le cercle, les droites KA et mm' changent de signe.

L'équation $x^2 - cx + ab = 0$ donne

$$x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - ab}.$$

Si l'on désigne toujours par O le milieu de la corde mm' (fig. 19), on a

$$KO = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - ab},$$

$$x' = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - ab} + \frac{1}{2}c = KOm = km$$

$$x'' = \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - ab} = m'ok = m'k.$$

Ici les deux racines sont positives. Leur somme est

$$x'' + x' = m'km = m'm = c$$

L'auteur objecte que lorsque le point K est, comme ici, sur le diamètre AB dans l'intérieur du cercle, on trouve pour x deux valeurs positives, et que cependant elles doivent être prises en sens contraire l'une de l'autre; que, par conséquent, la règle est encore fautive pour ce cas.

Mais nous venons de voir que les lignes km et $m'k$ qui représentent ces racines, sont toutes deux décrites dans le sens positif. Ainsi l'objection tombe encore.

Voici une autre difficulté qu'élevait Carnot. « Si deux quantités, disait-il, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différeraient que par leur position, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que l'autre serait effective? »

A cela on peut répondre que si un radical du second degré représente une ligne, laquelle peut être prise dans un sens ou dans le sens contraire, il n'en est pas de même de la quantité sous le radical qui est un nombre abstrait.

Par exemple, l'équation de l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \text{ donne}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Le radical représente une ligne, savoir l'un des côtés d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse est x et le troisième côté a . Mais la quantité $x^2 - a^2$ ne représente point elle-même une ligne; c'est un nombre abstrait égal à la différence de deux nombres abstraits x^2 et a^2 .

Lorsque x est moindre que a , le triangle est impossible et l'algèbre donne pour le côté cherché une valeur imaginaire.

Carnot objectait encore à la théorie ordinaire les signes dont on affecte les sécantes (Géom. de pos. N° 112), et le signe du rayon qui est toujours positif, tandis que, d'après Carnot, il devrait, selon la théorie ordinaire, être tantôt positif et tantôt négatif. Je renvoie à cet égard au n° 12 du présent ouvrage.

Cet auteur remplace la théorie ordinaire des quantités positives et négatives par celle des quantités *directes* et *inverses*. Mais les *valeurs de corrélation*, lorsqu'elles sont affectées du signe *moins*, ne sont autre chose que des quantités négatives, et sont employées comme telles quand on les introduit avec ce signe dans les formules établies sur le *système primitif*. La théorie qu'il substitue à la théorie ordinaire en diffère donc plutôt par les expressions que par le fond des choses.

Carnot, dans l'ouvrage cité, ne cherche point à rendre sensible le mécanisme de la règle des signes appliquée à la géométrie. Il suppose tacitement que cette règle est toujours vérifiée. Dans le présent ouvrage, au contraire, cette vérification est l'objet que j'ai eu principalement en vue.

Revenons à la double valeur des radicaux du second degré.

Cette double valeur se représente en géométrie de deux manières.

1° Par deux droites partant du même point, et décrites en sens opposé. C'est ce que nous avons vu à l'égard du cercle dans la formule

$$y = \beta \pm \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}$$

où les deux valeurs du radical sont représentées par SM et S μ (fig. 14).

2° Par une seule droite comptée dans deux sens différens. C'est le cas du problème précédent; car dans la formule

$$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab} \quad (\text{fig. 18.})$$

le radical avec le signe supérieur signifie KO, et avec le signe inférieur il signifie OK.

Il arrive souvent dans ce second cas que l'une des deux valeurs est superflue.

Par exemple, l'équation du cercle dont le centre est à l'origine.

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ donnerait}$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (\text{fig. 16}).$$

Si M est le point dont les coordonnées sont x et y , l'une des deux valeurs sera représentée par $\underline{OM}$, et l'autre par $\underline{MO}$.

Soit encore D la distance de deux points m' et m'' dont les coordonnées rectangulaires sont (x', y') et (x'', y'') , on aura, comme on sait,

$$D = \pm \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2};$$

l'une des deux valeurs étant représentée par $\underline{m'm''}$, l'autre le sera par $\underline{m''m'}$.

Dans ces deux exemples l'une des deux valeurs est superflue. Il en est de même de l'une des deux valeurs du rayon de courbure. (Voyez n° 32).

CHAPITRE IV.

DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

12. Le *sinus* d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité, ou plus exactement, sur le rayon qui passe par l'origine des arcs. Ainsi le sinus de l'arc AB est GB. (fig. 20).

La distance CG de l'origine au pied de cette perpendiculaire est le *cosinus* du même arc.

Si par l'origine A des arcs on mène la tangente AT terminée au point T où elle est rencontrée par le rayon CB prolongé, la ligne AT sera la *tangente trigonométrique* de de l'arc AB.

CT en est la *sécante*.

Si l'on prend l'arc AD égal à 90° , c'est-à-dire égal à un quadrans, et que l'on mène la tangente DU à l'extrémité du rayon CD, la ligne DU sera la *cotangente* de l'arc AB et CU en sera la *cosécante*.

La fig. 16 et le tableau ci-après font voir comment l'on compte les lignes trigonométriques des arcs depuis 0° à 360° .

	sinus.	cosinus.	tangente.	sécante.	cotangente.	cosécante.
arc AB	GBB	CG	AT	CT	DU	CU
arc AB ^{//}	G ^{//} B ^{//}	CG ^{//}	AT ^{//}	CT ^{//}	DU ^{//}	CU ^{//}
arc AB ^{'''}	G ^{'''} B ^{'''}	CG ^{'''}	AT ^{'''}	CT ^{'''}	DU ^{'''}	CU ^{'''}
arc AB ^{IV}	G ^{IV} B ^{IV}	CG ^{IV}	AT ^{IV}	CT ^{IV}	DU ^{IV}	CU ^{IV}

CA est le côté positif des abscisses, CD le côté positif des ordonnées, et AB le côté positif des arcs.

Les sinus sont positifs lorsqu'ils sont décrits de G en B dans le sens des ordonnées positives, comme GB, G^{//}B^{//}, ce qui a lieu pour les arcs terminés dans le premier et le second quadrans. Ils sont négatifs comme G^{'''}B^{'''}, et G^{IV}B^{IV} lorsqu'ils sont décrits de G en B dans le sens des ordonnées négatives, ce qui a lieu dans le 3^e et le 4^e quadrans.

Les cosinus sont positifs lorsqu'ils sont décrits de C en G dans le sens des abscisses positives, ce qui a lieu dans le 1^{er} et le 4^e quadrans, comme CG et CG^{IV}. Ils sont négatifs dans le 2^e et le 3^e comme CG^{//} et CG^{'''}.

Les tangentes sont positives lorsqu'elles sont décrites de A en T dans le sens des ordonnées positives, comme AT et AT'' dans le 1^{er} et le 3^e quadrans; elles sont négatives dans le 2^e et le 4^e, comme AT' et AT''.

Les sécantes sont positives lorsqu'elles sont comptées de C en T sur le côté positif de l'axe tournant des r , déterminé par l'axe correspondant pris pour arc directeur; c'est ce qui a lieu dans le 1^{er} et le 4^e quadrans, comme CT et CT'.

Elles sont négatives dans le 2^e et le 3^e quadrans, comme CT'' et CT''', parce qu'elles sont comptées sur le côté négatif de l'axe des r .

Les cotangentes qui sont des droites décrites parallèlement aux abscisses sont positives pour le 1^{er} et le 3^e quadrans, comme DU et DU'', parce qu'elles sont décrites de D en U dans le sens des abscisses positives.

Elles sont négatives pour le 2^e et le 4^e quadrans, comme DU' et DU''.

Les cosécantes sont positives dans le 1^{er} et le 2^e quadrans, comme CU et CU'', parce qu'elles sont alors comptées sur le côté positif de l'axe tournant des r . Elles sont négatives dans le 3^e et le 4^e quadrans, comme CU' et CU'', parce qu'elles sont comptées sur le côté négatif de cet axe tournant.

Le tableau suivant rappelle très-succinctement ces circonstances.

	sinus et cosécante.	cosinus et sécante.	tangente et cotangente:
1 ^{er} quadrans	+	+	+
2 ^e quadrans	+	—	—
3 ^e quadrans	—	—	+
4 ^e quadrans	—	+	—

Les lignes trigonométriques des arcs 0°, 90°, 180°, 270° et 360° ont des valeurs particulières qui sont rappelées dans le tableau qui suit, où le rayon est désigné par R, et l'infini par ∞ .

	sinus.	tangente.	sécante.	cosinus.	cotangente.	cosécante.
0°	0	0	R	R	∞	∞
90°	R	∞	∞	0	0	R
180°	0	0	—R	—R	— ∞	∞
270°	—R	∞	— ∞	0	0	—R
360°	0	0	R	R	— ∞	— ∞

Les arcs de 90°, 180°, 270° et 360° sont considérés ici comme les limites supérieures respectives des arcs du 1^{er}, du 2^e, du 3^e et du 4^e quadrans (*).

(*) On peut remarquer que $\text{séc. } 180^\circ = \frac{CA}{r}$ et que cette sécante est négative comme comptée de C en A dans le sens négatif de l'axe des r , car pour 180° le côté positif de cet axe est CE.

D'un autre côté, $\text{cos. } 180^\circ = \frac{CE}{r}$, et ce cosinus est négatif compté de C en E dans le sens négatif des x .

Dans ce cas particulier l'axe des r est placé sur l'axe des x ; mais le sens positif des r est opposé au sens positif des x .

Les lignes trigonométriques d'un arc négatif sont les mêmes que celles de l'arc positif terminé au même point de la circonférence. Par exemple : $\sin. (-\alpha) = \sin. (360^\circ - \alpha)$, et ainsi des autres lignes. Il suit de là que les lignes trigonométriques indiquées au tableau de la page 14, comme appartenant à l'arc positif AB, fig. 21, appartiennent aussi à l'arc négatif AIB; celles de l'arc positif AB'' appartiennent également à l'arc négatif AIB'', et de même pour les arcs AB''' et AIB''', AB^{iv} et AIB^{iv} (fig. 22, 23, 24).

AB et Ab étant deux arcs de valeur absolue égale, l'un positif, l'autre négatif, il est facile de voir que ces arcs auront leurs sinus, tangentes, cotangentes et cosécantes égaux et de signe contraire, tandis que leurs cosinus et leurs sécantes sont égaux et de même signe.

On a donc en désignant par α un arc positif.

$$\begin{aligned}\sin (-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos (-\alpha) &= \cos \alpha \\ \text{tang} (-\alpha) &= -\text{tang} \alpha \\ \cot (-\alpha) &= -\cot \alpha \\ \sec (-\alpha) &= \sec \alpha \\ \text{cosec} (-\alpha) &= -\text{cosec} \alpha\end{aligned}$$

Nous verrons bientôt que le rayon trigonométrique, désigné par R ou par 1, n'est jamais employé que de l'une des trois manières suivantes :

1° Couché comme CA (fig. 20) sur le côté positif de l'axe des abscisses. C'est ainsi qu'il se présente lorsqu'on lui compare les tangentes et les sécantes.

2° Couché comme CD, sur le côté positif de l'axe des ordonnées, lorsqu'en lui compare les cotangentes et les cosécantes.

3° Couché comme CB, CB'', CB''', CB^{iv}, sur le côté positif de l'axe tournant des r , lorsqu'on lui compare les sinus et les cosinus.

Le rayon est donc toujours employé dans un sens positif.

Nous allons faire voir que les valeurs que nous venons d'attribuer aux lignes trigonométriques vérifient la règle des signes appliquée aux proportions.

15. Et d'abord si l'on compare entre elles les lignes trigonométriques appartenant à un même arc, on trouve que les triangles semblables donnent (fig. 20) :

$$\begin{aligned}\text{GB} : \text{CG} :: \text{AT} : \text{CA}, \\ \text{G}''\text{B}'' : \text{CG}'' :: \text{AT}'' : \text{CA}, \\ \text{G}'''\text{B}''' : \text{CG}''' :: \text{AT}''' : \text{CA}, \\ \text{G}^{\text{iv}}\text{B}^{\text{iv}} : \text{CG}^{\text{iv}} :: \text{AT}^{\text{iv}} : \text{CA},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \text{AB} : \cos \text{AB} :: \text{tang} \text{AB} : \text{R} \\ \sin \text{AB}'' : \cos \text{AB}'' :: \text{tang} \text{AB}'' : \text{R} \\ \sin \text{AB}''' : \cos \text{AB}''' :: \text{tang} \text{AB}''' : \text{R} \\ \sin \text{AB}^{\text{iv}} : \cos \text{AB}^{\text{iv}} :: \text{tang} \text{AB}^{\text{iv}} : \text{R}\end{aligned}$$

signes des 4 termes.

$$\begin{array}{cccc}+ & + & + & + \\+ & - & - & + \\- & - & + & + \\- & + & - & +\end{array}$$

		signes des 4 termes.
$CG : GB :: DU : CD,$	$\cos AB : \sin AB :: \cot AB : R$	$\begin{matrix} + & + & + & + \end{matrix}$
$CG'' : G''B'' :: DU'' : CD,$	$\cos AB'' : \sin AB'' :: \cot AB'' : R$	$\begin{matrix} - & + & - & + \end{matrix}$
$CG''' : G'''B''' :: DU''' : CD,$	$\cos AB''' : \sin AB''' :: \cot AB''' : R$	$\begin{matrix} - & - & + & + \end{matrix}$
$CG^{IV} : G^{IV}B^{IV} :: DU^{IV} : CD,$	$\cos AB^{IV} : \sin AB^{IV} :: \cot AB^{IV} : R$	$\begin{matrix} + & - & - & + \end{matrix}$
$AT : CA :: CD : DU,$	$\tan AB : R :: R : \cot AB$	$\begin{matrix} + & + & + & + \end{matrix}$
$AT'' : CA :: CD : DU'',$	$\tan AB'' : R :: R : \cot AB''$	$\begin{matrix} - & + & + & - \end{matrix}$
$AT''' : CA :: CD : DU''',$	$\tan AB''' : R :: R : \cot AB'''$	$\begin{matrix} + & + & + & + \end{matrix}$
$AT^{IV} : CA :: CD : DU^{IV},$	$\tan AB^{IV} : R :: R : \cot AB^{IV}$	$\begin{matrix} - & + & + & - \end{matrix}$
$CG : CB :: CA : CT,$	$\cos AB : R :: R : \sec AB$	$\begin{matrix} + & + & + & + \end{matrix}$
$CG'' : CB'' :: CA : CT'',$	$\cos AB'' : R :: R : \sec AB''$	$\begin{matrix} - & + & + & - \end{matrix}$
$CG''' : CB''' :: CA : CT''',$	$\cos AB''' : R :: R : \sec AB'''$	$\begin{matrix} - & + & + & - \end{matrix}$
$CG^{IV} : CB^{IV} :: CA : CT^{IV},$	$\cos AB^{IV} : R :: R : \sec AB^{IV}$	$\begin{matrix} + & + & + & + \end{matrix}$
$GB : CB :: CD : CU,$	$\sin AB : R :: R : \operatorname{cosec} AB$	$\begin{matrix} + & + & + & + \end{matrix}$
$G''B'' : CB'' :: CD : CU'',$	$\sin AB'' : R :: R : \operatorname{cosec} AB''$	$\begin{matrix} + & + & + & + \end{matrix}$
$G'''B''' : CB''' :: CD : CU''',$	$\sin AB''' : R :: R : \operatorname{cosec} AB'''$	$\begin{matrix} - & + & + & - \end{matrix}$
$G^{IV}B^{IV} : CB^{IV} :: CD : CU^{IV},$	$\sin AB^{IV} : R :: R : \operatorname{cosec} AB^{IV}$	$\begin{matrix} - & + & + & - \end{matrix}$

Ces proportions ont également lieu pour les arcs négatifs AIB, AIB'', AIB''', AIB^{IV}, d'après la remarque du n° précédent.

Elles vérifient toutes la règle des signes et donnent les formules suivantes qui sont donc tout-à-fait générales.

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{R \sin a}{\cos a}, & \cot a &= \frac{R \cos a}{\sin a}, & \cot a &= \frac{R^2}{\tan a} \\ \sec a &= \frac{R^2}{\cos a}, & \operatorname{cosec} a &= \frac{R^2}{\sin a} \end{aligned}$$

14. Si l'on forme des proportions numériquement vraies entre l'abscisse, l'ordonnée, le rayon vecteur d'un point, et les lignes trigonométriques de l'arc directeur correspondant à l'axe des r qui passe par ce point, on verra que ces proportions vérifient aussi la règle des signes.

Il ne faut pas perdre de vue que les rayons vecteurs, que nous désignerons par la lettre ρ , sont, comme les sécantes et les cosécantes, positifs ou négatifs, selon qu'ils sont comptés, sur l'axe tournant des r , dans le sens positif ou dans le sens négatif. Comme ces distances sont comptées à partir de l'origine, elles se trouvent positives lorsqu'elles sont sur le côté positif de l'axe des r , et négatives lorsqu'elles sont sur le côté négatif.

On suppose dans les fig. 21, 22, 23 et 24, que les arcs directeurs sont les arcs positifs AB , AB^{II} , AB^{III} , AB^{IV} , ou les arcs négatifs AIB , AIB^{II} , AIB^{III} , AIB^{IV} , ensorte que les rayons vecteurs CM , CM^{II} , CM^{III} , CM^{IV} sont positifs, tandis que les rayons vecteurs Cm , Cm^{II} , Cm^{III} , Cm^{IV} sont négatifs. Il ne faut pas oublier que le côté positif des r est celui qui passe par l'extrémité de l'arc directeur, positif ou négatif.

Les triangles semblables donnent les proportions suivantes :

		signes des 4 termes.
$PM : CM :: GB : CB$	$y : \delta :: \sin AB : R$	+ + + +
$pm : Cm :: GB : CB$	$y : \delta :: \sin AB : R$	- - + +
$P^{II}M^{II} : CM^{II} :: G^{II}B^{II} : CB^{II}$	$y^{II} : \delta^{II} :: \sin AB^{II} : R$	+ + + +
$p^{II}m^{II} : Cm^{II} :: G^{II}B^{II} : CB^{II}$	$y^{II} : \delta^{II} :: \sin AB^{II} : R$	- - + +
$P^{III}M^{III} : CM^{III} :: G^{III}B^{III} : CB^{III}$	$y^{III} : \delta^{III} :: \sin AB^{III} : R$	- + - +
$p^{III}m^{III} : Cm^{III} :: G^{III}B^{III} : CB^{III}$	$y^{III} : \delta^{III} :: \sin AB^{III} : R$	+ - - +
$P^{IV}M^{IV} : CM^{IV} :: G^{IV}B^{IV} : CB^{IV}$	$y^{IV} : \delta^{IV} :: \sin AB^{IV} : R$	- + - +
$p^{IV}m^{IV} : Cm^{IV} :: G^{IV}B^{IV} : CB^{IV}$	$y^{IV} : \delta^{IV} :: \sin AB^{IV} : R$	+ - - +
$CP : CM :: CG : CB$	$x : \delta :: \cos AB : R$	+ + + +
$Cp : Cm :: CG : CB$	$x : \delta :: \cos AB : R$	- - + +
$CP^{II} : CM^{II} :: CG^{II} : CB^{II}$	$x^{II} : \delta^{II} :: \cos AB^{II} : R$	- + - +
$Cp^{II} : Cm^{II} :: CG^{II} : CB^{II}$	$x^{II} : \delta^{II} :: \cos AB^{II} : R$	+ - - +
$CP^{III} : CM^{III} :: CG^{III} : CB^{III}$	$x^{III} : \delta^{III} :: \cos AB^{III} : R$	- + - +
$Cp^{III} : Cm^{III} :: CG^{III} : CB^{III}$	$x^{III} : \delta^{III} :: \cos AB^{III} : R$	+ - - +
$CP^{IV} : CM^{IV} :: CG^{IV} : CB^{IV}$	$x^{IV} : \delta^{IV} :: \cos AB^{IV} : R$	+ + + +
$Cp^{IV} : Cm^{IV} :: CG^{IV} : CB^{IV}$	$x^{IV} : \delta^{IV} :: \cos AB^{IV} : R$	- - + +
$PM : CP :: AT : CA$	$y : x :: \tan AB : R$	+ + + +
$pm : Cp :: AT : CA$	$y : x :: \tan AB : R$	- - + +
$P^{II}M^{II} : CP^{II} :: AT^{II} : CA$	$y^{II} : x^{II} :: \tan AB^{II} : R$	+ - - +
$p^{II}m^{II} : Cp^{II} :: AT^{II} : CA$	$y^{II} : x^{II} :: \tan AB^{II} : R$	- + - +
$P^{III}M^{III} : CP^{III} :: AT^{III} : CA$	$y^{III} : x^{III} :: \tan AB^{III} : R$	- - + +
$p^{III}m^{III} : Cp^{III} :: AT^{III} : CA$	$y^{III} : x^{III} :: \tan AB^{III} : R$	+ + + +
$P^{IV}M^{IV} : CP^{IV} :: AT^{IV} : CA$	$y^{IV} : x^{IV} :: \tan AB^{IV} : R$	- + - +
$p^{IV}m^{IV} : Cp^{IV} :: AT^{IV} : CA$	$y^{IV} : x^{IV} :: \tan AB^{IV} : R$	+ - - +
$CM : CP :: CT : CA$	$\delta : x :: \sec AB : R$	+ + + +
$Cm : Cp :: CT : CA$	$\delta : x :: \sec AB : R$	- - + +
$CM^{II} : CP^{II} :: CT^{II} : CA$	$\delta^{II} : x^{II} :: \sec AB^{II} : R$	+ - - +
$Cm^{II} : Cp^{II} :: CT^{II} : CA$	$\delta^{II} : x^{II} :: \sec AB^{II} : R$	- + - +
$CM^{III} : CP^{III} :: CT^{III} : CA$	$\delta^{III} : x^{III} :: \sec AB^{III} : R$	+ - - +
$Cm^{III} : Cp^{III} :: CT^{III} : CA$	$\delta^{III} : x^{III} :: \sec AB^{III} : R$	- + - +
$CM^{IV} : CP^{IV} :: CT^{IV} : CA$	$\delta^{IV} : x^{IV} :: \sec AB^{IV} : R$	+ + + +
$Cm^{IV} : Cp^{IV} :: CT^{IV} : CA$	$\delta^{IV} : x^{IV} :: \sec AB^{IV} : R$	- - + +

		signes des 4 termes.
$QM : CQ :: DU : CD$	$x : y :: \cot AB : R$	$+$ $+$ $+$ $+$
$qm : Cq :: DU : CD$	$x : y :: \cot AB : R$	$-$ $-$ $+$ $+$
$Q''M'' : CQ'' :: DU'' : CD$	$x'' : y'' :: \cot AB'' : R$	$-$ $+$ $-$ $+$
$q''m'' : Cq'' :: DU'' : CD$	$x'' : y'' :: \cot AB'' : R$	$+$ $-$ $-$ $+$
$Q'''M''' : CQ''' :: DU''' : CD$	$x''' : y''' :: \cot AB''' : R$	$-$ $-$ $+$ $+$
$q'''m''' : Cq''' :: DU''' : CD$	$x''' : y''' :: \cot AB''' : R$	$+$ $+$ $+$ $+$
$Q^{IV}M^{IV} : CQ^{IV} :: DU^{IV} : CD$	$x^{IV} : y^{IV} :: \cot AB^{IV} : R$	$+$ $-$ $-$ $+$
$q^{IV}m^{IV} : Cq^{IV} :: DU^{IV} : CD$	$x^{IV} : y^{IV} :: \cot AB^{IV} : R$	$-$ $+$ $-$ $+$
$CM : CQ :: CU : CD$	$\delta : y :: \operatorname{cosec} AB : R$	$+$ $+$ $+$ $+$
$Cm : Cq :: CU : CD$	$\delta : y :: \operatorname{cosec} AB : R$	$-$ $-$ $+$ $+$
$CM'' : CQ'' :: CU'' : CD$	$\delta'' : y'' :: \operatorname{cosec} AB'' : R$	$+$ $+$ $+$ $+$
$Cm'' : Cq'' :: CU'' : CD$	$\delta'' : y'' :: \operatorname{cosec} AB'' : R$	$-$ $-$ $+$ $+$
$CM''' : CQ''' :: CU''' : CD$	$\delta''' : y''' :: \operatorname{cosec} AB''' : R$	$+$ $-$ $-$ $+$
$Cm''' : Cq''' :: CU''' : CD$	$\delta''' : y''' :: \operatorname{cosec} AB''' : R$	$-$ $+$ $-$ $+$
$CM^{IV} : CQ^{IV} :: CU^{IV} : CD$	$\delta^{IV} : y^{IV} :: \operatorname{cosec} AB^{IV} : R$	$+$ $-$ $-$ $+$
$Cm^{IV} : Cq^{IV} :: CU^{IV} : CD$	$\delta^{IV} : y^{IV} :: \operatorname{cosec} AB^{IV} : R$	$-$ $+$ $-$ $+$

Toutes ces proportions sont vraies, en ayant égard aux signes de leurs termes. C'est ce qu'on aurait pu prévoir d'après les proportions

$$\begin{aligned} x : y &:: x' : y' \\ x : r &:: x' : r' \\ y : r &:: y' : r' \end{aligned}$$

que nous avons reconnues comme vraies, en ayant égard aux signes, et dans lesquelles les lettres x , y , r ; x' , y' , r' , représentent les abscisses, les ordonnées et les rayons vecteurs de deux points situés sur une même droite passant par l'origine.

En effet la proportion

$$PM : CM :: GB : CB \quad \text{ou} \quad y : \delta :: \sin AB : R$$

par exemple, n'est autre chose que celle qui a lieu entre les ordonnées et les rayons vecteurs des points M et B situés sur la droite CBM; car GB et CB ou $\sin AB$ et R sont l'ordonnée et le rayon vecteur du point B, dont CG ou $\cos AB$ est l'abscisse.

De même CA, AT et CT ou R, tang AB, sec AB sont l'abscisse, l'ordonnée et le rayon vecteur du point T. De même encore DU, CD, CU ou $\cot AB$, R et $\operatorname{cosec} AB$ sont l'abscisse, l'ordonnée et le rayon vecteur du point U.

Les proportions que nous venons d'obtenir sont donc, sous une autre forme, celles qui ont lieu entre les abscisses, les ordonnées et les rayons vecteurs des points M et B, m et B, M et T, M et U, M'' et B'' , M'' et T'' , etc.

15. On range encore le *sinus verse* parmi les lignes trigonométriques. Le sinus verse de l'arc AB (fig. 20) est la distance GA comptée de G en A dans le sens positif des abscisses.

$$\text{De même } \sin \text{ verse } AB'' = G''A, \quad \sin \text{ verse } AB''' = G'''A, \quad \sin \text{ verse } AB^{IV} = G^{IV}A$$

On voit que les sinus verses sont toujours positifs.

$$\text{On a } GA = GCA, \quad G''A = G''CA, \quad G'''A = G'''CA, \quad G^{IV}A = G^{IV}CA$$

$$\text{Or } CG = \cos AB, \quad CG'' = \cos AB'', \quad CG''' = \cos AB''', \quad CG^{IV} = \cos AB^{IV}$$

et en changeant, dans ces dernières, le signe des deux membres

$$GC = -\cos AB, \quad G''C = -\cos AB'', \quad G'''C = -\cos AB''', \quad G^{IV}C = -\cos AB^{IV}$$

$$\text{donc } \sin \text{ verse } AB = GA = GCA = -\cos AB + R$$

$$\sin \text{ verse } AB'' = G''A = G''CA = -\cos AB'' + R$$

$$\sin \text{ verse } AB''' = G'''A = G'''CA = -\cos AB''' + R$$

$$\sin \text{ verse } AB^{IV} = G^{IV}A = G^{IV}CA = -\cos AB^{IV} + R$$

$$\text{en général } \sin \text{ verse } a = R - \cos a$$

Il n'y a guère qu'une seule proportion dans laquelle entre le sinus verse; c'est la suivante et ses analogues.

$$GA : GB :: GB : EG$$

$$G''A : G''B'' :: G''B'' : EG''$$

$$G'''A : G'''B''' :: G'''B''' : EG'''$$

$$G^{IV}A : G^{IV}B^{IV} :: G^{IV}B^{IV} : EG^{IV}$$

Toutes ces proportions sont vraies, en ayant égard aux signes. En effet, les extrêmes sont tous deux positifs comme des lignes décrites dans le sens positif des abscisses, et les moyens sont évidemment de même signe.

$$\text{On a } EC = ECG = R + \cos AB$$

$$EG'' = ECG'' = R + \cos AB''$$

$$EG''' = ECG''' = R + \cos AB'''$$

$$EG^{IV} = ECG^{IV} = R + \cos AB^{IV}$$

le rayon EC ou R est ici positif comme décrit dans le sens positif des abscisses.

Les proportions ci-dessus peuvent s'écrire ainsi :

$$\sin \text{ verse } AB : \sin AB :: \sin AB : R + \cos AB$$

$$\sin \text{ verse } AB'' : \sin AB'' :: \sin AB'' : R + \cos AB''$$

$$\sin \text{ verse } AB''' : \sin AB''' :: \sin AB''' : R + \cos AB'''$$

$$\sin \text{ verse } AB^{IV} : \sin AB^{IV} :: \sin AB^{IV} : R + \cos AB^{IV}$$

$$\text{On a donc en général } \sin \text{ verse } a : \sin a :: \sin a : R + \cos a$$

$$\text{d'où } \sin \text{ verse } a = \frac{\sin^2 a}{R + \cos a}$$

CHAPITRE V.

DES PROJECTIONS DES LIGNES DROITES.

16. Nous allons reprendre la théorie des projections dont nous nous sommes déjà occupés aux n^{os} 4 et 5, et nous pourrions maintenant faire usage des lignes trigonométriques.

Pour projeter une droite AB sur une autre droite TU située dans le même plan, on abaisse sur cette dernière les perpendiculaires Aa, Bb et la droite ab est la projection de AB (fig. 25).

Lorsque TU n'est pas dans le même plan que AB, on fait passer par les points A et B des plans perpendiculaires à TU et qui coupent cette droite en a et b. La droite ab est encore, dans ce cas, la projection de AB sur TU.

Supposons que le sens positif des distances prises sur TU soit de T vers U. Menons par le point A (fig. 26) la droite Au parallèle à TU et dans le sens positif, on aura

$$ab = \frac{AB \cos u \ AB}{R} \quad \text{et semblablement}$$

$$ab'' = \frac{AB'' \cos u \ AB''}{R}, \quad ab''' = \frac{AB''' \cos u \ AB'''}{R}, \quad ab^{iv} = \frac{AB^{iv} \cos u \ AB^{iv}}{R}.$$

Les droites AB, AB'', AB''', AB^{iv} sont positives comme décrites de A en B, B'', B''', B^{iv} dans le sens positif de l'axe tournant des r.

Les positions de cet axe tournant sont déterminées respectivement par les arcs directeurs qui mesurent les angles uAB, uAB'', uAB''', uAB^{iv}, dans le cercle dont le centre est en A, dont le rayon est R, et dont le plan, mobile autour de Au, prendrait successivement les positions déterminées par Au et AB, Au et AB'', etc.

Les arcs directeurs se comptent de 0° à 180°.

On voit que les signes de ab, ab'', ab''',... sont respectivement ceux de cos uAB, cos uAB'', cos uAB''',....

17. Soit ABCDEF (fig. 27), un polygone fermé plan ou gauche. Projetons sur le côté AF, prolongé de part et d'autre, tous les autres côtés que nous supposerons décrits dans le sens ABCDEF. — Nous supposerons aussi que TU est le sens positif des projections.

On aura

$$AF = AbcdeF.$$

D'ailleurs en prenant le rayon pour unité on a $Ab = AB \cos UAB$, $bc = BC \cos uBC$, $cd = CD \cos uCD$, $de = DE \cos uDE$, $ef = EF \cos uEF$.

(On suppose Bu , Cu , etc., parallèle à TU et de même sens).

Les droites AB , BC , CD , DE , EF , sont positives, car elles peuvent être assimilées à des distances comptées sur le côté positif d'un axe tournant; leurs projections ont donc les mêmes signes que les cosinus.

Mettant dans la formule $AF = \underline{AbcdeF}$, pour Ab , bc , cd , de , ef , leurs valeurs, il vient

$$AF = AB \cos UAB + BC \cos uBC + CD \cos uCD + DE \cos uDE + EF \cos uEF.$$

Cette formule rentre dans le théorème du n° 4, lorsqu'on regarde AF comme la résultante du périmètre $ABCDEF$ et qu'on projette le périmètre sur la résultante elle-même. C'est le théorème donné par Carnot dans sa *Géométrie de position*, n° 254.

Pour le cas de la figure 28, on a

$$\underline{AbcdefA} = 0$$

Car puisque la projection du point décrivant part du point A pour y revenir en définitive, il est évident que la somme des distances parcourues dans un sens est égale à celle des distances parcourues dans le sens contraire. Ce fait si simple s'exprimera par la formule

$$AB \cos UAB + BC \cos uBC + CD \cos uCD + DE \cos uDE + EF \cos uEF + FA \cos uFA$$

(Carnot, *Ibid.* n° 255).

18. Soient α , β , γ , les angles AOx , AOy , AOz , que la droite AO forme avec le côté positif des trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz (fig. 29), et α' , β' , γ' , les angles formés avec les mêmes axes par la droite OB . On demande d'exprimer l'angle AOB ou δ de ces droites en fonction des angles α , β , γ , α' , β' , γ' . Tous ces angles se comptant positivement de 0° à 180° .

Prenons sur OA une partie OI et achevons le parallépipède rectangle dont OI est la diagonale et qui s'appuie sur les axes. La droite OI fermant le polygone $OCDI$, nous savons (n° 4) que sa projection sur OB est égale à la somme algébrique des projections de OC , CD , et DI sur la même droite.

La projection de OI sur OB sera exprimée par $OI \cos \delta$, et elle tombera sur OB ou sur son prolongement OB' , selon que δ sera aigu ou obtus. Cette circonstance sera indiquée par le signe de $\cos \delta$, ensorte que la projection sera positive lorsqu'elle tombera sur OB , et négative lorsqu'elle tombera sur OB' .

Si l'on mène les droites Cb , Db' , parallèles à OB et de même sens que OB , les projections de OC , CD , DI sur OB , seront exprimées par $OC \cos BOC$ ou $OC \cos \alpha'$.

$$\begin{aligned} & CD \cos b'CD \quad \text{ou} \quad CD \cos \beta' \\ & DI \cos b'DI \quad \text{ou} \quad DI \cos \gamma'. \end{aligned}$$

On a donc par le théorème du n° 4

$$OI \cos \delta = OC \cos \alpha' + CD \cos \beta' + DI \cos \gamma'$$

$$\text{D'ailleurs } OC = OI \cos \alpha, \quad CD = OE = OI \cos \beta, \quad DI = OF = OI \cos \gamma$$

donc

$$OI \cos \delta = OI \cos \alpha \cos \alpha' + OI \cos \beta \cos \beta' + OI \cos \gamma \cos \gamma'.$$

La fig. 29 suppose que les sept angles $\delta, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, sont aigus; mais je vais faire voir que cette formule est générale.

Quelle que soit la direction de OI , par rapport aux axes, on pourra toujours achever le parallélépipède dont OI est la diagonale et qui s'appuie sur les axes. Nous désignerons constamment par OC, OE, OF , les projections de OI sur ces axes, lesquelles pourront, selon les cas, tomber sur le côté positif ou sur le côté négatif de ces axes. Nous appellerons toujours CD l'arête parallèle aux y et consécutive à OC , et DI sera toujours l'arête parallèle aux z , qui du point D aboutit à l'extrémité de OI . (Voir les figures 30 et 31, que l'on pourrait multiplier davantage).

OI faisant, avec l'axe des x , deux angles supplémentaires dont l'un est α , sa projection OC sur cet axe est égale à $OI \cos \alpha$, abstraction faite du signe. OC lui-même fait avec $B'OB$ deux angles supplémentaires dont l'un est α' , dont sa projection sur cette droite est $OC \cos \alpha'$, abstraction faite du signe. Mettant pour OC sa valeur $OI \cos \alpha$, on a enfin

$$OI \cos \alpha \cos \alpha' \quad \text{pour la projection de } OC \text{ sur } B'OB, \text{ abstraction faite du signe.}$$

Or, je dis que cette expression est vraie, en ayant égard aux signes.

En effet, Soient 1° α et α' , tous deux aigus (fig. 32).

L'angle α ou IOx étant aigu, OI se projette en OC sur les x positives et l'angle $BOx = BOC$.

De plus, l'angle $\alpha' = BOx = BOC$ étant aigu, OC se projette sur OB et non sur OB' , et cette projection est ainsi positive. Cette circonstance est indiquée par la règle des signes appliquée à l'expression $OI \cos \alpha$ et $\cos \alpha'$, puisque, dans ce premier cas, $\cos \alpha$ et $\cos \alpha'$ sont tous deux positifs.

Soient 2° α aigu et α' obtus. (fig. 33).

L'angle α ou IOx étant aigu, OC tombe sur les x positives et $BOx = BOC$. Mais l'angle $\alpha' = BOx = BOC$ étant obtus, OC se projette sur OB' et cette projection est négative. Ce résultat est conforme à la règle des signes, puisque $\cos \alpha$ et $\cos \alpha'$ sont de signe contraire.

Soient 3° α est obtus et α' aigu (fig. 34).

L'angle α ou IOx étant obtus, OC tombe sur les x négatives, et $BOC = 180^\circ - BOx$.

L'angle α' ou BOx étant aigu, son supplément BOC est obtus, donc OC se projette sur OB' et cette projection est négative. C'est ce qu'indique encore la formule $OI \cos \alpha \cos \alpha'$, puisque les cosinus sont de signe contraire.

Soient 4^o α et α' tous deux obtus. (fig. 35).

L'angle α ou 10α étant obtus, OC tombe sur les x négatives.

L'angle α' ou $10\alpha'$ étant obtus, son supplément BOC est aigu, donc OC se projette sur OC et cette projection est positive, conformément à la formule $OI \cos \alpha \cos \alpha'$, puisque les cosinus sont de même signe, étant tous deux négatifs.

Examinons maintenant l'expression $OI \cos \beta \cos \beta'$, qui est celle de la projection de CD sur B'OB. On voit facilement que CD étant égale, parallèle et de même sens que OE (figures 29, 30 et 31), les projections de ces deux arêtes du parallélépipède sont égales et de même sens, quoiqu'elles n'occupent pas, en général, la même place sur B'OB.

Or on prouverait, comme ci-dessus, que la projection de OE sur B'OB est toujours égale à $OI \cos \beta \cos \beta'$, en ayant égard aux signes. Donc cette expression sera aussi celle de la projection de CD.

La projection de DI sera égale et de même sens que celle de OF, quoique n'occupant pas en général la même place sur B'OB; et l'on démontrerait encore que cette projection est égale à $OI \cos \gamma \cos \gamma'$, en ayant égard aux signes.

Appelons c , d et i les projections des points C, D, I, sur B'OB.

Oi sera la projection de OI (fig. 36).

Oc celle de OC

cd celle de CD

di celle de DI

et l'on a les formules

$$Oi = OI \cos \delta$$

$$Oc = OI \cos \alpha \cos \alpha'$$

$$cd = OI \cos \beta \cos \beta'$$

$$di = OI \cos \gamma \cos \gamma'$$

dans lesquelles il faut avoir égard aux signes des cosinus et regarder OI comme essentiellement positive.

D'ailleurs on a toujours

$$Oi = Oc + di$$

pour toutes les combinaisons possibles quant à la situation relative des points O, c, d, i, sur la droite B'OB, comme on le voit en fig. 37, où l'on a représenté quelques-unes de ces combinaisons.

Mettant dans la formule

$$Oi = Oc + di$$

pour Oi , Oc , cd , di , les valeurs ci-dessus, que nous avons reconnues pour générales, il vient

$$OI \cos \delta = OI \cos \alpha \cos \alpha' + OI \cos \beta \cos \beta' + OI \cos \gamma \cos \gamma'$$

et divisant par OI on a enfin

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

formule dont la généralité est maintenant démontrée, en ayant égard aux signes des sept cosinus qui y entrent.

19. Soient Ox et Ox' les côtés positifs de deux axes (fig. 37 bis et 37 ter).

Prenons sur Ox une abscisse $Om = x$ et soit $Op = x'$ la projection de Om sur Ox' ; je dis qu'on aura toujours

$$Op = Om \cos xOx' \quad \text{ou} \quad x' = x \cos (xx')$$

en ayant égard aux signes. (Pour l'usage que nous allons faire de cette formule, l'angle xOx' se compte seulement de 0° à 180° , de part et d'autre de Ox).

En effet, 1^o si l'angle xOx' est aigu et par conséquent $\cos xOx'$ positif (fig. 37 bis), l'abscisse positive Om se projette sur les x' positives, et l'abscisse négative Om' sur les x' négatives. La règle des signes sera donc vérifiée dans ce premier cas; car on aura

$$+ = + \times + \quad \text{et} \quad - = - \times +$$

2^o Si l'angle xOx' est obtus (fig. 37 ter) et par conséquent $\cos xOx'$ négatif, l'abscisse positive Om se projette sur les x' négatives et l'abscisse négative Om' sur les x' positives. La règle des signes est donc encore vérifiée sur la formule $x' = x \cos (xx')$, puisqu'on a

$$- = + \times - \quad \text{et} \quad + = - \times -$$

Soient trois axes rectangulaires ou obliques Ox , Oy , Oz et un quatrième axe OB , que nous prendrons pour celui des x' (fig. 29, 30, 31). Soit I un point quelconque de l'espace et achevons le parallépipède dont OI est la diagonale et qui s'appuie sur les axes Ox , Oy , Oz .

Désignons par x , y , z les trois arêtes OC , OE , OF , qui sont en même temps les coordonnées du point I sur ces axes, et par Oi la projection de OI sur l'axe OB ou Ox' . En procédant comme au n^o précédent, on aura (fig. 36 et 37)

$$Oi = Oc di;$$

mais d'après ce qu'on vient de voir, on a, en ayant égard aux signes,

$$Oc = x \cos (xx').$$

De plus, cd , projection de CD , est égale à celle de OE et de même signe, puisque CD et OE sont égales et de même sens; donc

$$cd = y \cos (yx')$$

Enfin di , projection de DI , est égale à celle de OF et de même signe, c'est-à-dire qu'on a

$$di = z \cos (zx') :$$

donc enfin la formule

$$Oi = \frac{Ocdi}{\dots} \quad \text{devient}$$

$$Oi = x \cos (xx') + y \cos (yx') + z \cos (zx')$$

Si l'axe Ox' forme avec deux autres axes Oy' , Oz' , un système rectangulaire et que l'on nomme x' , y' , z' , les coordonnées du point I sur ces axes, on aura

$$Oi = x' \quad \text{et par conséquent}$$

$$x' = x \cos (xx') + y \cos (yx') + z \cos (zx')$$

On aura semblablement

$$y' = x \cos (xy') + y \cos (yy') + z \cos (zy')$$

$$z' = x \cos (xz') + y \cos (yz') + z \cos (zz')$$

Telles sont les formules qui servent à transformer des coordonnées rectangulaires x' , y' , z' , en coordonnées obliques ou rectangulaires x , y , z .

Si les axes Ox , Oy , Oz , sont aussi rectangulaires, on aura, en prenant OI égale à l'unité

$$x = \cos IOx, \quad y = \cos IOy, \quad z = \cos IOz$$

D'ailleurs $x' = \cos IOx'$. Mettant ces valeurs dans la formule

$$x' = x \cos (xx') + y \cos (yx') + z \cos (zx'), \quad \text{il vient}$$

$$\cos IOx' = \cos IOx \cos x'Ox + \cos IOy \cos x'Oy + \cos IOz \cos x'Oz$$

et l'on retrouve ainsi la formule

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'.$$

Équation du plan.

20. La considération des projections conduit très-naturellement à l'équation du plan (*).

Soit KMN (fig. 38) un plan donné de position dont on demande l'équation. Abaissons de l'origine O une perpendiculaire OP sur ce plan, et désignons par α , β , γ , les angles POx , POy , POz , qu'elle fait avec les axes.

Soient x , y , z , les coordonnées d'un point quelconque I du plan. Si l'on achève le parallélépipède dont OI est la diagonale et qui s'appuie sur les axes, on pourra prendre trois arêtes consécutives OC , CD , DI (fig. 36) égales à x , y , z , et qui formeront un contour $OCDI$ dont OI sera la résultante. La projection de ce contour sur OP sera égale

(*) *Leçons de géométrie analytique*, par M. Lefébure de Fourey, N° 538.

à celle de la résultante OI (n° 4); or cette dernière projection est OP puisque l'angle OPI est droit. Si donc on fait $OP=p$, on aura, d'après le n° précédent,

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \quad \text{ou}$$

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

Les projections $x \cos \alpha$, $y \cos \beta$, $z \cos \gamma$ sont celles que nous avons désignées par Oc , cd , di (fig. 36 et 37). Elles sont positives lorsqu'elles sont décrites dans le sens OP , donc OP lui-même ou p est toujours positif, et par conséquent la quantité

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \quad \text{est toujours positive}$$

Les coordonnées x , y , z , étant celles d'un point quelconque du plan MN , l'équation

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

est l'équation de ce plan.

Si on l'écrit ainsi

$$-\frac{\cos \alpha}{p} \cdot x - \frac{\cos \beta}{p} \cdot y - \frac{\cos \gamma}{p} \cdot z + 1 = 0 \quad (*)$$

et qu'on fasse pour abréger

$$-\frac{\cos \alpha}{p} = A, \quad -\frac{\cos \beta}{p} = B, \quad -\frac{\cos \gamma}{p} = C \quad (1)$$

elle prendra la forme

$$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

qui est celle que prend l'équation la plus générale du premier degré à trois variables.

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

lorsqu'on la divise par D' et qu'on fait

$$\frac{A'}{D'} = A, \quad \frac{B'}{D'} = B, \quad \frac{C'}{D'} = C$$

Si on élève les équations (1) au carré et qu'on les ajoute, on aura

$$\frac{1}{p^2} = A^2 + B^2 + C^2$$

$$\text{à cause de} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Donc

$$p = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Nous prenons le radical avec le signe plus, parce que nous savons que p est positif.

(*) Lacroix. *Calcul différentiel*, tome I, page 506.

On a donc, en vertu des équations (1),

$$\cos \alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ces formules donnent sans ambiguïté les angles que fait avec les axes la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan dont l'équation est

$$Ax + By + Cz + 1 = 0 ;$$

nous entendons par là la partie OP de cette perpendiculaire et non son prolongement en sens contraire.

En effet, lorsque le plan donné coupe l'axe des z du côté des z positives comme en K (fig. 38), le triangle OPK étant rectangle en P, l'angle KOP est aigu ; mais alors KOP = ZOP = γ donc alors γ est aigu. Au contraire, lorsque le plan donné coupe l'axe des z du côté négatif, la droite OP fait un angle aigu avec le côté des z négatives, et par conséquent le supplément de cet angle, savoir γ , est obtus.

OK étant la valeur de z qui correspond à $x=0$ et $y=0$, on trouve

$$OK = -\frac{1}{C}$$

Lorsque C est positif OK est négatif, et par conséquent γ est obtus, et lorsque C est négatif, OK est positif et γ est aigu. On voit donc que C et $\cos \gamma$ sont toujours de ligne contraire.

Donc la formule $\cos \gamma = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ est vraie quant au signe.

On prouverait la même chose pour les formules

$$\cos \alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{et} \quad \cos \beta = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Nous avons donc raison de dire que ces formules donnent, sans ambiguïté, les angles que la perpendiculaire OP fait avec les côtés positifs des axes.

Démonstration générale des formules

$$\sin (\omega + 90^{\circ}) = \cos \omega$$

$$\cos (\omega + 90^{\circ}) = -\sin \omega$$

21. Soit $AB = \omega$ (fig. 39) l'arc directeur correspondant à la position CB de l'axe des r positives. Prenons BI égal à un quadrans, ensuite que CI soit le côté positif de l'axe des s conjugué de CB. Abaissons BG et IK perpendiculaires sur l'axe des abscisses, et BE, perpendiculaire sur l'axe des ordonnées. Faisons les mêmes constructions dans les fig. 40, 41, 42, relativement aux arcs $AB'' = \omega''$, $AB''' = \omega'''$, $AB^N = \omega^N$, en accentuant convenablement les lettres.

Il est facile de voir qu'on aura

$$\text{l'angle } ICK = BCE \quad (\text{fig. 39})$$

$$I''CK'' = B''CE'' \quad (\text{fig. 40})$$

$$I'''CK''' = B'''CE''' \quad (\text{fig. 41})$$

$$I^NCK^N = B^NCE^N \quad (\text{fig. 42})$$

Ainsi les triangles rectangles ICK et BCE, $I''CK''$ et $B''CE''$, $I'''CK'''$ et $B'''CE'''$, I^NCK^N et B^NCE^N sont égaux. On a donc, abstraction faite des signes,

$$\begin{array}{ll} KI = EB & CK = CE \\ K''I'' = E''B'' & CK'' = CE'' \\ K'''I''' = E'''B''' & CK''' = CE''' \\ K^NI^N = E^NB^N & CK^N = CE^N \end{array}$$

et pour avoir égard aux signes, on remarquera que

KI est une ordonnée positive et EB une abscisse positive

$K''I''$ une ordonnée négative et $E''B''$ une abscisse négative

$K'''I'''$ une ordonnée négative et $E'''B'''$ une abscisse négative

K^NI^N une ordonnée positive et E^NB^N une abscisse positive.

donc KI considérée comme abscisse est de même signe que EB considérée comme ordonnée et ainsi des autres; or

$$\left. \begin{array}{ll} KI = \sin (\omega + 90^{\circ}), & EB = \cos \omega \\ K''I'' = \sin (\omega'' + 90^{\circ}), & E''B'' = \cos \omega'' \\ K'''I''' = \sin (\omega''' + 90^{\circ}), & E'''B''' = \cos \omega''' \\ K^NI^N = \sin (\omega^N + 90^{\circ}), & E^NB^N = \cos \omega^N \end{array} \right\} (a)$$

On a donc en ayant égard aux signes

$\sin(\omega + 90^\circ) = \cos \omega$, quelle que soit la valeur de ω .

$\underline{CK}$ et $\underline{CK''}$ sont des abscisses négatives, $\underline{CE}$ et $\underline{CE''}$ des ordonnées positives

$\underline{CK'''} et \underline{CK^{IV}}$ sont des abscisses positives, $\underline{CE'''} et \underline{CE^{IV}}$ des ordonnées négatives.

Donc $\underline{CK}$ considérée comme abscisses est de signe contraire à $\underline{CE}$ considérée comme ordonnée, et ainsi des autres; or

$$\left. \begin{aligned} \underline{CK} &= \cos(\omega + 90^\circ), & \underline{CE} &= \sin \omega \\ \underline{CK''} &= \cos(\omega'' + 90^\circ), & \underline{CE''} &= \sin \omega'' \\ \underline{CK'''} &= \cos(\omega''' + 90^\circ), & \underline{CE'''} &= \sin \omega''' \\ \underline{CK^{IV}} &= \cos(\omega^{IV} + 90^\circ), & \underline{CE^{IV}} &= \sin \omega^{IV} \end{aligned} \right\} (b)$$

On a donc en ayant égard aux signes

$$\cos(\omega + 90^\circ) = -\sin \omega \quad \text{quelle que soit la valeur de l'arc } \omega.$$

Les formules (a) et (b) s'appliquent également aux arcs positifs

$$\omega = \underline{AB}, \quad \omega'' = \underline{AB''}, \quad \omega''' = \underline{AB'''}, \quad \omega^{IV} = \underline{AB^{IV}} \quad \text{et aux}$$

$$\text{arcs négatifs} \quad \omega = \underline{AmB}, \quad \omega'' = \underline{AmB''}, \quad \omega''' = \underline{AmB'''}, \quad \omega^{IV} = \underline{AmB^{IV}}.$$

Lorsque ω est négatif, on entend par $\omega + 90^\circ$ l'arc $\underline{AmBI}$ composé de la partie négative $\underline{AmB}$ et de la partie positive $\underline{BI}$ ou 90° ; de même $\omega'' + 90^\circ$ signifie $\underline{AmB''I''}$ et ainsi des autres.

Ainsi les formules

$$\begin{aligned} \sin(\omega + 98^\circ) &= \cos \omega \\ \cos(\omega + 90^\circ) &= -\sin \omega \end{aligned}$$

s'appliquent à toutes les valeurs de ω , positives ou négatives.

Des projections sur les x et sur les y, d'un rayon vecteur r et d'un rayon vecteur s.

22. Si l'on désigne par x et y les coordonnées rectangulaires d'un point situé dans le plan des $x y$, par δ son rayon vecteur, par $\underline{AB}$ l'arc directeur de ce rayon vecteur, et par R le rayon trigonométrique, on a, (n° 14)

$$x : \delta :: \cos \underline{AB} : R$$

$$y : \delta :: \sin \underline{AB} : R$$

proportions qui ont lieu, quel que soit l'arc directeur, positif ou négatif, en ayant égard aux signes de x , y , δ , $\sin \underline{AB}$, $\cos \underline{AB}$.

Le rayon vecteur δ est positif ou négatif selon qu'il se compte, à partir de l'origine, sur le côté positif ou sur le côté négatif de l'axe tournant des r . Le côté positif de cet axe étant celui qui passe par l'extrémité de son arc directeur AB.

Ces proportions donnent

$$x = \frac{\delta \cos AB}{R}$$

$$y = \frac{\delta \sin AB}{R}$$

Si l'on désigne l'arc directeur par ω , le rayon vecteur par r , et si l'on fait $R=1$, ces formules s'écriront ainsi

$$x = r \cos \omega,$$

$$y = r \sin \omega.$$

Prenons un point sur l'axe des s , et désignons par X et Y , ses coordonnées, et par s son rayon vecteur compté sur l'axe tournant des s , on aura

$$X = s \cos (\omega + 90^\circ)$$

$$Y = s \sin (\omega + 90^\circ)$$

Car $\omega + 90^\circ$ est l'arc directeur de l'axe des s .

Mettant pour $\cos (\omega + 90^\circ)$ sa valeur $-\sin \omega$, et pour $\sin (\omega + 90^\circ)$ sa valeur $\cos \omega$, (n° 21) il vient

$$X = -s \sin \omega$$

$$Y = s \cos \omega.$$

On a donc

$$(A) \dots \left\{ \begin{array}{l} r \cos \omega \dots\dots\dots \text{projection sur les } x \\ r \sin \omega \dots\dots\dots \text{projection sur les } y \end{array} \right\} \text{ d'un rayon vecteur } r \text{ pris sur l'axe des } r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -s \sin \omega \dots\dots \text{projection sur les } x \\ s \cos \omega \dots\dots\dots \text{projection sur les } y \end{array} \right\} \text{ d'un rayon vecteur } s \text{ pris sur l'axe des } s.$$

L'arc ω , qui peut être positif ou négatif est dans ces quatre formules l'arc directeur du côté positif de l'axe des r , ensuite que $\omega + 90^\circ$ est l'arc directeur du côté positif de l'axe des s . Il faut avoir égard aux signes de r , s , $\sin \omega$, $\cos \omega$.

Deux droites égales, parallèles et de même sens, ayant des projections égales et de même sens, les deux premières formules (A) s'appliquent à toute droite $\overline{ab}=r$ menée parallèlement à l'axe des r et qui sera positive ou négative selon qu'elle sera décrite de a en b dans le sens positif ou négatif des r . De même les deux dernières formules s'appliquent à toute droite $\overline{cd}=s$ menée parallèlement à l'axe des s , et qui sera positive ou négative selon qu'elle sera décrite de c en d dans le sens positif ou négatif des s .

La projection de $\overline{ab}$ sur les x est positive ou négative selon que, pour aller de la projection de a à la projection de b , on marche dans le sens positif ou négatif des x , et ainsi des autres projections.

Les quatre formules (A) qui sont fondamentales, nous seront très utiles.

Transformation des coordonnées sur un plan, au moyen d'un seul angle.

25. Soient toujours deux systèmes d'axes rectangulaires, Ox et Oy d'une part et Or , Os d'autre part, situés dans un même plan et rapportés à la même origine (fig. 43).

Soit M un point quelconque du plan de ces axes, et soient $OP=x$, $OQ=y$, $OE=r$, $EM=s$, ses coordonnées.

OP étant la projection de OM sur l'axe des x , est égale à la somme algébrique des projections des parties OE et EM de la ligne brisée OEM dont OM est la résultante.

On a donc

$$OP = OE \cos \omega + EM \sin \omega$$

mais OE étant un rayon vecteur sur l'axe des r , on a pour sa projection sur les x ,

$$Oe = OE \cos \omega = r \cos \omega$$

en désignant toujours par ω l'angle des r positives et des x positives.

EM étant parallèle à l'axe des s , on a pour sa projection sur les x

$$eP = -EM \sin \omega = -s \sin \omega.$$

donc

$$x = OP = OeP = r \cos \omega - s \sin \omega.$$

y ou OQ étant la projection de OM sur l'axe des y , est égale à la somme des projections de OE et EM , c'est-à-dire qu'on a

$$OQ = OeQ + eQ$$

Mais

$$Oe = OE \sin \omega = r \sin \omega$$

$$eQ = EM \cos \omega = s \cos \omega$$

donc

$$y = OeQ + eQ = r \sin \omega + s \cos \omega.$$

Les deux formules

$$x = r \cos \omega - s \sin \omega$$

$$y = r \sin \omega + s \cos \omega$$

sont donc générales, c'est-à-dire qu'elles ont lieu quelle que soit la position du point M dans le plan des coordonnées et quelle que soit la valeur de l'angle ω , positive ou négative.

Du sinus et du cosinus de la somme algébrique de deux arcs.

24. Représentons par $\overline{ABN}$ la somme algébrique de deux arcs $\overline{AB}$, $\overline{BN}$, positifs ou négatifs (fig. 44). Abaissons ND perpendiculaire sur CB, NS et DO perpendiculaires sur l'axe des x , et DI perpendiculaire sur SN.

Le cosinus de $\overline{ABN}$ est CS qui est la projection de CN sur les x . Le sinus de $\overline{ABN}$ est SN, égale à la projection de CN sur les y .

Or, ces projections sont égales à la somme algébrique des projections de CD et DN. On a donc

$$\begin{aligned}\cos \overline{ABN} &= CS = \cos \\ \sin \overline{ABN} &= SN = \sin\end{aligned}$$

Voyez les figures 45, 46, 47, 48.

Faisant pour abréger $\overline{AB} = a$, $\overline{BN} = b$, (les arcs a et b pouvant être positifs ou négatifs) il vient

$$\begin{aligned}\cos \overline{ABN} &= \cos (a + b) = \cos \\ \sin \overline{ABN} &= \sin (a + b) = \sin.\end{aligned}$$

Prenons CB (fig. 44) pour le côté positif de l'axe des r , et sa perpendiculaire Cs pour le côté positif de l'axe des s , ensorte que a sera l'arc directeur des r .

CD étant sur l'axe des r et DN étant parallèle à l'axe des s , on a

$\overline{CO} = \overline{CD} \cos a$	d'après la formule $r \cos \omega$
$\overline{OS} = - \overline{DN} \sin a$	" " $- s \sin \omega$
$\overline{SI} = \overline{CD} \sin a$	" " $r \sin \omega$
$\overline{IN} = \overline{DN} \cos a$	" " $s \cos \omega$

Il faut dans ces formules avoir égard au signe de chaque facteur.

Donc

$$\begin{aligned}\cos &= \overline{CD} \cos a - \overline{DN} \sin a \\ \sin &= \overline{CD} \sin a + \overline{DN} \cos a\end{aligned}$$

Mais $\overline{CD} = \cos b$ et $\overline{DN} = \sin b$, valeurs générales quel que soit l'arc b positif ou négatif, (fig. 45, 46, 47, 48); donc

$$\begin{aligned}\cos (a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin (a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a\end{aligned}$$

formules générales, quelles que soient les valeurs de a et b , positives ou négatives.

C'est ce que montrent nos figures dont chacune contient quatre cas relatifs aux arcs ABN' , ABN'' , ABN''' , ABN'''' , et chacun de ces cas en contient à son tour quatre autres, car ABN (fig. 49), par exemple, signifie

- 1° AMB (positif) + BON (positif)
- 2° AMB (pos) + $BMAPN$ (négatif)
- 3° $APNOB$ (nég) + BON (pos)
- 4° $APNOB$ (nég) + $BMAPN$ (nég).

ainsi chaque figure représente seize cas différents.

Les figures 50, 51, 52 et 53, se rapportent à des cas particuliers.

En fig. 50 on a $ABN=90^\circ$, $\sin=1$, $\cos=0$

OS est égale et de signe contraire à CO

fig. 51 $ABN=18^\circ$, $\sin=0$, $\cos=-1$

fig. 52 $ABN=270^\circ$, $\sin=-1$, $\cos=0$

fig. 53 $ABN=360^\circ$, $\sin=0$, $\cos=1$

Si l'on désigne par α et β les valeurs absolues de deux arcs, ou des nombres positifs de degrés, les formules

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

contiennent toutes les suivantes.

$$\sin(+\alpha+\beta) = \sin(+\alpha) \cos(+\beta) + \sin(+\beta) \cos(+\alpha). \quad (1)$$

$$\sin(+\alpha-\beta) = \sin(+\alpha) \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos(+\alpha). \quad (2)$$

$$\sin(-\alpha+\beta) = \sin(-\alpha) \cos(+\beta) + \sin(+\beta) \cos(-\alpha). \quad (3)$$

$$\sin(-\alpha-\beta) = \sin(-\alpha) \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos(-\alpha). \quad (4)$$

$$\cos(+\alpha+\beta) = \cos(+\alpha) \cos(+\beta) - \sin(+\alpha) \sin(+\beta). \quad (5)$$

$$\cos(+\alpha-\beta) = \cos(+\alpha) \cos(-\beta) - \sin(+\alpha) \sin(-\beta). \quad (6)$$

$$\cos(-\alpha+\beta) = \cos(-\alpha) \cos(+\beta) - \sin(-\alpha) \sin(+\beta). \quad (7)$$

$$\cos(-\alpha-\beta) = \cos(-\alpha) \cos(-\beta) - \sin(-\alpha) \sin(-\beta). \quad (8)$$

On fait surtout usage des formules (1), (2), (5) et (6), et à cause de

$\sin(-\beta) = -\sin \beta$ et de $\cos(-\beta) = \cos \beta$, on les écrit ainsi

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

Dans ces dernières formules (B), on suppose ordinairement α et β positifs; mais elles sont encore vraies en supposant α négatif, ou β négatif, ou α et β tous deux négatifs. En effet il est facile de voir que l'une de ces suppositions faite sur l'une de ces quatre formules, la transformera en l'une des huit précédentes.

Voici des cas particuliers qu'il est bon de noter.

Si l'on fait $\alpha=90^\circ$, il viendra à cause de $\sin 90^\circ=1$: et $\cos 90^\circ=0$

$$\sin (90^\circ + \beta) = \cos \beta$$

$$\sin (90^\circ - \beta) = \cos \beta$$

$$\cos (90^\circ + \beta) = -\sin \beta$$

$$\cos (90^\circ - \beta) = \sin \beta$$

La première et la troisième ont été démontrées directement au n° 21 et ont été le point de départ pour les formules générales.

Faisant $\alpha=180^\circ$, il vient à cause de $\sin 180^\circ=0$ et $\cos 180^\circ=-1$

$$\sin (180^\circ + \beta) = -\sin \beta$$

$$\sin (180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

$$\cos (180^\circ + \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos (180^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

Faisant $\alpha=270^\circ$, on aura, à cause de $\sin 270^\circ=-1$, et $\cos 270^\circ=0$

$$\sin (270^\circ + \beta) = -\cos \beta$$

$$\sin (270^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos (270^\circ + \beta) = \sin \beta$$

$$\cos (270^\circ - \beta) = -\sin \beta$$

Enfin $\alpha=360^\circ$, donnant $\sin 360^\circ=0$ et $\cos 360^\circ=1$ il vient

$$\sin (360^\circ + \beta) = \sin \beta$$

$$\sin (360^\circ - \beta) = -\sin \beta$$

$$\cos (360^\circ + \beta) = \cos \beta$$

$$\cos (360^\circ - \beta) = \cos \beta$$

23. Deux angles dont la somme est égale à 90° sont *complémens* l'un de l'autre. Tels sont les angles β et $90^\circ - \beta$. Si l'un d'eux est plus grand que 90° l'autre est négatif.

Deux angles dont la somme est égale à 180° sont *supplémens* l'un de l'autre, comme β et $180^\circ - \beta$. Si l'un est plus grand que 180° , l'autre est négatif.

Deux angles dont la somme est égale à 360° sont *reverses* (*) l'un de l'autre et si l'un est plus grand que 360° , l'autre sera négatif.

(*) Cette dénomination employée par Stévin est rappelée par Leslie dans sa *Géométrie*.

On a donc les formules

$$\left. \begin{array}{l} \sin (90^\circ - \beta) = \cos \beta \\ \cos (90^\circ - \beta) = \sin \beta \end{array} \right\} \text{ pour les angles complémentaires.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin (180^\circ - \beta) = \sin \beta \\ \cos (180^\circ - \beta) = -\cos \beta \end{array} \right\} \text{ pour les angles supplémentaires.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin (360^\circ - \beta) = -\sin \beta \\ \cos (360^\circ - \beta) = \cos \beta \end{array} \right\} \text{ pour les angles reverses.}$$

Comme elles sont tirées des formules (B) qui sont générales quant à α et β , elles sont donc générales quant à β . On suppose ordinairement que β est positif.

En vertu des formules suivantes données au n° 13.

$$\operatorname{tang} a = \frac{R \sin a}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{R \cos a}{\sin a},$$

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\sin a}$$

On a encore

$$\operatorname{tang} (90^\circ - \beta) = \frac{R \sin (90^\circ - \beta)}{\cos (90^\circ - \beta)} = \frac{R \cos \beta}{\sin \beta} = \cot \beta$$

$$\sec (90^\circ - \beta) = \frac{R^2}{\cos (90^\circ - \beta)} = \frac{R^2}{\sin \beta} = \operatorname{cosec} \beta$$

$$\cot (90^\circ - \beta) = \frac{R \cos (90^\circ - \beta)}{\sin (90^\circ - \beta)} = \frac{R \sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tang} \beta$$

$$\operatorname{cosec} (90^\circ - \beta) = \frac{R^2}{\sin (90^\circ - \beta)} = \frac{R^2}{\cos \beta} = \sec \beta$$

} pour les
angles
complémentaires.

Les formules relatives aux angles complémentaires font ordinairement l'objet d'une simple définition ; mais j'ai préféré considérer le cosinus, la cotangente et la cosécante d'un angle a comme appartenant directement à cet angle et non à $90^\circ - a$. Cela paraît d'autant plus convenable que l'angle $90^\circ - a$ peut être négatif, ce qui rend nécessaire la démonstration générale de ces formules.

$$\text{tang } (180^\circ - \beta) = \frac{R \sin (180^\circ - \beta)}{\cos (180^\circ - \beta)} = \frac{R \sin \beta}{-\cos \beta} = -\text{tang } \beta$$

$$\text{sec } (180^\circ - \beta) = \frac{R^2}{\cos (180^\circ - \beta)} = \frac{R^2}{-\cos \beta} = -\text{sec } \beta$$

$$\text{cot } (180^\circ - \beta) = \frac{R \cos (180^\circ - \beta)}{\sin (180^\circ - \beta)} = \frac{-R \cos \beta}{\sin \beta} = -\text{cot } \beta$$

$$\text{cosec } (180^\circ - \beta) = \frac{R^2}{\sin (180^\circ - \beta)} = \frac{R^2}{\sin \beta} = \text{cosec } \beta$$

} pour les
angles
supplémentaires.

$$\text{tang } (360^\circ - \beta) = \frac{R \sin (360^\circ - \beta)}{\cos (360^\circ - \beta)} = \frac{-R \sin \beta}{\cos \beta} = -\text{tang } \beta$$

$$\text{sec } (360^\circ - \beta) = \frac{R^2}{\cos (360^\circ - \beta)} = \frac{R^2}{\cos \beta} = \text{sec } \beta$$

$$\text{cot } (360^\circ - \beta) = \frac{R \cos (360^\circ - \beta)}{\sin (360^\circ - \beta)} = \frac{R \cos \beta}{-\sin \beta} = -\text{cot } \beta$$

$$\text{cosec } (360^\circ - \beta) = \frac{R^2}{\sin (360^\circ - \beta)} = \frac{R^2}{-\sin \beta} = -\text{cosec } \beta$$

} pour les
angles
reverses.

CHAPITRE VI.

DE LA FORMULE FONDAMENTALE DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

26. Il y a six choses à considérer dans une pyramide triangulaire AOB (fig. 55) savoir les trois angles AOB, AOC, BOC formés par les arêtes et les trois angles dièdres formés par les faces.

Si l'œil d'un observateur est au sommet de la pyramide et si les arêtes sont dirigées sur trois points déterminés du ciel, on comprend l'importance du problème qui consiste à déterminer trois de ces six angles au moyen des trois autres. La solution de toutes les combinaisons que peut offrir ce problème est l'objet de la trigonométrie sphérique.

Si l'on place le sommet O de la pyramide au centre d'une sphère, la pyramide en coupera la surface selon un triangle sphérique ABC, dont les côtés sont des arcs ayant respectivement les mêmes nombres de degrés que les angles AOB, AOC, BOC, et dont les angles A, B, C ont les mêmes nombres de degrés que les angles dièdres de la pyramide.

On entend par l'angle A, l'angle formé par les tangentes AE, AD menées aux arcs AB et AC, et ainsi des autres.

On désigne par a, b, c les côtés du triangle opposés aux angles A, B, C.

Ces six quantités sont exprimées en degrés, et le rayon de la sphère est pris pour rayon trigonométrique.

En considérant le triangle sphérique au lieu de la pyramide, on peut dire que la trigonométrie sphérique consiste à déterminer trois des six quantités a, b, c, A, B, C , au moyen des trois autres.

Les formules dont on a besoin peuvent toutes se déduire de celle-ci :

$$R^2 \cos a = R \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

ou simplement

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

en faisant $R=1$.

Il importe donc de démontrer cette formule dans toute sa généralité.

Si dans un triangle rectiligne ABC (fig. 54) on abaisse AD perpendiculaire sur BC, on a

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 BC \times CD$$

en prenant le signe supérieur lorsque l'angle C est aigu et le signe inférieur lorsque cet angle est obtus. (Legendre. Géom. Liv. III, propos. 12 et 13).

$$\begin{array}{ll} \text{Dans le premier cas on a} & CD = AC \cos ACB \\ \text{dans le second cas on a} & CD = AC \cos ACD = -AC \cos ACB \end{array}$$

par conséquent la formule

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 BC \times AC \cos ACB$$

répond aux deux cas, si l'on a égard au signe du cosinus.

Il ne s'agit ici que des valeurs absolues des côtés du triangle; en d'autres termes, les lignes AB, AC, BC sont essentiellement positives.

Soit ABC (fig. 55) un triangle sphérique, dont les côtés a, b, c sont opposés respectivement aux angles A, B, C.

Soit O le centre de la sphère. Menons AE et AD tangentes aux arcs AB et AC, et soient E et D les points de rencontre de ces tangentes avec les rayons OB et OC prolongés. (Carnot. Géom. de position. n° 342).

Nous supposerons d'abord les côtés b et c moindres que 90° .

Les triangles DOE et DAE donnent.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 OD \times OE \cos DOE \\ \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 AD \times AE \cos DAE \end{array} \right\} \dots \dots (a)$$

retranchant la seconde de ces équations de la première et observant que les triangles OAD et OAE, rectangles en A, donnent

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2, \quad \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{OA}^2, \quad \text{il vient}$$

$$0 = 2 \overline{OA}^2 - 2 OD \cdot OE \cos DOE + 2 AD \cdot AE \cos DAE$$

$$\text{ou} \quad OD \cdot OE \cos DOE = \overline{OA}^2 + AD \cdot AE \cos DAE$$

divisant par OD. OE il vient

$$\cos DOE = \frac{OA}{OD} \cdot \frac{OA}{OE} + \frac{AD}{OD} \cdot \frac{AE}{OE} \cos DAE \dots \dots (b)$$

Les côtés des triangles DOE et DAE étant dans les formules (a) essentiellement positifs, il s'ensuit que les quatre facteurs $\frac{OA}{OD}, \frac{OA}{OE}, \frac{AD}{OD}, \frac{AE}{OD}$, sont essentiellement positifs.

L'arc a étant la mesure de l'angle DOE (fig. 55), et l'angle DAE n'étant autre chose que l'angle A du triangle sphérique, on a

$$\cos DOE = \cos a, \quad \cos DAE = A$$

De plus les triangles OAD et OAE rectangles en A, donnent

$$\frac{OA}{OD} = \cos AOD = \cos b, \quad \frac{AD}{OD} = \sin AOD = \sin b$$

$$\frac{OA}{OE} = \cos AOE = \cos c, \quad \frac{AE}{OE} = \sin AOE = \sin c$$

les arcs b et c étant ici moindres qu'un quadrans, ces nouvelles expressions de ces quatre facteurs sont encore positives.

D'après ces valeurs, l'équation (b) devient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \dots (c)$$

Les équations (a) étant générales par rapport aux angles DOE et DAE, dans les limites de 0° à 180° , il s'en suit que la formule (c) est générale par rapport à a et A dans les mêmes limites.

Nous allons d'abord prouver qu'elle est générale par rapport à b et à c dans les mêmes limites.

Soit premièrement b compris entre 90° et 180° et c toujours moindre qu'un quadrans. Alors ce sera le rayon OC prolongé en arrière qui rencontrera la tangente AD. (fig. 56).

Les lettres étant les mêmes qu'à la fig. 55, le texte ci-dessus s'applique encore à notre figure actuelle jusqu'à l'équation

$$\cos DOE = \frac{OA}{OD} \cdot \frac{OA}{OE} + \frac{AD}{OD} \cdot \frac{AE}{OE} \cos DAE \dots (b)$$

dans laquelle les quatre facteurs $\frac{OA}{OD}$, $\frac{OA}{OE}$, $\frac{AD}{OD}$, $\frac{AE}{OE}$ sont toujours essentiellement positifs.

On a dans la fig. 56, en supposant les angles et les arcs exprimés en degrés,

$$DOE = 180^\circ - BOC = 180^\circ - a, \quad \text{d'où } \cos DOE = -\cos a$$

$$DAE = 180^\circ - A, \quad \text{d'où } \cos DAE = -\cos A$$

$$AOD = 180^\circ - AOC = 180^\circ - b$$

$$\frac{OA}{OD} = \cos AOD = -\cos b$$

$$\frac{AD}{OD} = \sin AOD = \sin b$$

$$\frac{OA}{OE} = \cos AOE = \cos c$$

$$\frac{AE}{OE} = \sin AOE = \sin c$$

Ces nouvelles valeurs de ces facteurs sont encore positives. Ainsi b étant compris entre 90° et 180° , $\cos b$ est négatif et par conséquent $-\cos b$ est positif.

L'équation (b) devient

$$-\cos a = (-\cos b) \times \cos c + \sin b \sin c \times (-\cos A)$$

et en changeant les signes de tous les termes

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Soient b et c compris l'un et l'autre entre 90° et 180° (fig. 57). Les deux tangentes AD et AE sont alors rencontrées par les prolongemens, en arrière, des rayons OC et OB.

On arrive toujours comme ci-dessus à l'équation.

$$\cos DOE = \frac{OA}{OD} \cdot \frac{OA}{OE} + \frac{AD}{OD} \cdot \frac{AE}{OE} \cos DAE \dots \dots (b)$$

Mais alors

$$DOE = BOC = a \quad \text{comme angles opposés au sommet}$$

$$DAE = A \quad \text{par la même raison.}$$

$$AOD = 180^\circ - AOC = 180^\circ - b$$

$$AOE = 180^\circ - AOB = 180^\circ - c$$

$$\frac{OA}{OD} = \cos AOD = -\cos b$$

$$\frac{AD}{OD} = \sin AOD = \sin b$$

$$\frac{OA}{OE} \cos AOE = -\cos c$$

$$\frac{AE}{OE} = \sin AOE = \sin c$$

ces quatre valeurs sont encore positives, car b et c étant entre 90° et 180° , $\cos b$, $\cos c$ sont négatifs, et par conséquent $-\cos b$, $-\cos c$ sont positifs.

Au moyen de ces valeurs l'équation (b) devient

$$\cos a = (-\cos b) (-\cos c) + \sin b \sin c \cos A$$

$$\text{ou} \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Cette formule est maintenant démontrée générale quant à a , b , c , A dans les limites 0° et 180° .

Montrons maintenant que a et A peuvent s'étendre de 180° à 360° , sans que la formule cesse d'être vraie.

Soit ABC (fig. 58) un triangle dans les limites admises, c'est-à-dire dans lequel a , b , c , A , sont compris entre 0° et 180° .

Si l'on achève la circonférence BCMB, on aura un triangle dont les côtés sont AB, AC et BMC = $360^\circ - BC$. L'angle opposé à BMC est $A' = 360^\circ - A$, les deux autres angles du triangle sont ABM et ACM.

Le triangle ABC, qui est dans les limites admises, donne

$$\cos BC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A$$

Or les arcs BMC et BC étant *reverses* l'un de l'autre, ainsi que les angles A, et A', on a

$$\cos BMC = \cos BC, \text{ et } \cos A' = \cos A$$

On a donc

$$\cos BMC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A'$$

qui est la formule (c) étendue au triangle BMCA' dans lequel l'angle A' et le côté opposé BMC sont compris entre 180° et 360° .

Si l'on retranche de la surface de la sphère le triangle BMCA' que nous venons de considérer, on aura un triangle dont les côtés seront les mêmes; mais dont les angles seront A, $360^\circ - ABM$, $360^\circ - ACM$.

Or si dans la formule

$$\cos BC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A$$

qui se rapporte au triangle ABC, on remplace cos BC par son égal cos BMC, on aura

$$\cos BMC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A$$

qui s'applique au triangle que nous considérons et dans lequel l'angle A est $< 180^\circ$ et le côté opposé BMC $> 180^\circ$.

Si l'on retranche de la surface de la sphère le triangle ABC, on aura un triangle dont les côtés seront AB, AC, BC et dont les angles seront $A' = 360^\circ - A$, $360^\circ - B$, $360^\circ - C$.

En partant toujours de la formule

$$\cos BC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A$$

on remplacera cos A par son égal cos A' et il viendra

$$\cos BC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A'$$

applicable au triangle en question dans lequel l'angle A' est $> 180^\circ$ et le côté opposé BC $< 180^\circ$.

Étendons maintenant la formule au cas où le côté b est compris entre 180° et 360° , c étant toujours au-dessous de 180° .

Soit le triangle ABC (fig. 59) qui est dans les limites admises et qui donne

$$\cos BC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A$$

Menons le diamètre COD et achevons la demi-circonférence CBD. Considérons le triangle dont les côtés sont AB, BD et ACD, ce dernier étant plus grand que 180° . On aura

$$BC = 180^\circ - BD, \quad \cos BC = -\cos BD$$

$$ACD = AC + 180^\circ, \quad \cos AC = -\cos ACD, \quad \sin AC = -\sin ACD$$

Mettant en valeur dans l'équation précédente, il vient

$$-\cos BD = (-\cos ACD) \cdot \cos AB + (-\sin ACD) \cdot \sin AB \cos A$$

ou $\cos BD = \cos ACD \cos AB + \sin ACD \sin AB \cos A$

faisant $BD = a$ puisque ce côté est opposé à A , l'arc $ACD = b$, et $AB = c$,
il vient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

qui s'applique au triangle $ABDCA$, dont le côté ACD est dans les limites de 180° à 360° puisque AC est dans celles de 0° à 180° , et que $ACD = AC + 180^\circ$.

Soit le triangle ABC (fig. 60) dans lequel les côtés AB et AC sont compris entre 0° et 180° .

Menons les diamètres COD et BOF et nous aurons une figure composée du fuseau $ABA'CA$ et du triangle $DA'F$. Si l'on assimile cette figure à un triangle dont les côtés seraient ACD , ABF et DG , la formule s'y appliquera encore. En effet le triangle ABC donne

$$\cos BC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \cos A$$

Or on a

$$ACD = 180^\circ + AC, \quad ABF = 180^\circ + AB$$

$DF = BC$ comme mesurant les angles DOF , BOC opposés au sommet.

donc

$$\begin{aligned} \cos BC &= \cos DF, & \cos AC &= -\cos ACD, & \cos AB &= -\cos ABF \\ \sin AC &= -\sin ACD, & \sin AB &= -\sin ABF \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$\cos DF = (-\cos ACD) (-\cos ABF) + (-\sin ACD) (-\sin ABF) \cos A$$

ou $\cos DF = \cos ACD \cos ABF + \sin ACD \sin ABF \cos A$

posant $DF = a$, $ACD = b$, $ABF = c$, il vient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

où les côtés b et c sont tous deux compris entre 180° et 360° .

Voilà donc notre formule reconnue vraie pour des triangles, ou des figures composées d'un fuseau et d'un triangle, et dans les limites de 0° à 360° pour a , b , c , A .

Mais m étant un nombre entier quelconque, on a

$$\sin [(m \times 360^\circ) + a] = \sin a \quad \text{et} \quad \cos [(m \times 360^\circ) + a] = \cos a$$

On peut donc augmenter les quantités a , b , c et A d'un nombre $m \times 360^\circ$ de degrés sans que la formule cesse d'être vraie.

On a donc ce théorème bien général :

Etant donnés deux arcs de grands cercles AC, AB qui se coupent en A sous un angle quelconque, si l'on prend sur AC et AB, à partir de A, deux arcs b et c d'une grandeur quelconque et si l'on joint les extrémités de ces arcs par un arc de grand cercle a , la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

sera toujours vraie.

La figure relative à cette formule pourra être ou un triangle sphérique, ou un nombre quelconque de fuseaux plus un triangle. Les fuseaux de rang impair se recouvriront les uns les autres ainsi que les fuseaux de rang pair.

Le triangle joint aux fuseaux pourra être nul et la figure se réduire à un ou plusieurs fuseaux. Par exemple si $b=c=180^\circ$, la figure se réduira à un fuseau. Comme on a alors $\cos b = \cos c = -1$ et $\sin b = \sin c = 0$, la formule donne

$$\cos a = (-1) \cdot (-1)$$

$$\text{ou} \quad \cos a = 1.$$

En effet dans ce cas le côté a est nul.

CHAPITRE VII.

DES FORMULES D'EULER.

27. Pour exposer la théorie du mouvement d'un corps autour d'un point fixe O , on fait passer par ce point trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , fixes dans l'espace, indépendants du corps mais pénétrables, et trois autres axes aussi rectangulaires Ox' , Oy' , Oz' , fixes dans le corps et mobiles avec lui.

La disposition de ces divers axes est telle que l'on peut placer à la fois Ox' sur Ox , Oy' sur Oy , Oz' sur Oz .

Le côté positif des z est dirigé de haut en bas dans le sens de la pesanteur.

La ligne $N'ON$ (fig. 61) étant l'intersection des plans des xy et des $x'y'$, on détermine la position des axes mobiles au moyen de trois angles qui sont xON ou ψ , NOx' ou φ et l'angle dièdre des plans xy et $x'y'$, que l'on désigne par θ .

Les formules d'Euler donnent les coordonnées x , y , z en fonctions des coordonnées x' , y' , z' et des trois angles ψ , φ , θ .

Comme ces angles peuvent s'étendre indéfiniment dans le sens positif et dans le sens négatif, nous poserons

$$\psi = n \times 360^\circ + s, \quad \varphi = i \times 360^\circ + v, \quad \theta = m \times 360^\circ + \tau$$

les lettres n , i , m désignant des nombres entiers, positifs, négatifs ou zéro, et les lettres s , v , τ des angles positifs moindres que 360° .

Par exemple pour $\psi = 380^\circ$ on aurait $n = 1$ et $s = 20^\circ$.

Pour $\psi = -750^\circ$ on a $n = -3$ et $s = 330^\circ$, car

$$-3 \times 360^\circ + 330^\circ = -1080^\circ + 330^\circ = -750^\circ.$$

Si cet angle -750° vient à diminuer de 330° , il devient $-3 \times 360^\circ$ et si à partir de cette valeur $-3 \times 360^\circ$, il diminuait d'un degré, on l'exprimerait par $-4 \times 360^\circ + 359^\circ$.

Dans tout ce qui va suivre immédiatement, nous supposerons les angles ψ , φ , θ , remplacés par leurs parties s , v , τ .

Les formules d'Euler présentent des variantes d'après la manière dont on compte les angles ψ , φ , θ . Nous adopterons celle qui est suivie dans la mécanique de Poisson.

Les axes Ox , Oy , Oz étant donnés de position, proposons-nous de fixer la position des axes Ox' , Oy' , Oz' au moyen de trois valeurs particulières des angles ψ , φ , θ réduits à leurs parties s , v , τ .

On mènera dans le plan des xy la droite ON de manière que l'angle xON , compté en allant des x positives vers les y négatives, soit égal à ψ .

Appelons ON' le prolongement de ON . La droite NON' sépare le plan des xy en deux parties $N'Np$ et $N'Nq$. La première est celle dans laquelle l'angle ψ se termine en venant s'appuyer contre ON . Si l'on fait tourner ce plan ONp , autour de ON , d'une quantité marquée par θ , en allant vers les z négatives, de telle sorte que ONp prenne la position ONP , ce plan ONP sera celui des $x'y'$.

Dans ce plan ONP prenons l'angle $NOx' = \varphi$ et $NOy' = \psi + 90^\circ$ et nous aurons ainsi les axes Ox' et Oy' . Il faut remarquer que le sens positif de l'angle ψ va des x' positives vers les y' positives.

Nous supposons qu'avant le mouvement du plan ONp autour de ON , l'axe Oz' coïncidait avec Oz , et que cet axe a suivi le mouvement en demeurant perpendiculaire à ONp .

Si donc on prend Np et NP perpendiculaires à ON , on aura l'angle $pNP = \theta$.

Voilà nos trois axes Ox' , Oy' , Oz' , déterminés de position d'après les angles ψ , φ et θ , réduits à leurs parties s , v , τ .

Proposons-nous le problème inverse, c'est-à-dire, qu'ayant les deux systèmes d'axes rectangulaires (Ox, Oy, Oz) , (Ox', Oy', Oz') , on veuille déterminer les angles ψ , φ et θ . (fig. 61).

$N'ON$ étant toujours l'intersection des plans des xy et des $x'y'$, l'angle ψ sera l'un des angles xON ou $xON' = xON + 180^\circ$. Il y a ici une incertitude et il faut choisir entre ON et ON' .

Si l'on prend ON , on a $\psi = xON$, $\theta = pNP$, et $\varphi = NOx'$. Tandis que si l'on prend ON' , on aura $\psi = xON + 180^\circ$. Ensuite ce sera le plan $ON'q$ qu'il faudra faire tourner autour de ON' , en allant toujours vers les z négatives, d'une quantité marquée par $360^\circ - qNQ$ ou $360^\circ - pNP$, en sorte que ce plan $N'Oq$ prenne la position $N'OQ$. Enfin dans ce plan on prendra l'angle $\varphi = N'Ox' = 180^\circ + NOx'$.

Appelons ψ' , φ' , θ' les angles relatifs à ON et ψ'' , φ'' , θ'' ceux relatifs à ON' , on aura

$$\psi'' = \psi' + 180^\circ$$

$$\varphi'' = 180^\circ + \varphi'$$

$$\theta'' = 360^\circ - \theta'$$

Quand on considère le mouvement d'un corps autour d'un point fixe O une fois qu'on a choisi une des parties ON ou ON' on la conserve pendant toute la durée du mouvement.

Nous remarquerons en passant que c'est par erreur que l'auteur du traité de mécanique assigne à l'angle θ les limites 0° et 180° . Cet angle, comme ψ et φ , n'est limité en aucun sens, tandis que les neuf angles xOx' , xOy' , xOz' , yOx' , yOy' , yOz' , zOx' , zOy' , zOz' se comptent seulement de 0° à $+180^\circ$.

Cherchons à exprimer ces neuf angles en fonctions de ψ , φ et θ que nous supposons toujours réduits à leurs parties s , v , τ .

Décrivons une sphère du point O comme centre avec l'unité linéaire pour rayon (fig 62) et considérons le triangle sphérique xNx' formé par les arcs xN , Nx' , et xx' qui mesurent les angles xON , NOx' et xOx' . L'angle opposé au côté xx' est θ (réduit à sa partie τ) (*).

Si l'on applique à ce triangle la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \dots (c)$$

du n° 26, il viendra

$$\begin{aligned} \cos xx' &= \cos xN \cos Nx' + \sin xN \sin Nx' \cos xNx' & \text{ou} \\ \cos xx' &= \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

que nous écrirons comme dans le traité de mécanique, ainsi

$$\cos xOx' = \cos \theta \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \dots (1)$$

Car l'arc xx' est la mesure de l'angle xOx' .

Pour l'objet qui nous occupe nous ne compterons l'angle xOx' que de 0° à $+180^\circ$ et les angles ψ , φ , θ (réduits à leurs parties s , v , τ) que de 0° à $+360^\circ$. Or nous savons que la formule (c) est encore bien plus générale.

En changeant dans (1), φ en $\varphi + 90^\circ$ et remplaçant l'axe Ox' par Oy' , il viendra

$$\begin{aligned} \cos xOy' &= \cos \theta \sin \psi \sin (\varphi + 90^\circ) + \cos \psi \cos (\varphi + 90^\circ) & \text{ou} \\ \cos xOy' &= \cos \theta \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \dots (2) \end{aligned}$$

En changeant dans (1) ψ en $\psi + 90^\circ$ et remplaçant Ox par Oy , il viendra

$$\cos yOx' = \cos \theta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \dots (3)$$

En changeant dans (1), à la fois φ en $\varphi + 90^\circ$ et ψ en $\psi + 90^\circ$ et remplaçant Ox' par Oy' , Ox par Oy , il vient

$$\cos yOy' = \cos \theta \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \dots (4).$$

Considérons maintenant le triangle Nxz' (fig. 63 et 64) qui donne

$$\cos xz' = \cos xOz' = \cos xNz' \sin xN \sin Nz' + \cos xN \cos Nz'.$$

Cette formule, à cause de $Nz' = 90^\circ$ se réduit à

$$\begin{aligned} \cos xOz' &= \cos xNz' \sin xN & \text{ou} \\ \cos xOz' &= \cos xNz' \sin \psi \end{aligned}$$

L'angle xNz' de ce triangle est celui des plans NOx et NOz' lequel a pour mesure l'arc iz' , (Oi étant un rayon mené dans le plan NOx perpendiculairement à ON)

(*) On ne tracera pas tous les côtés des triangles dont il va être question, pour ne pas compliquer la figure.

Or l'arc $iz' = iKzKz' = -90^\circ + zKz' = zKz = -90^\circ + \theta$.

L'arc zKz' a le même nombre de degrés que l'angle θ que nous supposons ici réduit à sa partie positive τ .

Donc $\cos xNz' = \cos (-90^\circ + \theta) = \sin \theta$

Substituant cette valeur dans

$$\begin{aligned}\cos xOz' &= \cos xNz' \sin \psi && \text{on a} \\ \cos xOz' &= \cos (-90^\circ + \theta) \sin \psi && \text{ou enfin} \\ \cos xOz' &= \sin \theta \sin \psi \dots \dots \dots (5)\end{aligned}$$

On remarquera que l'angle xNz' ou $-90^\circ + \theta$ est négatif lorsque $\theta < 90^\circ$ comme dans la figure 63 et positif lorsque $\theta > 90^\circ$ comme dans la figure 64. Dans les deux cas la formule $\cos xOz' = \cos (-90^\circ + \theta) \sin \psi$, dont nous avons déduit la formule (5), est vérifiée, puisque le cosinus d'un angle négatif est le même que celui de l'angle positif du même nombre de degrés. C'est ainsi que la formule générale

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c$$

serait encore vraie si l'on prenait l'angle A négativement.

Changeant dans la formule (5) ψ en $\psi + 90^\circ$ et remplaçant Ox par Oy , il vient

$$\begin{aligned}\cos yOz' &= \sin \theta \sin (\psi + 90^\circ) && \text{ou} \\ \cos yOz' &= \sin \theta \cos \psi \dots \dots \dots (6)\end{aligned}$$

Le triangle Nzx' (fig. 62 et 63) donne

$$\cos zx' = \cos zNx' \sin Nz \sin Nx' + \cos Nz \cos Nx'$$

et à cause de $Nz = 90^\circ$, $Nx' = \varphi$ il vient

$$\cos zOx' = \cos zNx' \sin \varphi$$

L'angle zNx' est celui des plans NOz et NOx' ; il est égal à $90^\circ + \theta$ (*).

On a donc

$$\begin{aligned}\cos zOx' &= \cos (90^\circ + \theta) \sin \varphi && \text{ou} \\ \cos zOx' &= -\sin \theta \sin \varphi \dots \dots \dots (7)\end{aligned}$$

Changeant dans celle-ci φ en $\varphi + 90^\circ$ et remplaçant Ox' par Oy' , il vient

$$\begin{aligned}\cos zOy' &= -\sin \theta \sin (\varphi + 90^\circ) && \text{ou} \\ \cos zOy' &= -\sin \theta \cos \varphi \dots \dots \dots (8)\end{aligned}$$

En supposant toujours θ réduit à sa partie positive τ , il est aisé de voir (fig. 63) que depuis $\theta = 0^\circ$ jusqu'à $\theta = 180^\circ$, on a

$$zOz' = iOi = \theta$$

(*) Dans la fig. 64 l'angle zNx' est compris entre 270° et 360° . Il est mesuré par l'arc zKz'/i .

L'angle zOz' ne s'étend pas au-delà de 180° et se compte de part et d'autre de Oz depuis 0° à $+180^\circ$.

Lors donc que θ est entre 180° et 360° (fig. 64), on a

$$\theta = iKi' = 360^\circ - iKi'$$

or $iKi' = zi'z' = zOz'$, les angles et les arcs étant exprimés en degrés.

$$\text{donc } \theta = 360^\circ - zOz'.$$

On a donc, suivant que θ (réduit à sa partie τ) est plus petit ou plus grand que 180° ,

$$zOz' = \theta \quad \text{ou} \quad zOz' = 360^\circ - \theta$$

ainsi dans tous les cas

$$\cos zOz' = \cos \theta \dots \dots \dots (9)$$

Rassemblons les neuf formules que nous venons de trouver et faisons selon l'usage $\cos xOx' = a$, $\cos xOy' = b$, etc, nous aurons

$$\left. \begin{aligned} \cos xOx' = a &= \cos \theta \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \\ \cos xOy' = b &= \cos \theta \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ \cos xOz' = c &= \sin \theta \sin \psi \\ \cos yOx' = a' &= \cos \theta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \\ \cos yOy' = b' &= \cos \theta \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ \cos yOz' = c' &= \sin \theta \cos \psi \\ \cos zOx' = a'' &= -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos zOy' = b'' &= -\sin \theta \cos \varphi \\ \cos zOz' = c'' &= \cos \theta \end{aligned} \right\} (B)$$

Si l'on met les valeurs (B) dans les formules

$$\begin{aligned} x &= x' \cos (xx') + y' \cos (xy') + z' \cos (xz') \\ y &= x' \cos (yx') + y' \cos (yy') + z' \cos (yz') \\ z &= x' \cos (zx') + y' \cos (zy') + z' \cos (zz') \end{aligned}$$

on aura les formules d'Euler.

On obtiendra les formules réciproques en mettant les mêmes valeurs (B) dans

$$\begin{aligned} x' &= x \cos (x'x) + y \cos (x'y) + z \cos (x'z) \\ y' &= x \cos (y'x) + y \cos (y'y) + z \cos (y'z) \\ z' &= x \cos (z'x) + y \cos (z'y) + z \cos (z'z) \end{aligned}$$

Nous avons appelé ψ' , φ' , θ' les valeurs de ψ , φ , θ relatives à la partie ON de l'intersection des plans xy et $x'y'$, et ψ'' , φ'' , θ'' , les valeurs relatives à la partie ON'.

Or puisque

$$\begin{aligned} \psi'' &= \psi' + 180^\circ \\ \varphi'' &= 180^\circ + \varphi' \\ \theta'' &= 360^\circ - \theta' \end{aligned}$$

on a

$$\begin{array}{lll} \sin \psi'' = -\sin \psi' & \cos \psi'' = -\cos \psi' \\ \sin \varphi'' = -\sin \varphi' & \cos \varphi'' = -\cos \varphi' \\ \sin \theta'' = -\sin \theta' & \cos \theta'' = \cos \theta' \end{array}$$

Il est aisé de voir, d'après ces dernières relations, que les valeurs de $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ resteront les mêmes soit qu'on prenne les valeurs de ψ, φ, θ relatives à ON ou qu'on prenne celles qui sont relatives à ON'.

Dans les formules (B) nous avons supposé les angles ψ, φ, θ réduits à leurs parties positives s, v, τ mais comme

$$\psi = n \cdot 360^\circ + s, \quad \varphi = i \times 390^\circ + v, \quad \theta = m \cdot 360^\circ + \tau$$

n, i, m étant des nombres entiers, positifs, négatifs ou zéro, on a

$$\begin{array}{lll} \sin s = \sin \psi & \sin v = \sin \varphi & \sin \tau = \sin \theta \\ \cos s = \cos \psi & \cos v = \cos \varphi & \cos \tau = \cos \theta \end{array}$$

D'après cela on voit que les formules (B) sont encore vraies en supposant à ψ, φ, θ des valeurs quelconques positives ou négatives.

CHAPITRE VIII.

DES AXES PRINCIPAUX.

28. Ces dernières formules donnant x' , y' , z' en fonctions de x , y , z , ψ , φ , θ , servent à démontrer que par un point donné d'un corps quelconque, on peut toujours faire passer trois axes rectangulaires Ox' , Oy' , Oz' de manière qu'on ait

$$\int x'y' dm = 0, \quad \int x'z' dm = 0, \quad \int y'z' dm = 0, \quad \dots (a)$$

ces intégrales s'étendant à la masse entière du corps. Les axes Ox' , Oy' , Oz' prennent alors le nom d'*axes principaux*.

Le lecteur auquel cette matière est étrangère, pourra laisser de côté ce numéro que l'on doit considérer comme un commentaire sur le n° 380 du traité de mécanique de Poisson.

Si l'on met, dans les équations (a), pour x' , y' , z' leurs valeurs en fonctions de x , y , z , ψ , φ , θ , on obtient trois équations qui par diverses transformations prennent les formes suivantes

$$\sin 2\varphi \int (X^2 - Y^2) dm = 2 \cos 2\varphi \int XY dm \quad \text{ou}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \int XY dm}{\int (X^2 - Y^2) dm} \dots \dots \dots (b)$$

$$\tan \theta = \frac{(f'u - g) \sqrt{1 + u^2}}{h'(1 - u^2) + (f - g)u} \dots \dots \dots (c)$$

$$[gg' - hg' - f'h' + (hf' - ff' + g'h')u] [h'(1 - u^2) + (f - g)u] + (g'u + f')(f'u - g)^2 = 0 \dots (d)$$

dans ces équations on a fait pour abrégé

$$X = x \cos \psi - y \sin \psi$$

$$Y = x \cos \theta \sin \psi + y \cos \theta \cos \psi - z \sin \theta$$

$$\int x^2 dm = f \quad \int y^2 dm = g \quad \int z^2 dm = h$$

$$\int yz dm = f' \quad \int xz dm = g' \quad \int xy dm = h'$$

Ces six intégrales s'étendent à la masse entière du corps et leurs valeurs dépendent, de sa forme, de son étendue et de sa position par rapport aux axes fixes Ox , Oy , Oz .

On a fait encore

$$\operatorname{tang} \psi = u, \text{ d'où } \sin \psi = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

et il faut observer que $\sqrt{1+u^2} = \sec \psi$ et que le signe du radical est par conséquent déterminé lorsque l'angle ψ est donné.

Il ne faut pas perdre de vue que les angles ψ , φ , θ sont censés réduits à leurs parties s , v et τ , qui sont des angles positifs pouvant s'étendre de 0° à 360° .

L'équation (d) étant du troisième degré en u , donnera pour u , ou $\operatorname{tang} \psi$, au moins une valeur réelle u' à laquelle répond un angle $\psi = \psi'$ et un angle $\psi' + 180^\circ$.

Lorsque u' est positive, ψ' est compris entre 0° et 90° , et lorsque u' est négative, ψ' est compris entre 90° et 180° .

L'auteur dit qu'à cause du radical $\sqrt{1+u^2}$, l'équation (c) donnera deux valeurs de $\operatorname{tang} \theta$ égales et de signe contraire, mais nous venons de voir que l'angle ψ' étant déterminé il n'y a plus d'ambiguïté quant au signe de $\sqrt{1+u^2}$.

Si par exemple ψ' est compris entre 0° et 90° , on aura $\sec \psi'$ positive, et il faudra prendre le radical avec le signe plus. Il en résulte une seule valeur pour $\operatorname{tang} \theta$ qui répond à un angle $\theta = \theta'$ et à un angle $\theta' + 180^\circ$.

Si l'on prend $\psi = \psi'$ et $\theta = \theta'$ on aura une valeur correspondante pour $\operatorname{tang} 2\varphi$ à laquelle répondra un angle $2\varphi = 2\varphi'$ et un angle $2\varphi' + 180^\circ$, c'est-à-dire un angle φ' et un angle $\varphi' + 90^\circ$.

Voyons ce qui arrive quand on prend $\psi = \psi'$ et $\theta = \theta' + 180^\circ$.

Il est facile de voir que lorsqu'on substitue $\theta' + 180^\circ$ à θ' dans Y, cette fonction change de signe en conservant sa valeur numérique, et comme X ne change pas puisque cette fonction est indépendante de θ , on voit, par la formule (b), que $\operatorname{tang} 2\varphi$ change de signe et répond alors à un angle $2\varphi = 180^\circ - 2\varphi'$ ou à un angle $2\varphi = 360^\circ - 2\varphi'$; c'est-à-dire à un angle $\varphi = 90^\circ - \varphi'$ ou à un angle $180^\circ - \varphi'$.

On a donc ce tableau

$$\psi = \psi' \left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta' \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi' \\ \varphi = \varphi' + 90^\circ \end{array} \right. \\ \theta = \theta' + 180^\circ \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 90^\circ - \varphi' \\ \varphi = 180^\circ - \varphi' \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous avons dit que la valeur $u = u'$ répondait en second lieu à un angle $\psi = \psi' + 180^\circ$ dont la sécante est $\sqrt{1+u'^2}$ égale et de signe contraire à celle de ψ' .

Si donc on fait $\psi = \psi' + 180^\circ$ dans la valeur de $\operatorname{tang} \theta$, on aura $\operatorname{tang} \theta = -\operatorname{tang} \theta'$, c'est-à-dire un angle $\theta = 180^\circ - \theta'$ ou un angle $\theta = 360^\circ - \theta'$.

Prenons d'abord $\psi = \psi' + 180^\circ$ et $\theta = 180^\circ - \theta'$.

La fonction X change de signe lorsqu'on substitue $\psi' + 180^\circ$ à ψ' .

La fonction Y ne change pas lorsqu'on substitue à la fois $\psi' + 180^\circ$ à ψ' et $180 - \theta'$ à θ' .

Donc $\tan 2\varphi$ prendra une valeur égale et de signe contraire à celle qui résultait des suppositions $\psi = \psi'$ et $\theta = \theta'$. On aura par conséquent un angle $2\varphi = 180^\circ - 2\varphi'$ et un angle $2\varphi = 360^\circ - 2\varphi'$, c'est-à-dire un angle $\varphi = 90^\circ - \varphi'$ et un angle $\varphi = 180^\circ - \varphi'$.

Prenons maintenant

$$\psi = \psi' + 180^\circ \quad \text{et} \quad \theta = 360^\circ - \theta'$$

X change de signe quand on substitue $\psi' + 180^\circ$ à ψ' .

Y change de signe quand on substitue à la fois $\psi' + 180^\circ$ à ψ' et $360^\circ - \theta'$ à θ' .

Donc $\tan 2\varphi$ ne change pas de signe, et l'on a un angle $2\varphi = 2\varphi'$ ou un angle $2\varphi = 2\varphi' + 180^\circ$, c'est à dire $\varphi = \varphi'$ ou $\varphi = \varphi' + 90^\circ$.

On a donc le tableau suivant

$$\psi = \psi' + 180^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = 180^\circ - \theta' \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 90^\circ - \varphi' \\ \varphi = 180^\circ - \varphi' \end{array} \right. \\ \theta = 360^\circ - \theta' \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi' \\ \varphi = \varphi' + 90^\circ \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous allons passer en revue les huit solutions énumérées dans les deux tableaux ci-dessus.

$$1^\circ \text{ Soit } \psi = \psi', \quad \theta = \theta', \quad \varphi = \varphi'.$$

Le plan pq (fig. 65) (*) est celui du xy . L'angle $xON = \psi'$. Prenons dans le même plan $NOa = \varphi'$ et $NOb = \varphi' + 90^\circ$. Relevons le plan NOa au dessus de celui des xy , en le faisant tourner autour de ON d'une quantité θ' , en sorte que ce plan passe de la position pq à la position PQ et que les droites Oa et Ob prennent les positions OA , OB , qui seront les axes Ox' , Oy' . Si l'on suppose de plus une droite Oc qui coïncide d'abord avec Oz et qui suit le mouvement du plan NOa , en lui demeurant perpendiculaire, cette droite prendra la position OC qui sera l'axe Oz' .

Nous désignerons toujours par OA , OB , OC les parties positives Ox' , Oy' , Oz' dans cette première hypothèse de $\psi = \psi'$, $\theta = \theta'$ et $\varphi = \varphi'$.

Les parties négatives de ces axes seront désignées par OA' , OB' , OC' .

$$2^\circ \text{ Soient } \psi = \psi', \quad \theta = \theta', \quad \varphi = \varphi' + 90^\circ.$$

En désignant par Ox' , Oy' , Oz' les axes placés selon cette seconde solution, on voit que Ox' sera sur OB , Oy' sur OA , et Oz' sur OC .

$$3^\circ. \psi = \psi', \quad \theta = \theta' + 180^\circ, \quad \varphi = 90^\circ - \varphi'.$$

On prendra (fig. 66) $NOa' = 90^\circ - \varphi'$, $NOb' = NOa' + 90^\circ = 180^\circ - \varphi'$.

(*) Pour ne pas compliquer la figure, les axes Ox et Oy ne sont pas marqués jusqu'à l'origine O .

Ensuite on fera tourner le plan ONp autour de ON en le relevant d'une quantité $\theta' + 180^\circ$, ensorte qu'il ira coïncider avec ONQ . Oa' prendra la position Ox' et Ob' la position Oy' . On aura $NOx' = NOa' = 90^\circ - \varphi'$. On a d'ailleurs $NOB = \varphi' + 90^\circ$. Donc la somme des angles adjacens $NOB + NOx' = 180^\circ$; ce qui nous apprend que BOx' est une ligne droite et que Ox' coïncide avec OB' prolongement de OB .

On aura aussi $NOy' = NOb' = 180^\circ - \varphi'$, et comme $NOA = \varphi'$, on a $NOA + NOy' = 180^\circ$, ce qui fait voir que Oy' coïncide avec OA' prolongement de OA .

Enfin il est facile de voir que Oz' sera sur OC' prolongement de OC .

$$4^\circ \quad \psi = \psi', \quad \theta = \theta' + 180^\circ, \quad \varphi = 180^\circ - \varphi'.$$

Cette solution ne diffère de la précédente qu'en ce que φ a été augmenté de 90° . Il est donc aisé de voir que Ox' sera sur OA' , Oy' sur OB et Oz' sur OC' .

$$5^\circ \quad \psi = \psi' + 180^\circ, \quad \theta = 180^\circ - \theta', \quad \varphi = 90^\circ - \varphi'.$$

(Fig. 67.) A cause de $\psi = \psi' + 180^\circ$ la droite ON prend la position qu'occupait ON' dans les cas précédens; mais nous la désignerons néanmoins par ON' afin de comparer plus facilement toutes les solutions entre elles.

L'angle φ se comptera donc à partir de ON' et en allant vers q .

Prenons donc $N'Oa' = 90^\circ - \varphi'$ et $N'Ob' = N'Oa' + 90^\circ = 180^\circ - \varphi'$.

Faisons tourner le plan $ON'q$ en le relevant d'une quantité $180^\circ - \theta'$. Ce plan ira coïncider avec ONP . Oa' prendra la position Ox' et Ob' la position Oy' .

On aura $N'Ox' = N'Oa' = 90^\circ - \varphi'$.

Mais $N'OB = 180^\circ - NOB = 180^\circ - (\varphi' + 90^\circ) = 90^\circ - \varphi'$, donc $NOx' = NOB$, c'est-à-dire que Ox' coïncide avec OB .

On aura $NOy' = NOb' = \varphi'$, mais $NOA = \varphi'$, donc Oy' coïncide avec OA .

Enfin il est aisé de voir que Oz' tombe sur OC' .

$$6^\circ \quad \psi = \psi' + 180^\circ, \quad \theta = 180^\circ - \theta', \quad \varphi = 180^\circ - \varphi'.$$

On prendra (fig. 68) $N'Oa' = 180^\circ - \varphi'$. Et en augmentant cet angle de 90° , on aura la position de Ob' . Puis on fera tourner le plan $ON'q$ en le relevant, d'une quantité $180^\circ - \theta'$, ensorte qu'il ira coïncider avec ONP . En même temps son prolongement ONp ira coïncider avec ONQ .

Oa' prendra la position Ox' et Ob' la position Oy' .

A cause de $NOa' = 180^\circ - N'Oa' = \varphi'$, Ox' tombera sur OA .

On aura $NOy' = NOb' = -NOa' + a'Ob' = -NOa' + 90^\circ = 90^\circ - \varphi'$.

Or $NOB = \varphi' + 90^\circ$, donc $NOB + NOy' = 180^\circ$, donc Oy' est sur OB' . On voit facilement que Oz' est sur OC' .

$$7^\circ \quad \psi = \psi' + 180^\circ, \quad \theta = 360^\circ - \theta', \quad \varphi = \varphi'.$$

(Fig. 69.) On prendra $N'Oa' = \varphi'$ et $N'Ob' = N'Oa' + 90^\circ = \varphi' + 90^\circ$.

On relève le plan $ON'q$ d'une quantité $360^\circ - \theta'$, ce qui le fait coïncider avec $ON'Q$. Alors Oa' prendra la position Ox' et Ob' la position Oy' .

A cause de $N'Ox' = N'Oa' = \varphi'$, on voit que Ox' tombe sur OA' . De plus $N'Oy' = N'Ob' = \varphi' + 90^\circ$, et comme $N'OB = 90^\circ - \varphi'$, la somme des angles adjacens $N'Oy'$ et $N'OB$ est égale à 180° , d'où il suit que Oy' tombe sur OB' . On voit facilement que Oz' tombe sur OC .

$$S^0 \psi = \psi' + 180^\circ, \quad \theta = 360^\circ - \theta', \quad \varphi = \varphi' + 90^\circ.$$

(Fig. 70.) On prendra $N'Oa' = \varphi' + 90^\circ$ et $N'Ob' = N'Oa' + 90^\circ = \varphi' + 180^\circ$.

En relevant le plan $ON'q$ de $360^\circ - \theta'$, Oa' prendra la position Ox' et Ob' la position Oy' .

A cause de $N'Ox' = N'Oa' = \varphi' + 90^\circ$ et de $N'OB = 90^\circ - \varphi'$, la somme des angles adjacens $N'Ox'$ et $N'OB$ est égale à 180° , donc Ox' est sur OB' .

A cause de $N'Oy' = N'Ob' = \varphi'$, l'axe Oy' tombe sur OA .

Oz' tombe sur OC .

Ces huit solutions ne donnent qu'un seul système d'axes principaux. Car en désignant, comme nous l'avons fait, par OA, OB, OC les côtés positifs de Ox', Oy', Oz' dans la position donnée par la première solution, et par OA', OB', OC' les côtés négatifs des mêmes axes, on a vu que pour les sept autres solutions les axes Ox', Oy', Oz' coïncident avec les trois arêtes de l'un des huit angles trièdres formés par $OA, OB, OC, OA', OB', OC'$ autour du point O .

Par exemple pour la cinquième solution Ox' tombe sur OB, Oy' sur OA et Oz' sur OC' . Donc pour passer de la première solution à la cinquième, il suffit de changer x' en y' et vice versâ, et z' en $-z'$. Or si les équations

$$\int x' y' dm = 0, \quad \int x' z' dm = 0, \quad \int y' z' dm = 0$$

sont satisfaites par la première solution, elles le seront encore après ces substitutions. Car la première reste la même. En changeant x' en y' et vice versâ la seconde et la troisième ne font que s'échanger entre elles; et enfin en changeant dans ces dernières z' en $-z'$ tous les élémens tels que $y' z' dm$ et $x' z' dm$ qui étaient positifs deviennent négatifs et vice versâ, ensorte que leur somme algébrique demeure nulle comme auparavant.

Les axes Ox', Oy', Oz' dans la position OA, OB, OC donnée par la première solution, ont entre eux la même situation relative que les axes fixes Ox, Oy, Oz . En effet si l'on fait tourner le plan $x'y'$ autour de ON pour amener OC sur Oz , les axes Ox', Oy' seront dans le même plan que Ox et Oy et se suivront dans le même ordre autour du point O . On pourra donc faire tourner le système Ox', Oy', Oz' autour de Oz' et amener Ox' sur Ox et Oy' sur Oy .

Cela résulte de la manière dont nous avons compté les angles ψ, φ et θ . On remarquera de plus que dans les huit solutions, la position relative des axes Ox', Oy', Oz' reste la

même. En effet leur position dans ces huit cas est telle qu'elle est représentée dans la fig. 71 et l'on voit que l'on peut passer de l'un à l'autre des huit cas sans déranger le système. Par exemple le sixième cas peut être ramené au premier en faisant tourner le système de 180° autour de OA.

Dans l'exemple précédent nous avons supposé les angles ψ' , θ' et φ' compris entre 0° et 90° ; mais quels que soient ces angles, une fois qu'on aura déterminé les positions OA, OB, OC correspondantes à la solution $\psi = \psi'$, $\theta = \theta'$, $\varphi = \varphi'$, les positions de Ox' , Oy' , Oz' , données par les sept autres solutions, se déduiront de la première comme l'indique la figure 71. Nous n'en donnerons que deux exemples.

Soit donc pour second exemple.

ψ' compris entre 180° et 270° .

φ' entre 0° et 90° .

θ' entre 0° et 90° .

On prendra (fig. 72) l'angle $xON = \psi'$ en sens contraire de la flèche, l'angle $NOa = \varphi'$ dans le sens de la flèche, $NOb = \varphi' + 90^\circ$.

Ensuite on relèvera le plan ONP d'une quantité θ' pour lui faire prendre la position ONP, de manière que Oa et Ob prennent les positions OA et OB. L'axe Oz' se transportera en même tems en OC.

On aurait ainsi les positions OA, OB, OC données par la première solution.

Supposons actuellement qu'on veuille passer à la cinquième solution, savoir

$$\psi = \psi' + 180^\circ, \theta = 180^\circ - \theta', \varphi = 90^\circ - \varphi'. \quad (\text{fig. 73})$$

L'angle $\psi' + 180^\circ$ étant compté à partir de Ox en sens contraire de la flèche, sera égal à $360^\circ + xON'$. Comme il se termine à la droite ON' du côté où est q , l'angle φ doit se compter à partir de cette droite ON' dans le sens de la flèche. Prenons donc dans ce sens

$$N'Oa' = 90^\circ - \varphi'$$

$$N'Ob' = N'Oa + 90^\circ = 180^\circ - \varphi'.$$

Si on relève le plan $ON'q$ d'une quantité $180^\circ - \theta'$, ce plan ira coïncider avec $ON'P$. Oa' prendra la position Ox' et Ob' la position Oy' . On aura

$$N'Ox' = N'Oa' = 90^\circ - \varphi'$$

$$\text{or} \quad N'Ob = 180^\circ - NOB = 180^\circ - (\varphi' + 90^\circ) = 90^\circ - \varphi'$$

$$\text{donc} \quad N'Ox' = NOB \quad \text{et } Ox \text{ tombe sur } OB.$$

D'autre part

$$NOy' = NOb' = 180^\circ - N'Ob' = 180^\circ - (180^\circ - \varphi') = \varphi'$$

$$\text{or} \quad NOA = \varphi', \quad \text{donc } Oy' \text{ tombe sur } OA.$$

Il est facile de voir que Oz' tombe sur OC' .

L'axe Ox' étant sur OB, Oy' sur OA et Oz' sur OC' , on voit que dans cet exemple la

cinquième solution se comporte vis-à-vis de la première, comme dans l'exemple précédent. Voyez fig. 71, 5^e solution. — Il en serait de même des autres.

Soit pour troisième exemple.

$$\psi' \text{ entre } 0^\circ \text{ et } 90^\circ.$$

$$\theta' \text{ entre } 0^\circ \text{ et } 90^\circ.$$

$$\varphi' \text{ entre } 270^\circ \text{ et } 360^\circ.$$

L'angle αON (fig. 74), compté en sens contraire de la flèche, étant égal à ψ' , on prendra dans le sens de la flèche l'angle $NO\alpha = \varphi'$ lequel est compris entre 270° et 360° . Puis en augmentant cet angle de 90° , on aura la position de Ob .

Si on relève ensuite le plan ONp d'une quantité θ' pour lui faire prendre la position ONP , alors $O\alpha$ et Ob prendront les positions OA et OB .

L'axe Oz' viendra en OC .

Ceci sera la première solution.

Passons, si l'on veut, à la sixième solution, savoir :

$$\psi = \psi' + 180^\circ, \theta = 180^\circ - \theta', \varphi = 180^\circ - \varphi', \quad (\text{fig. 75})$$

Soit l'angle $\alpha ON' = \varphi' + 180^\circ$ compté en sens contraire de la flèche. On prendra, à partir de ON' et dans le sens de la flèche l'angle $\varphi = 180^\circ - \varphi'$, c'est-à-dire l'angle 180° , dans le sens de la flèche, de N' en N , dont on retranchera l'angle φ' compté, en sens contraire, de N en α' ; ainsi l'angle $N'O\alpha' = 180^\circ - \varphi'$ sera négatif, car $\varphi' > 180^\circ$ d'après la première hypothèse.

En prenant l'angle $\alpha'Ob' = 90^\circ$, dans le sens de la flèche, on aura la position de Ob' . Si on relève maintenant le plan $ON'q$ d'une quantité $180^\circ - \theta'$, ce plan coïncidera avec ONP et son prolongement ONp avec ONQ .

$O\alpha'$ et Ob' prendront les positions Ox' , Oy' .

L'angle $NO\alpha'$ compté en sens contraire de la flèche, étant égal à φ' , l'angle aigu $NO\alpha' = 360^\circ - \varphi'$; ainsi $NOx' = NO\alpha' = 360^\circ - \varphi'$.

Or NOA compté dans le sens de la flèche, est égal à φ' , donc l'angle aigu $NOA = 360^\circ - \varphi'$.

Les angles NOx' et NOA étant égaux, Ox' tombe sur OA .

L'angle aigu $NO\alpha'$ étant égal à $360^\circ - \varphi'$, on a $NOb' = NO\alpha' + 90^\circ = 450^\circ - \varphi'$.

Donc NOy' compté de N vers Q est égal à $450^\circ - \varphi'$.

Or NOB' compté aussi de N vers Q , est égal à l'angle aigu $NOA + 90^\circ = 360^\circ - \varphi' + 90^\circ = 450^\circ - \varphi'$. Donc $NOy' = NOB'$, et Oy' tombe sur OB' .

On voit d'ailleurs que Oz' tombe sur OC' .

L'axe Ox' étant sur OA , Oy' sur OB' et Oz' sur OC' , on voit que dans ce troisième exemple la sixième solution se comporte vis-à-vis de la première comme dans le premier exemple. Voir la fig. 71, 6^e.

Soient OA , OB , OC , (fig. 76) la position des axes Ox' , Oy' , Oz' donnée par la solution $\psi = \psi'$, $\varphi = \varphi'$, $\theta = \theta'$. Si l'on fait tourner le système OA , OB , OC autour de OA de

manière que OB vienne occuper la place de OC' et OC celle de OB. Les axes OA, OB, OC dans cette nouvelle position, (fig. 77), composeront encore un système d'axes principaux qui sera au fond le même que le précédent.

Car puisqu'on avait relativement à la fig. 76.

$$\int x'y' dm = 0 \quad \int x'z' dm = 0 \quad \int y'z' dm = 0 \quad \dots (1)$$

On aura en changeant y' en z' et z' en $-y'$,

$$\int x'z' dm = 0 \quad -\int x'y' dm = 0 \quad -\int z'y' dm = 0$$

$$\text{ou } \int x'z' dm = 0 \quad \int x'y' dm = 0 \quad \int y'z' dm = 0$$

ces dernières étant relatives à la fig. 77. L'intersection du plan AOB (fig. 77) avec celui des xy donnera pour ψ une valeur ψ'' telle que $\tan \psi''$ ou u'' satisfera encore à l'équation (d).

Si en partant toujours de fig. 76, on fait tourner le système OA, OB, OC autour de OB pour amener OA sur OC et OC sur OA', il faudra pour rendre les équations (1) applicables à ce cas (fig. 78), changer x' en $-z'$ et z' en x' . Il viendra

$$-\int z'y' dm = 0 \quad -\int z'x' dm = 0 \quad \int y'x' dm = 0$$

$$\text{ou } \int y'z' dm = 0 \quad \int x'z' dm = 0 \quad \int x'y' dm = 0$$

L'intersection du plan actuel AOB (fig. 78) avec celui des xy donnera pour ψ une valeur ψ''' telle que $\tan \psi'''$ ou u''' sera encore racine de l'équation (d).

Cette équation a donc ses trois racines réelles qui répondent aux intersections du plan xy avec les trois plans déterminés par les axes principaux pris deux à deux.

On remarquera que les huit solutions (fig. 71) ne donnaient qu'une seule et même position pour le plan $x'y'$.

CHAPITRE IX.

DES FORMULES PRINCIPALES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL SOUS LE POINT DE VUE
DES SIGNES + ET -.

Du signe de la différentielle première et de la différentielle seconde de l'ordonnée d'une courbe.

29. Soit A l'origine des coordonnées (fig. 79, 80, 81, 82), et Ax le côté positif des abscisses. Prenons sur cet axe les points P, P', P'' distans entre eux d'une même quantité h, on aura

$$AP = x, \quad AP' = x + h, \quad AP'' = x + 2h$$

Si l'origine était au point B et que les portions de courbes que nous considérons fussent du côté des x négatives, on aurait

$$BP = x, \quad BP' = x + h, \quad BP'' = x + 2h$$

la ligne de x n'étant pas mise en évidence.

Elevons les ordonnées $PM = y$, $P'M' = y'$, $P''M'' = y''$ et menons MQ, M'Q' parallèles à l'axe des x. QM' sera la différence entre les deux ordonnées consécutives P'M' et PM. Q'M'' sera celle des ordonnées P''M'' et P'M'.

En prolongeant la corde MM' jusqu'en N'' on formera les triangles égaux MM'Q, N'N''Q', qui donneront $QM' = Q'N''$, ces deux droites étant non seulement égales mais de même sens.

Si nous faisons $QM' = Q'N'' = \Delta$ d'où $N'Q' = -\Delta$

et $Q'M'' = \Delta'$ il vient

$$QM' = QP'M' = -y + y' = \Delta$$

$$Q'M'' = Q'P''M'' = -y' + y'' = \Delta'$$

$$N'M'' = N'Q'M'' = -\Delta + \Delta'$$

En désignant par des petites lettres de même nom, les quantités analogues du côté des y négatives, on a aussi

$$qm' = qP'm' = -y + y' = \delta$$

$$q'm'' = q'P''m'' = -y' + y'' = \delta'$$

$$n'm'' = n'Q'm'' = -\delta + \delta'$$

Les signes de y et de y' ne sont pas mis en évidence. En désignant par y l'ordonnée du point m , on a $\underline{Pm} = y$ et au contraire $\underline{mP} = \underline{qP'} = -y$. Par exemple, si Pm était numériquement égal à 5, on aurait $\underline{Pm} = y = -5$, et $\underline{mP} = \underline{qP'} = -y = +5$.

Les lignes $\underline{QM'}$, $\underline{Q'M''}$, $\underline{N''M'}$, $\underline{qm'}$, $\underline{q'm''}$, $\underline{n''m''}$, sont positives lorsqu'elles sont décrites dans le sens positif des y , savoir de bas en haut dans nos figures, elles sont négatives dans le cas contraire.

Le théorème de Taylor donne

$$y = PM$$

$$y' = P'M' = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$y'' = P''M'' = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

et par conséquent

$$QM' = \Delta = -y + y' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$Q'M'' = \Delta' = -y' + y'' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{3h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$N''M'' = N''Q'M'' = -\Delta + \Delta' = \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.}$$

D'où il suit que si on prend $h = dx$, la valeur de QM' ou Δ approchera de plus en plus de la différentielle première dy , celle de $N''M''$, de la différentielle seconde d^2y à mesure que l'on prendra dx plus petit. (Lacroix, *Calcul différentiel*, in-8°, n° 60). Le signe de QM' sera alors celui de la différentielle dy , et le signe de $N''M''$ sera celui de la différentielle seconde d^2y . Il en est de même des signes de qm' et $n''m''$; car tout ce que nous venons de dire par rapport à M , M' , M'' , s'applique à m , m' , m'' du côté des ordonnées négatives. Il suffit de substituer dans ce qui précède les petites lettres aux grandes.

Or QM' est positive lorsque cette droite est décrite de Q en M' dans le sens positif des y , de bas en haut. Il en est de même de qm' , $N''M''$, $n''m''$. On peut donc énoncer cette règle. En désignant par M' le point consécutif à M et par m' le point consécutif à m , la différentielle dy est positive si la projection sur l'axe des y du point qui décrit l'axe MM' (ou mm') marche dans le sens positif des y . Elle est négative dans le cas contraire.

Quant au signe de $N''M''$ (ou $n''m''$) c'est-à-dire de la différentielle seconde, on voit par nos figures que la différentielle seconde est positive lorsque la courbe tourne sa concavité du côté positif des y (comme dans les branches marquées d'une astérisque), et qu'elle est négative dans le cas contraire.

Si pour un même point M d'une courbe (fig. 83 et 84) l'accroissement de l'abscisse, au lieu d'être positif, était négatif, la différentielle première dy changerait de signe mais non la différentielle seconde d^2y .

En effet, on voit d'abord que QM' change de signe, donc dy en change aussi.

Si nous représentons toujours QM' par Δ et $Q'M''$ par Δ' , on a dans l'un et l'autre cas (en remarquant que $Q'N'' = QM'$):

$$N'M'' = N'Q'M'' = -\Delta + \Delta'.$$

Lorsque l'accroissement h change de signe, les quantités Δ et Δ' changent à la fois de signe et malgré cela la quantité $-\Delta + \Delta'$ n'en change pas; parce que celle des deux quantités Δ et Δ' qui était la plus petite, quant à sa valeur absolue, devient la plus grande.

L'algèbre conduit aux mêmes conclusions car on a $dy = p dx$ et $d^2y = q dx^2$, p et q étant les fonctions *première* et *seconde*; or on voit par ces valeurs que dy change de signe avec dx mais non d^2y .

Du contact des courbes.

50. Notre méthode d'additionner et soustraire les lignes, jette du jour sur la théorie du contact des courbes. On s'en convaincra par ce qui suit.

Nous entrerons en matière avec le texte même de Lacroix, *Calcul différentiel*, in-4^o, tome I, page 436.

« Quoiqu'on ne puisse mener aucune droite entre une courbe et sa tangente, on y peut néanmoins faire passer une infinité de lignes courbes différentes, qui toucheront toutes la courbe proposée et seront touchées par sa tangente. La série de Taylor, en l'arrêtant successivement à chacun de ses termes, fournit elle-même une infinité de courbes qui jouissent de cette propriété.

» En effet si dans la série

$$k = Ph + Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.}$$

(qui exprime l'accroissement de l'ordonnée correspondant à l'accroissement h de l'abscisse),

» on fait successivement

$$k' = Ph$$

$$k'' = Ph + Qh^2$$

$$k''' = Ph + Qh^2 + Rh^3$$

etc. etc.

» K' sera l'ordonnée de la tangente prise par rapport à l'axe MB' (fig. 85) la nouvelle origine étant en M; K'' sera l'ordonnée d'une parabole passant aussi par le point M et déterminée par les valeurs que prennent P et Q pour ce point; K''' sera encore l'ordonnée d'une courbe parabolique de l'ordre supérieur à celui de la précédente et ainsi de suite. Toutes ces courbes auront la même tangente que la proposée, puisque

$$P = \frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dh} = \frac{dk'}{dh} = \frac{dk''}{dh} = \frac{dk'''}{dh} \dots$$

Pour fixer les idées nous supposerons les quantités P , Q , R , S toutes positives pour les valeurs de x et de y qui répondent au point M .

P étant positif il s'en suit que la partie de la tangente située du côté des y positives fait avec le côté positif des x un angle aigu.

Q étant positif, la concavité de la courbe est tournée en haut.

Cherchons la disposition des courbes

$$k'' = Ph + Qh^2$$

$$k''' = Ph + Qh^2 + Rh^3$$

dans le voisinage du point M .

Nous supposerons h assez petit pour qu'un terme quelconque de la série qui exprime K soit plus grand que la somme de tous les termes qui suivent.

Soient donc

$$k = QN = Ph + Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.}$$

$$k' = QN' = Ph$$

$$k'' = QN'' = Ph + Qh^2$$

$$k''' = QN''' = Ph + Qh^2 + Rh^3.$$

On aura

$$N'N = \frac{N'QN}{\dots} = -k' + k = Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.}$$

Q étant positif, $N'N$ l'est aussi c'est-à-dire que N est au-dessus de N' .

$$N''N = \frac{N''QN}{\dots} = -k'' + k = Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.}$$

R étant positif, $N''N$ l'est aussi, et N est au-dessus de N'' .

$$N'''N = \frac{N'''QN}{\dots} = -k''' + k = Sh^4 + \text{etc.}$$

S étant positive, $N'''N$ l'est, et N est au-dessus de N''' .

$$N'N' = \frac{N'QN'}{\dots} = -k'' + k' = Rh^3$$

R étant positive, le point N''' est au-dessus de N'' .

$$N'N' = \frac{N'QN'}{\dots} = -k'' + k' = -Qh^2.$$

Q étant positif, $N'N'$ est négative et N' est au-dessous de N'' .

Avant le point de contact on a

$$qn = -Ph + Qh^2 - Rh^3 + Sh^4 - \text{etc.}$$

$$qn' = -Ph, \quad \text{d'où} \quad n'q = Ph$$

$$qn'' = -Ph + Qh^2; \quad n''q = Ph - Qh^2$$

$$qn''' = -Ph + Qh^2 - Rh^3; \quad n'''q = Ph - Qh^2 + Rh^3$$

$$n''n = \frac{n''qn}{\dots} = Qh^2 - Rh^3 + Sh^4 - \text{etc.}$$

Q positive donne $n''n$ positive, c'est-à-dire n au-dessus de n'' .

$$n''n = \frac{n''qn}{\dots} = -Rh^3 + Sh^4 - \text{etc.}$$

R étant positive, $n''n$ est négative, donc n au-dessous de n'' .

$$n''n = n''qn = Sh^4 - \text{etc.}$$

S étant positive, $n'''n$ l'est aussi, et n est au-dessus de n''' .

On voit par là qu'en supposant P, Q, R, S toutes positives relativement au point M, les courbes nMX , $n''MY''$, $n'''MY'''$ sont disposées autour de ce point comme dans la figure 85.

Quels que soient les signes de Q et R on voit que la valeur de $N''N$ est numériquement beaucoup plus petite que celle de $N'N$, à cause que h est très-petit. Cela fait voir que la courbe MY'' a, avec la proposée, un contact plus intime que MY' . De même la courbe MY''' en a un plus intime que MY'' .

Remarquons que

$N'N$ est de même signe que $n'n$

$N''N$ de signe contraire à $n''n$

$N'''N$ de même signe que $n'''n$,

et ainsi de suite en alternant.

On conclut de là que les courbes osculatrices d'ordre impair, à commencer par la tangente, touchent simplement la courbe proposée, soit qu'elles l'embrassent ou qu'elles en soient embrassées, tandis que les courbes osculatrices d'ordre pair touchent et coupent la proposée.

En comparant les valeurs

$$N'N = N'QN = Rh^3 + Sh^4 + \text{etc.}$$

$$n''n = n''qn = -Rh^3 + Sh^4 - \text{etc.}$$

On voit que pour R positive on a la disposition fig. 86, tandis que pour R négative on a celle de fig. 87. Dans les deux cas la courbe MY'' touche et coupe la proposée MX.

Du signe de la sous-tangente et de la sous-normale.

51. L'équation de la tangente au point (x', y') est, comme on sait,

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x')$$

A étant l'origine des coordonnées et T le point où la tangente rencontre l'axe des x (fig. 88), on voit que AT est la valeur de x correspondante à $y=0$. On a donc

$$-y' = \frac{dy'}{dx'} (AT - x') \quad \text{d'où}$$

$$AT = x' - y' \frac{dx'}{dy'}$$

On nomme sous-tangente la distance PT du pied de l'ordonnée au point T. Or on a

$$PT = PAT$$

Mais $PA = -x'$ puisque $AP = x'$, donc

$$PT = PAT = -x' + x' - y' \frac{dx'}{dy'} = -y' \frac{dx'}{dy'}$$

Lacroix, dans son *Calcul différentiel*, donne $y' \frac{dx'}{dy'}$ comme l'expression de la sous-tangente, mais cette expression appartient à TP et non à PT. Or il est plus naturel de compter la sous-tangente à partir du point P qui est un point donné, et si l'on considère la distance PT comme positive ou négative selon qu'elle est décrite de P en T dans le sens positif ou dans le sens négatif des abscisses, on doit poser

$$PT = -y' \frac{dx'}{dy'}$$

Si nous supposons dx' positive, cette formule donne PT positive lorsque y' et dy' sont de signe contraire, et PT négative lorsque ces quantités sont de même signe. Ce résultat est conforme aux faits, comme le montre la fig. 89.

Pour le point M, on a y positive, dy positive, PT négative.

» M' » y négative, dy négative, PT négative.

» M'' » y positive, dy négative, PT positive.

» M''' » y négative, dy positive, PT positive.

L'équation de la *normale* au point (x', y') est

$$y - y' = -\frac{dx'}{dy'} (x - x').$$

La distance AR (fig. 89) de l'origine au point où elle rencontre l'axe des x , n'est autre chose que la valeur de x correspondante à $y = 0$. On a donc

$$-y' = -\frac{dx'}{dy'} (AR - x), \quad \text{d'où}$$

$$AR = x' + y' \frac{dy'}{dx'}$$

La *sous-normale* PR est donnée par la formule

$$PR = PAR = -x' + x' + y' \frac{dy'}{dx'} = y' \frac{dy'}{dx'}$$

En supposant dx' toujours positive on voit que PR est positive ou négative selon que y' et dy' sont de même signe ou de signe contraire, ce qui est conforme à la figure.

Cette formule suppose que PR est comptée de P en R à partir du pied de l'ordonnée. Il doit en être de même de la sous-tangente; par conséquent si l'on adopte la formule

$$PR = y' \frac{dy'}{dx'} \quad \text{pour la sous-normale, il faut adopter la formule}$$

$$PT = -y' \frac{dx'}{dy'} \quad \text{pour la sous-tangente.}$$

Du signe du rayon de courbure et de la normale.

52. Le rayon de courbure ne change pas de signe aussi long-temps qu'il demeure d'un même côté de la courbe supposée décrite d'un mouvement continu. Il change de signe lorsqu'il passe d'un côté de la courbe à l'autre, comme cela a lieu à un point d'inflexion. S'il est positif avant l'inflexion, il croîtra positivement à mesure qu'on approchera de ce point, jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur $+\infty$; alors il saute brusquement à la valeur $-\infty$, et ses valeurs devenues négatives vont ensuite en diminuant quant à leurs valeurs absolues.

En désignant le rayon de courbure par γ , on a la formule

$$\gamma = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \, d^2y}$$

qui suppose que x est la variable indépendante.

L'une des deux valeurs de γ étant superflue, nous prendrons selon l'usage le signe inférieur et nous adopterons la formule

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \, d^2y}$$

dans laquelle nous supposerons le numérateur $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}$ essentiellement positif.

Pour l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, dont l'équation est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{on trouve}$$

$$\gamma = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3b^4}$$

Si l'on suppose que l'ellipse soit décrite dans le sens BCDE (fig. 90) marqué par la flèche, le rayon de courbure sera toujours du côté gauche de la flèche et aura par conséquent le même signe sur toute la courbe.

C'est ce que donne la formule

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \, d^2y}$$

car dans la partie BCD la concavité étant tournée en haut, on a d^2y positive (n° 29), et comme la courbe est décrite dans le sens BCD on a dx positive, donc γ est négatif.

Dans la partie BED décrite de D en B, on a dx négative, et la concavité étant tournée en bas on a d^2y négative. Le dénominateur $dx d^2y$ est donc encore positif, et γ est encore négative.

Si la courbe était décrite dans le sens BEDC la formule donnerait γ positive pour tous les points de la courbe; car dans la partie BED on aurait dx positive et d^2y négative, et dans la partie DCB on aurait dx négative et d^2y positive. Le dénominateur serait donc toujours négatif, et par conséquent γ toujours positive.

On voit par ce qui précède qu'il faut avoir égard au signe de dx lorsqu'on veut que la courbe soit décrite d'un mouvement continu; car si on supposait dx constamment positive il faudrait décrire la branche supérieure dans le sens BED, et la branche inférieure dans le sens BCD. La formule donnerait γ positive dans la première et négative dans la seconde, ce qui serait contraire à la loi de continuité. Au point B, considéré comme origine de l'arc BE, γ serait positive, tandis que pour le même point considéré comme origine de l'arc BC, γ serait négative. Or le rayon de courbure ne doit avoir au point B qu'une seule et même valeur.

Lorsque l'hyperbole (fig. 91) est décrite par le rayon vecteur mené du foyer F comme pôle, d'abord de C en T' puis de S en S' et enfin de T en C, ainsi que nous l'expliquerons au n° 33, la formule donnera γ positive de C en T' parce que, dans cette portion de courbe, dx est négative et d^2y positive. Le signe de γ restera le même sur toute l'étendue de cette demi-branch, jusqu'à l'infini, où cette branch se confond avec l'asymptote gh . Alors le rayon de courbure est perpendiculaire à Ah et égal à $+\infty$. C'est ce qu'indique la formule puisque la courbe devenant droite on a $d^2y=0$.

Lorsqu'on passe aux points situés à une distance infinie sur la branch SB, le rayon de courbure, toujours perpendiculaire à Ag , mais de l'autre côté de cette asymptote, a pour valeur $-\infty$ et sa valeur absolue va en diminuant à mesure qu'on s'avance sur cette branch dans le sens SB jusqu'au point B où elle recommence à croître jusqu'à l'infini. Sur toute la branch SBS', γ est négative, car dans la partie SB on a dx négative et d^2y négative, et dans la partie BS', on a dx positive et d^2y positive.

En passant de la branch BS' à la branch TC, le rayon vecteur passe de la valeur $-\infty$ à la valeur $+\infty$ et demeure positif sur toute l'étendue de TC, puisque $dx y$ est positive et d^2y négative.

De cette manière le rayon de courbure ne change pas de signe tant qu'on reste sur une même branch SBS' ou TCT'.

On peut remarquer que la description précédente de l'hyperbole suppose un mouvement continu; car à mesure que l'on passe de la branch CT' à la branch SB, le point décrivant ne cesse pas de se mouvoir sur l'asymptote gh dans le sens gh . De même en passant de la branch BS' à la branch TC le point décrivant se meut toujours sur l'asymptote $g'h'$ dans le sens $g'h'$.

Quoique les extrémités des branches CT' et BS soient infiniment éloignées l'une de l'autre, on peut dire, en quelque sorte, qu'en passant de CT' à SB on rencontre une inflexion. Il en est de même quand on passe de BS' à TC. Ce point de vue fait encore ressortir la convenance de la description de l'hyperbole introduite par M. Lefébure de Fourcy.

Dans un point M de rebroussement de la première espèce (fig. 92), les rayons de courbure des deux branches sont directement opposés; ils doivent donc être de signe contraire. Pour que la formule s'applique ici, il est nécessaire de supposer les branches décrites dans les sens $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{EM}$, en allant dans chacune vers le point de rebroussement, ou de les supposer toutes deux décrites dans le sens contraire, c'est-à-dire de M en D et de M en E.

En adoptant la première supposition, on a, dans notre figure, dx positive pour les deux branches, et comme d^2y est négative pour DM et positive pour EM, la formule donnera γ positive pour $\overrightarrow{DM}$ et négative pour $\overrightarrow{EM}$.

Si le rebroussement est de la seconde espèce (fig. 93), il faut avoir la même précaution et prendre dx positive pour les deux branches, ou négative pour les deux. Prenons dx positive, c'est-à-dire, supposons les branches décrites dans les sens $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{EM}$. Comme d^2y est négative pour les deux branches, on aura γ positive sur l'une et sur l'autre. Ce résultat est conforme à la figure, puisque, au point M, les rayons de courbure des deux branches sont placés l'un sur l'autre et dirigés dans le même sens.

Examinons la formule qui donne la *normale*. On entend ici par normale, dans un sens restreint, la partie de cette droite comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. En la désignant par N on a, comme on sait, la formule

$$N = \pm \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$$

Une des deux valeurs est superflue et nous allons voir que si l'on adopte, comme d'ordinaire, le signe inférieur pour le rayon de courbure, il faut adopter le signe supérieur pour la normale. De cette manière les deux formules

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y}, \quad N = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$$

donneront pour γ et N des valeurs de même signe pour les points où le rayon de courbure et la normale coïncident, et des valeurs de signe contraire pour les points où ces lignes sont directement opposées.

C'est ce que fait voir la fig. 94. En supposant la courbe décrite dans le sens $\overrightarrow{CDE}$, c'est-à-dire en faisant dx négative pour la branche CD et positive pour DE, on aura depuis C jusqu'au point d'inflexion K :

dx nég., d^2y nég. et par conséquent γ nég. } Dans cette partie de la courbe, γ et N
 dx nég., y nég. et par conséquent N posit. } sont en effet directement opposées.

depuis K jusqu'à D on a

dx nég., d^2y pos., γ pos. }
 dx nég., y nég., N pos. } En effet γ et N coïncident dans cette partie.

de D en I on a

dx pos., d^2y nég., γ pos. }
 dx pos., y pos., N pos. } γ et N coïncident.

de I en E.

dx pos., d^2y pos., γ nég. }
 dx pos., y pos., N pos. } γ et N sont directement opposées.

Les formules qui donnent γ et N ont une application intéressante dans le problème suivant :

Lacroix, *Calcul différentiel*, tome II, p. 458:

« Trouver l'équation des courbes dans lesquelles le rayon de courbure est égal à la normale.

» Il faut distinguer si c'est dans le même sens ou en sens contraire; car ces deux circonstances se rapportent à des courbes bien différentes et ne dépendent cependant que du signe attaché à l'expression du rayon de courbure.

» Dans le premier cas l'équation du problème étant

$$\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y} \quad \text{se réduit à}$$

$$y d^2y + dy^2 + dx^2 = 0$$

» dont les intégrales première et seconde sont

$$y dy + x dx = C dx, \quad y^2 + x^2 = Cx + C'$$

» ainsi la courbe cherchée est un cercle, ayant son centre sur l'axe des x , ce qui satisfait évidemment à la question.

» Lorsque le rayon de courbure doit tomber dans une direction opposée à celle de la normale, l'équation à intégrer est

$$\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y} \quad ,$$

dont l'intégrale est l'équation de la courbe représentée fig. 95.

Des coordonnées polaires.

53. La position d'un point sur un plan est donnée lorsqu'on connaît : 1° la valeur de l'arc directeur de l'axe des r qui passe par ce point; 2° la valeur du rayon vecteur mené, sur cet axe, de l'origine au point donné. Par cette valeur nous entendons non-seulement la longueur de ce rayon, mais encore son signe qui fera connaître s'il se trouve sur le côté positif ou sur le côté négatif de l'axe tournant.

Les arcs directeurs et les rayons vecteurs, que nous désignerons par les variables ω et r , constituent un système de coordonnées auquel on a donné le nom de coordonnées polaires. Elles peuvent être positives ou négatives.

Pour donner un exemple très-simple de leur usage, prenons la courbe pour laquelle le rayon vecteur est toujours égal au quart de l'arc directeur qui serait décrit d'un rayon égal à l'unité.

L'arc directeur peut être exprimé soit en degrés, soit en parties du rayon. Il suffit qu'on s'entende à cet égard. En le supposant exprimé en degrés on aura

$$r = \frac{1}{4} \pi \cdot \frac{\omega^0}{180^0} \quad \text{pour l'équation de la courbe. (Fig. 96.)}$$

Si l'on prend les valeurs de ω depuis 0^0 à $+\infty$, on aura la branche OMN dans laquelle les rayons vecteurs sont positifs. En prenant, au contraire, ω depuis 0^0 à $-\infty$, on aura la branche Omn dans laquelle les rayons vecteurs sont négatifs.

Par exemple, l'arc négatif AhB étant exprimé en degrés; si l'on met ce nombre de degrés négatifs pour ω dans l'équation ci-dessus, on trouvera pour r une valeur négative qui sera représentée par la droite Om prise sur le côté négatif de l'axe tournant OB correspondant à l'axe directeur AhB.

Si l'on avait l'équation

$$r = -\frac{1}{4} \pi \cdot \frac{\omega^0}{180^0}, \quad \text{on la représenterait comme dans la fig. 97.}$$

En prenant ω de 0^0 à $+\infty$, on a la branche Omn dans laquelle les rayons vecteurs négatifs correspondent aux arcs directeurs positifs.

En prenant ω de 0^0 à $-\infty$, on a la branche OMN dans laquelle les rayons vecteurs positifs correspondent aux arcs directeurs négatifs.

Par exemple à l'arc directeur positif AhB correspond le rayon vecteur négatif Om, et à l'arc directeur négatif AhB' correspond le rayon vecteur positif OM.

Il ne faut pas oublier que le côté positif de l'axe tournant des r correspondant à un arc directeur donné, positif ou négatif, est la droite menée du pôle O à l'extrémité de cet arc.

Lorsqu'on exprime l'arc directeur ω en parties du rayon pris pour unité, les équations ci-dessus s'écrivent plus simplement comme suit :

$$r = \frac{1}{4} \omega, \quad r = -\frac{1}{4} \omega.$$

Soit encore l'équation

$$r = a - b\omega$$

ω étant exprimé en parties du rayon.

Pour $\omega = 0$ on a $r = a = OB$ (fig. 98), et pour $\omega = \frac{a}{b} = AIC$ on a $r = 0$.

L'arc ω continuant à croître, r devient négatif et fournit la branche OIn .

C'est M. Lefébure de Fourcy qui a fait voir la nécessité de n'assigner en général aucune limite aux arcs directeurs et aux rayons vecteurs.

Nous rappellerons ici la manière dont cet auteur interprète l'équation polaire de l'hyperbole

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \omega} \quad (\text{Fig. 91.})$$

Le pôle est au foyer F situé du côté des x positives. Les arcs ω se comptent positivement en allant des x positives vers les y positives; a et b sont les demi-axes, et l'on a fait

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{c}{a} = e, \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{a} = p.$$

Depuis $\omega = 0^\circ$ jusqu'à la valeur de ω qui répond à $\cos \omega = \frac{1}{e}$, on a r négatif, et ce rayon vecteur négatif décrit la demi-branche CT' .

Lorsque $\cos \omega = \frac{1}{e}$ on a $r = -\infty$. L'axe des r est alors parallèle à l'asymptote Ag , car $\cos gAx = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$.

Le dénominateur $1 - e \cos \omega$ passant ici par zéro en allant du négatif au positif, le rayon vecteur r saute brusquement de la valeur $-\infty$ à la valeur $+\infty$, et à mesure qu'il achève de décrire la demi-branche CT' , il commence à décrire la branche SB de S en B .

L'arc ω continuant à croître, le rayon vecteur r décrit la branche entière SBS' , jusqu'à ce que ω soit parvenu, dans le quatrième quadrans, à une valeur telle que $\cos \omega = \frac{1}{e}$. On a alors $r = +\infty$ et l'axe des r parallèle à l'asymptote Ag' .

Le dénominateur $1 - e \cos \omega$ passant ici par zéro en allant du positif au négatif le rayon vecteur r saute brusquement de la valeur $+\infty$ à la valeur $-\infty$, et à mesure qu'il achève de décrire la demi-branche BS' , il commence à décrire la demi-branche TC . Ce rayon demeure négatif et décrit cette demi-branche qui est achevée lorsque $\omega = 360^\circ$.

Des coordonnées polaires en trois dimensions.

Dans l'espace les coordonnées polaires sont au nombre de trois, savoir : le rayon vecteur r du point donné, ou sa distance au pôle, l'angle γ que ce rayon vecteur fait avec une droite fixe menée par le pôle, et l'angle dièdre θ compris entre le plan de ces deux droites et un plan fixe passant par la droite fixe.

Il sera commode de prendre pour pôle, l'origine des coordonnées, pour la droite fixe le côté positif de l'axe des z , et pour le plan fixe celui qui est déterminé par les axes des x et des z .

Nous nommerons *plan tournant* le plan mobile qui passe par l'axe des z et qui est déterminé par l'angle dièdre θ . Cet angle dièdre se compte positivement en allant du plan déterminé par l'axe des z et celui des x positives, vers le plan déterminé par l'axe des z et l'axe des y positives.

Supposons pour un moment que le plan tournant coïncide avec celui des xz . On comptera l'angle γ positivement en allant des z positives vers les x positives. Ce sens positif ainsi déterminé pour l'angle γ , se conserve dans toutes les positions du plan tournant.

Les arcs qui mesurent les angles θ et γ dans le cercle de rayon 1, sont tous deux les arcs directeurs de l'axe des z .

Le côté positif de l'axe tournant des r est la droite menée du pôle à l'extrémité de l'arc directeur γ , lequel peut d'ailleurs être positif ou négatif.

Le rayon vecteur r est positif ou négatif selon qu'il se compte sur le côté positif ou sur le côté négatif de l'axe tournant des r .

$$\text{Soit} \quad F(\theta, \gamma, r) = 0 \dots (1)$$

l'équation polaire d'une surface.

Supposons pour un moment θ constant, ce qui fixe le plan tournant dans une certaine position et donnons à γ une série de valeurs consécutives.

A chaque valeur de γ correspondront une ou plusieurs valeurs de r , savoir une valeur si l'équation (1) est du premier degré en r et plusieurs valeurs si elle est d'un degré plus élevé par rapport à r . On aura ainsi une ou plusieurs courbes tracées dans le plan tournant.

A mesure qu'on fera varier θ , ces courbes varieront par degrés insensibles en passant d'une position à l'autre du plan tournant, et leur ensemble formera différentes nappes qui appartiendront à l'équation (1).

On peut aussi supposer pour un moment γ constant et donner à θ une série de valeurs, à chacune desquelles correspondront une ou plusieurs valeurs de r ; c'est-à-dire une ou plusieurs courbes tracées sur la surface d'un cône droit dont l'axe des z est l'axe et tel que γ et l'angle formé par la génératrice avec l'axe.

A mesure qu'on fera varier γ , ces courbes varieront par degrés insensibles en passant d'un cône au suivant, et leur ensemble formera encore les différentes nappes de la surface représentée par l'équation (1).

Transformation des coordonnées rectangles et de leurs différentielles en coordonnées polaires.

54. En conservant aux angles γ et θ la signification ci-dessus et désignant par a, b, c les coordonnées rectangles du pôle, on a

$$x = a + r \sin \gamma \cos \theta, \quad y = b + r \sin \gamma \sin \theta, \quad z = c + r \cos \gamma;$$

et lorsqu'il n'est question que de deux dimensions, on a pour les points situés dans le plan (x, y) , en faisant $\gamma = 90^\circ$,

$$x = a + r \cos \theta, \quad y = b + r \sin \theta.$$

Quand le pôle est à l'origine, a, b, c sont nuls et l'on a en trois dimensions, (fig. 99).

$$[x = r \sin \gamma \cos \theta, \quad y = r \sin \gamma \sin \theta, \quad z = r \cos \gamma.$$

et en deux dimensions

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Dans ces dernières θ est l'angle formé par l'axe des r avec l'axe des x .

Il est facile de voir que ces formules sont tout-à-fait générales en ayant égard aux signes de $x, y, z, r, \sin \gamma, \cos \gamma, \sin \theta, \cos \theta$.

L'angle γ se compte de 0° à 180° et l'angle θ de 0° à 360° .

En différentiant les deux dernières formules, il vient

$$\begin{aligned} dx &= -r d\theta \sin \theta + dr \cos \theta \\ dy &= r d\theta \cos \theta + dr \sin \theta. \end{aligned}$$

Nous croyons qu'il ne sera pas sans intérêt de retrouver ces deux formules différentielles par la géométrie, et de s'assurer de leur généralité.

Soit M, (fig. 100) le point d'une courbe dont les coordonnées sont

$$CP = x, \quad PM = y, \quad CM = r, \quad ACM = \theta,$$

et soit M' le point consécutif dont les coordonnées sont

$$CP' = x + dx, \quad PM' = y + dy, \quad CM' = r + dr, \quad ACM' = \theta + d\theta.$$

On a $dx = PP'$, PP' étant la projection sur l'axe des x de la corde MM' , qui se confond avec son arc.

De l'origine C comme centre, avec CM pour rayon, décrivons l'arc de cercle infiniment petit MD qui pourra être considéré comme une ligne droite perpendiculaire à CM , c'est-à-dire parallèle à l'axe des s .

On aura

$$MD = r d\theta$$

puisque $d\theta$ est l'arc qui mesure l'angle MCM' dans le cercle de rayon r .

D'ailleurs $DM' = dr$.

La généralité de ces deux formules sera démontrée tout à l'heure.

Cela posé, si au lieu de projeter MM' , sur les x , nous projetons la ligne brisée MDM' , nous aurons

$$dx = \underbrace{PP'}_{\dots} = \underbrace{PAP'}_{\dots}.$$

PA étant la projection, sur les x , d'une ligne MD parallèle aux s , on a

$$PA = -MD \sin \theta, \quad \text{en ayant égard aux signes de MD, } \sin \theta, \text{ et PA.}$$

(Voyez à cet égard le n° 22). Mettant pour MD sa valeur, il vient

$$PA = -rd\theta \sin \theta.$$

Comme l'angle MCM' est infiniment petit, on peut considérer DM' comme parallèle à Cr, on aura donc pour sa projection AP' sur les x ,

$$\underbrace{AP'}_{\dots} = DM' \cos \theta \quad (\text{n° 22}),$$

$$\text{ou} \quad \underbrace{AP'}_{\dots} = dr \cos \theta$$

donc enfin

$$dx = \underbrace{PP'}_{\dots} = \underbrace{PAP'}_{\dots} = -rd\theta \sin \theta + dr \cos \theta.$$

dy ou QQ' est la projection, sur l'axe des y , de MM' ou de la ligne brisée MDM' , et l'on a

$$dy = \underbrace{QQ'}_{\dots} = \underbrace{QBQ'}_{\dots}.$$

QB étant la projection sur les y d'une droite MP parallèle à l'axe des s , on a

$$OB = MD \cos \theta \quad \dots \quad (\text{n° 22})$$

$$\text{ou} \quad OB = rd\theta \cos \theta.$$

BQ' étant la projection sur les y d'une droite DM' parallèle aux r , on a

$$BQ' = DM' \sin \theta \quad \text{ou}$$

$$BQ' = dr \sin \theta;$$

donc enfin

$$dy = \underbrace{QQ'}_{\dots} = \underbrace{QBQ'}_{\dots} = rd\theta \cos \theta + dr \sin \theta.$$

Il reste à vérifier, quant aux signes, la généralité des valeurs.

$$MD = rd\theta \quad \text{et} \quad DM' = dr.$$

Cette dernière est évidemment générale, car DM' et dr sont ensemble positives ou négatives, selon que l'on va de D en M' dans le sens positif ou négatif des r .

Quant à la formule $MD = rd\theta$, il est facile de voir que MD est positif, (c'est-à-dire que l'on va de M en D dans le sens positif des s), lorsque r et $d\theta$ sont de même signe, et qu'au contraire MD est négatif lorsque r et $d\theta$ sont de signe contraire.

Par exemple, en fig. 101, l'angle MCM' est mesuré par $d\theta$ positive, CM ou r est positive, et MD ou $rd\theta$ est positive comme étant dirigée selon les s positives. La règle des signes est donc vérifiée.

Dans la même figure l'angle mCm' mesuré par $d\theta$ est positif; Cm ou r est négative, et md ou $rd\theta$ est négative comme étant dirigée selon les s négatives. Ainsi la formule $md=rd\theta$ est encore vérifiée quant aux signes.

Dans la fig. 102, on a

MCM' mesuré par $d\theta$ négatif,	CM ou r positive,	MD ou $rd\theta$ négative.
mCm' mesuré par $d\theta$ nég.,	Cm ou r nég.,	md ou $rd\theta$ pos.

Dans la fig. 103,

MCM' mesuré par $d\theta$ pos.,	CM ou r nég.,	MD ou $rd\theta$ nég.
mCm' ou $d\theta$ pos.,	Cm ou r pos.,	md ou $rd\theta$ pos.

Dans la fig. 104,

MCM' ou $d\theta$ nég.,	CM ou r nég.,	MD ou $rd\theta$ pos.
mCm' ou $d\theta$ nég.,	Cm ou r pos.,	md ou $rd\theta$ nég.

La règle des signes est, comme on voit, toujours vérifiée.

On remarquera que l'arc $d\theta$ mesure l'angle MCM' ou son opposé au sommet, mais que $d\theta$ est toujours de même signe que MCM' . Il en est de même de $d\theta$ et mCm' .

Les fig. 105, 106, 107, 108, offrent un grand nombre d'exemples sur lesquels on peut vérifier les formules

$$\begin{array}{ll} \overset{\dots}{PA} = -rd\theta \sin \theta, & \overset{\dots}{AP'} = dr \cos \theta \\ \overset{\dots}{QB} = rd\theta \cos \theta, & \overset{\dots}{BQ'} = dr \sin \theta \end{array}$$

qui conduisent à

$$\begin{array}{l} dx = \overset{\dots}{PP'} = \overset{\dots}{PAP'} = -rd\theta \sin \theta + dr \cos \theta \\ dy = \overset{\dots}{QQ'} = \overset{\dots}{QBQ'} = rd\theta \cos \theta + dr \sin \theta \end{array}$$

Ces figures représentent quatre arcs de courbe différents, dont les différentielles sont représentées par

MM'	dont les projections sont	$dx = \overset{\dots}{PAP'}$,	$dy = \overset{\dots}{QBQ'}$
$\mu M'$		$dx = \overset{\dots}{\pi AP'}$,	$dy = \overset{\dots}{KBQ'}$
$M\mu'$		$dx = \overset{\dots}{PA\pi'}$,	$dy = \overset{\dots}{QBK'}$
$\mu\mu'$		$dx = \overset{\dots}{\pi A\pi'}$,	$dy = \overset{\dots}{KBK'}$

Dans toutes ces figures les axes des r et des s relatifs au point M , sont désignés par Cr et Cs . Ceux qui sont relatifs au point μ sont désignés par $C\mu$ et $C\sigma$.

L'arc directeur de Cr est désigné par θ , et l'arc directeur de $C\mu$ l'est par ϕ .

Dans toutes ces figures $d\theta$ est positif et se rapporte au cas où l'on passe du point M au point M' ou au point μ' ; tandis que $d\phi$ est négatif et se rapporte au cas où l'on passe du point μ aux points M' et μ' .

Considérons l'arc dont la différentielle est M_{μ}' , (fig. 105, 1°). On a

$$r = CM \text{ pos.}, \quad d\theta \text{ pos.}, \quad \sin \theta \text{ pos.}, \quad \cos \theta \text{ pos.}, \quad dr = D_{\mu}' \text{ nég.}$$

La règle des signes donne

$$\begin{aligned} \overset{\dots}{PA} &= -rd\theta \sin \theta && \text{nég.} \\ \overset{\dots}{A\pi'} &= dr \cos \theta && \text{nég.} \\ \overset{\dots}{QB} &= rd\theta \cos \theta && \text{pos.} \\ \overset{\dots}{BK'} &= dr \sin \theta && \text{nég.} \end{aligned}$$

ce qui s'accorde avec la figure.

Considérons encore l'arc dont la différentielle est $\mu M'$, (fig. 107, 2°)

On a ici

$$r = C\mu \text{ nég.}, \quad d\theta \text{ nég.} \text{ comme mesurant l'angle négatif } \mu CM', \quad \sin \theta \text{ nég.}, \quad \cos \theta \text{ nég.}, \\ dr = DM' \text{ pos.}$$

La règle des signes donne

$$\begin{aligned} \overset{\dots}{\pi A} &= -rd\theta \sin \theta && \text{pos.} \\ \overset{\dots}{AP'} &= dr \cos \theta && \text{nég.} \\ \overset{\dots}{KB} &= rd\theta \cos \theta && \text{nég.} \\ \overset{\dots}{BQ'} &= dr \sin \theta && \text{nég.} \end{aligned}$$

ce qui s'accorde encore avec la figure.

Nous ne pousserons pas plus loin cet examen, parce que, d'après la manière dont nous avons obtenu ces formules, nous devons être convaincus de leur généralité.

De la sous-tangente exprimée en coordonnées polaires et de son signe.

35. Soit A (fig. 109) l'origine, AB le côté positif de l'axe des x , AC celui des y . Prenons A pour pôle et O pour origine des arcs t qui se compteront positivement dans le sens marqué par la flèche sur une circonférence OQN décrite d'un rayon AO=1. Ces arcs seront exprimés en partie du rayon, ensorte que l'arc de 180° sera exprimé par π ou 3,1415926. Nous appellerons m l'arc OQ'Q intercepté entre le point O, origine des arcs, et le point Q situé sur l'axe des x positives.

Les rayons vecteurs seront désignés par u .

Cela posé on aura pour le point M de la courbe

$$x = AP, \quad y = PM, \quad u = AM, \quad t = OQ'QN, \quad -m + t = QN.$$

$$\begin{aligned} x &= AM \cos QN = u \cos (t - m) \\ y &= AM \sin QN = u \sin (t - m) \\ dx &= du \cos (t - m) - u dt \sin (t - m) \\ dy &= du \sin (t - m) - u dt \cos (t - m). \end{aligned}$$

D'après ces valeurs l'expression de la sous-tangente

$$PT = -y \frac{dx}{dy} \quad \text{devient}$$

$$PT = -u \sin(t-m) \cdot \frac{du \cos(t-m) - u dt \sin(t-m)}{du \sin(t-m) + u dt \cos(t-m)}$$

Voyez Lacroix, *Calcul différentiel*, in-4°, tome I, page 478. Il faut remarquer que nous corrigeons toujours le signe de cette formule.

« On simplifiera beaucoup ce résultat, dit l'auteur, en observant que la situation de la ligne des abscisses sur laquelle tombe la distance PT est arbitraire, et qu'on peut par conséquent prendre toujours m telle que l'arc QN soit $\frac{1}{2}\pi$, auquel cas l'ordonnée PM se confond avec le rayon vecteur AM, $\cos(t-m)=0$, $\sin(t-m)=1$, et PT se change en AT' »

Il vient alors

$$AT' = \frac{u^2 dt}{du} \quad (\text{et selon l'auteur } AT' = -\frac{u^2 dt}{du})$$

De cette manière les axes AX et AY (fig. 409) deviennent des axes tournants dont la direction varie pour chaque point de la courbe. L'axe AY est l'axe tournant des u . C'est celui que nous avons appelé ailleurs l'axe tournant des r . L'axe AX n'est autre chose que le côté négatif de notre axe des s .

« Lorsqu'on fait usage des coordonnées polaires, dit Lacroix dans l'ouvrage cité, il est très-simple de rapporter le centre F du cercle osculateur (fig. 440) au rayon AM, au moyen de la droite FE perpendiculaire sur ce rayon vecteur et de la distance ME. Les expressions de ME et de FE se concluent immédiatement de celles de $y - \beta$ et de $x - \alpha$. »

Dans ces dernières expressions, x et y sont les coordonnées du point M, et α , β celles du centre F du cercle osculateur au point M. Ces coordonnées sont rapportées aux axes tournants AX et AMY. On a donc $x=0$, puis

$$\begin{aligned} ME &= MAE = -y + \beta & \text{et} \\ EF &= \alpha. \end{aligned}$$

Il y a des fautes de signe dans Lacroix qui pose $ME = y - \beta$, et $EF = -\alpha$. La ligne ME est la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur. Elle est souvent appelée le *co-rayon de courbure*. Elle se compte à partir du point M et détermine ainsi le point E par lequel on élève à AM la perpendiculaire EF égale à α , savoir dans le sens AX si α est positive et dans le sens contraire si α est négative.

Dans la figure 440 on a $AM = y$ positive, $MA = -y$ négative, $AE = \beta$ positive ; $-y + \beta = MAE = ME$ négative.

Dans la fig. 111, relative à l'hyperbole, on a $\overset{\dots}{AM} = y$ positive, $\overset{\dots}{MA} = -y$ négative; $\overset{\dots}{AE} = \beta$ négative; $-y + \beta = \overset{\dots}{MAE} = \overset{\dots}{ME}$ négative.

Dans la fig. 112, le point M situé sur la branche CT' a pour coordonnées polaires l'arc directeur qui mesure l'angle YAx , et le rayon vecteur $y = u = \overset{\dots}{AM}$ négatif (n° 33). On a donc $\overset{\dots}{AM} = y$ négative, $\overset{\dots}{MA} = -y$ positive, $\overset{\dots}{AE} = \beta$ négative; $-y + \beta = \overset{\dots}{MAE} = \overset{\dots}{ME}$ négative.

Ainsi dans ces trois exemples $\overset{\dots}{ME}$ est négative; mais il pourrait en être autrement. Quant à $\overset{\dots}{EF} = z$, elle est négative pour le point M fig. 110, positive fig. 111, et négative fig. 112.

En changeant le signe des formules données par Lacroix, on aura

$$\overset{\dots}{ME} = \overset{\dots}{MAE} = -y + \beta = -\frac{udu^2 + u^3 dt^2}{2du^2 - ud^2u + u^2 dt^2}$$

$$\overset{\dots}{EF} = z = -\frac{du^3 + u^2 dudt^2}{2du^2 dt - u dt d^2u + u^2 dt^3}$$

Ces formules supposent que t est la variable indépendante.

L'auteur appliquant les formules fautes, quant au signe, à la spirale logarithmique $t = lu$ trouve $\overset{\dots}{ME} = u$ et $\overset{\dots}{EF} = \frac{u}{M}$, M étant le module.

Les formules corrigées donnent

$$\overset{\dots}{ME} = -u = \overset{\dots}{MA}, \quad \overset{\dots}{EF} = -\frac{u}{M},$$

ce qui est conforme à la figure 113, laquelle se rapporte aux logarithmes tabulaires.

On voit par là que le point E se confond avec le pôle A, ensorte que le centre F du cercle osculateur est sur l'axe AX; mais comme dans cette courbe, u est toujours positive, on voit que EF ou AF est toujours sur le prolongement de l'axe AX.

Nous allons retrouver directement l'expression de la sous-tangente AT' donnée ci-dessus. Nous ferons usage des axes tournans des r et des s . Celui des r n'est autre chose que AY et celui des s est le prolongement de AX.

Nous désignerons l'arc directeur par la lettre θ comme dans d'autres occasions.

Soit M' le point consécutif à M. Du pôle A comme centre avec AM comme rayon, décrivons l'arc infiniment petit MK, (figures 114.... 121). Nous aurons

$$\overset{\dots}{KM'} = dr \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\overset{\dots}{MK} = r d\theta \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Considérons l'arc MK comme une droite perpendiculaire à AM', l'angle T'AM' comme un angle droit, et prenons la sécante T'MM' pour la tangente au point M. Les triangles semblables MKM' et T'AM' dont les côtés sont parallèles donnent

$$\underset{\dots}{MK} : \underset{\dots}{KM'} :: \underset{\dots}{T'A} : \underset{\dots}{AM'}$$

proportion vraie en ayant égard aux signes (n° 7) et qui revient à

$$rd\theta : dr :: \underset{\dots}{T'A} : r + dr$$

ou en négligeant dr vis-à-vis de r

$$rd\theta : dr :: \underset{\dots}{T'A} : r \quad \text{d'où}$$

$$\underset{\dots}{T'A} = \frac{r^2 d\theta}{dr} \quad \dots \quad (3)$$

et en changeant les signes des deux membres

$$\underset{\dots}{AT'} = - \frac{r^2 d\theta}{dr}.$$

Vérifions la généralité des formules (1), (2) et (3)

La formule $\underset{\dots}{KM'} = dr$ est évidemment générale en ayant égard aux signes, $\underset{\dots}{KM'}$ et dr étant positives lorsqu'on va de K en M' dans le sens positif des r , comme dans les figures 114, 116, 119, 121, et négatives dans le cas contraire, fig. 115, 117, 118, 120.

MK étant parallèle à l'axe des s , est positive ou négative selon que l'on va de M en K dans le sens positif ou dans le sens négatif des s . On voit que MK est positive fig. 114, 115, 120, 121, et négative fig. 116, 117, 118, 119.

Désignons par μ et μ' les points où la circonférence directrice est coupée par le côté positif de l'axe des r relatif à M et à M'. En considérant $A\mu\mu'$ et AMK comme des triangles semblables dont les côtés sont parallèles, on aura

$$\underset{\dots}{AM} : \underset{\dots}{MK} :: \underset{\dots}{A\mu} : \underset{\dots}{\mu\mu'}, \quad \text{en ayant égard aux signes.}$$

On voit en effet (fig. 114... 121) que selon que les antécédents AM et $A\mu$ sont de même sens ou de sens contraire, les conséquences MK et $\mu\mu'$ sont aussi de même sens ou de sens contraire.

On a $\underset{\dots}{AM} = r$ en ayant égard aux signes.

$\underset{\dots}{A\mu} = 1$ toujours positive, parce que $A\mu$ est sur le côté positif de l'axe tournant des r .

$\underset{\dots}{\mu\mu'} = d\theta$ en ayant égard aux signes, $\mu\mu'$ étant considérée comme une droite infiniment petite parallèle à l'axe des s .

Au moyen de ces valeurs la dernière proportion devient

$$r : \underset{\dots}{MK} :: 1 : d\theta, \quad \text{en ayant égard aux signes.}$$

Donc enfin la formule

$$\underset{\dots}{MK} = rd\theta \quad \text{est généralement vraie.}$$

La formule $T'A = \frac{r^2 d\theta}{dr}$ ayant été déduite des formules (1) et (2) au moyen de la proportion

$$MK : KM' :: T'A : AM'$$

on est assuré qu'elle est aussi générale par rapport aux signes. C'est ce que les figures 114 ... 121 font voir. Dans les figures 114 et 116, $d\theta$ et dr , c'est-à-dire $\frac{r^2 d\theta}{dr}$ et KM' , sont toutes deux positives et $T'A$ est positive. Dans les figures 118 et 120 $d\theta$ et dr sont toutes deux négatives et $T'A$ est encore positive. Tandis que dans les figures 115, 117, 119 et 121 où $d\theta$ et dr sont de signe contraire, on a $T'A$ négative.

La formule $T'A = \frac{r^2 d\theta}{dr}$ étant généralement vraie, la formule contraire

$$AT' = - \frac{r^2 d\theta}{dr} \text{ l'est pareillement.}$$

Ainsi AT' est sur les s positives ou négatives selon que $d\theta$ et dr sont de signe contraire ou de même signe.

Dans Lacroix la sous-tangente AT' est rapportée, quant à son signe, à l'axe AX qui est directement opposée à notre axe As ; donc la formule devrait être alors

$$AT' = \frac{u^2 dt}{du} \text{ comme nous l'avons déjà dit.}$$

Prenons pour exemple la spirale de Cône, (fig. 122). Dans cette courbe, à mesure que l'arc directeur croît de 0° à 360° , le point décrivant, parti du pôle, s'avance uniformément sur le côté positif de l'axe tournant des r , de telle sorte qu'il parvienne à l'extrémité du rayon de la circonférence directrice à mesure que l'arc directeur atteigne la valeur 360° .

Si l'on exprime les arcs directeurs en parties du rayon pris pour unité on aura donc

$$\theta : 2\pi :: r : 1 \quad \text{et}$$

$$r = \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{sera l'équation polaire de cette courbe.}$$

Ici le rayon vecteur est de même signe que l'arc directeur θ . Ces coordonnées sont toutes deux positives dans la branche AMN et toutes deux négatives dans la branche Amn . La première peut être considérée comme décrite à mesure que l'axe des r tourne autour du pôle dans le sens positif des arcs θ depuis la valeur $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\infty$, et la seconde comme décrite à mesure que Ar tourne dans le sens négatif depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=-\infty$.

Mais on peut aussi considérer les deux branches comme décrites dans le sens positif des arcs. Les arcs directeurs sont alors pris d'abord de $-\infty$ à 0 et ensuite de 0 à $+\infty$.

On pourrait aussi concevoir les deux branches comme décrites dans le sens négatif. On prendrait alors θ depuis $+\infty$ à 0 et ensuite depuis 0 à $-\infty$.

Ceci revient à dire qu'on peut dans l'une et l'autre branche prendre $d\theta$ positive ou négative.

L'équation $r = \frac{\theta}{2\pi}$ étant différenciée donne

$$\frac{d\theta}{dr} = 2\pi, \quad \text{ce qui nous apprend que, dans cette courbe, } d\theta \text{ et } dr \text{ sont tou-}$$

jours de même signe. La sous-tangente $\underline{\underline{AT'}} = -\frac{r^2 d\theta}{dr}$ devient donc

$$\underline{\underline{AT'}} = -2\pi r^2,$$

elle est donc toujours sur les s négatives.

Toutes ces conclusions sont conformes aux figures 123, 124, 125, 126, dont les deux premières se rapportent à la branche AMN et les deux dernières à la branche Amn.

Dans la fig. 123, on a, pour le point M, $\mu\mu' = d\theta$ pos., $\underline{\underline{KM'}} = dr$ pos., $\underline{\underline{AT'}}$ nég.

Dans la fig. 124, $\mu\mu' = d\theta$ nég., $\underline{\underline{KM'}} = dr$ nég., $\underline{\underline{AT'}}$ nég.

Dans la fig. 125, $\mu\mu' = d\theta$ nég., $\underline{\underline{KM'}} = dr$ nég., $\underline{\underline{AT'}}$ nég.

Dans la fig. 126, $\mu\mu' = d\theta$ pos., $\underline{\underline{KM'}} = dr$ pos., $\underline{\underline{AT'}}$ nég.

La formule $\underline{\underline{AT'}} = -\frac{r^2 d\theta}{dr}$ est donc vérifiée dans toutes ces figures.

Il existe une expression de la tangente trigonométrique que fait avec le rayon vecteur AM la tangente à la courbe au point M, laquelle expression donnera lieu à quelques remarques utiles sur les signes.

Dans le triangle M/MK rectangle en K, l'angle aigu MM'/K a pour tangente trigonométrique $\frac{MK}{\underline{\underline{KM'}}$ abstraction faite des signes, (fig. 127 et 132).

Si l'on considère les rayons vecteurs AM et AM' comme parallèles, on aura, selon les cas, l'angle M'MI = MM'/K ou à $180^\circ - MM'/K$, donc $\text{tang } M'MI = \frac{MK}{\underline{\underline{KM'}}$ abstraction faite du signe.

Mais si l'on suppose que M' est le point consécutif à M quand on va de M à M' dans le sens positif des arcs directeurs, et que le point I est au-delà de M par rapport à A, on aura

$$\text{tang } M'MI = \frac{MK}{\underline{\underline{KM'}}$$

en ayant égard aux signes de $\underline{\underline{MK}}$ et de $\underline{\underline{KM'}}$. La droite $\underline{\underline{MK}}$, parallèle aux s , étant positive ou négative selon que l'on va de M en K dans le sens positif ou négatif des s ; et la droite $\underline{\underline{KM'}}$, qui est sur le rayon vecteur AM', étant positive ou négative selon que l'on va de K en M' dans le sens positif ou négatif des r .

Ainsi pour l'ellipse, on a fig. 127, $\overline{MK}$ positif, $\overline{KM'}$ positif, et l'angle $M'MI$ aigu.

Fig. 128, $\overline{MK}$ pos., $\overline{KM'}$ nég., $M'MI$ obtus.

L'hyperbole étant engendré comme nous l'avons expliqué au n° 33, on a

Fig. 129, $\overline{MK}$ nég., $\overline{KM'}$ nég., $M'MI$ aigu.

Fig. 130, $\overline{MK}$ pos., $\overline{KM'}$ nég., $M'MI$ obtus.

Fig. 131, $\overline{MK}$ pos., $\overline{KM'}$ pos., $M'MI$ aigu.

Fig. 132, $\overline{MK}$ nég., $\overline{KM'}$ pos., $M'MI$ obtus.

Nous avons vu que les formules $\overline{MK} = r d\theta$ et $\overline{KM'} = dr$ étaient générales quant aux signes; on a donc enfin

$$\text{tang } M'MI = \frac{\overline{MK}}{\overline{KM'}} = \frac{r d\theta}{dr}.$$

La direction de la corde MM' prolongée étant prise pour celle de la tangente au point M , l'angle $M'MI$ est celui que le rayon vecteur fait avec cette tangente

§ 8. De la différentielle d'un secteur.

36. Soit bc , fig. 133, une courbe rapportée aux axes rectangulaires ax , ay . La différentielle du secteur abm est $\overline{amm'}$, m' étant le point consécutif à m . Menons $m's$ perpendiculaire à l'ordonnée pm prolongée si cela est nécessaire. L'aire $\overline{amm'}$ est la somme algébrique des triangles $\overline{ams}$, $\overline{mm's}$, $\overline{asm'}$.

Le triangle $\overline{ams}$ est positif lorsqu'il peut être envisagé comme engendré par un rayon vecteur tournant autour de l'origine a et allant de la position am à la position as dans le positif des arcs directeurs, marqué par la flèche, comme dans les figures 133, 134, 135. Ce triangle $\overline{ams}$ est négatif dans le cas contraire comme dans les fig. 136, 137, 138.

Le triangle $\overline{asm'}$ (et non $\overline{am's}$) est positif lorsqu'on passe de la position as à la position am' , en allant dans le sens positif des arcs directeurs, comme en fig. 135 et 136. Il est négatif dans le cas contraire comme en fig. 133 et 134.

Le triangle $\overline{mm's}$ peut être considéré comme engendré par un rayon vecteur tournant autour de m , et allant de la position mm' à la position ms . Il est positif ou négatif selon que ce mouvement a lieu dans le sens positif ou négatif des arcs directeurs. Il est positif en fig. 133 et 136, et négatif en fig. 135 et 138.

Le triangle $\overline{amm'}$ est positif ou négatif selon que l'on passe de la position am à la position am' en allant dans le sens positif ou dans le sens négatif. Il est positif en fig. 133, et négatif en fig. 134. Cela posé on a toujours

$$\overline{amm'} = \overline{ams} + \overline{mm's} + \overline{asm'}.$$

Dans la fig. 133, on a $\overline{ams}$ pos., $\overline{mm's}$ pos., $\overline{asm'}$ nég., et $\overline{amm'}$ positive parce que la somme des aires positives l'emporte sur l'aire négative.

En fig. 134, on a $\overset{\dots\dots}{ams}$ pos., $\overset{\dots\dots}{mm's}$ pos., $\overset{\dots\dots}{asm'}$ nég., et $\overset{\dots\dots}{amm'}$ négative parce que l'aire négative l'emporte sur la somme des aires positives.

En fig. 137, on a $\overset{\dots\dots}{ams}$ nég., $\overset{\dots\dots}{mm's}$ pos., $\overset{\dots\dots}{asm'}$ pos., et $\overset{\dots\dots}{amm'}$ négative parce que l'aire négative l'emporte sur la somme des aires positives.

En fig. 138, on a $\overset{\dots\dots}{ams}$ nég., $\overset{\dots\dots}{mm's}$ nég., $\overset{\dots\dots}{asm'}$ nég., et $\overset{\dots\dots}{amm'}$ négative comme étant la somme de trois aires négatives.

En fig. 142, $\overset{\dots\dots}{ams}$ pos., $\overset{\dots\dots}{mm's}$ pos., $\overset{\dots\dots}{asm'}$ pos., et $\overset{\dots\dots}{amm'}$ positive comme étant la somme de trois aires positives.

On pourrait s'assurer par l'examen des 19 figures de 133 à 151 qui représentent toutes les combinaisons possibles, que $\overset{\dots\dots}{amm'}$ est la somme algébrique des trois aires $\overset{\dots\dots}{ams}$, $\overset{\dots\dots}{mm's}$, $\overset{\dots\dots}{asm'}$, comme nous l'avons annoncé.

Le triangle $\overset{\dots\dots}{ams}$ (fig. 133....151, dont la base est $ms=dy$ et la hauteur $ap=x$, a pour mesure $\frac{xdy}{2}$.

Le triangle $\overset{\dots\dots}{mm's}$ dont la base est $sm'=dx$ et la hauteur $ms=dy$, a pour mesure $\frac{dxdy}{2}$.

Le triangle $\overset{\dots\dots}{asm'}$ dont la base est $sm'=dx$ et la hauteur

$$ps=\overset{\dots\dots}{pms}=y+dy, \text{ a pour mesure } \frac{(y+dy)dx}{2}.$$

Nous verrons tout à l'heure que les trois formules

$$\overset{\dots\dots}{ams} = \frac{xdy}{2}$$

$$\overset{\dots\dots}{mm's} = \frac{dxdy}{2}$$

$$\overset{\dots\dots}{asm'} = -\frac{(y+dy)dx}{2} = -\frac{ydx}{2} - \frac{dxdy}{2}$$

sont générales en ayant égard aux signes, et qu'on a par conséquent, en les ajoutant,

$$\overset{\dots\dots}{ams} + \overset{\dots\dots}{mm's} + \overset{\dots\dots}{asm'} = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

On a d'ailleurs reconnu la généralité de la formule

$$\overset{\dots\dots}{ams} + \overset{\dots\dots}{mm's} + \overset{\dots\dots}{asm'} = \overset{\dots\dots}{amm'},$$

donc enfin

$$\overset{\dots\dots}{amm'} = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Examinons d'abord la formule $\overset{\dots\dots}{ams} = \frac{xdy}{2}$.

Ne perdons pas de vue que $\overset{ams}{\dots\dots}$ est positive ou négative selon que am pour se porter sur ms , tourne dans le sens positif ou négatif.

ax est le côté des x positives, ay celui des y positives.

ms ou dy est positive lorsque s est au-dessus de m , et négative dans le cas contraire.

Cela posé on voit fig. 152, que lorsque $\overset{ams}{\dots\dots}$ est décrit dans le sens positif, marqué par la flèche, les facteurs x et dy sont de même signe.

La fig. 153 montre qu'au contraire lorsque $\overset{ams}{\dots\dots}$ est décrit dans le sens négatif, x et dy sont de signe contraire.

La formule $\overset{ams}{\dots\dots} = \frac{xdy}{2}$, est donc vraie en ayant égard aux signes de x , dy , et $\overset{ams}{\dots\dots}$.

Passons à l'examen de la formule

$$\overset{asm'}{\dots\dots} = -\frac{(y+dy)dx}{2} = -\frac{ydx}{2} - \frac{dxdy}{2}.$$

Pour plus de commodité, changeons les signes des deux membres et démontrons la généralité de la formule

$$\overset{am's}{\dots\dots} = \frac{ydx}{2} + \frac{dxdy}{2}.$$

Il suffit de déterminer le signe du terme $\frac{ydx}{2}$, qui sera toujours celui de second membre puisque $\frac{dxdy}{2}$ est un infiniment petit du second ordre.

Remarquons que $\overset{sm'}{\dots\dots}$ ou dx est positive lorsque $\overset{sm'}{\dots\dots}$ est décrit de gauche à droite dans le sens positif des x , et négative dans le cas contraire.

La fig. 154 montre que lorsque $\overset{am's}{\dots\dots}$ est décrit dans le sens positif, les quantités y et dx sont de même signe, et la fig. 155 montre que lorsque $\overset{am's}{\dots\dots}$ est décrit dans le sens négatif, y et dx sont de signe contraire.

Ainsi la formule

$$\overset{am's}{\dots\dots} = \frac{ydx}{2} + \frac{dxdy}{2} \text{ est générale en ayant égard aux signes.}$$

Donc en changeant tous les signes, la formule

$$\overset{asm'}{\dots\dots} = -\frac{ydx}{2} - \frac{dxdy}{2}$$

est également générale.

Examinons enfin la formule

$$\overset{mm's}{\dots\dots} = \frac{dxdy}{2}.$$

Rappelons-nous que $\overset{mm's}{\dots\dots}$ est engendré par un rayon vecteur tournant autour de m , et allant de la position mm' à la position ms .

Les figures 156, 157, 158, 159 font voir que $mm's$ est décrit dans le sens positif lorsque dx et dy sont de même signe, et dans le sens négatif lorsque ces facteurs sont de signe contraire.

Donc la formule $mm's = \frac{xdy}{2}$ est générale en ayant égard aux signes.

Ajoutant les trois formules

$$ams = \frac{xdy}{2}$$

$$mm's = \frac{xdy}{2}$$

$$asm' = -\frac{ydx}{2} - \frac{xdy}{2}$$

il vient ainsi que nous l'avons annoncé

$$ams + mm's + asm' = amm' = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Ce secteur infinitésimal amm' s'exprime d'une manière bien simple au moyen des coordonnées polaires.

Plaçons le pôle à l'origine a (fig. 160). On aura am ou r pour rayon vecteur, l'angle max sera mesuré par l'arc directeur θ décrit du centre a avec l'unité pour rayon et sera exprimé en parties de ce rayon. En passant du point m au point consécutif m' , l'accroissement de θ est $d\theta$.

Du pôle a comme centre, avec am comme rayon, décrivons l'arc mk , et remplaçons le secteur amm' par le secteur circulaire amk dont il ne diffère que de l'aire $mm'n$ qui est un infiniment petit du second ordre.

Ce secteur amk est égal à $mk \times \frac{am}{2}$.

Or l'arc mk étant semblable à l'arc $d\theta$, on a

$$mk = am \times d\theta = rd\theta.$$

$$\text{donc secteur } amm' = rd\theta \times \frac{r}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2}.$$

Telle est la différentielle d'un secteur, exprimée en coordonnées polaires.

On peut la déduire de l'expression $\frac{xdy - ydx}{2}$, au moyen des valeurs

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dx = -r d\theta \sin \theta + dr \cos \theta$$

$$dy = r d\theta \cos \theta + dr \sin \theta.$$

dont nous avons démontré la généralité au n° 34.

En effet on trouve

$$\begin{aligned} xdy &= r^2 d\theta \cos^2 \theta + r dr \sin \theta \cos \theta \\ ydx &= -r^2 d\theta \sin^2 \theta + r dr \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{xdy - ydx}{2} = \frac{r^2 d\theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2}.$$

On voit que la formule $\frac{r^2 d\theta}{2}$ est générale quant au signe puisque l'aire amm' a évidemment le même signe que $d\theta$. Le rayon vecteur passant de la position am à la position am' dans le sens positif ou négatif, selon que $d\theta$ est positive ou négative.

CHAPITRE X.

EXAMEN DE QUELQUES FORMULES EMPLOYÉES DANS LA STATIQUE.

Des momens par rapport à un point.

37. On appelle *moment* d'une force, par rapport à un point, le produit de cette force et de la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction. Cette définition suppose qu'on a déterminé d'avance une unité linéaire et une unité de force. Le point dont nous parlons s'appelle le centre des momens.

Dans la théorie de cette espèce de momens il est utile de considérer les deux axes tournans mentionnés au n° 6, savoir l'axe tournant des r et l'axe tournant des s . Il faut se rappeler, à cet égard, que le côté positif de l'axe des r est celui qui passe par le centre des momens, pris pour pôle, et par l'extrémité de l'arc directeur ω . Le côté positif de l'axe des s passe par le pôle et par l'extrémité de l'arc $\omega + 90^\circ$.

Nous supposerons d'abord toutes les forces dans un même plan.

Soient donc $Q, Q', Q'' \dots$ différentes forces situées dans un même plan, et $q, q', q'' \dots$ les perpendiculaires abaissées d'un point de ce plan, pris pour centre des momens, sur leurs directions. Les momens de ces forces, par rapport à ce point, seront exprimés par $Qq, Q'q', Q''q'' \dots$.

Si l'on prend pour positifs ceux qui tendent à faire tourner dans un sens, il faut prendre pour négatifs ceux qui tendent à faire tourner dans le sens contraire, afin que leur somme algébrique soit égale au moment résultant.

Du point O , centre des momens, (fig. 161) et d'un rayon égal à l'unité linéaire, décrivons une circonférence $ABC \dots$. Prenons le point A de cette circonférence pour origine des arcs directeurs ω dont le sens positif sera $\overrightarrow{AB}$.

Pour la force Q , la perpendiculaire $Oa = q$ est située sur le côté positif de l'axe tournant des r , dont la position est déterminée par l'arc directeur AB .

Si l'on prend $BC = 90^\circ$ on aura OCS pour le côté positif de l'axe des s , et l'on voit que la force Q est dirigée parallèlement à OS et dans le sens positif des s . Le moment Qq sera donc positif comme ayant ses deux facteurs positifs.

Pour la force Q' , la perpendiculaire Oa' ou q' est positive comme étant située sur le côté positif OB' de l'axe tournant des r correspondant à $\omega = \overrightarrow{ABB'}$. Mais la force Q' est dirigée dans le sens des s négatives puisque OC/S' est le côté positif de l'axe des s cor-

respondant à $\omega = ABB'$. Le produit $Q'q'$ est donc négatif comme ayant ses facteurs de signe contraire.

Il n'est pas nécessaire de prendre l'arc directeur tel que la perpendiculaire abaissée sur la force tombe sur le côté positif de l'axe des r . La règle des signes serait encore vérifiée si l'on en agissait autrement. Par exemple, si relativement à la perpendiculaire q' on prenait l'arc $ABB'\beta'$ pour arc directeur, le côté positif des r serait $O\beta'$ et OB' en serait le côté négatif. Alors le côté positif des s serait $O\gamma'$. On aurait de cette manière Q' positive et q' négative, et le moment $Q'q'$ conserverait le même signe qu'auparavant parce que les signes de ses deux facteurs auraient changé en même tems.

Il est même plus convenable de ne pas s'astreindre à prendre invariablement le côté positif des r sur les perpendiculaires $q, q', q'', \dots$

En effet supposons que le système des forces $Q, Q', Q'', \dots$ se transforme graduellement de telle sorte que ces forces deviennent parallèles entre elles (fig. 162). On mènera par le centre O des moments la droite qui leur est perpendiculaire, et l'on prendra à volonté l'une des deux parties de cette perpendiculaire (séparées par l'origine) pour côté positif des r . Par exemple la partie Oa . De cette manière les forces telles que Q et Q'' qui sont dirigées dans le même sens ont le même signe et les forces comme Q' , dirigées en sens contraire, ont un signe contraire à celui des premières. Dans notre figure Q et Q'' sont positives comme étant dirigées dans le sens des s positives.

Les perpendiculaires comme Oa, Oa' , dirigées dans le même sens, sont positives, et celles qui comme Oa'' sont dirigées en sens contraire, sont négatives.

Les forces parallèles forment ainsi un cas particulier pour lequel les perpendiculaires abaissées sur les forces se confondent en une seule droite et sont déterminées par un seul et même arc directeur.

Les moments $Qq, Q'q', \dots$ s'expriment aussi dans les traités de mécanique d'une autre manière que nous allons rappeler et qui nous offrira l'occasion de faire quelques remarques sur les signes.

Pour parvenir d'une manière générale aux formules dont nous parlons, nous commencerons par donner à l'équation de la ligne droite une forme particulière.

Soit LN (fig. 163) une droite quelconque située dans le plan des yx . Abaissons de l'origine sur cette droite la perpendiculaire $OG = q$, faisant avec les axes des x et des y les angles a et b , comptés positivement, de part et d'autre de ces axes, de 0° à $\pm 180^\circ$.

M étant un point quelconque de la droite LN , la projection de OM sur la droite OG est égale à OG elle-même. Or cette projection est égale à la somme algébrique des projections de l'abscisse OP et de l'ordonnée PM qui forment la ligne brisée OPM , fermée par OM , (n° 4). (Pour opérer ces projections il faudra prolonger de part et d'autre la droite OG). En désignant par x et y les coordonnées du point M , la projection de OP s'exprimera par $x \cos a$ et celle de PM par $y \cos b$, en ayant égard aux signes de $x, y, \cos a, \cos b$. (Voyez n° 20). Donc on a

$$x \cos a + y \cos b = q$$

pour l'équation de la droite LN. Les projections positives sont dans le sens $\overrightarrow{OG}$ et les projections négatives dans le sens $\overrightarrow{GO}$. La quantité OG ou q est donc toujours positive.

Cherchons à introduire dans cette équation les angles λ et μ que la droite LN, supposée décrite dans le sens $\overrightarrow{LN}$, fait avec les axes. Ces angles étant comptés positivement de part et d'autre de ces axes de 0° à $+180^\circ$.

Si l'on imagine une force Q agissant selon LN dans le sens $\overrightarrow{LN}$, on voit au moyen des figures 163, 164, 165, 166, que lorsque cette force tend à faire tourner, autour de l'origine O, dans le sens positif, on a

$$\begin{aligned} a &= \mu \\ \text{et} \quad b &= 180^\circ - \lambda ; \end{aligned}$$

tandis que lorsqu'elle tend à faire tourner dans le sens négatif, comme dans les fig. 167, 168, 169, 170, on a

$$\begin{aligned} a &= 180^\circ - \mu \\ \text{et} \quad b &= \lambda . \end{aligned}$$

Ainsi lorsque Q tend à produire autour du point O une rotation positive, on a

$\cos a = \cos \mu$ et $\cos b = -\cos \lambda$ et l'équation $x \cos a + y \cos b = q$ devient

$$x \cos \mu - y \cos \lambda = q ;$$

mais lorsque cette rotation est négative, on a $\cos a = -\cos \mu$ et $\cos b = \cos \lambda$ et l'équation $x \cos a + y \cos b = q$ devient $-x \cos \mu + y \cos \lambda = q$ ou

$$x \cos \mu - y \cos \lambda = -q .$$

Si donc on représente par la quantité positive Q l'intensité d'une force, par x, y les coordonnées courantes de sa direction, par λ, μ les angles que cette direction fait avec les côtés positifs des x et des y , comptés de part et d'autre de ces axes, de 0° à $+180^\circ$, on aura

$$Q (x \cos \mu - y \cos \lambda)$$

pour le moment de cette force par rapport à l'origine, prise pour centre des moments, et cette expression sera positive ou négative selon que la force Q tendra à faire tourner dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Soit P une force positive dirigée d'une manière quelconque dans l'espace et agissant selon la droite AB de A vers B (fig. 171). Son moment par rapport à l'origine O serait Pp , en désignant par p la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur sa direction. Ce moment peut se décomposer en trois autres qui sont les moments des projections de la force P sur les trois plans coordonnés. Voir les traités de mécanique. Soit LN la projection de AB sur le plan des xy , Q la projection de P , laquelle agira selon LN, et q la perpendiculaire abaissée de l'origine sur LN.

Le produit Qq sera le moment Pp décomposé selon le plan des xy , ou ce qui est la même chose, ce sera le moment Pp estimé par rapport à l'axe des z .

Ce moment Qq s'exprimera donc par

$$Q (x \cos \mu - y \cos \lambda)$$

λ et μ étant les angles que LN fait avec Ox et Oy , et x , y les coordonnées courantes de LN ou si l'on veut les coordonnées courantes de AB.

Cherchons à introduire dans cette expression les angles α , β , γ que la force P fait avec les trois axes, comptés de 0° à $\pm 180^\circ$.

Menons par l'origine une droite OI, parallèle à AB et de même sens, et prenons OI égale à l'unité linéaire. Achéons le parallélépipède rectangle dont OI est la diagonale et qui s'appuie sur les axes. OK étant la projection de OI sur les xy , sera parallèle à LN.

La force P pouvant avoir une direction quelconque, sa parallèle OI pourra se trouver dans l'un quelconque des huit angles trièdres formés autour de l'origine par les axes des x , y , z et leurs prolongemens. C'est ce que l'on voit dans les figures 171... 178.

Dans chacune de ces figures OC désigne l'arête du parallélépipède qui coïncide avec l'axe des x , OD celle qui coïncide avec l'axe des y et OE celle qui coïncide avec l'axe des z .

On aura toujours

$$IOx = \alpha, \quad IOy = \beta, \quad IOz = \gamma, \quad KOx = \lambda, \quad KOy = \mu.$$

Lorsque OC est sur les x pos. on a $\begin{cases} IOC = \alpha \\ KOC = \lambda \end{cases}$

λ lorsque OC est sur les x nég. on a $\begin{cases} IOC = 180^\circ - \alpha \\ KOC = 180^\circ - \lambda \end{cases}$

Lorsque OD est sur les y pos. on a $\begin{cases} IOD = \beta \\ KOD = \mu \end{cases}$

Lorsque OD est sur les y nég. on a $\begin{cases} IOD = 180^\circ - \beta \\ KOD = 180^\circ - \mu \end{cases}$

Dans tous les cas on a $OK = \sin \gamma$, toujours positive.

Le triangle KOC rectangle en C, donne

$$OC = OK \cos KOC \quad \text{ou} \\ \cos IOC = \sin \gamma \cos KOC.$$

Cette équation devient, lorsque OC est sur les x positives,

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \lambda$$

et, lorsque OC est sur les x négatives,

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \sin \gamma \cos (180^\circ - \lambda),$$

$$\text{ou} \quad -\cos \alpha = -\sin \gamma \cos \lambda,$$

$$\text{ou encore} \quad \cos \alpha = \sin \gamma \cos \lambda.$$

Le triangle KOD rectangle en D donne

$$\begin{aligned} OD &= OK \cos KOD & \text{ou} \\ \cos IOD &= \sin \gamma \cos KOD. \end{aligned}$$

Lorsque OD est sur les y positives, il vient

$$\cos \beta = \sin \gamma \cos \mu$$

et lorsque OD est sur les y négatives il vient

$$\cos (180^\circ - \beta) = \sin \gamma \cos (180^\circ - \mu) \quad \text{c'est-à-dire encore}$$

$$\cos \beta = \sin \gamma \cos \mu.$$

La force P fait toujours avec sa projection Q un angle aigu égal à IOK , on a donc

$$Q = P \cos IOK;$$

mais on a toujours $\cos IOK = OK = \sin \gamma$

$$\text{donc} \quad Q = P \sin \gamma.$$

Les trois formules

$$Q = P \sin \gamma$$

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \lambda \quad \text{ou} \quad \cos \lambda = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\cos \beta = \sin \gamma \cos \mu \quad \text{ou} \quad \cos \mu = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}$$

étant reconnues générales, la formule

$$Q (x \cos \mu - y \cos \lambda) \quad \text{devient}$$

$$P \sin \gamma \left(x \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} - y \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \right) \quad \text{ou simplement}$$

$$P (x \cos \beta - y \cos \alpha).$$

Telle est l'expression du moment de la force P , projetée sur le plan des $x y$.

Les variables x et y désignent les coordonnées courantes de la direction de cette force, laquelle est ici regardée comme essentiellement positive.

Au moyen de la permutation tournante basée sur ce tableau

$$\begin{array}{cccccc} x, & y, & z, & \alpha, & \beta, & \gamma, \\ z, & x, & y, & \gamma, & \alpha, & \beta, \end{array}$$

on aura, en substituant aux lettres de la première ligne celles de la seconde,

$$P (z \cos \alpha - x \cos \gamma),$$

et faisant la même substitution dans cette dernière, il viendra

$$P (y \cos \gamma - z \cos \beta).$$

Ce sont les moments des projections de P sur les plans des xz et des yz .

Voyez l'explication de cette permutation tournante dans la mécanique de Poisson. N° 22.

On considère ordinairement x, y, z comme les coordonnées du point d'application de la force P , mais ces lettres représentent plus généralement les coordonnées courantes de sa direction.

Les expressions

$$P (x \cos \beta - y \cos \alpha)$$

$$P (z \cos \alpha - x \cos \gamma)$$

$$P (y \cos \gamma - z \cos \beta)$$

supposent que la rotation positive autour de chacun des axes Oz, Oy, Ox , a lieu dans le sens indiqué par la flèche du style s (fig. 179), quand on place ce style sur le côté positif de ces axes, la pointe étant tournée vers l'origine.

Si l'on suppose que AB (fig. 180) représente la force P en grandeur et en direction, le moment de cette force, par rapport au point O , sera représenté par le double de l'aire du triangle ABO . La projection de ce moment sur le plan des xy , est représentée par le double de l'aire du triangle $A'B'O$, projection du triangle ABO sur ce plan.

Pour déterminer l'axe du moment $2.ABO$, on élèvera une perpendiculaire $D'OD$ sur le plan ABO , et l'on choisira celle des parties OD ou OD' pour laquelle la flèche du style s'accorde avec le sens du moment, quand on place le style sur cette partie, la pointe étant en O . Dans notre figure l'axe serait OD et non OD' .

Si l'on donne différentes positions au système $ABOD$, sans changer la position relative de ses parties, en donnant à l'axe OD différentes directions dans l'espace, on voit facilement que le sens du moment $2A'B'O$ restera le même tant que l'angle DOz sera aigu, mais qu'il changera lorsque cet angle sera obtus.

Lorsqu'on connaîtra le sens d'un moment autour d'un axe $D'OD$ (fig. 181), pour connaître le sens de sa projection autour d'un axe $E'OE$, ou sur un plan perpendiculaire à $E'OE$, on placera la pointe du style en O et l'on couchera le style sur celle des parties OD ou OD' pour laquelle la flèche du style est conforme. Puis on transportera le style, la pointe restant en O , sur celle des parties OE ou OE' qui fait un angle aigu avec la première. Dans cette position la flèche du style indiquera le sens du moment projeté autour de $E'OE$.

Si la droite $E'OE$ est perpendiculaire à $D'OD$, le moment projeté est nul.

Soit a le double de l'aire du triangle ABO (fig. 182), désignons par q, q', q'' les angles que OD (supposé l'axe du moment $2.ABO$) fait avec les axes Ox, Oy, Oz , et par p, p', p'' les projections de l'aire a sur les plans des yz, xz, xy , nous aurons

$$p = a \cos q, \quad p' = a \cos q', \quad p'' = a \cos q'',$$

en ayant égard aux signes des cosinus pour déterminer les signes des projections.

L'aire a est toujours positive relativement à son axe OD lequel a été choisi en conséquence.

Soit b la projection de l'aire a sur un quatrième plan que nous supposons perpendiculaire à la droite $E'OE$, on aura

$$b = a \cos DOE.$$

Selon que l'angle DOE sera aigu ou obtus, b sera positive ou négative par rapport à l'axe OE ; ce qui signifie que lorsque b sera positive le style devra être placé sur OE pour s'accorder avec le sens du moment b , et que lorsque b est négative, le style doit, pour cet effet, être placé sur son prolongement OE' .

En nommant m, m', m'' les angles que OE fait avec Ox, Oy, Oz , on a

$$\cos DOE = \cos q \cos m + \cos q' \cos m' + \cos q'' \cos m''$$

formule dont la généralité a été démontrée au n° 18.

Multipliant par a il vient

$$\begin{aligned} a \cos DOE &= a \cos q \cos m + a \cos q' \cos m' + a \cos q'' \cos m'' \\ \text{ou} \quad b &= p \cos m + p' \cos m' + p'' \cos m'' \end{aligned}$$

formule dans laquelle il faut avoir égard aux signes de tous les facteurs qui y entrent.

Nous allons vérifier la règle des signes sur le terme $p \cos m$.

Soit 1° p positif et $\cos m$ positif, (fig. 183).

p positif nous indique que l'angle q ou DOx est aigu, car $p = a \cos q$; ainsi pour désigner le sens du moment p le style d'abord placé sur OD a été transporté sur Ox . De plus m ou EOx étant aigu, le style se transporte de Ox sur OE , et le moment $p \cos m$ est positif par rapport à OE .

Soit 2° p pos. et $\cos m$ nég. fig. 184.

Le style d'abord placé sur Ox , à cause de p positif, se transporte sur OE' , prolongement de OE , en décrivant l'angle aigu xOE' qui est supplément de l'angle obtus m .

Ainsi le moment $p \cos m$ est négatif par rapport à OE .

3° p nég. et $\cos m$ pos. fig. 185.

Le style d'abord placé sur le prolongement de Ox , à cause de p négatif, se transporte sur OE' en décrivant un angle aigu égal à m comme opposé au sommet. Le moment $p \cos m$ est négatif par rapport à OE .

4° p nég. et $\cos m$ nég. fig. 186.

Le style placé sur le prolongement de Ox se transporte sur OE en décrivant un angle aigu supplément de l'angle obtus m . Le moment $p \cos m$ est positif par rapport à OE .

La règle des signes est donc toujours vérifiée. On en dira autant des termes $p' \cos m'$ et $p'' \cos m''$.

La formule

$$b = p \cos m + p' \cos m' + p'' \cos m''$$

nous montre que pour projeter un moment a pris par rapport à un axe OD , sur un axe OE , on peut le projeter d'abord sur les trois axes Ox, Oy, Oz , puis projeter ces projections sur OE et en faire la somme algébrique.

Des Couples.

58. Ce qui précède est conforme à la théorie ordinaire des momens ; mais M. Poinso, dans ses *Éléments de statique*, ayant substitué de la manière la plus heureuse la théorie des couples à celle des momens, nous allons appliquer à cette nouvelle théorie l'usage du style de rotation et la méthode générale des projections des lignes droites.

Deux forces ($P, -P$) égales, parallèles et dirigées en sens contraire constituent un *couple*. Lorsque ce couple est appliqué à un corps, on peut, sans changer son effet, 1° le faire tourner dans son plan, 2° le déplacer dans son plan, 3° le transporter dans un plan parallèle. (Voir l'ouvrage cité.)

L'énergie d'un couple ($P, -P$) se mesure par le produit Ph de l'une des forces et de leur distance h que l'on nomme le bras de levier du couple.

L'axe d'un couple est en général la perpendiculaire menée au plan de ce couple ; mais nous donnerons à ce mot un sens plus restreint. Comme il est nécessaire de déterminer le sens dans lequel le couple agit autour de son axe, nous entendrons par axe du couple celle des deux parties de la perpendiculaire élevée à son plan, pour laquelle le sens de la flèche du style de rotation coïncide avec le sens du couple, lorsqu'on place le style sur cette partie, la pointe étant à l'intersection de cette perpendiculaire avec le plan.

Il convient même de restreindre encore le sens du mot, en entendant par axe du couple une partie de l'axe égale à un nombre d'unités linéaires marqué par Ph ; P étant un nombre d'unités de force et h un nombre d'unités de longueur.

De cette manière l'axe d'un couple fera connaître 1° la direction du plan du couple, 2° le sens du couple, 3° son énergie.

Comme le plan d'un couple peut être transporté parallèlement à lui-même, on pourra toujours le faire passer par l'origine des coordonnées. Nous supposerons à l'avenir qu'on en a agi ainsi pour tous les couples.

Deux couples peuvent être composés en un seul qui en est le *couple résultant*. (Voyez la statique de M. Poinso.)

On a à cet égard le parallélogramme des couples, analogue au parallélogramme des forces.

Ainsi O étant l'origine et OA, OB les axes de deux couples (fig. 187 et 188), la diagonale OD est l'axe du couple résultant.

La loi de continuité est observée dans ces figures, car si l'on fait tourner OD autour de O pour ramener cette droite sur OA ou sur OB , la flèche du style de OD coïncidera avec les flèches de OA et OB . Il doit toujours en être ainsi. En effet si l'on suppose que le couple, dont OA est l'axe, diminue d'énergie jusqu'à devenir nul, l'axe du couple résultant se rapprochera de OB et finira par coïncider avec cette droite, en même temps qu'il deviendra égal à OB . Il faut donc que le sens de la flèche de OD soit d'avance tel qu'il puisse coïncider avec celle de OB .

On a aussi le parallélépipède des couples. Soient OA, OB, OC les axes de trois couples (fig. 189). Le premier et le second couple se composent en un seul dont OD est l'axe, et ce dernier se compose avec le troisième en un couple, dont l'axe est OE diagonale du parallélépipède construit sur OA, OB et OC.

Le sens de ce couple résultant est indiqué par la flèche du style placé sur OE, la pointe étant tournée vers O.

Soit un nombre quelconque de couples $(P, -P)$, $(P', -P')$, $(P'', -P'')$ dont les axes seront OA, OB, OC, OD (fig. 190). Nous n'en prendrons que quatre pour ne pas compliquer la figure. Pour trouver l'axe du couple résultant on construira un parallélogramme sur OA et OB, puis un second parallélogramme sur la diagonale du premier et sur OC, et enfin un parallélogramme sur la diagonale de ce second et sur OD. La dernière diagonale sera l'axe du couple résultant.

Cette construction revient à mener AQ égale et parallèle à OB et de même sens, puis QR égale et parallèle à OC et de même sens, et enfin RS égale et parallèle à OD et de même sens. La droite OS menée de l'origine à l'extrémité du polygone OAQRS, sera l'axe du couple résultant. Cette droite OS n'est autre chose que la résultante du contour OAQRS.

L'ordre dans lequel on procède est indifférent. (N° 5.)

Un cas particulier a lieu lorsque les axes OA, OB, OC, OD des moments composans sont situés sur une même droite, comme dans la fig. 191.

On commencera si l'on veut par OA, puis on prendra OQ égale à OB et de même sens, puis QR égale à OC et de même sens, enfin RS égale à OD et de même sens. La résultante est ici OS. C'est l'axe du couple résultant et le sens de ce couple serait indiqué par la flèche du style placé sur OS, la pointe en O.

Dans ce cas particulier le couple résultant est égal à la somme de ceux dont les axes sont dirigés d'un côté, moins la somme de ceux dont les axes sont dirigés du côté opposé. Revenons au cas général où les couples ont leurs axes OA, OB, OC, OD.... dirigés d'une manière quelconque dans l'espace (fig. 190). Décomposons chacun d'eux en deux autres dont l'un aura son axe sur une droite MON et l'autre sur une perpendiculaire à cette droite.

Considérons à part ceux des couples composans dont l'axe est sur MON et regardons comme positifs ceux dont le sens serait marqué par le style placé sur ON, la pointe en O.

On sait que la somme algébrique des couples projetés sur MON est équivalente à un couple dont l'axe serait égal à la somme algébrique des projections, sur cette droite, des côtés du polygone OAQRS...., laquelle somme est égale à la projection de la résultante de ce polygone.

Si donc on demandait quelle direction il faut donner à MON pour que cette somme soit un maximum, on voit qu'il faudrait faire coïncider cette droite avec la résultante du polygone; car la projection d'une droite est un maximum lorsqu'on la projette sur elle-même ou sur une droite qui lui est parallèle.

Nous placerons le côté positif ON sur la résultante (et non sur son prolongement), afin que la somme maxima soit positive.

On voit que la somme des projections sera nulle sur toute droite perpendiculaire à la résultante, et que sur toute autre droite faisant avec la résultante un angle δ , elle sera égale à la somme maxima multipliée par $\cos \delta$.

Menons par l'origine trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , et considérons toujours notre polygone $OAQRS$ Achéons le parallélogramme dont OA est la diagonale et qui s'appuie sur les axes coordonnés (fig. 192). Achéons de même le parallélogramme dont AQ est la diagonale et dont les côtés sont parallèles à ces axes et ainsi de suite.

Nous pourrions remplacer le côté OA par le polygone trilatéral $OabA$, de même AQ par $Aa'b'Q$, QR par $Qa''b''R$ et ainsi de suite. De cette manière le polygone $OAQRS$ sera remplacé par un polygone $OabAa'b'Qa''b''R$ d'un nombre de côtés triple et qui aura évidemment la même résultante.

Remplaçons ce dernier polygone par un autre dont les côtés seront respectivement égaux et parallèles à Oa , Aa' , Qa'' ,.... ab , $a'b'$, $a''b''$,.... bA , $b'Q$, $b''R$,.... et qui seront pris dans cet ordre. Le premier groupe se composera de droites toutes situées sur l'axe des x et se réduira à un seul côté OT (fig. 193), placé sur cet axe et égal à la somme algébrique des côtés Oa , Aa' , Aa'' Le second groupe se réduira à un seul côté TU parallèle aux y , et le troisième groupe à un côté UV parallèle aux z . Les droites OT , TU , UV pourront être positives ou négatives. Dans notre figure elles sont toutes trois positives.

Il est visible que OV sera encore la résultante du polygone $OAQRS$

Des moments et des couples représentés par des aires

Etant donné un couple $(P, -P)$ dont l'énergie est Ph , transportons son plan parallèlement à lui-même pour le faire passer par l'origine. Menons dans ce plan et à partir de l'origine une droite égale à h (fig. 194). Menons de plus dans ce plan une droite perpendiculaire à h , passant par son extrémité et égale à un nombre P d'unités linéaires. Le produit Ph , qui exprime l'énergie du couple, exprimera aussi le double de l'aire du triangle dont la base serait P et la hauteur h .

L'axe du couple $(P, -P)$ est une droite OA égale à un nombre Ph d'unités linéaires.

Menons par l'origine une droite ON et nommons φ l'angle AON . La projection de OA sur ON sera $OA \cos \varphi$, positive ou négative selon que φ sera aigu ou obtus.

Projetons l'air Ph sur le plan perpendiculaire à ON , et regardons comme l'angle dièdre de ces plans, celui qui est mesuré par φ (et non par le supplément de φ). Cette projection s'exprimera par $Ph \cos \varphi$ et sera aussi positive ou négative selon que φ sera aigu ou obtus.

De cette manière la projection de l'axe OA sur ON et la projection de l'aire Ph sur le plan perpendiculaire à ON seront de même signe et exprimées par un même nombre d'unités, d'une part unités linéaires, d'autre part unités de superficie.

On en dira autant des autres couples $(P', -P')$, $(P'' - P'')$ représentés par des aires $P'h'$, $P''h''$, etc.

Si donc on couche ON sur la résultante du polygone OAQRS.... et que l'on projette, comme il vient d'être expliqué, toutes les aires Ph , $P'h'$, $P''h''$... sur le plan perpendiculaire à ON, la somme de ces aires projetées sera plus grande que sur tout autre plan.

Elle s'exprimera par un nombre d'unités de superficie égal au nombre d'unités linéaires contenues dans la résultante du polygone OAQRS....

La somme des aires projetées serait nulle sur tout plan perpendiculaire au plan de la projection maxima et sur tout plan faisant avec ce dernier un angle δ , elle serait égale à la projection maxima multipliée par $\cos \delta$.

Si l'on projette chacune des aires Ph , $P'h'$, $P''h''$... sur les plans des yz , des xz et des xy , et que l'on nomme S , S' , S'' la somme algébrique des aires projetées sur chacun de ces plans, on voit que S aura le même signe que OT (fig. 193) et sera exprimée par un nombre d'unités de superficie égal au nombre d'unités linéaires contenues dans OT, de même S' sera numériquement égale à TU et de même signe, et S'' numériquement égale à UV et de même signe.

La somme maxima des projections de toutes les aires sera celle formée sur le plan perpendiculaire à OV, diagonale du parallélépipède construit sur OT, TU et UV. Elle sera exprimée en nombre par celui des unités linéaires de cette diagonale, laquelle est identique avec la résultante du polygone OAQRS....

Désignant cette somme maxima par Σ , on aura

$$\Sigma = \sqrt{S^2 + S'^2 + S''^2}$$

et en nommant a , b , c , les angles que OV fait avec Ox , Oy , Oz , on aura

$$\cos a = \frac{OT}{OV} = \frac{S}{\Sigma}, \quad \cos b = \frac{TU}{OV} = \frac{S'}{\Sigma}, \quad \cos c = \frac{UV}{OV} = \frac{S''}{\Sigma}.$$

Soient, par exemple, $S = -3$, $S' = +4$, $S'' = -5$.

On porterait à partir de l'origine une longueur de 3 unités sur les x négatives, une longueur de 4 unités sur les y positives et une longueur de 5 unités sur les z négatives. La diagonale du parallélépipède construit sur ces trois lignes serait perpendiculaire au plan maximum des aires.

La longueur de cette diagonale représentera l'énergie du couple résultant; et en plaçant le style sur cette diagonale, la pointe étant en O, le sens de ce moment résultant sera indiqué par la flèche du style.

D'après ce qu'on vient de voir, le plan maximum des aires est celui pour lequel la somme des aires projetées positives diffère le plus (numériquement parlant) de la somme des aires projetées négatives. Pour le plan perpendiculaire au plan maximum, ces deux sommes sont numériquement égales.

On suppose donc toujours tacitement que les aires représentent des couples. Les angles que forment les plans de ces aires avec le plan de projection étant mesurés par ceux que

forment les axes de ces couples avec une perpendiculaire élevée au plan de projection, d'un certain côté de ce plan.

Si les aires ne représentaient plus des couples, on ne pourrait pas fixer son choix sur celle des deux parties de la perpendiculaire élevée au plan d'un couple, qui doit servir d'axe, et par conséquent on serait incertain dans le choix de celui des deux angles supplémentaires qui devrait mesurer l'inclinaison de cette aire sur le plan de projection.

Par exemple, les polygones $OAQR$ et $OAQR'$ (fig. 195) dans lesquels QR' est égale et directement opposée à QR , répondent l'un et l'autre à un même système de trois aires planes qui seraient respectivement perpendiculaires et proportionnelles à OA , AQ , et QR . Or si ces aires ne représentent pas des couples, rien ne peut fixer le choix entre QR et QR' , et par conséquent on ignore si la résultante est OR ou OR' et si le plan maximum est perpendiculaire à OR ou à OR' .

Si l'on demandait en général le plan de la projection maxima d'un nombre n d'aires qui ne représenteraient plus des couples ou des moments, il est facile de voir qu'en prenant *ad libitum* une des deux parties de la perpendiculaire à chacune des aires, et en faisant toutes les combinaisons possibles, on aurait un nombre de solutions marqué par 2^n .

Le problème du plan maximum des aires n'a donc plus aucun sens en géométrie pure.

La composition et la décomposition des couples conduit directement à la composition et à la décomposition des moments; car la mesure d'un moment Pp , pris par rapport à l'origine, est aussi celle d'un couple $(P, -P)$ dont le bras de levier serait p . L'un et l'autre sont représentés par le double de l'aire d'un triangle dont la base serait P et la hauteur p .

Mais l'idée d'un couple est bien plus générale puisqu'il peut être transporté et tourné comme on veut dans son plan ou dans tout autre plan parallèle.

Prenons toujours les forces $P, P', P'', \dots$ que nous avons considérées tout-à-l'heure et qui sont dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. Désignons par α, β, γ , les angles que P fait avec les axes, et par x, y, z les coordonnées courantes de sa direction; désignons par $\alpha', \beta', \gamma', x', y', z'$ les quantités analogues pour la force P' et ainsi de suite.

Décomposons les moments de ces forces, pris par rapport à l'origine, en trois autres qui seront leurs projections sur les trois plans coordonnés. Faisons la somme algébrique de tous les moments projetés sur les plans des yz , des xz et des xy et désignons ces trois sommes par L, M, N , nous aurons (n° 37) :

$$P(y \cos \gamma - z \cos \beta) + P'(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta') + P''(y'' \cos \gamma'' - z'' \cos \beta'') + \text{etc.} = L$$

$$P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) + P'(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma') + P''(z'' \cos \alpha'' - x'' \cos \gamma'') + \text{etc.} = M$$

$$P(x \cos \beta - y \cos \alpha) + P'(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') + P''(x'' \cos \beta'' - y'' \cos \alpha'') + \text{etc.} = N$$

Les trois moments L, M, N peuvent se composer en un seul qui sera le moment résultant de toutes les forces P, P', P'' etc.

Ces quantités ne sont autre chose que celles que nous avons désignées par S, S', S'' , savoir :

$$L = S, \quad M = S', \quad N = S''.$$

Cela nous dispense d'indiquer de nouveau le moyen de construire le parallépipède sur les lignes placées sur les axes et représentées numériquement par L, M, N , en ayant égard aux signes, et la manière de déterminer le sens du moment résultant dont l'axe est la diagonale de ce parallépipède.

Remarque sur une inexactitude de rédaction que l'on rencontre dans les traités de statique.

59. Puisque j'ai rappelé la théorie des couples de M. Poinsot, telle qu'elle est exposée dans ses *Éléments de statique*, je ferai ici une remarque qui s'appliquera à trois passages de cet excellent ouvrage et aux passages analogues de plusieurs autres traités de statique.

Au n° 95 les forces $P', P'', P''' \dots$ situées dans un même plan et ayant des directions quelconques, sont considérées comme essentiellement positives. Il est alors nécessaire de considérer aussi comme essentiellement positive non seulement la résultante R de ces forces, mais encore la force R qui lui est égale et directement opposée. La première faisant avec l'axe des x l'angle α , la seconde l'angle $\alpha + 180^\circ$.

En faisant pour abréger

$$\left. \begin{aligned} P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} &= X \\ P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \text{etc.} &= Y \\ P' (y' \cos \alpha' - x' \sin \alpha') + P'' (y'' \cos \alpha'' - x'' \sin \alpha'') + \text{etc.} &= G \end{aligned} \right\} \quad (a).$$

On aura, en joignant au système la force R égale et directement opposée à la résultante, les équations de l'équilibre

$$\begin{aligned} X + R \cos (\alpha + 180^\circ) &= 0 \\ Y + R \sin (\alpha + 180^\circ) &= 0 \\ G + R [y \cos (\alpha + 180^\circ) - x \sin (\alpha + 180^\circ)] &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations, à cause de $\sin (\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$, et $\cos (\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$ deviennent

$$\begin{aligned} X - R \cos \alpha &= 0 \\ Y - R \sin \alpha &= 0 \\ G - R (y \cos \alpha - x \sin \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Dans les équations (a), les angles $\alpha', \alpha'', \alpha''' \dots$ se comptent de 0° à 360° .

Le sens positif des angles va des x positives vers les y positives. L'angle $\alpha + 180^\circ$ pourra dépasser 360° .

La troisième de ces équations (a) suppose que le sens positif de rotation va des x positives vers les y négatives. Il serait plus naturel de faire coïncider, selon l'usage, le sens positif de rotation avec le sens positif des arcs et d'écrire en conséquence

$$P' (x' \sin \alpha' - y' \cos \alpha') + P'' (x'' \sin \alpha'' - y'' \cos \alpha'') + \text{etc.} = G.$$

Au n° 106 du même ouvrage, les forces P' , P'' , P''' dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, sont essentiellement positives. La force P' forme avec les côtés positifs des x , des y et des z , les angles α' , β' , γ' , comptés positivement de part et d'autre des axes, de 0° à $+180^\circ$. La force P'' forme les angles α'' , β'' , γ'' et ainsi de suite.

En décomposant chacune des forces en trois autres parallèles aux axes et nommant X , Y , Z les sommes des composantes relatives à chaque axe, on a

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = X$$

$$P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + \text{etc.} = Y$$

$$P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \text{etc.} = Z.$$

Si R est la résultante des forces, faisant avec les axes des angles α , β , γ , on produira l'équilibre en ajoutant au système une force R (et non pas $-R$) égale et directement opposée à la résultante et faisant avec les axes les angles $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$, tous positifs et compris entre 0° et 180° .

On a alors

$$X + R \cos (180^\circ - \alpha) = 0$$

$$Y + R \cos (180^\circ - \beta) = 0$$

$$Z + R \cos (180^\circ - \gamma) = 0$$

ou plus simplement

$$X - R \cos \alpha = 0$$

$$Y - R \cos \beta = 0$$

$$Z - R \cos \gamma = 0$$

On arrive ordinairement à ces équations en commettant deux erreurs qui se compensent; la première consiste à désigner par $-R$ la force égale et directement opposée à la résultante R , la seconde consiste à supposer qu'elle fait avec les axes les angles α , β , γ , au lieu de $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$.

Les trois autres équations de l'équilibre s'obtiennent en posant

$$P' (y' \cos \gamma' - z' \cos \beta') + P'' (y'' \cos \gamma'' - z'' \cos \beta'') + \text{etc.} = L$$

$$P' (z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma') + P'' (z'' \cos \alpha'' - x'' \cos \gamma'') + \text{etc.} = M$$

$$P' (x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') + P'' (x'' \cos \beta'' - y'' \cos \alpha'') + \text{etc.} = N.$$

Puis en ajoutant toujours la force R égale et opposée à la résultante, on a

$$L + R [y \cos (180^\circ - \gamma) - z \cos (180^\circ - \beta)] = 0$$

$$M + R [z \cos (180^\circ - \alpha) - x \cos (180^\circ - \gamma)] = 0$$

$$N + R [x \cos (180^\circ - \beta) - y \cos (180^\circ - \alpha)] = 0$$

ou simplement

$$L - R (y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0$$

$$M - R (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0$$

$$N - R (x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0$$

M. Poinsoot pose

$$P' (z' \cos \beta' - y' \cos \gamma') + P'' (z'' \cos \beta'' - y'' \cos \gamma'') + \text{etc.} = L$$

$$P' (x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') + P'' (x'' \cos \gamma'' - z'' \cos \alpha'') + \text{etc.} = M$$

$$P' (y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') + P'' (y'' \cos \alpha'' - x'' \cos \beta'') + \text{etc.} = N$$

mais ce mode d'écrire ne s'accorde pas avec la convention que l'auteur a faite au n° 60 de sa statique, sur la manière dont l'axe d'un couple indique le sens de ce couple. Car en prenant A pour origine et AL pour l'axe d'un couple, il suppose que la rotation que ce couple tend à produire est telle que si l'on se plaçait au point L, considéré comme le nord pour regarder devant soi le point A considéré comme le midi, on verrait la rotation se faire de l'orient à l'occident comme se fait à nos yeux le mouvement du soleil.

Cette détermination est conforme à la nôtre; car, un couple étant donné, l'axe du couple déterminé au moyen du style de rotation est précisément le même que celui que lui assignerait M. Poinsoot.

Nous rappellerons ici que la flèche de notre style est dirigée de telle manière que lorsqu'on place le style sur les z positives, la pointe étant à l'origine, la flèche indique un sens qui va des x positives vers les y positives. Nous sommes convenus d'ailleurs que pour déterminer l'axe d'un couple, ou d'un moment, on élève une perpendiculaire au plan du couple, et que des deux parties de cette perpendiculaire séparées par ce plan, on prend pour axe celle pour laquelle le sens du style est conforme au sens du couple lorsqu'on place le style sur cette partie, la pointe étant à l'intersection de la perpendiculaire et du plan.

Cela étant, il est facile de voir que le sens positif de rotation des couples projetés sur les axes des coordonnées est indiqué par le style placé sur le côté positif de ces axes, et le sens négatif par le style placé sur le côté négatif, la pointe étant à l'origine. De cette manière la projection d'un couple sur l'axe des x , par exemple, sera positive lorsque l'axe de ce couple fera avec les x positives un angle aigu, ce qui est conforme à la règle des signes, quand on exprime cette projection par le produit de l'énergie du couple et du cosinus de l'angle que son axe fait avec celui des x .

Il suit de là que si l'on a une force P' dont les coordonnées courantes sont $x' y' z'$ et qui fait avec les côtés positifs des axes des angles α', β', γ' , le moment de cette force, par rapport à l'origine, se décompose en trois autres qui sont (n° 37) :

$$P' (y' \cos \gamma' - z' \cos \beta'), \quad P' (z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma'), \quad P' (x' \cos \beta' - y' \cos \alpha')$$

et non pas

$$P' (z' \cos \beta' - y' \cos \gamma'), \quad P' (x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha'), \quad P' (y' \cos \alpha' - x' \cos \beta').$$

Au n° 90 des élémens de statique, P, P', P'' étant des forces situées dans un même plan mais dirigées dans ce plan d'une manière quelconque, et p', p'', p''' étant les perpendiculaires abaissées d'un point de ce plan sur leurs directions, les produits $Pp', P'p'', P''p'''$ sont leurs momens par rapport à ce point, et sont positifs ou négatifs selon que les forces respectives tendent à faire tourner dans un sens ou dans le sens contraire.

Mais l'auteur regardant les forces P', P'', P''' et les perpendiculaires p', p'', p''' comme essentiellement positives, il faut aussi regarder comme telles la résultante R , la perpendiculaire r abaissée sur sa direction et la force R égale et directement opposée à la résultante.

Le moment de la résultante étant Rr , positif ou négatif, celui de la force R qui lui est directement opposée, est $-Rr$, négatif ou positif. On a donc en ajoutant cette dernière force au système

$$\begin{aligned} -Rr + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc} &= 0 & \text{d'où} \\ Rr &= P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Il ne faut donc pas désigner par $-R$ la force égale et directement opposée à la résultante lorsqu'on considère toutes les forces comme essentiellement positives.

Au reste nous avons vu, n° 37, qu'on peut distinguer par les signes $+$ et $-$ les forces P', P'', P''' et les perpendiculaires p', p'', p''' Il faut pour cela considérer les perpendiculaires comme situées sur l'axe tournant des r , et les forces P', P'', P''' comme parallèles à l'axe tournant des s .

Cette manière présente cet avantage, c'est que les signes des momens $P'p', P''p''$ se déduisent, par la règle des signes, de ceux de leurs facteurs P' et p' , P'' et p'' , etc.

Des momens par rapport à un plan.

40. Nous allons maintenant examiner le jeu des signes dans la formule qui exprime le théorème des momens des forces parallèles, par rapport à un plan.

On entend ici par le moment d'une force, le produit de cette force et de la distance de son point d'application au plan.

On prend pour positives celles des forces parallèles qui agissent dans un sens et pour négatives celles qui agissent en sens contraire. On regarde comme positives les distances comptées d'un côté du plan et comme négatives celles qui sont comptées du côté opposé.

Soient donc P, P', P'' des forces parallèles dont les unes pourront être positives et les autres négatives, et soient z, z', z'' les distances positives ou négatives, de leurs points d'application au plan des xy . Soit R leur résultante et Z la distance de son point d'application à ce plan. On aura $R = P + P' + P'' + \text{etc.}$ et le théorème des momens est exprimé par cette formule

$$RZ = Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}$$

dont il s'agit de démontrer toute la généralité.

Lorsque deux forces parallèles P et P' agissent dans le même sens, leur résultante est égale à la somme de leurs valeurs absolues et lorsqu'elles agissent en sens contraire l'une de l'autre, leur résultante est égale à la différence de leurs valeurs absolues et agit dans le sens de la plus grande. La résultante est d'ailleurs toujours parallèle aux composantes. (Voir les traités de statique).

On peut donc dire que la résultante de deux forces parallèles P et P' s'exprimera dans tous les cas par $P + P'$, en ayant égard aux signes de P et P' .

Si l'on a une troisième force P'' parallèle aux premières, la résultante des deux forces $P + P'$ et P'' s'exprimera par $(P + P') + P''$ et par conséquent $P + P' + P''$ sera la résultante des trois forces P , P' , P'' .

En général $P + P' + P'' + P''' + \text{etc.}$ exprimera la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles.

Pour déterminer la position dans l'espace de la résultante $P + P'$ des forces P et P' , il suffit d'en connaître un seul point.

Si nous menons à volonté une droite $MM'N$ (fig. 196... 199) qui coupe les directions des forces P , P' et $P + P'$ aux points M , M' , N , on sait, par la statique, que chacune des trois forces est proportionnelle à la distance des points relatifs aux deux autres forces. On a donc les proportions

$$P + P' : P : P' :: MM' : M'N : MN.$$

Arrêtons-nous à celle-ci

$$P + P' : P' :: MM' : MN$$

qui suffit pour déterminer le point N , et montrons qu'elle est vraie en ayant égard aux signes de ses quatre termes.

Nous prendrons pour positif le sens MM' , de M en M' .

Il y a deux cas principaux à considérer, celui où les forces $(P + P')$ et P' sont de même signe, et celui où elles sont de signe contraire.

1^{er} cas. $P + P'$ et P' de même signe. Ce cas a lieu

1^o Lorsque P et P' sont de même signe,

2^o Lorsque P et P' étant de signe contraire, P' est numériquement plus grand que P .

Dans ce premier cas les deux premiers termes de la proportion

$$P + P' : P' :: MM' : MN$$

étant de même signe, les deux derniers doivent aussi être de même signe. Or c'est ce qui a lieu, car

1^o Lorsque P et P' sont de même signe, on sait que le point N est situé entre M et M' et par conséquent MM' et MN sont de même sens ou de même signe (fig. 196).

2^o Lorsque P et P' étant de signe contraire, P' est numériquement plus grand que P , on sait aussi que le point N est au-delà de M' , et par conséquent MM' et MN sont encore de même signe (fig. 197).

2^{me} cas. $P + P'$ et P' de signe contraire. Ce cas a lieu lorsque P et P' étant de signe contraire, P est numériquement plus grand que P' .

On sait qu'alors le point N tombe au-delà de M , et par conséquent MM' et MN sont de signe contraire (fig. 198).

Concluons de cette discussion que la proportion

$$P + P' : P' :: MM' : MN$$

est toujours vraie quant aux signes.

Si l'on a une troisième force P'' , on prendra sur sa direction un point quelconque M'' et l'on tirera la droite NM'' prolongée de part et d'autre (fig. 200, 201 et 202). La résultante $P + P' + P''$ des deux forces $P + P'$ et P'' passera par un point N' de cette droite, donné par la proportion

$$P + P' + P'' : P'' :: \underset{\dots\dots}{NM''} : \underset{\dots\dots}{NN'}$$

dans laquelle il faut avoir égard aux signes. On prendra, si l'on veut, le sens NM'' comme positif, en sorte que NN' sera de même sens que NM'' ou de sens contraire, selon que sa valeur déduite de cette proportion sera positive ou négative.

Lorsqu'on regarde les points M , M' et M'' comme les points d'application des forces P , P' , P'' , on considère, en même temps, le point N comme le point d'application de la résultante de P et P' , et le point N' comme le point d'application de la résultante des trois forces P , P' , P'' .

En continuant la même construction on trouverait le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles.

D'après la nature de cette construction, on voit facilement que si, sans changer les forces ni leurs points d'application, on les fait tourner autour de ces points en conservant leur parallélisme, les points d'application N , N' ... des résultantes partielles $P + P'$, $P + P' + P''$... et de la résultante totale, ne changeront pas. Ces résultantes ne feront que tourner autour de leurs points d'application en demeurant toujours parallèles aux composantes.

On donne le nom de *centre des forces parallèles* au point d'application de leur résultante déterminé comme il vient d'être dit.

Venons-en maintenant au théorème des momens.

Ne prenons d'abord que deux forces P et P' . Abaissons des points d'application M , M' et N les perpendiculaires MQ , $M'Q'$, NK sur le plan des momens (fig. 196, 197, 198, 199), et menons par le point M , dans le plan de ces perpendiculaires, la droite MGH parallèle au plan, laquelle coupera en H et G les perpendiculaires $M'Q'$ et NK , prolongées si cela est nécessaire.

Les triangles MHM' et MGN ayant leurs côtés parallèles et étant construits sur deux droites qui se coupent en M , sont dans le cas de ceux mentionnés aux n^{os} 9 et 10. Les côtés de pareils triangles sont proportionnels, même en ayant égard aux signes, quand on

considère, dans chaque triangle, un des côtés comme une abscisse, un autre comme une ordonnée et le troisième comme un rayon vecteur.

On a donc ici

$$\overline{MM'} : \overline{MN} :: \overline{HM'} : \overline{GN}.$$

Pour les côtés situés sur MM' nous prendrons MM' comme sens positif, et pour les côtés perpendiculaires au plan nous supposerons le sens positif dirigé de bas en haut.

Les deux proportions

$$\begin{aligned} P + P' : P' &:: \overline{MM'} : \overline{MN} \\ \overline{MM'} : \overline{MN} &:: \overline{HM'} : \overline{GN} \end{aligned}$$

étant vraies en ayant égard aux signes, la proportion

$$P + P' : P' :: \overline{HM'} : \overline{GN}$$

est également vraie en ayant égard aux signes. Elle donne

$$(P + P') \cdot \overline{GN} = P' \times \overline{HM'} \quad (1)$$

Les droites $\overline{QM}$, $\overline{KG}$, $\overline{QH}$ étant toutes trois égales et de même signe, on a l'équation identique.

$$(P + P') \cdot \overline{KG} = P \cdot \overline{QM} + P' \cdot \overline{QH} \quad (2)$$

En ajoutant ces deux équations il vient

$$(P + P') (\overline{KG} + \overline{GN}) = P \cdot \overline{QM} + P' (\overline{QH} + \overline{HM'})$$

que nous écrirons ainsi

$$(P + P') \cdot \overline{KGN} = P \cdot \overline{QM} + P' \cdot \overline{QH'M'} \quad (3)$$

ou

$$(P + P') \cdot \overline{KN} = P \cdot \overline{QM} + P' \cdot \overline{Q'M'}.$$

Ce qui signifie que le moment de la résultante $P + P'$ est égale à la somme des moments des composantes P et P' .

Je joins ici quatre exemples.

$$\begin{aligned} 1^{\circ}. \text{ (Fig. 196). Soient } P &= 5, \quad P' = 4 \text{ d'où } P + P' = 9, \\ \overline{HM'} &= 18, \quad \overline{QM} = \overline{KG} = \overline{QH'} = 3. \end{aligned}$$

La proportion

$$P + P' : P' :: \overline{MM'} : \overline{MN}$$

devient

$$9 : 4 :: \overline{MM'} : \overline{MN} \text{ d'où } \overline{MN} = \frac{4}{9} \overline{MM'}.$$

On divisera MM' en 9 parties et l'on portera 4 de ces parties de M en N dans le sens MM' .

La proportion

$$P + P' : P :: \overline{HM'} : \overline{GN} \text{ devient}$$

$$9 : 4 :: 18 : \overline{GN}$$

$$\text{d'où } \overline{GN} = 8.$$

Les équations (1) et (2) deviennent ici

$$9 \times 8 = 4 \times 18$$

$$9 \times 3 = 5 \times 3 + 4 \times 3$$

et leur somme ou l'équation

$$(P + P') \cdot (KGN) = P \cdot QM + P' \cdot (Q'HM')$$

est ici

$$9(3 + 8) = 5 \times 3 + 4(3 + 18);$$

résultat conforme à la figure, et qui revient à

$$99 = 15 + 84.$$

2°. (Fig. 197). Soient, pour second exemple, $P = 3$, $P' = -5$ d'où $P + P' = -2$, $HM' = 6$, $QM = KG = QH' = -4$.

La proportion $P + P' : P' :: MM' : MN$ donne

$$-2 : -5 :: MM' : MN \text{ d'où } MN = \frac{5}{2} MM'.$$

On divisera MM' en deux parties et l'on portera cinq parties pareilles de M en N dans le sens MM' .

La proportion $P + P' : P' :: HM' : GN$ devient

$$-2 : -5 :: 6 : GN \text{ d'où } GN = 15.$$

Les équations (1) et (2) sont dans cet exemple

$$(-2) \cdot 15 = (-5) \cdot 6$$

$$(-2) \cdot (-4) = 3 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-4),$$

et leur somme ou l'équation

$$(P + P') \cdot (KGN) = P \cdot QM + P' \cdot (Q'HM') \text{ est ici}$$

$$(-2) \cdot (-4 + 15) = 3 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-4 + 6);$$

résultat conforme à la figure. Cette équation revient à

$$-22 = -12 - 10.$$

3°. (Fig. 198). Soient $P = -5$, $P' = 3$, d'où $P + P' = -2$,

$$HM' = 8, \quad QM = KG = Q'H = 4.$$

La proportion $P + P' : P' :: MM' : MN$ donne

$$-2 : 3 :: MM' : MN \text{ d'où } MN = -\frac{3}{2} MM'.$$

On divisera MM' en deux parties et l'on portera trois parties pareilles de M en N du côté opposé à M' .

La proportion $P + P' : P' :: HM' : GN$ donne

$$-2 : 3 :: 8 : GN, \text{ d'où } GN = -12.$$

Les équations (1) et (2) sont ici

$$(-2)(-12) = 3 \times 8$$

$$(-2) \cdot 4 = (-5) \cdot 4 + 3 \times 4,$$

et leur somme ou l'équation

$$(P + P') \cdot \overline{KGN} = P \cdot \overline{QM} + P' \cdot \overline{Q'M'} \quad \text{est}$$

$$(-2) \cdot (4 - 12) = (-5) \cdot 4 + 3 \cdot (4 + 8) \quad \text{conformément à la figure.}$$

Cette équation revient à

$$16 = -20 + 36.$$

4°. (Fig. 199). Soient encore comme dans l'exemple précédent

$$P = -5, \quad P' = 3, \quad \text{d'où } P + P' = -2.$$

On trouvera toujours $MN = -\frac{3}{2} MM'.$

Mais soit maintenant $HM' = -8,$ la proportion

$$P + P' : P' :: \overline{HM'} : \overline{GN} \quad \text{donnera}$$

$$-2 : 3 :: -8 : \overline{GN} \quad \text{d'où } \overline{GN} = 12.$$

Supposons $QM = KG = Q'H = -20.$

L'équation $(P + P') \cdot \overline{KGN} = P \cdot \overline{QM} + P' \cdot \overline{Q'M'}$

est ici $(-2) \cdot (-20 + 12) = (-5) \cdot (-20) + 3 \cdot (-20 - 8);$

résultat conforme à la figure, et qui revient à

$$16 = 100 - 84.$$

Si l'on désigne en général par $z,$ et z' les ordonnées $\overline{QM}$ et $\overline{Q'M'}$ des points d'application des forces P et $P',$ et par z_1 l'ordonnée $\overline{KN}$ du point d'application de leur résultante, le théorème des moments s'exprimera par

$$(P + P') z_1 = Pz + P'z'$$

équation dans laquelle il faut avoir égard aux signes des forces et des ordonnées. Ce théorème appliqué aux deux forces $(P + P')$ et P'' donnerait

$$[(P + P') + P''] z_2 = (P + P') z_1 + P'' z'',$$

en désignant par z'' l'ordonnée du point d'application de la force $P'',$ et par z_2 celle du point d'application de la résultante des forces $(P + P')$ et $P''.$

Mettant pour $(P + P') z_1$ sa valeur $Pz + P'z',$ on a

$$(P + P' + P'') z_2 = Pz + P'z' + P''z'',$$

qui est le théorème des moments étendu aux trois forces $P, P', P''.$ On l'étendra de même à un nombre quelconque de forces.

En faisant usage de ce théorème par rapport à chacun des trois plans coordonnés, on pourra déterminer la position du centre des forces parallèles dans l'espace. En désignant

par X, Y, Z les coordonnées de ce point, et par R la résultante de ces forces, on aura en effet

$$RX = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}$$

$$RY = Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}$$

$$RZ = Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}$$

d'où l'on tirera les valeurs de X, Y, Z .

$(x, y, z), (x', y', z') \dots$ sont les coordonnées des points d'application des forces $P, P', \dots$ etc.

41. L'effet d'une force ne changeant pas lorsqu'on transporte son point d'application en un point quelconque de sa direction, il en résulte que la recherche du centre des forces parallèles présente d'abord à l'esprit quelque chose de vague et d'indéterminé, puisqu'en changeant les points d'application des forces on change la position de ce centre dans l'espace, et que l'on ignore ce qui a pu motiver le choix des points d'application.

Cette incertitude disparaît lorsqu'on regarde les particules d'un corps comme les points d'application de forces égales et parallèles. C'est ce que l'on fait lorsqu'on considère l'action de la gravité sur ces particules. Il en résulte que si l'on fait tourner un corps d'une manière quelconque, l'effet est le même que si toutes ces forces tournaient autour des particules considérées comme leurs points d'application. La résultante de toutes ces forces passe constamment par un certain point du corps qui est le centre des forces parallèles égales, appliquées à toutes ses particules, et que l'on nomme le centre de gravité du corps.

Si l'on divise ce corps en plusieurs parties, on pourra déterminer le centre de gravité de chacune d'elles, et l'effet de la gravité sur le corps est le même que si chacune de ces parties était sollicitée par une seule force agissant à son centre de gravité respectif.

Ici nous avons le cas de plusieurs forces parallèles, inégales, dont les points d'application sont déterminés par un choix bien motivé, puisque ces points sont les centres de gravité des parties dans lesquelles le corps a été divisé. Et maintenant, si l'on fait tourner le corps, l'effet sera le même que si ces forces parallèles et inégales tournaient autour de leurs points d'application. Dans ce cas encore la résultante tourne autour d'un certain point qui est le centre de ces forces parallèles ou le centre de gravité du corps entier.

CHAPITRE XI.

DE QUELQUES FORMULES DIFFÉRENTIELLES EMPLOYÉES EN MÉCANIQUE.

Différentielles des cosinus représentés par a , a' , a'' , etc.

42. Nous allons maintenant rechercher la signification géométrique de quelques formules différentielles employées en mécanique et examiner le jeu des signes dans ces formules.

Soit Ox (fig. 203 et 204) l'axe des abscisses positives. Décrivons, dans un plan quelconque passant par cet axe et de l'origine O comme centre, avec l'unité pour rayon, une demi-circonférence AmB . Prenons A pour origine des arcs dont le sens positif sera $\overset{AmB}{\text{.....}}$. Désignons par α l'arc quelconque Am , et par $\alpha + dz$ sa valeur consécutive $\overset{amm'}{\text{.....}}$, en sorte que $mm' = dz$.

Faisons $\cos \alpha = a$, d'où $\cos(\alpha + dz) = a + da$.

Si l'on abaisse sur Ox les perpendiculaires mp , $m'p'$, on aura

$$Op = a, \quad Op' = a + da, \quad Op' - Op = da$$

$$\text{Mais} \quad Op' - op = -Op + op' = \overset{pOp'}{\text{.....}} = \overset{pp'}{\text{.....}},$$

$$\text{ainsi} \quad da = pp'.$$

En supposant que l'arc α ne s'étende que de 0° à 180° , on voit que da est positive, lorsque l'arc α diminue (fig. 204), et négative lorsqu'il augmente (fig. 203).

En ayant égard aux signes, on voit aussi que da ou $\overset{pp'}{\text{.....}}$ est la projection de $\overset{mm'}{\text{.....}}$ sur l'axe Ox .

Si Ox est un axe fixe dans l'espace, et Om une droite mobile autour du point O , dont la position consécutive est Om' (fig. 205), il arrivera en général que l'arc mm' , considéré comme une droite infiniment petite, ne sera pas dans un même plan avec Ox . Mais si l'on mène par les points m et m' des plans perpendiculaires à Ox , et qui coupent cet axe en p et p' , on aura toujours $\overset{pp'}{\text{.....}}$ pour la différentielle du cosinus de l'angle xOm , en supposant qu'on ait pris $om = om' = 1$.

Lorsqu'on considère le mouvement d'un corps autour d'un point fixe O , on mène par ce point trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , indépendans du corps, pénétrables par le corps, et qui demeurent fixes dans l'espace pendant le mouvement. On mène de plus par

le même point trois autres axes rectangulaires, fixes dans le corps et mobiles avec lui, que nous désignerons par Ox' , Oy' , Oz' .

La position de ces axes mobiles à une époque donnée se détermine au moyen des angles qu'ils font alors avec les axes fixes. Les cosinus de ces angles s'expriment, pour abréger, par une seule lettre, comme suit :

$$\begin{array}{lll} \cos x'Ox = a, & \cos x'Oy = a', & \cos x'Oz = a'', \\ \cos y'Ox = b, & \cos y'Oy = b', & \cos y'Oz = b'', \\ \cos z'Ox = c, & \cos z'Oy = c', & \cos z'Oz = c''. \end{array}$$

Soit Om (fig. 206) la position de l'axe Ox' , au bout du tems t , et om' sa position au bout du tems $t + dt$. Prenons toujours $Om = Om' = 1$ et considérons comme une ligne droite l'arc de cercle infiniment petit mm' décrit de l'origine comme centre avec l'unité pour rayon.

Les projections de mm' sur les axes Ox , Oy , Oz , sont da , da' , da'' en ayant égard aux signes. Si nous formons un parallélépipède rectangle dont mm' soit la diagonale et dont les arêtes soient parallèles à Ox , Oy , Oz , la projection de mm' sur une droite quelconque, sera égale à la somme algébrique des projections de trois arêtes consécutives représentées en grandeur et en signe par da , da' , da'' .

La projection de mm' sur Ox' est nulle, parce que mm' est un arc infiniment petit qui peut être considéré comme une ligne droite perpendiculaire à Ox' .

La somme des projections sur Ox' des trois arêtes consécutives, est

$$da \times \cos x'Ox' + da' \times \cos y'Ox' + da'' \times \cos z'Ox' \quad \text{ou} \\ ada + a'da' + a''da''.$$

Cette somme devant être nulle on a

$$ada + a'da' + a''da'' = 0$$

Telle est la signification géométrique de cette équation, que l'on obtient ordinairement en différentiant l'équation

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1.$$

Faisons voir comment la règle des signes s'applique aux produits, ada , $a'da'$, $a''da''$.

Imaginons un point qui parcoure les arêtes consécutives égales à da , da' , da'' , et qui se projette constamment sur Ox' . La somme algébrique du chemin parcouru sur Ox' par la projection du point mobile, sera égale à la projection de mm' c'est-à-dire à zéro. Les parties parcourues dans le sens Ox' étant positives et celles parcourues en sens contraire étant négatives.

Représentons l'arête da par ms ou par ms' (fig. 207 et 208) selon qu'elle est positive ou négative. Supposons, en premier lieu, a positif, c'est-à-dire l'angle $x'Ox$ aigu (fig. 207).

On voit que la projection de ms sur Ox' sera positive et celle de ms' négative. Ceci vérifie la règle des signes appliquée au produit ada , savoir :

$$+ \times + = + \quad \text{et} \quad + \times - = -$$

Soit, en second lieu, a négatif, c'est-à-dire $x'Ox$ obtus (fig. 208).

La figure montre que la projection de ms sur Ox' sera négative et celle de ms' positive. La règle des signes est donc encore vérifiée sur le produit ada , savoir :

$$- \times + = - \quad \text{et} \quad - \times - = +$$

On appliquera la même discussion aux produits $a'da'$ et $a''da''$.

Du mouvement de rotation et de sa décomposition.

45. Supposons que l'on donne à un corps un mouvement de rotation infiniment petit autour d'un axe OI (fig. 209). Menons par un point quelconque O de cet axe, trois axes rectangulaires Ox' , Oy' , Oz' , et cherchons quel sera le mouvement azimuthal, par rapport à l'axe Oz' , qui en résultera pour un point m du corps, situé sur une droite Om perpendiculaire à l'axe Oz' et à l'unité de distance de cet axe.

Prenons si l'on veut ce point m sur l'axe Ox' . Décrivons du point O comme centre avec l'unité pour rayon, une surface sphérique qui coupera l'axe Ox' en m , l'axe Oz' en C et l'axe OI en B . Du point m abaissons mS perpendiculaire sur OI et prenons la droite SmM égale à l'unité. La rotation autour de OI transportera SM en SM' , le plan SMM' étant perpendiculaire à OI . Si l'on décrit dans ce plan, du point S comme centre avec SM pour rayon, l'arc MM' , cet arc, à cause de $SM=1$, sera la mesure de la rotation infiniment petite autour de OI .

En vertu de cette rotation le point m décrira, sur la surface de la sphère, l'arc de petit cercle mm' semblable à MM' .

Menons le plan déterminé par l'axe Oz' et par le point m' . Ce plan coupera la surface sphérique selon le grand cercle Cm' , lequel rencontrera à angle droit, au point f , le grand cercle mn , dont le plan est celui des axes Ox' et Oy' .

Le triangle infiniment petit mfm' , rectangle en m , étant considéré comme rectiligne, donnera

$$mf = mm' \cdot \cos m'mf,$$

$$\text{d'ailleurs} \quad mm' : MM' :: Sm : SM :: Sm : Om :: \sin IOx' : 1, \quad \text{d'où}$$

$$mm' = MM' \sin IOx',$$

donc

$$mf = MM' \sin IOx' \cos m'mf.$$

Remarquons que OS étant perpendiculaire au plan mSm' et Sm perpendiculaire à mm' (regardée comme une ligne droite), on a Om perpendiculaire à mm' (Legendre, *Géom.* V, 6).

Ainsi $m'm$ est perpendiculaire au plan mOB , comme étant perpendiculaire à mO et à mS . D'un autre côté l'arc fm est perpendiculaire à l'arc mC , puisque les plans mOy' et mOz' sont perpendiculaires entre eux. D'ailleurs mf est perpendiculaire au rayon Om , donc mf est perpendiculaire au plan mOz' .

Les droites mm' et mf étant respectivement perpendiculaires aux plans mOB et mOz' , l'angle $m'mf$ mesure l'inclinaison de ces plans, et est égal à l'angle en m du triangle sphérique BmC .

Ce triangle donne

$$\cos BC = \cos mC \cos mB + \sin mC \sin mB \cos BmC$$

et comme $mC = 90^\circ$, cette formule se réduit à

$$\cos BC = \sin mB \cos BmC.$$

Or l'arc BC mesure l'angle IOz' , l'arc MB mesure l'angle IOx' , et l'angle $BmC = m'mf$. On a donc

$$\cos IOz' = \sin IOx' \cos m'mf,$$

ce qui fait que l'équation

$$\begin{aligned} mf &= MM' \sin IOx' \cos m'mf && \text{devient} \\ mf &= MM' \cos IOz'. \end{aligned}$$

Remarquons que le point m , à mesure qu'il passe du plan mSO dans le plan $m'SO$, passe aussi du plan mCO dans le plan $m'CO$. L'angle de ces derniers plans est le mouvement azimuthal de m autour de Oz' , et cet angle a pour mesure l'arc mf . Ainsi la dernière formule est la solution du problème que nous nous étions proposé.

On trouverait de même que le mouvement azimuthal de m autour de Oy' est égal à $MM' \cos IOy'$, et que celui du point C autour de Ox' est égal à $MM' \cos IOz'$.

La rotation autour de OI , dont l'arc infiniment petit MM' est la mesure, a opéré sur le point m un déplacement azimuthal, autour de Oz' , mesuré par l'arc $mf = MM' \cos IOz'$ (fig. 210) et un déplacement azimuthal, autour de Oy' , mesuré par l'arc $mf' = MM' \cos IOy'$. Donc le point m est parvenu, en vertu de la rotation MM' , en un point m' qui est à l'intersection des arcs de grands cercles Cf et nf' .

Le point n situé sur l'axe Oy' à l'unité de distance de l'origine, aura éprouvé un déplacement azimuthal autour de Oz' mesuré par l'arc $nh = MM' \cos IOz'$, et un déplacement azimuthal autour de Ox' mesuré par l'arc $nh' = MM' \cos IOx'$. Ce point sera donc parvenu en un point n' à l'intersection des arcs de grands cercles Ch et mh' .

Maintenant au lieu d'opérer autour de OI la rotation MM' , si nous opérons successivement autour de Oz' , Oy' , Ox' , les rotations MM' , $\cos IOz'$, $MM' \cos IOy'$, $MM' \cos IOx'$, je dis que le corps prendra la même position que celle qu'il avait prise en vertu de la seule rotation MM' .

En effet la rotation $MM' \cos IOz'$ amènerait d'abord le point m en f , et la rotation $MM' \cos IOy'$ le transporterait ensuite de f en m' . Quant à la rotation $MM' \cos IOx'$, elle

ne lui ferait éprouver qu'un déplacement négligeable, car cette rotation étant infiniment petite, ne peut produire sur un point m' , infiniment peu éloigné de l'axe Ox' , qu'un déplacement infiniment petit du second ordre.

Voyons ce qui aurait lieu par rapport au point n . La rotation $MM' \cos 10z'$, le transporterait d'abord en h ; en second lieu la rotation $MM' \cos 10y'$ ne lui causerait qu'un déplacement infiniment petit du second ordre que nous négligeons, enfin la rotation $MM' \cos 10x'$ le transporterait de h en n' .

Donc, au moyen des trois rotations successives $MM' \cos 10z'$, $MM' \cos 10y'$, $MM' \cos 10x'$, nous amenons les points m et n aux mêmes points m' et n' où les avait transportés la rotation unique MM' autour de OI . Quant au point O , il demeure immobile dans les deux cas.

Or les points O , m , n , non en ligne droite, suffisent pour fixer la position du corps avant la rotation, et les points O , m' , n' , suffisent pour la fixer après la rotation, donc enfin on peut dire que le corps, en vertu des trois rotations successives $MM' \cos 10z'$, $MM' \cos 10y'$, $MM' \cos 10x'$, prend la même position que celle qu'il avait prise en vertu de la rotation MM' .

Ce théorème est de la plus grande importance. Il ne faut pas perdre de vue qu'il n'a lieu qu'en supposant MM' infiniment petit.

Les rotations $MM' \cos 10z'$, $MM' \cos 10y'$, $MM' \cos 10x'$ sont les *composantes* autour des axes Oz' , Oy' , Ox' , de la rotation MM' qui a lieu autour de OI .

On peut intervertir l'ordre des rotations composantes. Par exemple, si elles se faisaient dans cet ordre, $MM' \cos 10x'$, $MM' \cos 10y'$, $MM' \cos 10z'$, le point m ne changerait pas de place en vertu de la première, puisqu'il est situé sur l'axe Ox' . La seconde le transporterait en f' , et la troisième de f' en m' .

Quant au point n , il serait transporté d'abord de n en h' , ensuite il éprouverait un déplacement infiniment petit du second ordre et négligeable, enfin il serait transporté de h' en n' .

Quant au sens respectif de chacune de ces rotations composantes, voici comment on le détermine. On place le style de rotation (fig. 211) sur celle des deux parties OI ou OI' de l'axe I/OI (fig. 209) pour laquelle la flèche du style coïncide avec le sens de la rotation MM' , la pointe étant en O . Cette partie est, à proprement parler, l'axe de la rotation MM' . Dans les fig. 209 et 210 cet axe est OI et non OI' . Ensuite, si à partir de sa position sur OI on amène le style successivement sur celles des parties des axes des x' , des y' et des z' qui font avec OI des angles aigus (la pointe restant en O), la flèche indiquera le sens de rotation autour de ces axes.

La rotation $MM' \cos 10z'$, par exemple, sera positive ou négative, selon que l'axe OI fera avec les z' positives un angle aigu ou obtus, ensorte qu'il suffira, pour déterminer le sens ou le signe de cette rotation, d'avoir égard aux signes du cosinus, en considérant la rotation MM' comme essentiellement positive.

44. Nous avons déjà dit que pour exprimer les circonstances du mouvement de rotation d'un corps autour d'un point fixe O , on mène par ce point trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , fixes dans l'espace, indépendans du corps mais pénétrables, et trois autres axes aussi rectangulaires Ox' , Oy' , Oz' , fixes dans le corps et mobiles avec lui.

Supposons qu'à une époque t le corps tourne autour de OI (fig. 209) avec une vitesse de rotation ω . Nous entendons par là que ω serait l'arc décrit pendant l'unité de temps par le point situé à une distance de l'axe OI égal à l'unité linéaire. Cet arc s'exprime en partie du rayon pris pour unité. Il s'opérera autour de OI , pendant l'instant dt consécutif à t , une rotation ωdt . Si l'on nomme p , q , r , les composantes de la vitesse ω autour des traces que les axes Ox' , Oy' , Oz' laissent de leur passage dans l'espace à l'époque t , on aura

$$p = \omega \cos IOx', \quad q = \omega \cos IOy', \quad r = \omega \cos IOz',$$

et le changement de position du corps opéré pendant l'instant dt , sera le même que celui qui résulterait de trois rotations pdt , qdt , rdt , opérées successivement autour de ces traces

Prenons dans la figure 210, $MM' = \omega dt$, on aura

$$mf = \omega dt \cos IOz' = rdt$$

Le déplacement azimuthal de m autour de Oy' serait $mf' = qdt$, et celui du point n autour de Ox' serait $nh' = pdt$.

Les arcs infiniment petits mm' et mf peuvent être considérés comme des lignes droites. Comme mf est perpendiculaire au plan $x'O'z'$, cette droite est parallèle à Oy' . On peut donc considérer mf comme la projection, sur une parallèle à Oy' , du déplacement mm' qu'a subi le point m pendant l'instant dt .

Supposons qu'à l'époque t on ait

$$\begin{array}{lll} \cos x'Ox = a, & \cos x'Oy = a', & \cos x'Oz = a'', \\ \cos y'Ox = b, & \cos y'Oy = b', & \cos y'Oz = b'', \\ \cos z'Ox = c, & \cos z'Oy = c', & \cos z'Oz = c''. \end{array}$$

Menons par le point m trois axes auxiliaires mX , mY , mZ , parallèles aux axes fixes Ox , Oy , Oz (fig. 212). Ces axes ne sont pas tracés dans la figure pour ne pas la compliquer.

Si l'on construit le parallélépipède dont mm' est la diagonale et qui s'appuie sur ces axes auxiliaires, les arêtes de ce parallélépipède seront respectivement égales à da' , da' , da'' , en ayant égard aux signes, et seront les coordonnées du point m' par rapport à ces trois axes.

mf étant l'abscisse de ce point par rapport à un quatrième axe me , on a (n° 19)

$$mf = da \cdot \cos Xme + da' \cdot \cos Yme + da'' \cdot \cos Zme;$$

mais $Xme = xOy'$, $Yme = yOy'$, $Zme = zOy'$,

donc on a $mf = bda + b'da' + b''da''$

en ayant égard aux signes de toutes les quantités. On aura mf positive ou négative, selon qu'elle tombera sur me ou sur me' .

Mettant pour mf sa valeur rdt qui est vraie en ayant égard aux signes, on a enfin

$$bda + b'da' + b''da'' = rdt.$$

Considérons maintenant le point n situé sur l'axe Oy' à une distance de l'origine égale à l'unité. Soit nn' le déplacement de ce point pendant l'instant dt et nh la projection de ce déplacement sur la droite $g'ng$ parallèle à Ox' . (On suppose ng dans le sens des x' positives.)

Si nous menons par le point n trois axes auxiliaires parallèles aux axes fixes Ox , Oy , Oz , on pourra regarder nn' comme la diagonale d'un parallélépipède dont les arêtes sont les coordonnées de n' par rapport à ces axes auxiliaires et sont égales à db , db' , db'' , en ayant égard aux signes. D'ailleurs les côtés positifs des axes auxiliaires font avec ng des angles dont les cosinus sont a , a' , a'' , on a donc

$$nh = adb + a'db' + a''db''.$$

nh est positive ou négative, selon qu'elle tombe sur ng ou sur ng' , et si l'on fait attention au sens de la rotation r lorsque r est positive, on voit qu'on a

$$nh = -rdt;$$

donc enfin

$$adb + a'db' + a''db'' = -rdt.$$

En comparant cette valeur de $-rdt$ avec celle de rdt donnée ci-dessus, on en conclut

$$bda + b'da' + b''da'' = -adb - a'db' - a''db''$$

comme on le trouverait en différentiant l'équation

$$ab + a'b' + a''b'' = 0$$

qui exprime que les axes Ox' et Oy' sont à angle droit.

L'équation

$$bda + b'da' + b''da'' = -adb - a'db' - a''db''$$

signifie donc que la rotation r autour de l'axe Oz' , produit sur les points m et n , situés à l'unité de distance de l'origine sur Ox' et sur Oy' , des déplacements dont les projections faites respectivement sur Oy' et sur Ox' sont égales, et que lorsque la première est dans le sens des y' positives, la seconde est dans le sens des x' négatives et vice versa.

On pourrait trouver d'une manière semblable les formules relatives à la rotation autour de Oy' et de Ox' ; mais, pour abrégé, nous les déduirons de celles que nous venons de trouver, au moyen de la permutation tournante basée sur ce tableau :

a	b	c	p	q	r
c	a	b	r	p	q .

En substituant dans la formule

$$bda + b'da' + b''da'' = rdt$$

les lettres inférieures aux lettres supérieures correspondantes, il vient

$$adc + a'dc' + a''dc'' = qdt,$$

et par les mêmes substitutions opérées sur cette dernière formule, on a

$$cdb + c'db' + c''db'' = pdt.$$

On déduira aussi de la formule

$$adb + a'db' + a''db'' = -r dt, \quad \text{les deux suivantes}$$

$$cda + c'da' + c''da'' = -q dt$$

$$bdc + b'dc' + b''dc'' = -p dt.$$

Il ne faut pas perdre de vue que le sens positif de rotation autour des axes Ox' , Oy' , Oz' est celui qui est indiqué par la flèche du style quand on le place sur les côtés positifs de ces axes, la pointe étant à l'origine, comme dans la fig. 212.

45. Supposons que l'origine O soit un point fixe. Prenons toujours sur le côté positif de l'axe Ox' , la distance Om égale à l'unité linéaire (fig. 212), et soit mm' le déplacement du point m pendant l'instant dt consécutif à t , dû à la vitesse de rotation ω autour de l'axe Ol .

A cause de $\cos x'Ox = a$, la projection de Om sur l'axe fixe Ox est a et celle de mm est da .

L'arc mm' peut être considéré comme une droite infiniment petite située dans un plan eml perpendiculaire à Ox' .

Achevons le rectangle dont mm' est la diagonale et dont les côtés mf et mf' sont parallèles aux axes Oy' et Oz' .

mf est le déplacement du point m parallèlement aux y' . Il peut être considéré comme dû à la rotation r et à cause de $Om = 1$, on a $mf = r dt$; formule vraie en ayant égard aux signes de mf et de r et en faisant attention que mf est positive ou négative selon que l'on va de m en f dans le sens me ou dans le sens mf' .

Le déplacement de m parallèlement aux z' est mf' . Si on le considère comme dû à la rotation q , on aura $mf' = -q dt$. Nous mettons le signe — devant le second membre, parce que mf' est dirigée de m en f' selon les z' négatives lorsque la rotation q est positive et vice versa.

La projection de mm' sur l'axe Ox (lequel n'est pas tracé dans la figure) est égale à celle de la ligne brisée $mf m'$, c'est-à-dire à la somme algébrique de celles de mf et mf' .

mf ou $r dt$ pouvant être considérée comme une abscisse y' , positive ou négative, sa projection, sur l'axe des x est égale à $mf \cos y'Ox$, en ayant égard au signe de mf et à celui du cosinus. Mettant pour mf sa valeur $r dt$ et pour $\cos y'Ox$ sa valeur b , on a $br dt$ pour la projection de mf sur l'axe des x .

En considérant mf' ou $-q dt$ comme une ordonnée z' , positive ou négative, sa projection sur l'axe Ox s'exprimera par $mf' \cos z'Ox$, en ayant égard aux signes. Mettant pour

mf' sa valeur $-qdt$ et pour $\cos z'Ox$ sa valeur c , on aura $-cqdt$ pour la projection de mf' sur l'axe des x .

La projection de mm' sur les x étant da , et celles de mf et mf' étant $brdt$ et $-cqdt$, on a enfin

$$da = (br - cq) dt.$$

Cette formule signifie donc que la projection de mm' sur l'axe des x est égale à la somme algébrique des projections des deux parties de la ligne brisée mfm' fermée par mm' .

Pour avoir la projection de mm' ou de la ligne brisée mfm' sur les y , il suffit de remplacer a, b, c , par a', b', c' , et l'on a

$$da' = (b'r - c'q) dt.$$

De même la projection de mm' sur les z sera

$$da'' = (b''r - c''q) dt.$$

Au moyen d'une permutation tournante basée sur ce tableau

x'	y'	z'	p	q	r	a	b	c
z'	x'	y'	r	p	q	c	a	b

on passera de la formule

$$\begin{aligned} da &= (br - cq) dt && \text{à la formule} \\ dc &= (aq - bp) dt && \text{et de celle-ci à} \\ db &= (cp - ar) dt. \end{aligned}$$

dc est la projection sur les x du déplacement du point C de l'axe Ox' , en supposant $OC=1$. La projection de ce déplacement sera

$$\begin{aligned} dc' &= (a'q - b'p) dt && \text{sur l'axe des } y \text{ et} \\ dc'' &= (a''q - b''p) dt && \text{sur l'axe des } z. \end{aligned}$$

db est la projection sur les x , du déplacement du point n de l'axe Oy' , en supposant $On=1$. La projection de ce déplacement sera

$$\begin{aligned} db' &= (c'p - a'r) dt && \text{sur l'axe des } y \text{ et} \\ db'' &= (c''p - a''r) dt && \text{sur l'axe des } z. \end{aligned}$$

46. Lorsqu'un corps tourne à un certain instant, avec une vitesse ω , autour d'un axe OI , il en résulte pour chacun des points qui ne sont pas sur cet axe une certaine vitesse dans une direction déterminée. En désignant toujours par p, q, r les composantes de ω autour de Ox', Oy', Oz' , et par x', y', z' les coordonnées d'un point M rapportées à ces axes, on a

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx'$$

pour les projections de la vitesse de ce point sur Ox', Oy', Oz' .

On suppose que la vitesse ω demeure constante pendant l'instant dt consécutif à l'époque t , et que le mouvement de M pendant cet instant est rectiligne. De plus, comme les axes Ox' , Oy' , Oz' sont mobiles avec le corps, la vitesse du point M se projette, à proprement parler, sur les traces que ces axes auraient laissées de leur passage dans l'espace, à l'époque t .

Cherchons à démontrer ces formules par la géométrie.

Soit M le point donné, fig. 213, dont nous supposons, dans notre figure, les trois coordonnées positives. Achevons le parallélépipède dont OM est la diagonale et qui s'appuie sur les axes.

Menons dans le plan AME, MP perpendiculaire à AM, dans le sens de la rotation p ,
dans le plan BMD, MQ perpendiculaire à BM, dans le sens de la rotation q ,
dans le plan CMF, MR perpendiculaire à CM, dans le sens de la rotation r .

Notre figure suppose que les rotations p , q , r , sont toutes trois positives.

Prenons

$$MP = p dt. \quad AM = p dt \sqrt{y'^2 + z'^2},$$

$$MQ = q dt. \quad BM = q dt \sqrt{x'^2 + z'^2},$$

$$MR = r dt. \quad CM = r dt \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

MP peut être considérée comme un arc infiniment petit, décrit du point A comme centre avec AM comme rayon. On fera une remarque semblable relativement à MQ et à MR. De cette manière ces trois droites sont les déplacements du point M, pendant l'instant dt , correspondants aux rotations p , q et r .

Soit M' la position de M au bout de l'instant dt . Ce point n'est pas indiqué dans la figure. L'arc infiniment petit MM' peut être considéré comme une ligne droite. En vertu du théorème du n° 43, ce déplacement réel MM', dû à la rotation ω , est la résultante des trois déplacements MP, MQ, MR, ou la diagonale d'un parallélépipède construit sur ces trois axes.

Ce parallélépipède est représenté en fig. 214, et l'on a mené FMG parallèle à Ox' .

La projection de MM' sur Ox' ou sur sa parallèle FMG est égale à celle du polygone MPLM'. Celle de MP est nulle parce que MP est perpendiculaire à Ox' . Celle de PL est égale et de même sens que celle de MQ qui est MK. Celle de LM' est égale et de même sens que celle MR qui est M_p.

Or MK est égale à MQ cos QMG.

D'ailleurs QMG = BMD fig. 213, car ces angles sont l'un et l'autre égaux à $90^\circ - DMQ$:

$$\text{donc} \quad \cos QMG = \cos BMD = \frac{MD}{BM} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}}, \quad \text{et par conséquent}$$

$$MK = q dt \sqrt{x'^2 + z'^2} \cdot \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} = q z' dt.$$

M_p projection de MR sur MG est égale à MR cos RMF ;

or $\text{RMF} = \text{CME}$, (fig. 213) donc

$$\cos \text{RMF} = \cos \text{CME} = \frac{\text{ME}}{\text{CM}} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \text{donc}$$

$$M_\rho = r dt \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = ry' dt \quad \text{abstraction faite du signe.}$$

Nous montrerons tout-à-l'heure que lorsqu'on veut avoir égard aux signes, il faut poser

$$\text{MK} = qz' dt, \quad \text{et} \quad M_\rho = - ry' dt.$$

Le déplacement de MM' projeté sur les x' , étant égal à la somme algébrique de MK et M_ρ , sera exprimé par

$$qz' dt - ry' dt.$$

Pour avoir la vitesse de M parallèlement à cet axe, c'est-à-dire son déplacement pendant l'unité de temps, il faut diviser cette expression par dt et il vient

$$qz' - ry'.$$

Cherchons l'expression de la vitesse du point M selon les y' .

Son déplacement, pendant l'instant dt , projeté sur EMH parallèle à Oy' , fig. 213, est égal à la somme algébrique des projections de MR et de MP sur EH . Celle de MQ est nulle.

La projection de MR est égale à

$$\text{MR} \cos \text{RMH} = \text{MR} \cos \text{CMF} = \text{MR} \cdot \frac{\text{MF}}{\text{MC}} = r dt \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = rx' dt.$$

Celle de MP est égale à

$$\text{MP} \cos \text{PME} = \text{MP} \cos \text{AMD} = \text{MP} \cdot \frac{\text{MD}}{\text{AM}} = p dt \sqrt{y'^2 + z'^2} \cdot \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} = pz' dt, \quad \text{abstra-}$$

ction faite du signe et $- pz' dt$, en y ayant égard.

Le déplacement de M selon les y' est donc

$$rx' dt - pz' dt \quad \text{et sa vitesse} \\ rx' - pz'.$$

Le déplacement de M pendant l'instant dt , parallèlement à Oz' , est égal à la somme des projections sur DMI parallèle à Oz' , des droites MP et MQ . Celle de MR est nulle.

Celle de MP est égale à

$$\text{MP} \cos \text{PMI} = \text{MP} \cos \text{AME} = \text{MP} \cdot \frac{\text{ME}}{\text{AM}} = p dt \sqrt{y'^2 + z'^2} \cdot \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} = py' dt$$

Celle de MQ est égale à

$$\text{MQ} \cos \text{QMD} = \text{MQ} \cos \text{BMF} = \text{MQ} \cdot \frac{\text{FM}}{\text{BM}} = q dt \sqrt{x'^2 + z'^2} \cdot \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} = qx' dt, \quad \text{abstrac-}$$

tion faite du signe et $- qx' dt$ en y ayant égard.

Le déplacement de M parallèlement aux z' est donc

$$\begin{array}{l} py'/dt - qx'/dt \\ py' - qx'. \end{array} \quad \text{et sa vitesse}$$

Au reste les deux dernières formules se déduiraient immédiatement de la première au moyen de la permutation tournante

$$\begin{array}{cccccc} x' & y' & z' & p & q & r \\ z' & x' & y' & r & p & q. \end{array}$$

En mettant dans la formule $qz' - ry'$, au lieu des lettres qui y figurent, celles qui leur correspondent dans la seconde ligne, il vient

$$py' - qx' \quad \text{pour la vitesse selon les } z'.$$

Puis mettant dans cette dernière les lettres correspondantes, il vient

$$rx' - pz' \quad \text{pour la vitesse de M, selon les } y'.$$

Montrons maintenant la généralité de la formule $qz'/dt - ry'/dt$ relativement aux signes.

Supposons que la droite OB de la fig. 213 soit perpendiculaire au plan des figures 215 et 216 sur lequel elle se projette en un point B.

Quels que soient la position du point M et le sens de la rotation q , on voit par ces deux figures que l'on a toujours, abstraction faite des signes,

$$\begin{array}{l} MK = MQ \cos QMK. \\ \text{d'ailleurs} \quad QMK = BMD \end{array}$$

$$\text{et } \cos BMD = \frac{DM}{BM} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}};$$

mettant pour MQ sa valeur $qdt \cdot BM$ ou $qdt \sqrt{x'^2 + z'^2}$, on a

$$MK = qz'/dt.$$

La fig. 215 montre que lorsque la rotation q est positive, c'est-à-dire dans le sens de la flèche, $\overset{...}{MK}$ a le même signe que $\overset{...}{DM}$ ou z' .

La fig. 216 montre que lorsque la rotation q est négative, $\overset{...}{MK}$ a un signe contraire à celui de z' . La règle des signes est donc toujours vérifiée sur la formule

$$\overset{...}{MK} = qz'/dt.$$

On remarque que la projection MK est nulle pour les points où $z' = 0$.

Supposons que la droite OC de la fig. 213 soit perpendiculaire au plan des figures 217 et 218, sur lequel elle se projette en un point C.

Quels que soient la position du point M et le sens de la rotation r , on voit par ces deux figures que l'on a toujours, abstraction faite des signes

$$\begin{array}{l} M_\rho = MR \cos RM_\rho, \\ \text{l'angle} \quad RM_\rho = CME \quad \text{et} \end{array}$$

$$\cos CME = \frac{EM}{CM} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{abstraction faite du signe.}$$

$$\text{D'ailleurs} \quad MR = rdt. \quad CM = rdt \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$\text{donc} \quad M_\rho = ry' dt \quad \text{abstraction faite du signe.}$$

Pour y avoir égard, il faut poser

$$M_\rho = -ry' dt.$$

En effet si r est position comme en fig. 217, on voit que M_ρ a un signe contraire à celui de EM ou y' .

Et lorsque r est négative, comme a fig. 218, on voit que M_ρ a le même signe que y' .

La formule $M_\rho = -ry' dt$ est donc toujours vérifiée.

Le déplacement de M parallèlement aux x' étant égal à la somme algébrique de MK et de M_ρ , s'exprime donc par

$$\begin{array}{l} qz' dt - ry' dt \quad \text{et sa vitesse par} \\ qz' - ry'. \end{array}$$

Les deux autres formules $rx' - pz'$ et $py' - qx'$ se déduisant de celle-ci par une permutation tournante, il ne sera pas nécessaire de les discuter.

Remarque générale sur les formules précédentes.

47. Les formules

$$\begin{array}{l} ada + a' da' + a'' da'' = 0 \\ bda + b' da' + b'' da'' = rdt \\ dc = (aq - bp) dt \end{array}$$

et leurs analogues, ainsi que les expressions

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx',$$

des composantes de la vitesse du point (x', y', z') selon les x' , les y' et les z' , sont toutes fondées sur le même fait géométrique, savoir, que la projection d'une droite sur une autre est égale à la somme algébrique des projections des côtés d'un polygone fermé par cette droite. Et ce fait géométrique repose lui-même sur le suivant, qui est presque un axiôme; c'est que, lorsqu'un point parcourt successivement différentes distances, sur une droite, dans un sens ou dans le sens contraire, la distance entre le point de départ et le point d'arrivée est égale à la somme algébrique des distances parcourues (Voyez n° 1).

C'est sur un fait aussi simple que reposent toutes ces formules; mais il fallait, pour s'en convaincre, reconnaître leur signification géométrique et dissiper le nuage qui les recouvre lorsqu'on ne les obtient que par des procédés algébriques.

Addition.

48. Ici se termine notre tâche; mais puisque nous venons de nous occuper des quantités p , q , r , nous ne quitterons pas ce sujet sans rappeler quelques formules intéressantes de mécanique où ces quantités figurent.

Nous avons vu au n° 38, que les sommes des moments des forces P , P' , P'' ,... par rapport aux axes Ox , Oy , Oz , étaient

$$L = P(y \cos \gamma - z \cos \beta) + P'(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta') + \text{etc.}$$

$$M = P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) + P'(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma') + \text{etc.}$$

$$N = P(x \cos \beta - y \cos \alpha) + P'(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') + \text{etc.}$$

α , β , γ étant les angles que la force P fait avec les axes, et x , y , z ses coordonnées courantes, et ainsi des autres.

Considérons maintenant comme des forces les quantités de mouvement des élémens d'un corps qui tourne autour d'un point fixe O .

Les coordonnées de l'élément dm étant x' , y' , z' par rapport aux axes Ox' , Oy' , Oz' , nous avons vu que les composantes de sa vitesse, parallèles à ces axes, étaient

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx'.$$

Si donc nous assimilons

$$P \cos \alpha \quad \text{à} \quad (qz' - ry') dm,$$

$$P \cos \beta \quad \text{à} \quad (rx' - pz') dm,$$

$$P \cos \gamma \quad \text{à} \quad (py' - qx') dm,$$

et ainsi de suite pour les autres forces, on aura

$$L = \int [(py' - qx')y' - (rx' - pz')z'] dm,$$

$$M = \int [(qz' - ry')z' - (py' - qx')x'] dm,$$

$$N = \int [(rx' - pz')x' - (qz' - ry')y'] dm.$$

Les intégrales s'étendent à la masse entière du mobile. On peut écrire ces formules ainsi :

$$L = -q \int x'y' dm - r \int x'z' dm + p \int (y'^2 + z'^2) dm,$$

$$M = -r \int y'z' dm - p \int y'x' dm + q \int (z'^2 + x'^2) dm,$$

$$N = -p \int z'x' dm - q \int z'y' dm + r \int (x'^2 + y'^2) dm.$$

Si l'on se rappelle que le moment d'inertie d'un corps, par rapport à un axe, est la somme des produits de ses élémens matériels par le carré de leur distance à cet axe, on voit que

$\int (y'^2 + z'^2) dm$ est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe Ox' , $\int (z'^2 + x'^2) dm$ son moment d'inertie par rapport à Oy' et $\int (x'^2 + y'^2) dm$ son moment d'inertie par rapport à Oz' .

Si l'on suppose que ces axes soient les axes principaux qui se coupent au point O , et que l'on nomme A, B, C , les moments d'inertie principaux par rapport à Ox', Oy', Oz' ; il viendra, à cause de $\int x'y' dm = 0$, $\int x'z' dm = 0$, $\int y'z' dm = 0$,

$$L = Ap,$$

$$M = Bq,$$

$$N = Cr.$$

Ces équations expriment une propriété fort remarquable des axes principaux.

Supposons en effet que le corps tourne autour de Ox' avec une vitesse de rotation p . Appelons ρ la perpendiculaire abaissée de l'élément dm sur cet axe. On aurait $p\rho$ pour la vitesse de cet élément, $p\rho dm$ pour sa quantité de mouvement et $p\rho^2 dm$ pour le moment de cette quantité de mouvement par rapport à l'axe Ox' . Par conséquent $p \int \rho^2 dm$ serait la somme des moments des quantités de mouvement de tous les éléments du corps, pris par rapport à l'axe Ox' . Mais $\int \rho^2 dm = A$, cette somme serait donc égale à Ap .

Ainsi lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe O , si l'on suppose que la vitesse de rotation autour de l'axe instantanée OI est, à un instant quelconque, égale à ω , la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe principal Ox' est la même que si le corps tournait à cet instant autour de Ox' avec une vitesse $p = \omega \cos \angle x'OI$. Cette propriété appartient exclusivement aux axes principaux.

Lorsqu'aucune force accélératrice n'agit sur le mobile, ou dans le cas de la gravité lorsque le point fixe O est le centre de gravité du corps, on a

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2 \quad (f)$$

k^2 étant une constante. Voyez le traité de mécanique de Poisson n° 414.

Puisque Ap, Bq, Cr sont les moments des quantités de mouvement autour des axes rectangulaires Ox', Oy', Oz' , le premier membre de l'équation (f) est le carré du moment principal. Ainsi cette équation nous apprend que le moment principal est une quantité constante dans le cas dont il s'agit.

On a aussi, dans le même cas,

$$\left. \begin{aligned} Apa + Bqb + Crc &= l, \\ Apa' + Bqb' + Crc' &= l', \\ Apa'' + Bqb'' + Crc'' &= l'' \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

l, l', l'' étant des constantes.

Puisque les moments se projettent comme des droites, on voit que

$$Apa + Bqb + Crc \quad \text{ou} \quad Ap \cos(x'x) + Bq \cos(y'y) + Cr \cos(z'z)$$

est le moment des quantités de mouvement par rapport à l'axe fixe Ox .

De même

$$\begin{aligned} &A p a' + B q b' + C r c' \\ &A p a'' + B q b'' + C r c'' \end{aligned}$$

sont les moments des quantités de mouvement par rapport aux axes fixes Oy , et Oz .

Les équations (h) nous apprennent donc que ces sommes sont constantes dans le cas qui nous occupe.

En désignant par Om l'axe principal on aura

$$\cos mOx = \frac{l}{k}, \quad \cos mOy = \frac{l'}{k}, \quad \cos mOz = \frac{l''}{k};$$

ainsi l'axe principal est fixe dans l'espace, puisque l , l' , l'' et k sont des constantes.

Si l'on ajoute les carrés des équations (h) et qu'on ait égard aux équations

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \\ ab + a'b' + a''b'' &= 0, & ac + a'c' + a''c'' &= 0, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 &= l^2 + l'^2 + l''^2; \\ \text{donc} \quad k^2 &= l^2 + l'^2 + l''^2. \end{aligned}$$

Cette relation entre les constantes n'est qu'une propriété des projections des lignes droites. Car si l'on représente Ap , Bq , Cr par des droites prises, à partir de l'origine sur Ox' , Oy' , Oz' , en ayant égard aux signes, la quantité k sera représentée par la diagonale du parallélépipède construit sur ces droites, et la quantité l sera représentée par la somme algébrique des projections de ces lignes sur Ox , ou par la projection de la diagonale k . De même les projections de cette diagonale sur Oy et Oz seront l' et l'' . Donc k est aussi la diagonale du parallélépipède construit sur l , l' et l'' et l'on doit avoir

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = k^2.$$

49. On a aussi dans le cas dont nous parlons

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

h étant une constante.

Pour savoir ce que signifie cette équation, nous l'écrivons ainsi :

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \frac{Ap \cdot p + Bq \cdot q + Cr \cdot r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = h \quad . \quad . \quad . \quad (e')$$

Rappelons-nous que OI étant l'axe instantanée, on a

$$\cos IOx' = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \cos IOy' = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \cos IOz' = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

Ap étant le moment des quantités de mouvement autour de l'axe principal Ox' , la quan-

tité $\frac{Ap \cdot p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$ est donc la projection de ce moment sur l'axe instantanée.

De même $\frac{Bq.q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, $\frac{Cr.r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, sont les projections, sur l'axe instantanée, des moments des quantités de mouvement relatifs à Oy' et à Oz' .

L'équation (e') signifie donc que la somme des moments des quantités de mouvement, autour de l'axe instantanée, multipliée par la vitesse de rotation $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ autour de ce même axe, est une quantité constante dans le cas en question.

Si l'on fait pour abréger $\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \omega$ et que l'on nomme π la perpendiculaire abaissée de l'élément dm sur l'axe instantanée, l'intégrale $\int \omega \pi dm \times \pi$ ou $\int \omega \pi^2 dm$, étendue au corps entier, exprimera la somme des moments des quantités de mouvements autour de l'axe instantanée.

Le produit de cette somme par la vitesse de rotation ω sera

$$\omega \int \omega \pi^2 dm \text{ ou } \int \omega^2 \pi^2 dm, \text{ et d'après l'équation (e')}$$

$$\text{on a } \int \omega^2 \pi^2 dm = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Mais $\omega \pi$ est la vitesse réelle de l'élément dm , puisque le corps tourne effectivement autour de l'axe instantanée; donc $\omega^2 \pi^2 dm$ est la *force vive* de cet élément, par conséquent l'équation.

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$$

signifie encore que la somme des forces vives est constante dans le cas qui nous occupe.

Nous pouvons encore retrouver cette signification de la quantité $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ d'après les expressions

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx',$$

qui sont les composantes de la vitesse de l'élément dm selon les axes Ox' , Oy' , Oz' .

Le carré de la vitesse de cet élément est donc

$$(qz' - ry')^2 + (rx' - pz')^2 + (py' - qx')^2.$$

En multipliant ce carré par dm on aura la force vive de l'élément dm et en intégrant dans toute l'étendue du mobile, on aura la somme des forces vives.

En développant, multipliant chaque terme par dm , puis intégrant et supprimant les termes affectés de $\int x'y'dm$, $\int x'z'dm$, $\int y'z'dm$, qui sont nuls, on trouve

$$p^2 \int (y'^2 + z'^2) dm + q^2 \int (x'^2 + z'^2) dm + r^2 \int (x'^2 + y'^2) dm$$

$$\text{ou } Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

pour la somme des forces vives.

NOTES ET DÉVELOPPEMENTS.

(A) page 3 ligne 4.

La figure 219, planche dernière, présente des exemples de la formule

$$x = 0P = 00'P = a + x'.$$

On a

$$1^{\circ} \quad . \quad . \quad . \quad x = 00'P = 5 + 3 = 8$$

$$2^{\circ} \quad . \quad . \quad . \quad x = 00'P = 5 - 2 = 3$$

$$3^{\circ} \quad . \quad . \quad . \quad x = 00'P = 5 - 8 = -3$$

$$4^{\circ} \quad . \quad . \quad . \quad x = 00'P = -5 + 8 = 3$$

$$5^{\circ} \quad . \quad . \quad . \quad x = 00'P = -5 + 2 = -3$$

$$6^{\circ} \quad . \quad . \quad . \quad x = 00'P = -5 - 3 = -8$$

Si l'on désigne par α la valeur absolue de a , on aura

$$x = \alpha + x',$$

lorsque $0'$ est du côté positif par rapport à 0 , comme dans les trois premiers exemples,

et

$$x = -\alpha + x',$$

lorsque $0'$ est du côté négatif, comme dans les trois derniers exemples.

On se servira, dans les applications, de ces dernières formules qui mettent le signe de $00'$ en évidence.

(Il peut arriver qu'on veuille compter les x' positives en sens contraire des x positives. Alors, après avoir substitué dans l'équation de la courbe, pour x sa valeur $\alpha + x'$ ou $-\alpha + x'$, il faudra changer, dans cette équation, le signe de x' . Il est clair qu'on arriverait au même résultat en faisant immédiatement usage des formules $x = \alpha - x'$ et $x = -\alpha - x'$.)

Pour faire une application, considérons le thermomètre de Fahrenheit (fig. 220) et proposons-nous d'exprimer les degrés à partir du point $0'$, marqué $+32$, qui correspond au zéro des autres thermomètres.

Si l'on suppose par exemple, $0A = 50$, $0B = 20$, $0C = -10$, on aura

$$0'A = 0'0A = -32 + 50 = 18$$

$$0'B = 0'0B = -32 + 20 = -12$$

$$0'C = 0'0C = -32 + 10 = -42$$

Remarquons que si l'on change l'ordre des termes et qu'on écrive par exemple $50 - 32 = 18$, le résultat sera numériquement le même; mais l'opération ne pourra plus être représentée par un tracé continu d'une manière naturelle. Car $50 - 32$ signifierait alors $O'SA$; or ce tracé n'est point naturel, le point S (marqué 82) étant étranger à la question. Ainsi à proprement parler ce n'est pas ici 32 qu'il faut retrancher de 50, mais c'est plutôt 50 qu'il faut ajouter à -32 .

Puisque nous avons introduit ici le thermomètre de Fahrenheit, nous ajouterons qu'après avoir transporté l'origine au point O' (marqué $+32$), les degrés comptés à partir de cette nouvelle origine doivent être multipliés par $\frac{5}{9}$ pour avoir ceux du thermomètre centigrade.

Si l'on voulait au contraire passer du thermomètre centigrade au thermomètre de Fahrenheit, on multiplierait les degrés centigrades par $\frac{9}{5}$ et l'on aurait les degrés de Fahrenheit correspondants, mais comptés à partir du zéro centigrade, c'est-à-dire du point O' . Pour transporter l'origine au point O , qui est le zéro Fahrenheit, on aurait, par exemple en supposant $O'A = 18$, $O'B = -12$, $O'C = -42$,

$$\begin{aligned} OA &= OO'A = 32 + 18 = 50 \\ OB &= OO'B = 32 - 12 = 20 \\ OC &= OO'C = 32 - 42 = -10 \end{aligned}$$

(B) page 5, ligne 9 en remontant, ajoutez :

Deux rayons vecteurs positifs, répondant respectivement à des arcs directeurs ω et $\omega + 180^\circ$, sont deux distances comptées en apparence sur une même droite, en sens contraire l'une de l'autre et qui cependant sont toutes deux positives. Mais ces rayons vecteurs sont réellement comptés sur un axe tournant dans deux positions opposées; c'est-à-dire sur deux droites différentes et telles que le sens positif de l'une est, dans ce cas particulier, directement opposé au sens positif de l'autre.

On peut au contraire avoir deux distances comptées en apparence sur la même droite dans le même sens et dont cependant l'une est positive et l'autre négative. Par exemple $\sec a$ et $\sec(a + 180^\circ)$; mais elles sont réellement comptées sur deux droites différentes; savoir $\sec a$ dans le sens positif de l'axe tournant correspondant à l'arc directeur a et $\sec(a + 180^\circ)$ dans le sens négatif de l'axe tournant correspondant à l'arc directeur $a + 180^\circ$.

(C) N° 18 à la fin, page 25, ligne 4, ajoutez :

Il ne sera pas inutile de donner ici la formule qui exprime le cosinus de l'angle de deux droites d'après les équations de ses projections sur deux des plans coordonnés. Soient donc

$$\begin{cases} x = az + g \\ y = bz + h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = a'z + g' \\ y = b'z + h' \end{cases}$$

les équations de ces droites. Par l'origine menons-leur des parallèles NOM et N'OM', (fig. 221, planche dernière) dont les équations seront

$$\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = a'z \\ y = b'z \end{cases}$$

et qui feront entre elles le même angle que les premières. Comme il faut choisir entre deux angles supplémentaires, nous conviendrons de prendre l'angle MOM' formé par celles des branches qui font avec les z positives des angles aigus. Désignant cet angle par V et par $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$, les angles que ces branches font avec les côtés positifs des axes, nous aurons

$$\cos V = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

en ayant égard aux signes des sept cosinus.

Prenons OM=1 (fig. 222 et 223, planche dernière) et achevons le parallélépipède dont OM est la diagonale et qui s'appuie sur les axes. Prenons aussi sur les z positives, OE=1 et menons EF parallèle à l'axe des x et terminée à la droite OD prolongée.

On aura la proportion

$$\text{EF} : \text{OE} :: \text{CD} : \text{OC}.$$

C'est ce que font voir nos figures, et ce qu'on verrait aussi sur les deux autres figures que l'on pourrait encore construire; car OM peut être dirigée dans l'un des quatre angles trièdres formés par les axes autour de l'origine, du côté des z positives.

Il faut remarquer que EF et CD sont positives lorsqu'elles sont dirigées dans le sens des x positives, et négatives dans le cas contraire. OE et OC sont toujours positives comme étant toujours dirigées dans le sens positif des z .

Si l'on fait $z=1$ dans l'équation $x=az$, qui appartient à OD, on aura EF= a , puisque OE=1. D'ailleurs CD=OA= $\cos \alpha$, et OC= $\cos \gamma$.

Substituant ces valeurs dans la proportion ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} a : 1 &:: \cos \alpha : \cos \gamma \\ \text{d'où} \quad \cos \alpha &= a \cos \gamma. \end{aligned}$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\cos \beta = b \cos \gamma.$$

Si l'on met ces valeurs dans

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1, & \text{il viendra} \\ a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma &= 1, & \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

Nous prenons le radical avec le signe $+$, parce que nous savons que l'angle γ est aigu.

On a donc

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

On trouverait de même, par rapport à la droite OM' ,

$$\cos \gamma' = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}, \quad \cos \alpha' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}, \quad \cos \beta' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

Mettant pour $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ leurs valeurs dans la formule

$$\cos V = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma', \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

il vient enfin

$$\cos V = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Tel est le cosinus de l'angle formé par celles des branches de nos droites qui font avec Oz des angles aigus.

Cette démonstration rend sensible le jeu des signes, et comme elle s'appuie sur la formule (1), la formule (2) se trouve démontrée aussi généralement que la première. Ces formules sont souvent démontrées d'une manière qui ne met pas en évidence le jeu des signes, de sorte que, pour les admettre comme générales, il faut se reposer sur la généralité même de l'algèbre.

(D) page 93, ligne 18, ajoutez :

On peut, à la rigueur, donner une signification géométrique au problème du plan maximum des aires.

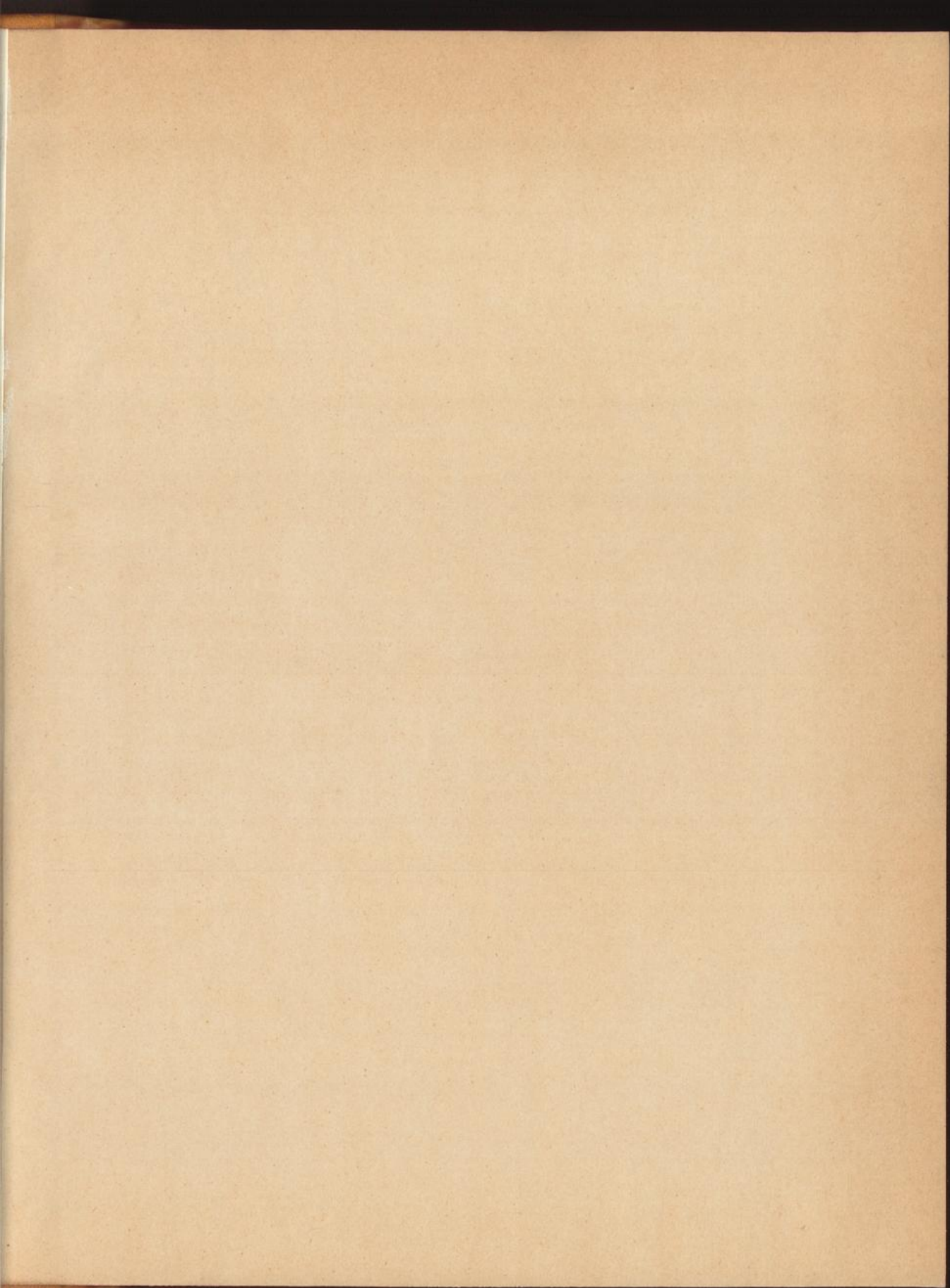
Supposons qu'on ait un certain nombre d'aires planes dont les directions dans l'espace soient données et dont chacune ait une face rouge et une face blanche. Elevons à chacune d'elles une perpendiculaire *rouge* du côté de sa face rouge et une perpendiculaire *blanche* du côté de sa face blanche. Supposons aussi que le plan de projection ait une face rouge et une face blanche, une perpendiculaire rouge et une perpendiculaire blanche. Convenons que la projection d'une aire sera réputée rouge lorsque sa perpendiculaire rouge fera un angle aigu avec la perpendiculaire rouge du plan de projection, et qu'elle sera réputée blanche lorsque cet angle sera obtus.

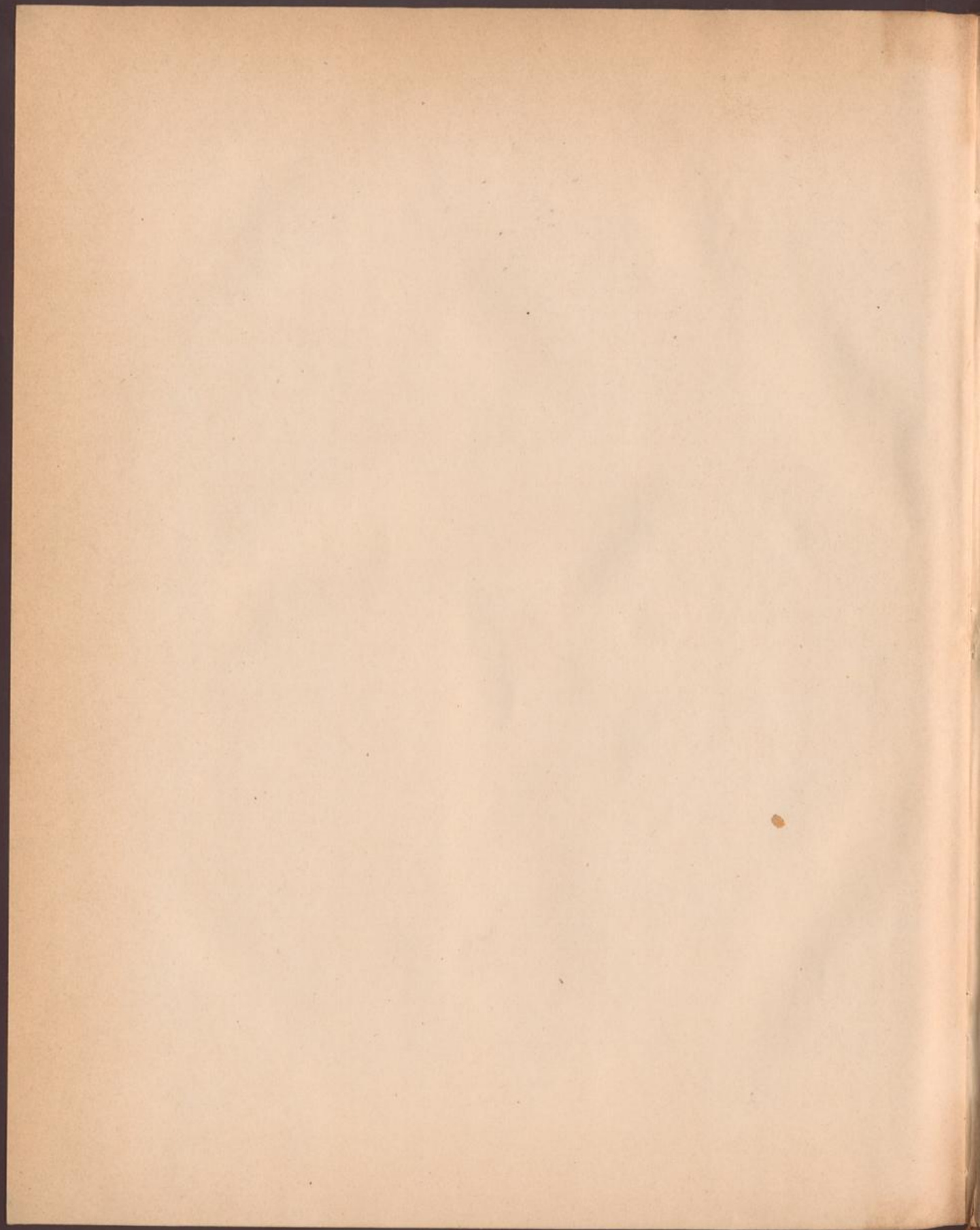
Cela posé, le plan de projection sera dans la position correspondante au maximum lorsque la somme des projections rouges diffèrera de la somme des projections blanches plus que pour toute autre position de ce plan. Pour tout plan de projection perpendiculaire à celui de la projection maxima, la somme des projections rouges sera précisément égale à la somme des projections blanches, et en général pour un plan incliné sur celui de la projection maxima, la différence entre les deux sommes sera égale à la différence maxima multipliée par le cosinus de l'inclinaison.

Afin de ne laisser subsister aucune incertitude, nous ajouterons que pour déterminer l'angle formé par la perpendiculaire rouge d'une aire avec la perpendiculaire rouge du plan de projection, il suffit de prendre un point quelconque de l'espace et de mener, à partir de ce point, deux droites respectivement parallèles aux premières et de même sens. L'angle de ces droites sera celui des perpendiculaires. Le sens d'une perpendiculaire se détermine en partant du pied de cette perpendiculaire et en s'éloignant du plan.

Si maintenant l'on veut considérer de nouveau le problème comme appartenant à la mécanique, il suffit de supposer que chacune de nos aires planes contient un couple dont l'axe est la perpendiculaire rouge. Le plan de la projection maxima sera celui du *couple résultant*.

Lacroix, dans son *Traité de calcul différentiel* in-4° (Tome I, page 525, 2^{me} édition), résout le problème du plan maximum des aires par la méthode ordinaire des maxima et minima ; mais il est à remarquer qu'il l'énonce comme s'il s'agissait des valeurs absolues des projections, abstraction faite de leurs signes.





ETH Zürich
Bibliothek

7

Abt.

T

U

Band

Teil

Aufl.

E

S

7891

1

%*

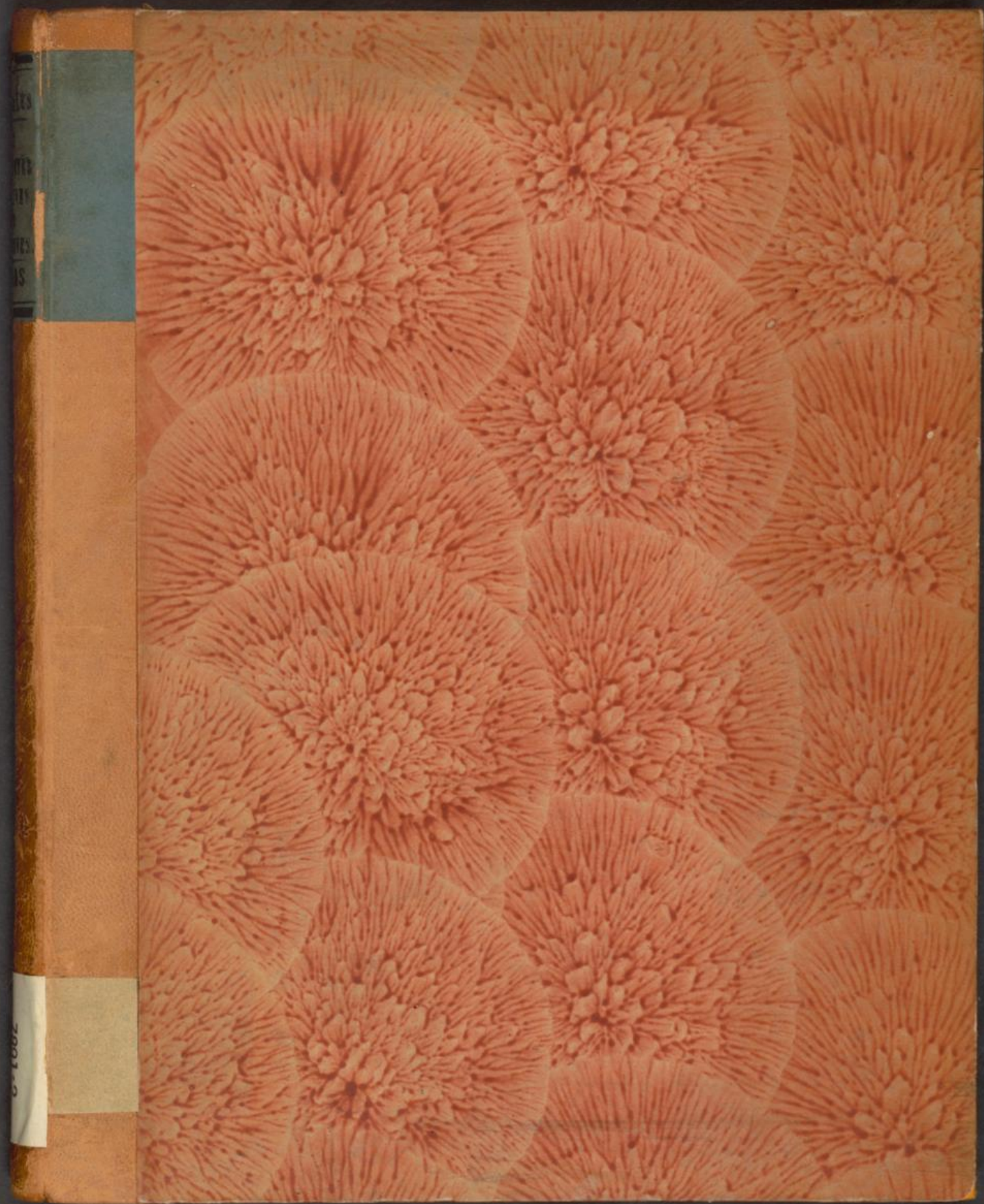
12/72



BUCHKARTE
Bitte nicht herausnehmen!

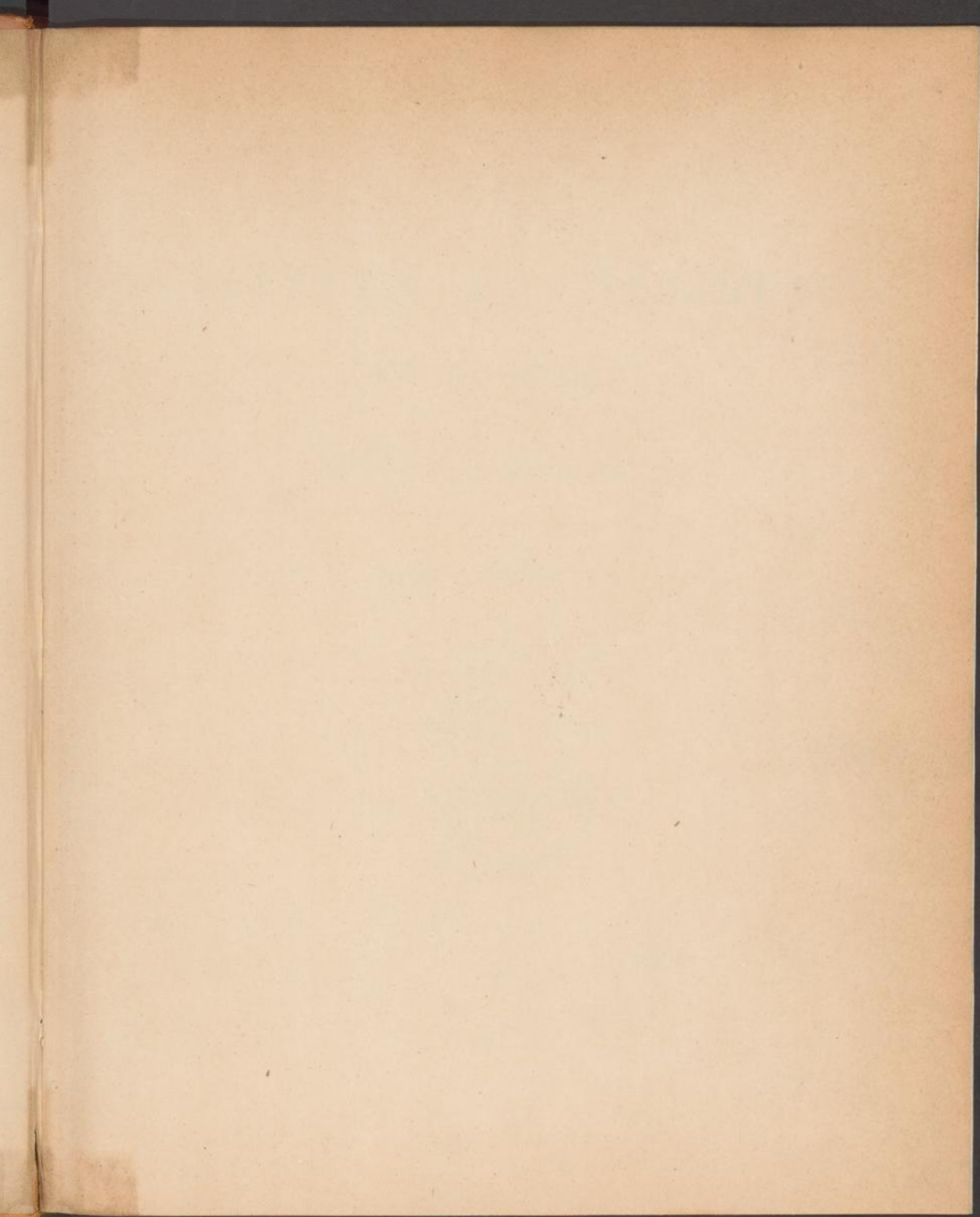
34256





4891 2ar 21574:2
2 7891:2





DES QUANTITÉS POSITIVES ET NÉGATIVES EN GÉOMÉTRIE.

PAR LE C^{te} L.-A. DE POURTALÈS.

Atlas de 27 Planches.



NEUCHÂTEL (Suisse)
JULES GERSTER, LIBRAIRE.

PARIS
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1847.

DES QUANTITÉS
POSITIVES ET NÉGATIVES
EN GÉOMÉTRIE.

PAR M. C^{te} L.-A. DE PONTAÏLES.

Atlas de 27 planches.



7894:2

PARIS
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
15, rue de la Harpe.

VERCHATEL
JULES GERSTER, LIBRAIRE

1847

Fig. 1.

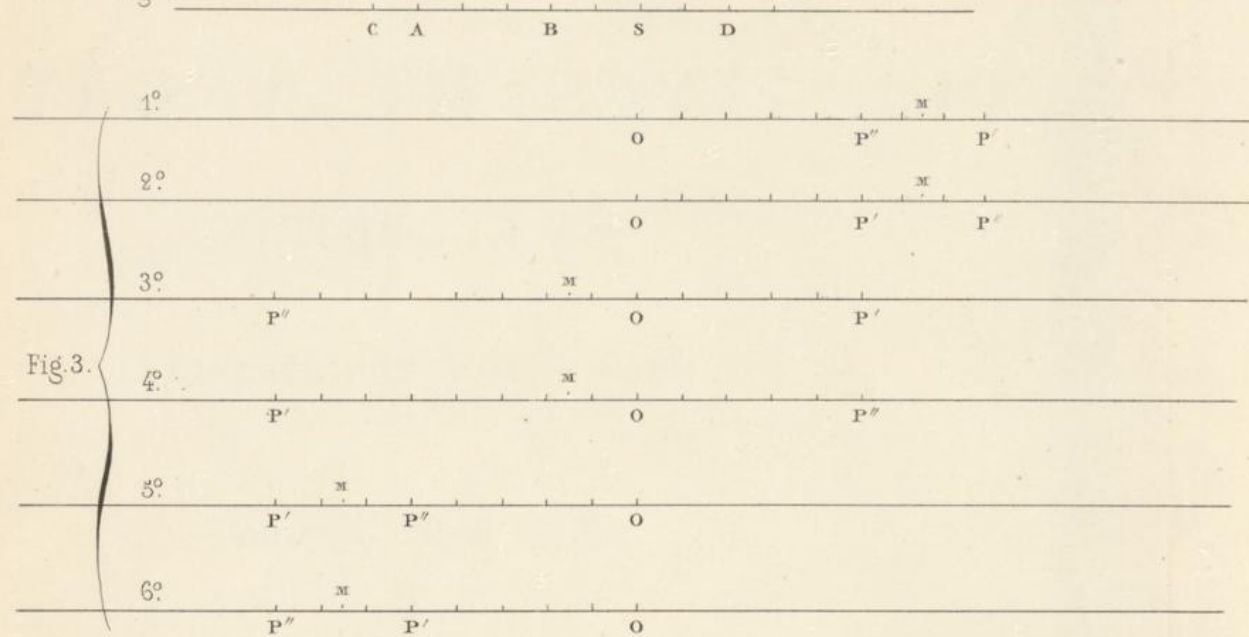


Fig. 3.

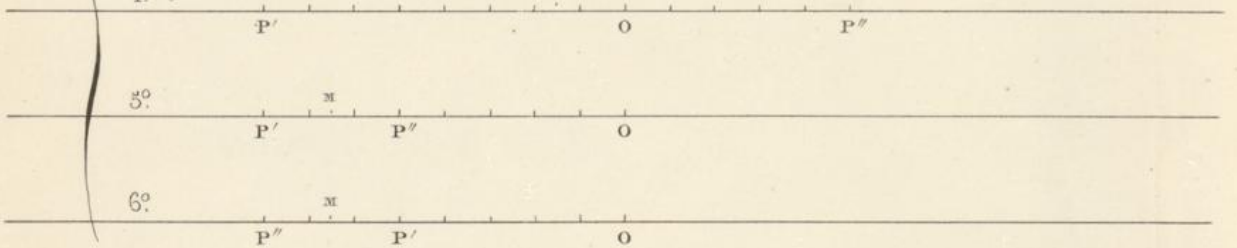


Fig. 5.

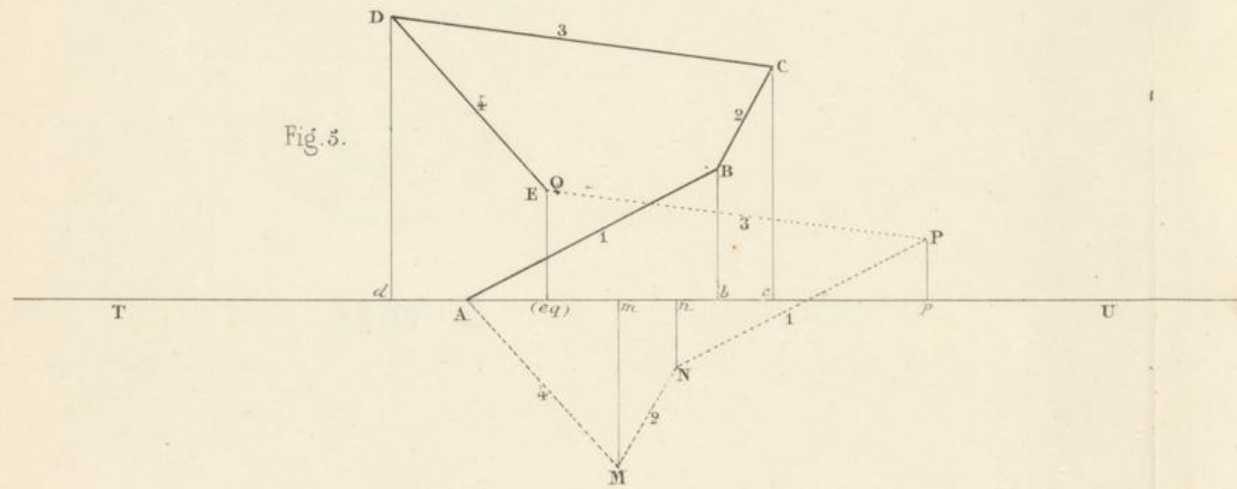


Fig. 2.

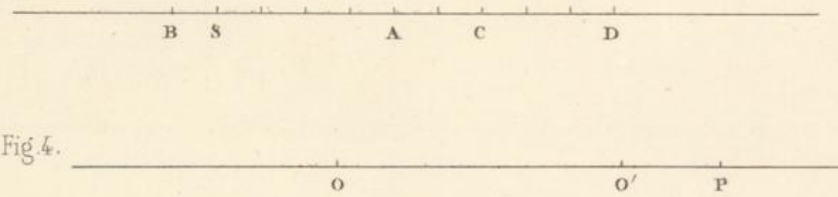


Fig. 4.

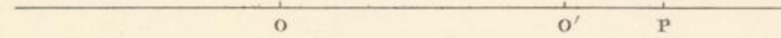


Fig. 6.

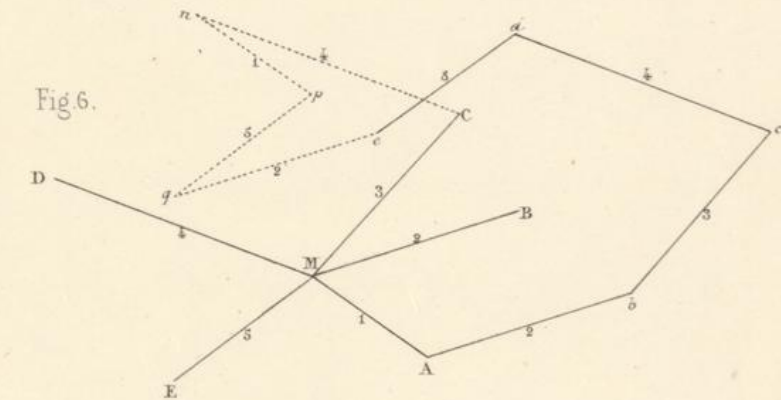


Fig. 7.

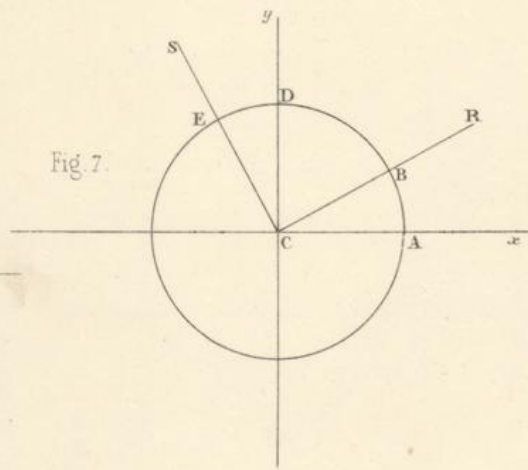
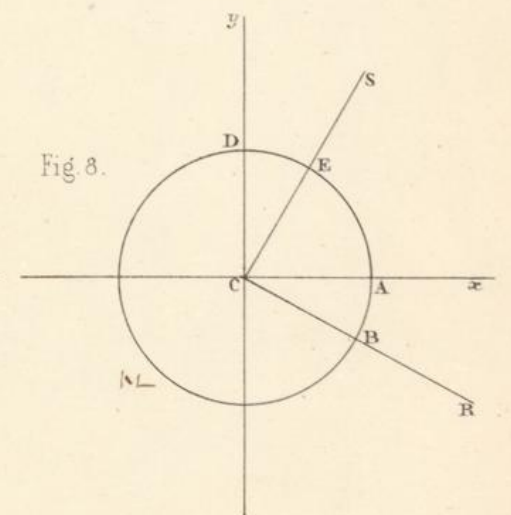


Fig. 8.



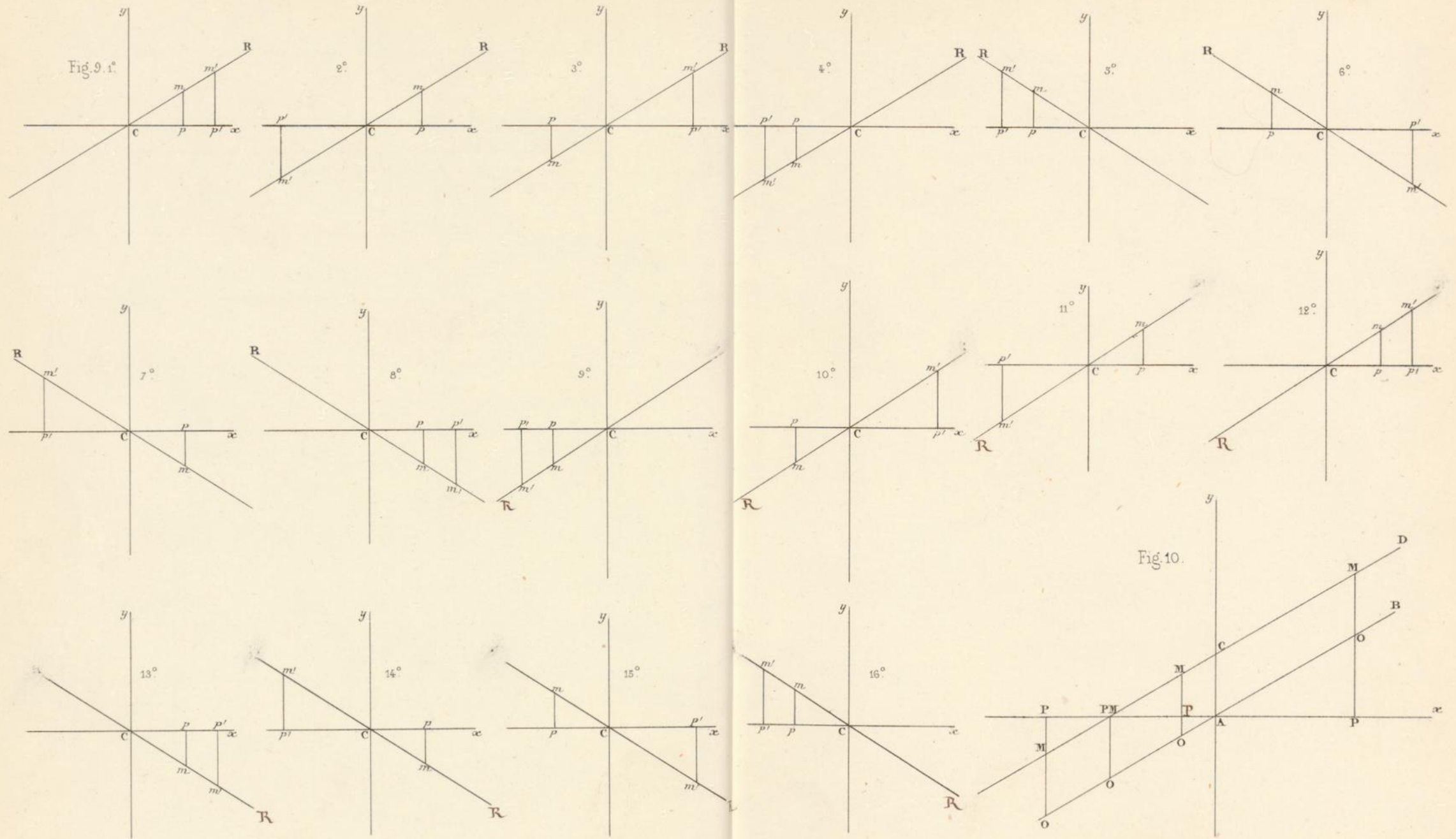


Fig.11.

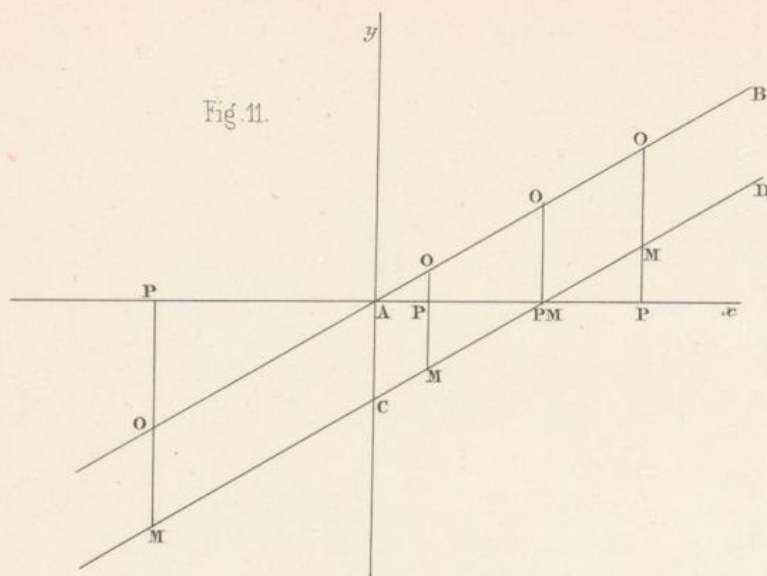


Fig.12.

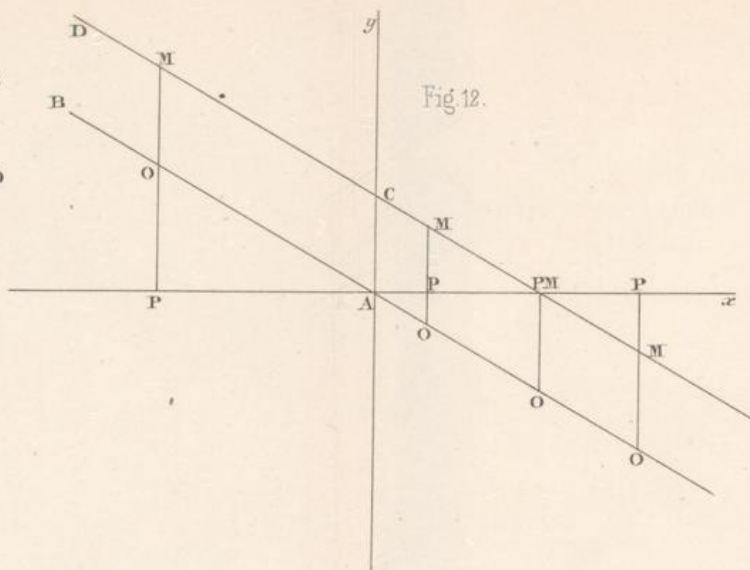


Fig.13.

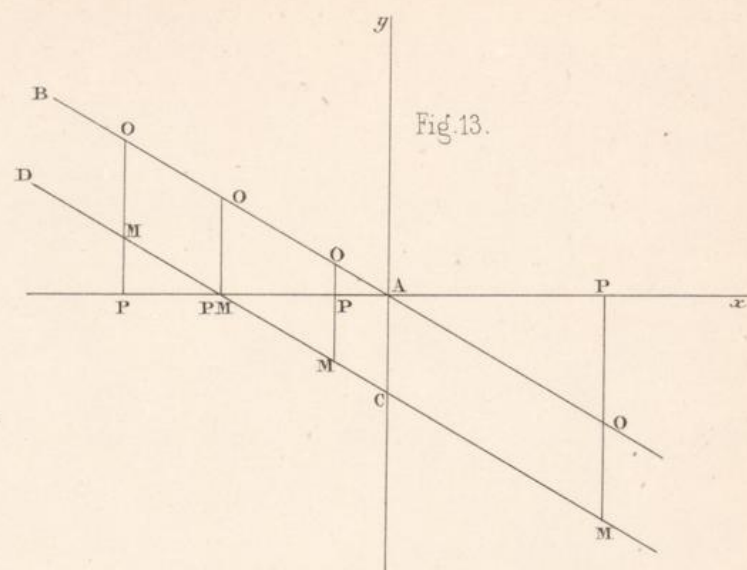


Fig.14.

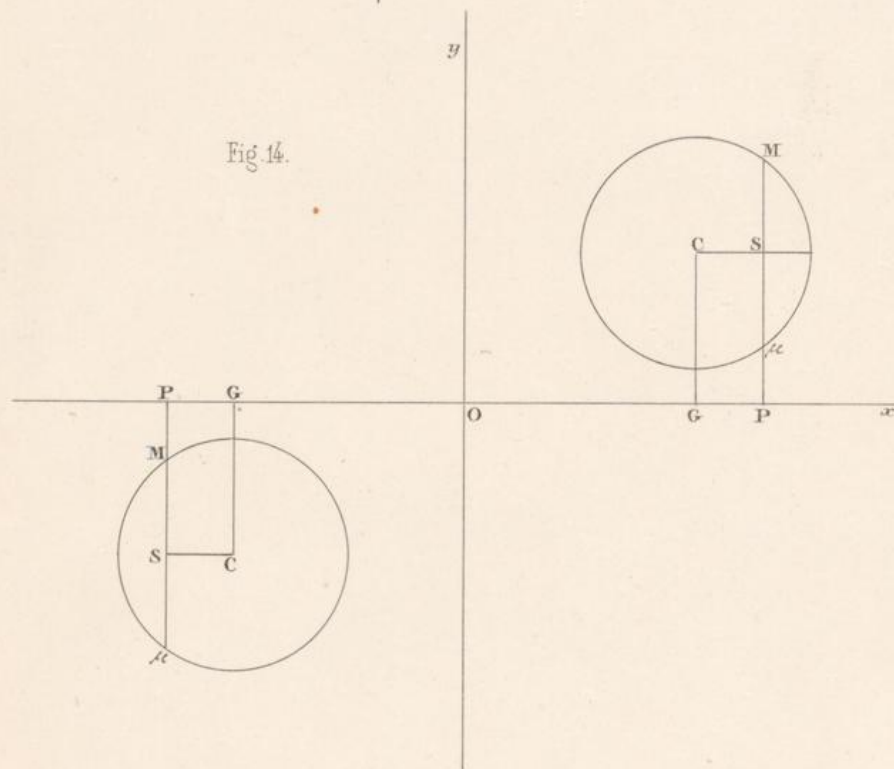


Fig.15.

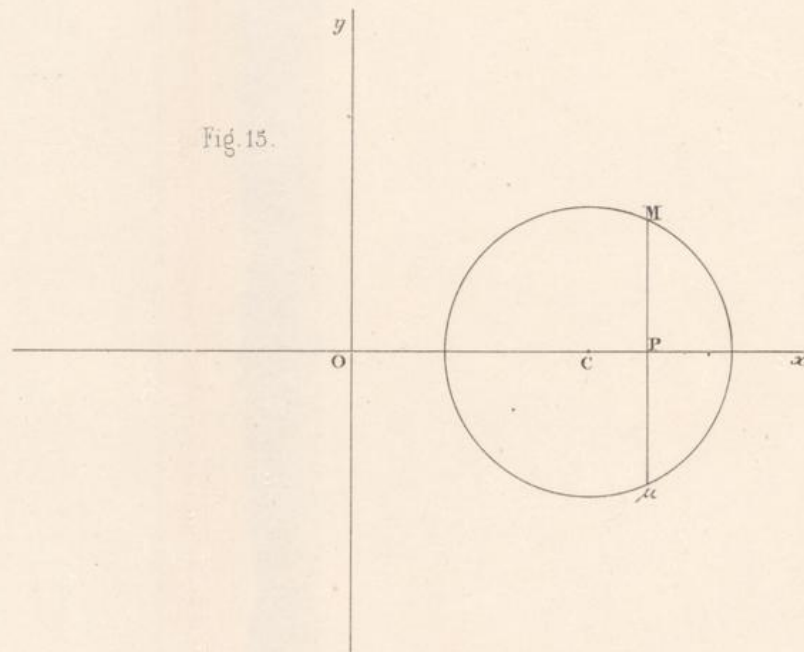


Fig.16.

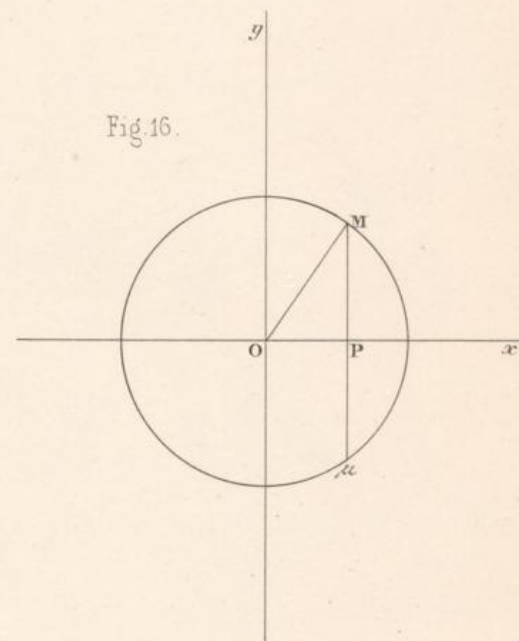


Fig. 17.

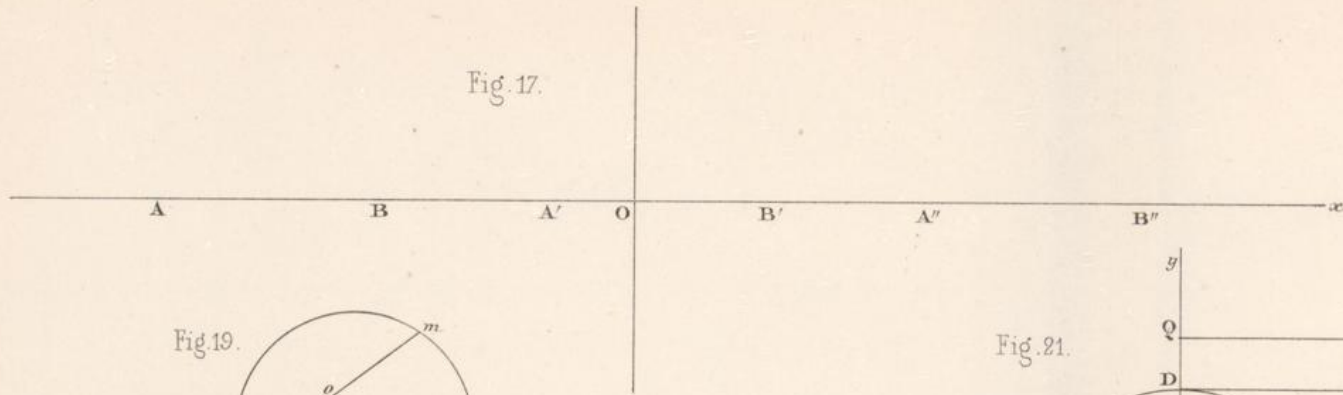


Fig. 18.

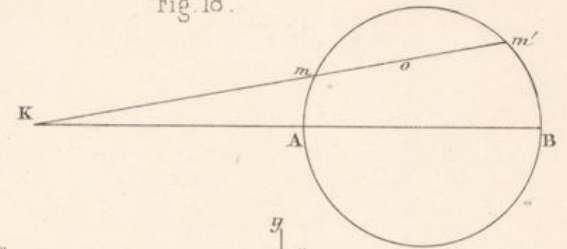


Fig. 19.

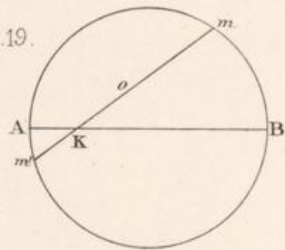


Fig. 21.

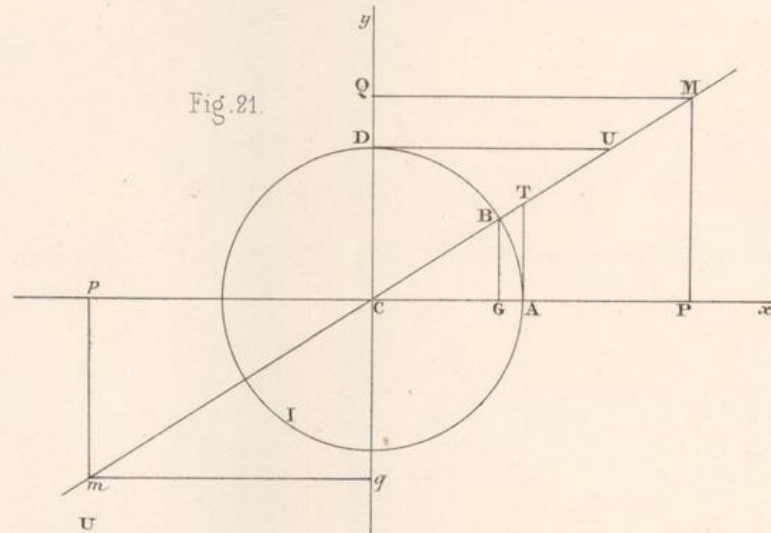


Fig. 22.

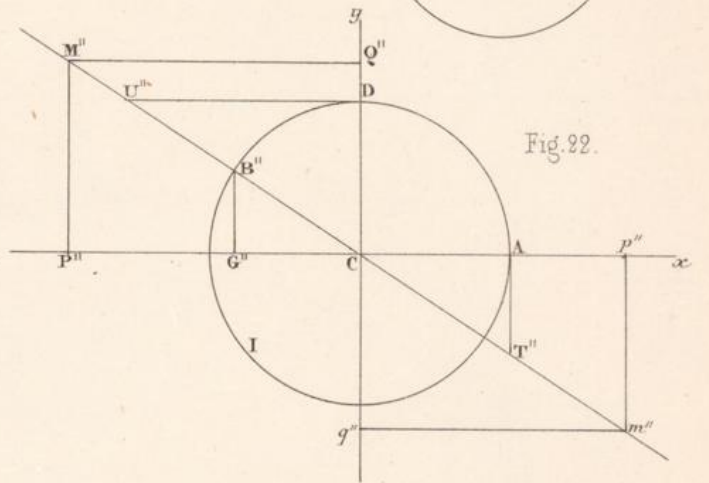


Fig. 20.

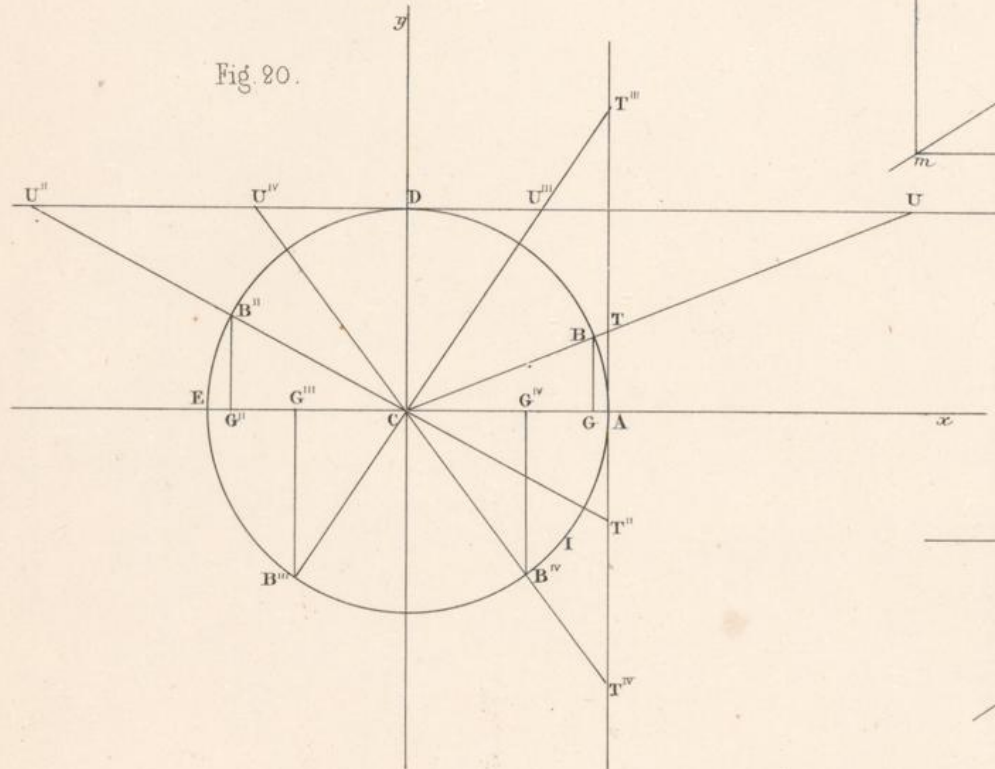


Fig. 23.

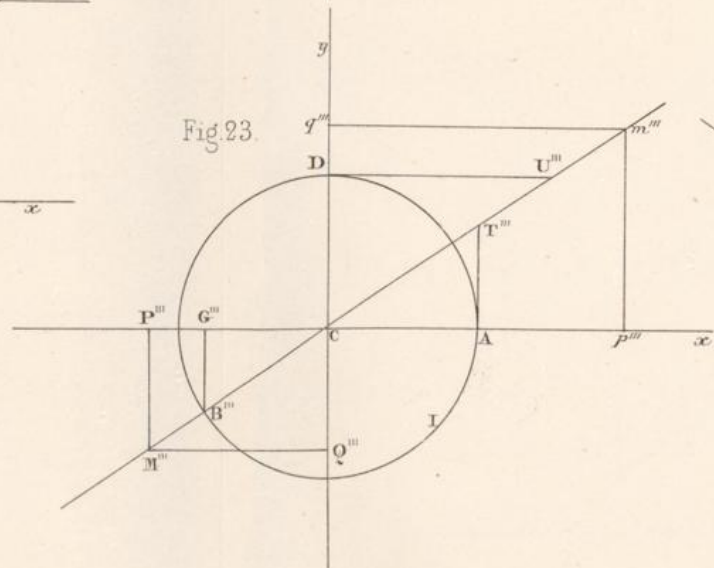


Fig. 24.

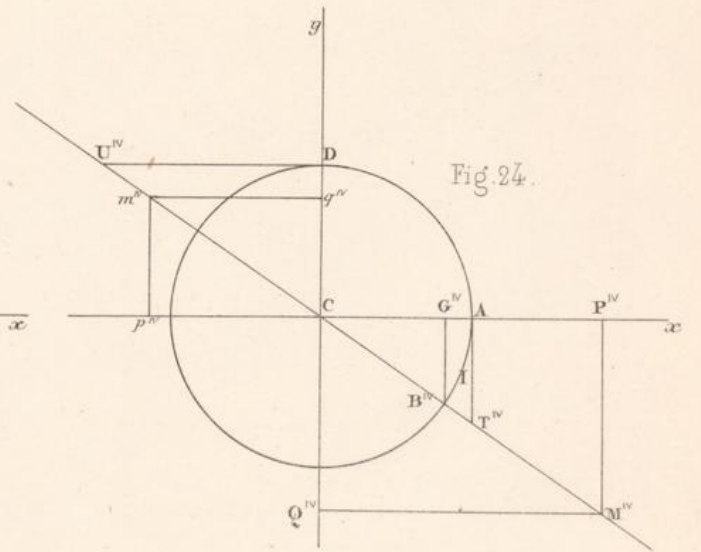


Fig. 25.

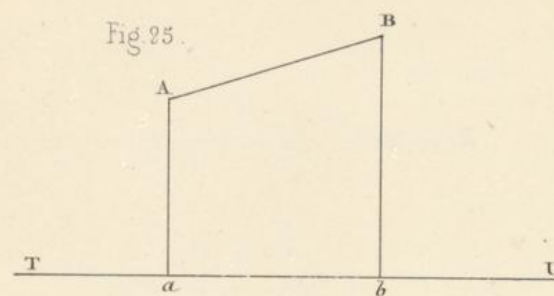


Fig. 26.

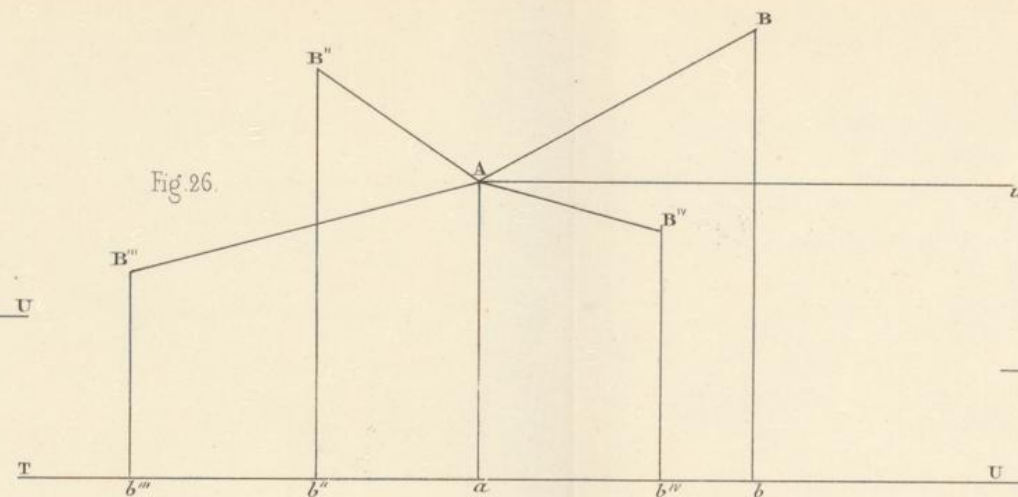


Fig. 29.

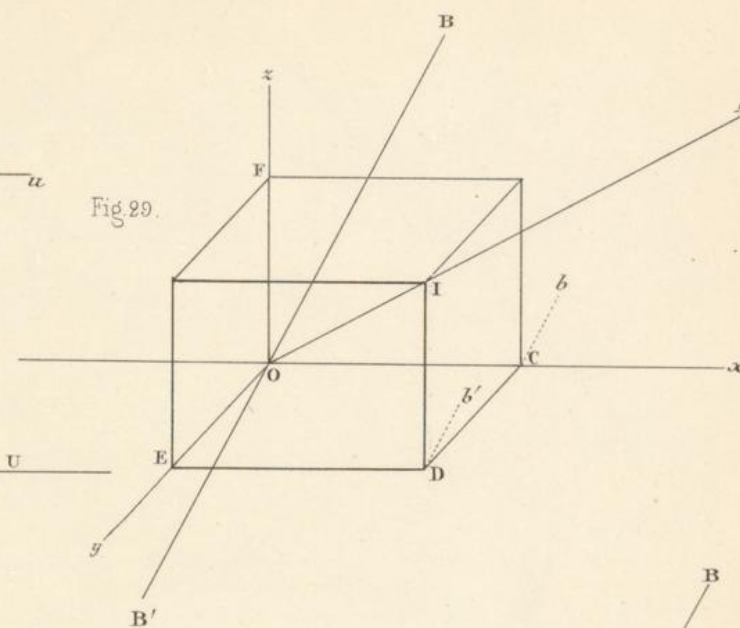


Fig. 27.

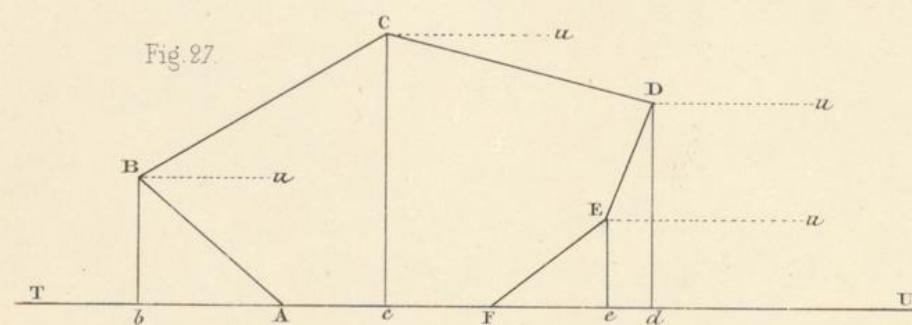


Fig. 28.

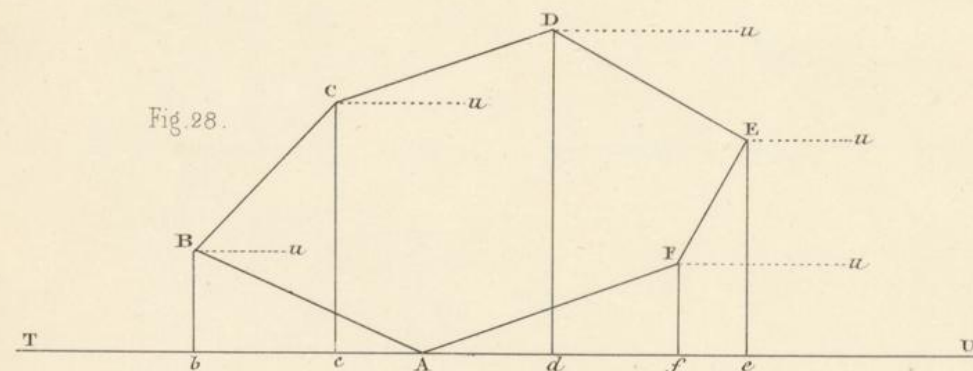


Fig.30.

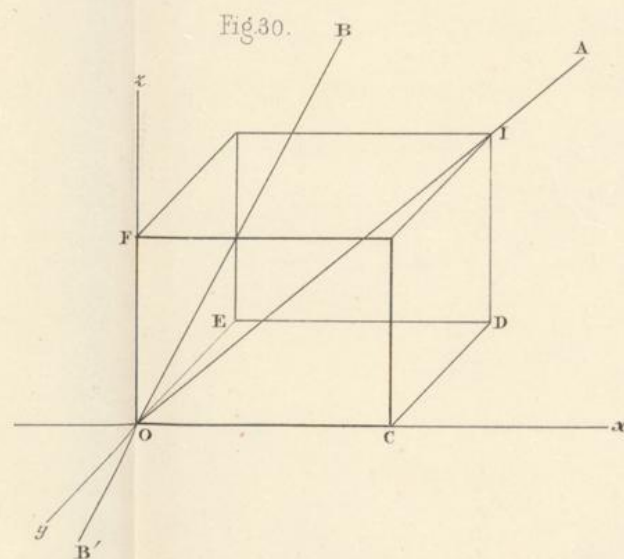


Fig. 31.

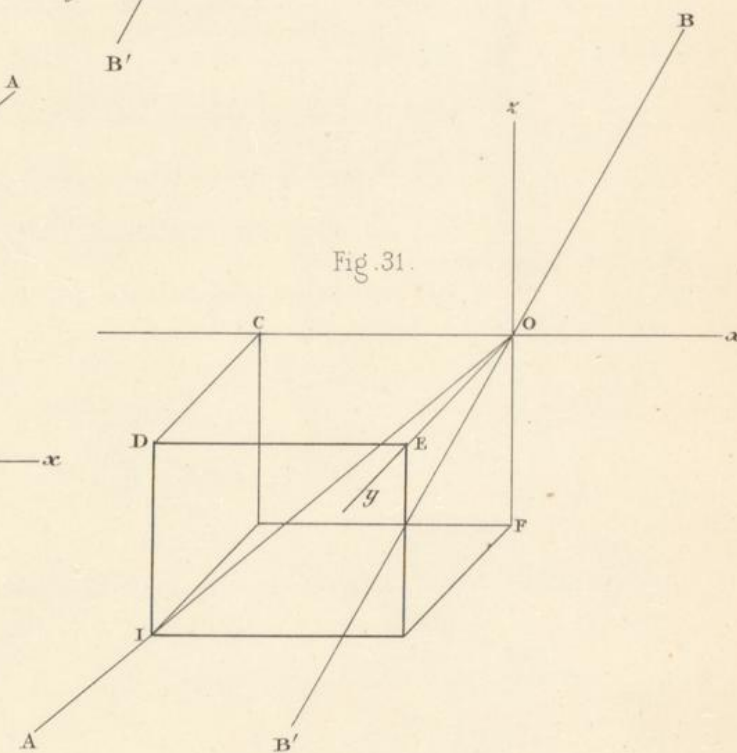


Fig.32.

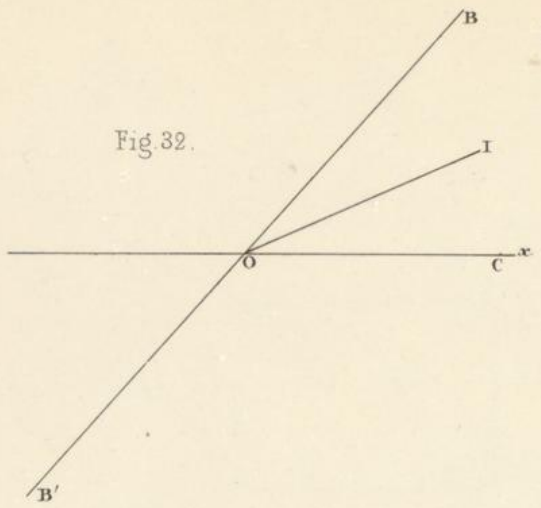


Fig.33.

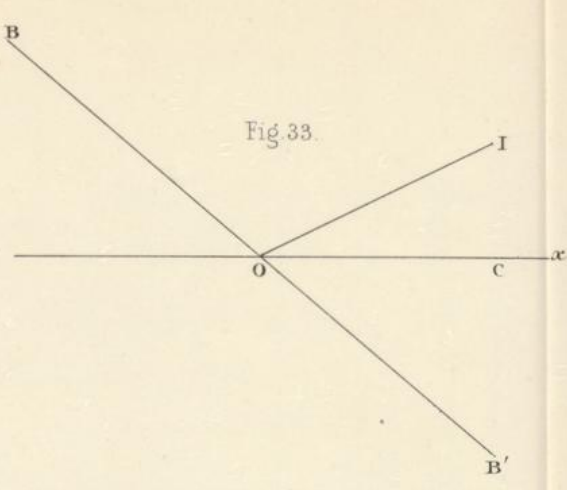


Fig.34.

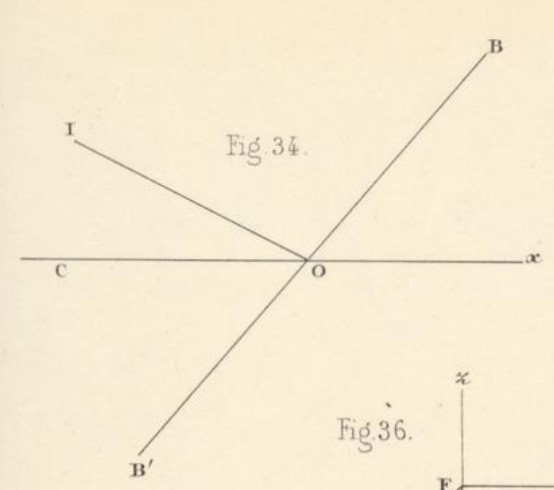


Fig.35.

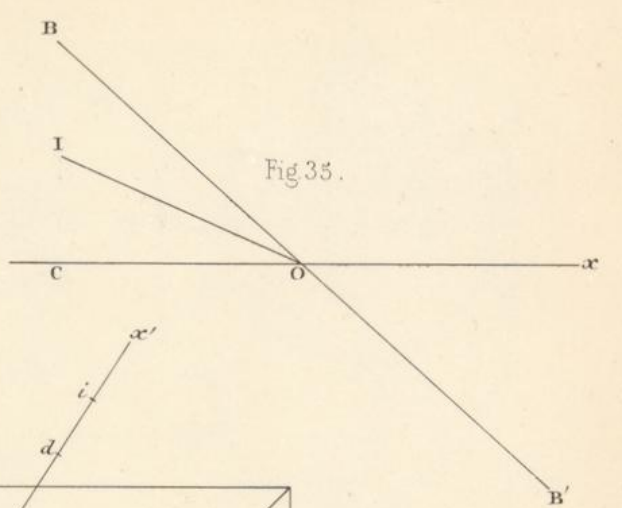


Fig.37.

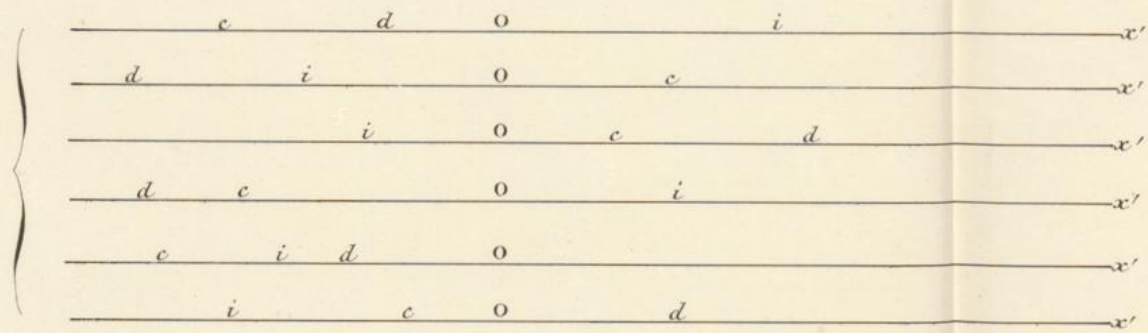


Fig.36.

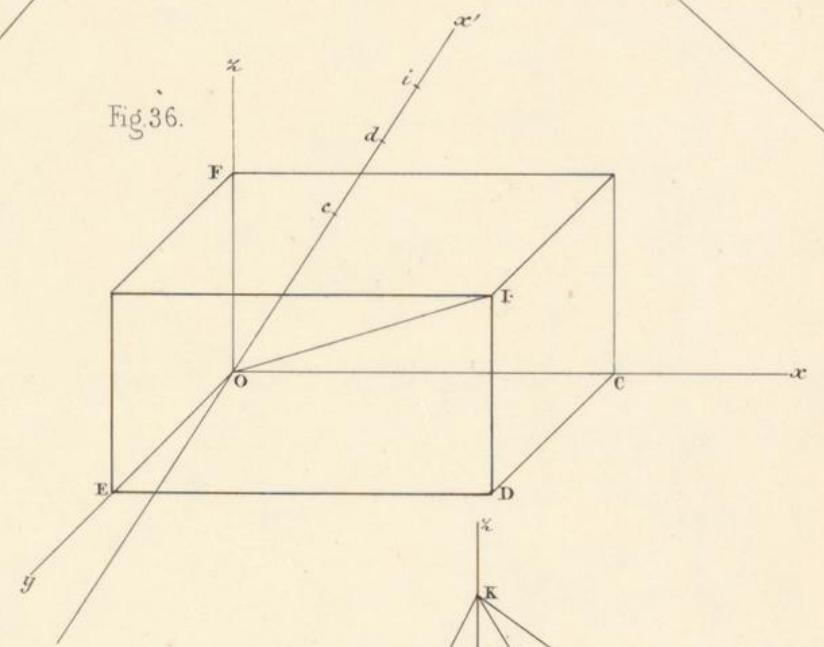


Fig.38.

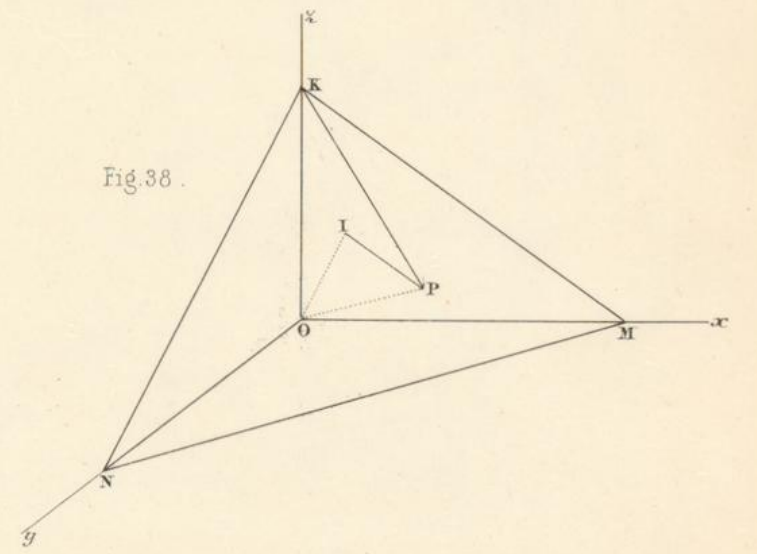


Fig.37^{bis}.

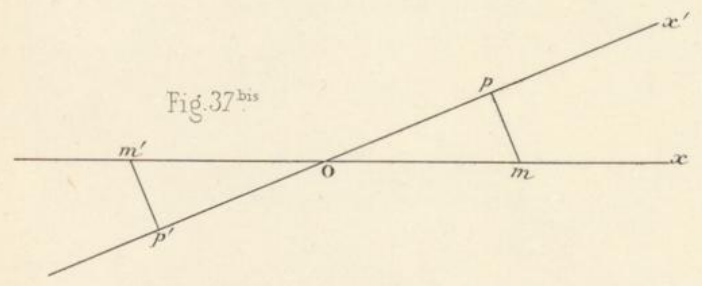
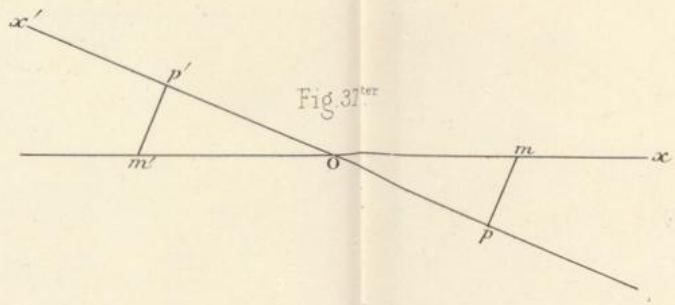


Fig.37^{ter}.



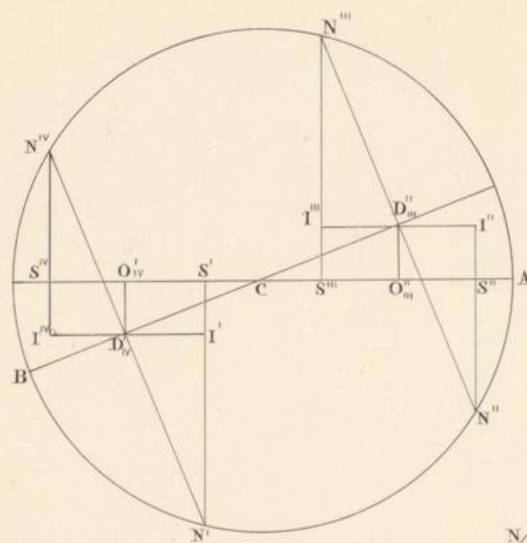


Fig. 47.

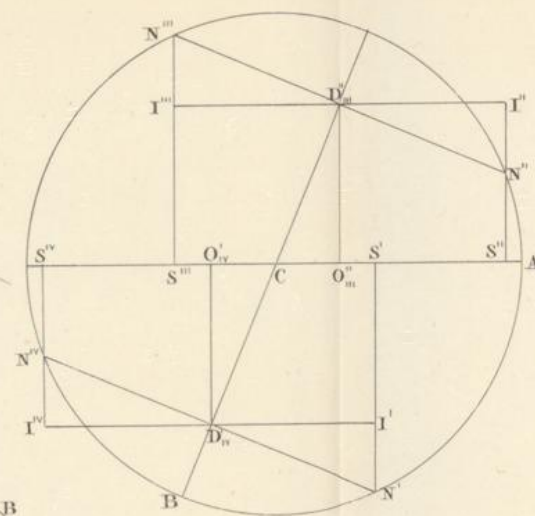


Fig. 48.

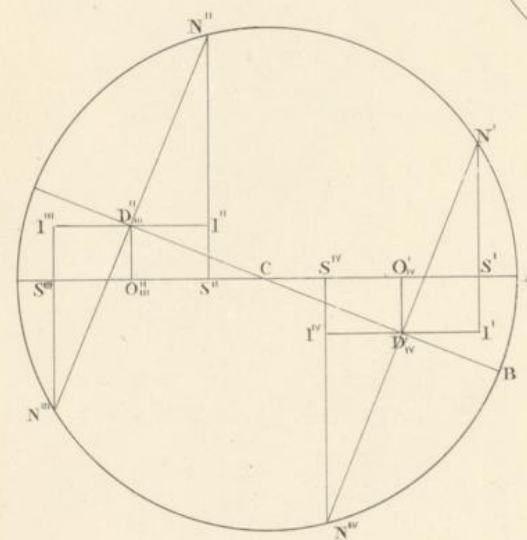


Fig. 49.

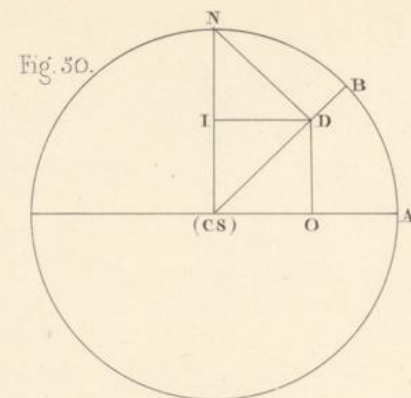
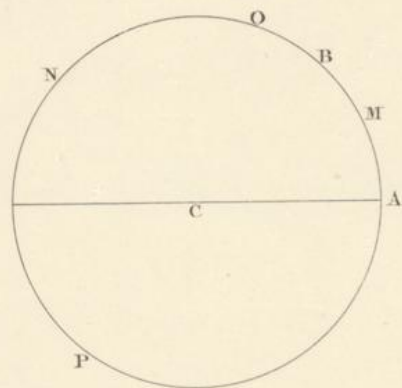


Fig. 50.

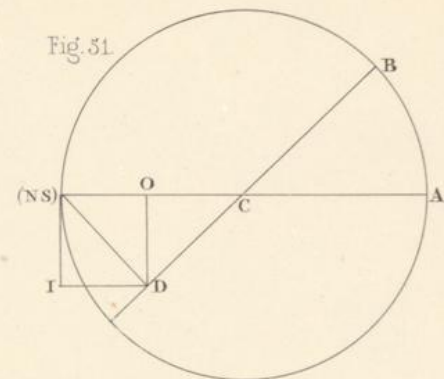


Fig. 51.

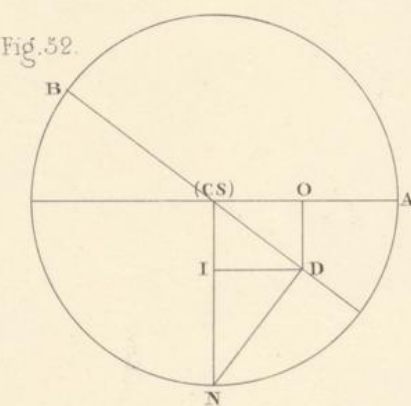


Fig. 52.

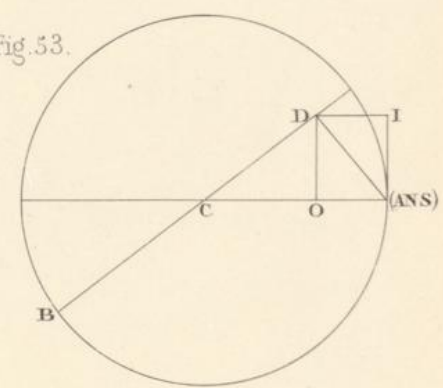


Fig. 53.

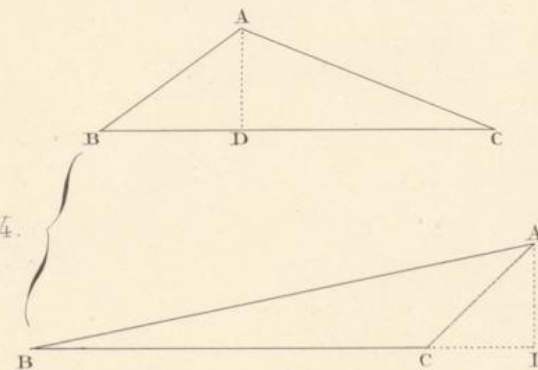


Fig. 54.

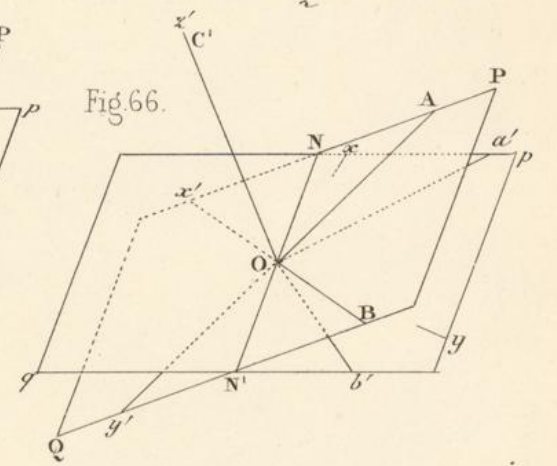
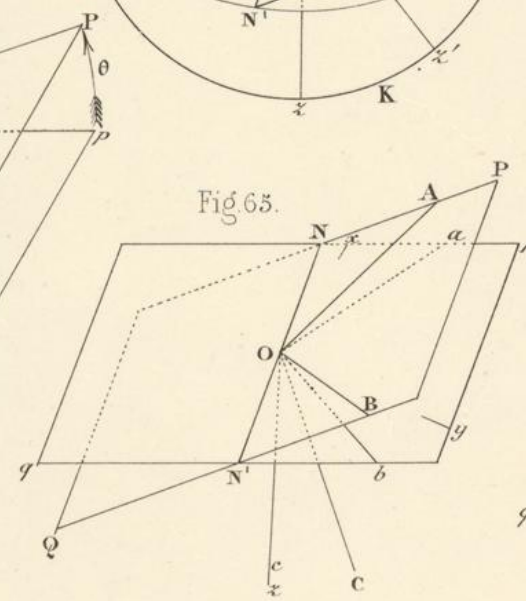
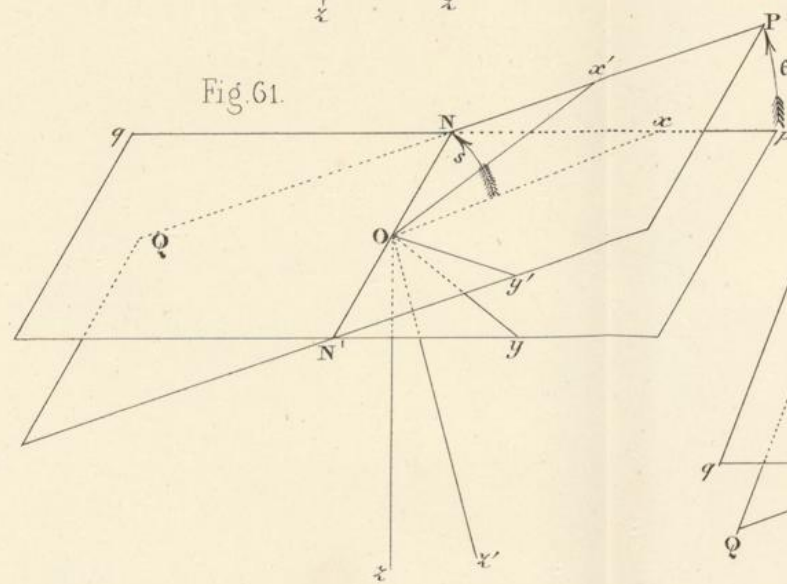
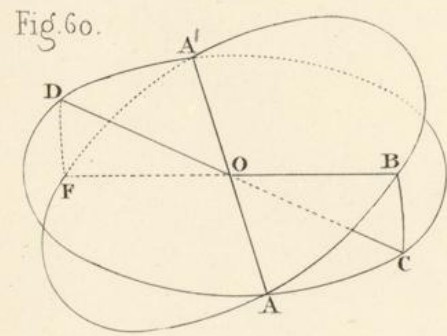
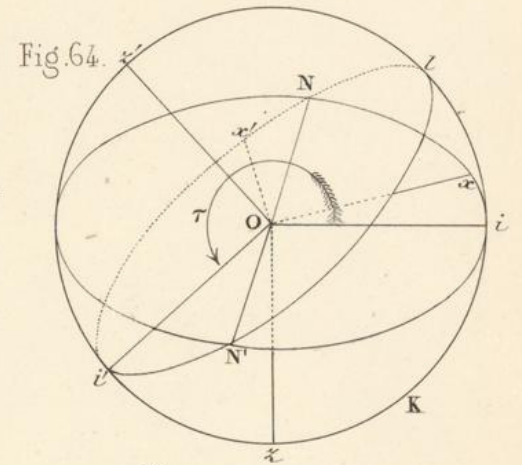
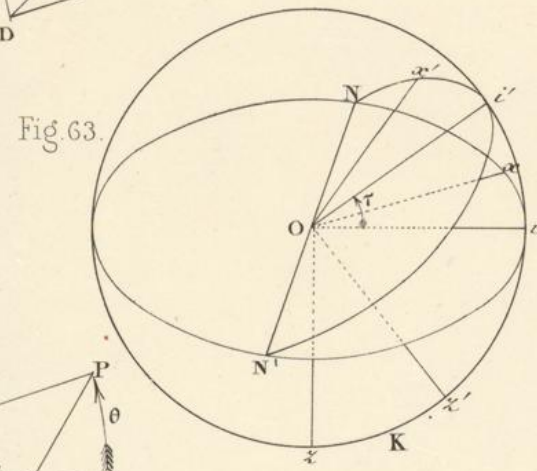
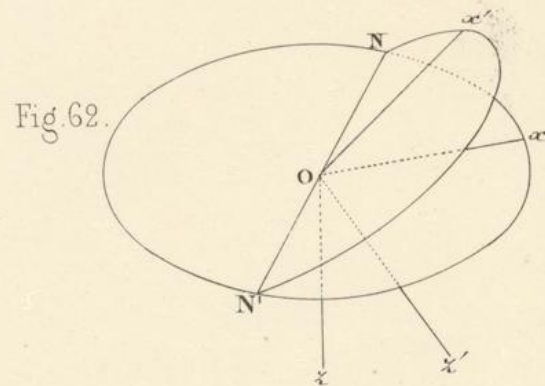
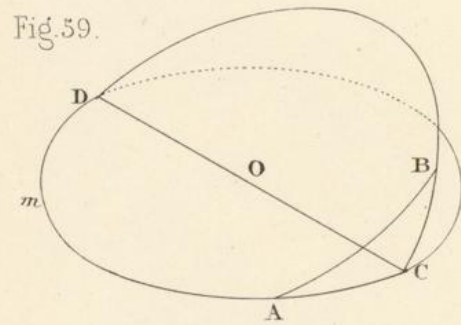
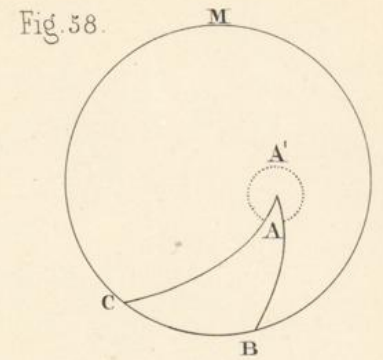
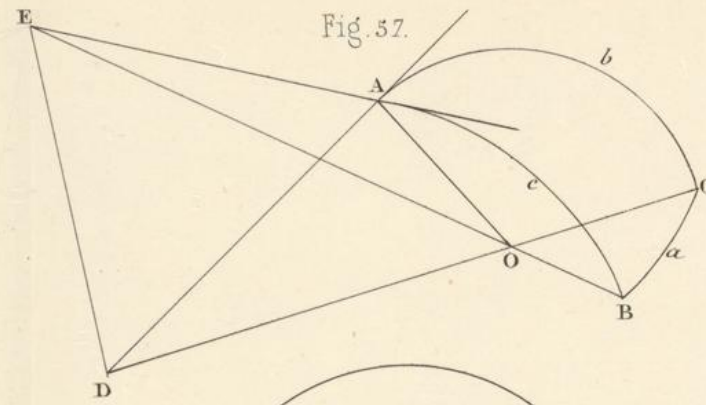
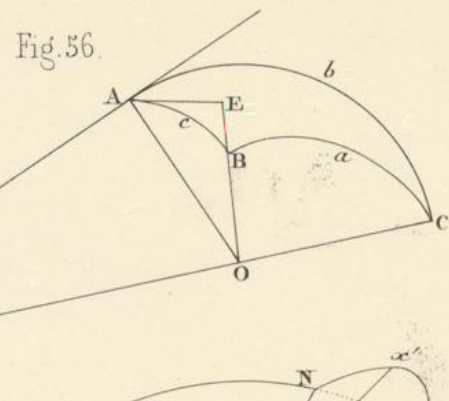
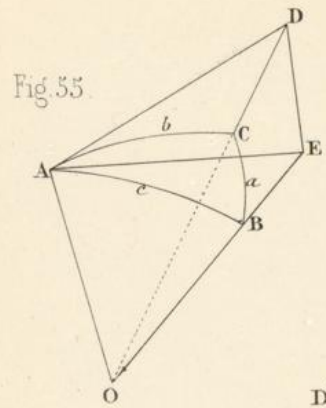


Fig.67.

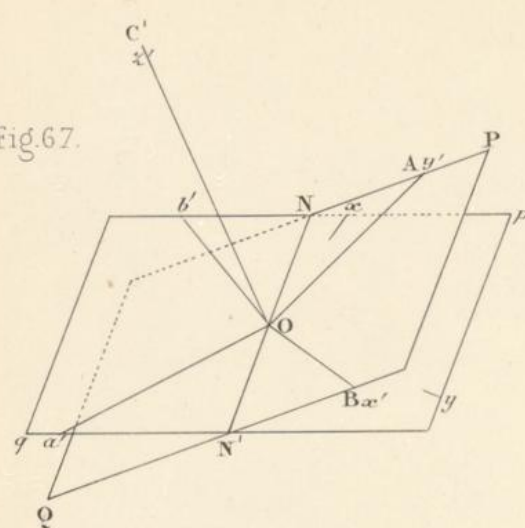


Fig.68

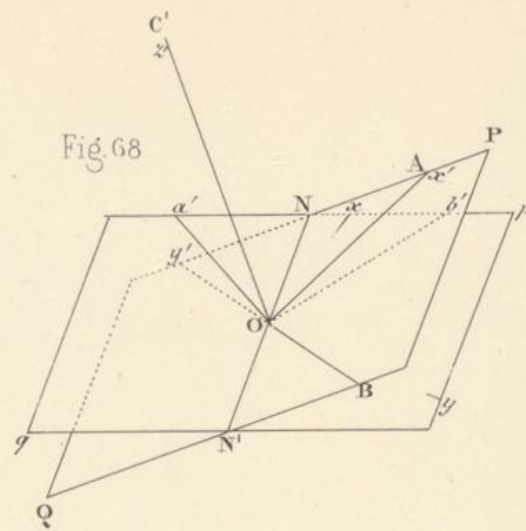


Fig.69.

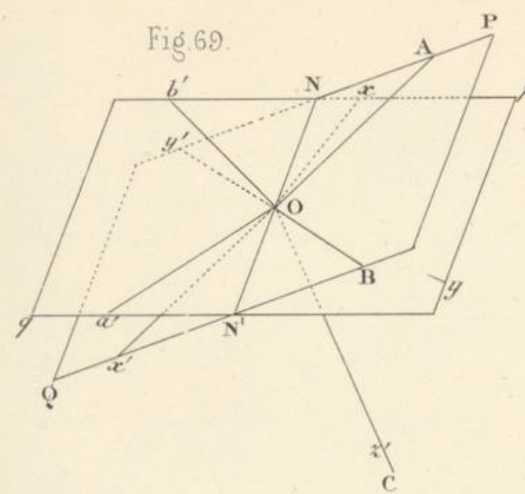


Fig.70.

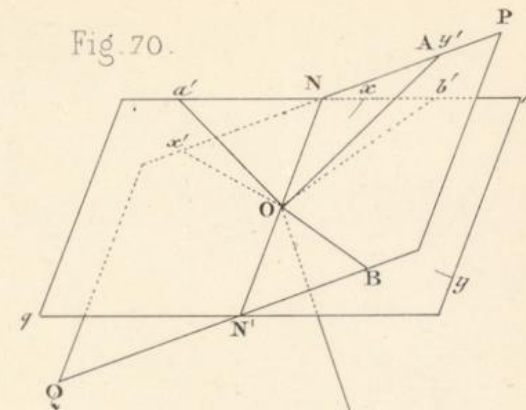


Fig.72.

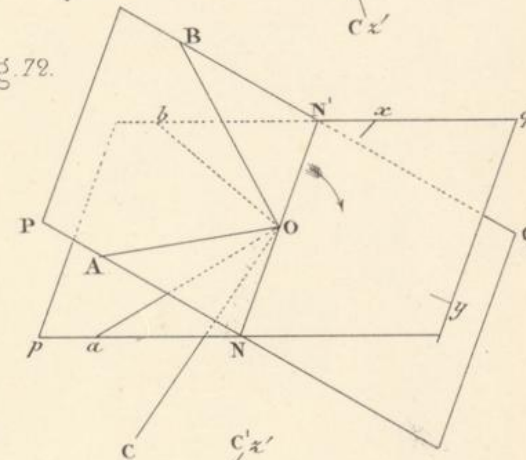


Fig.71

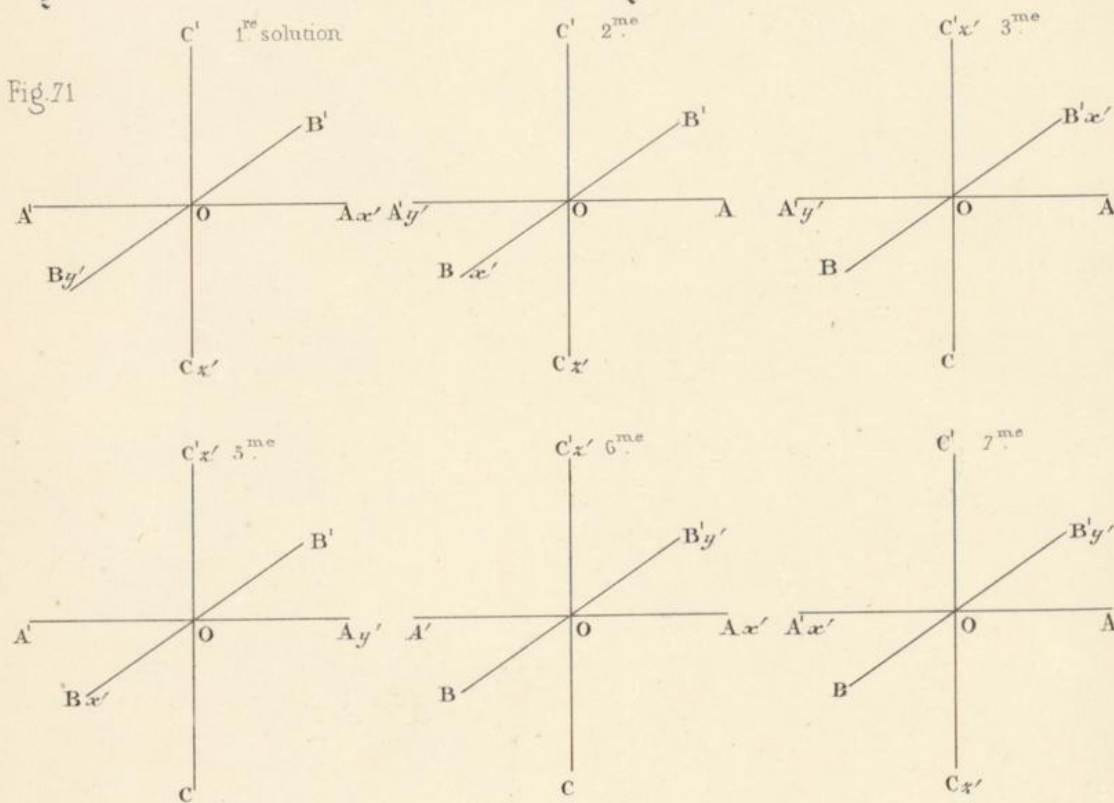
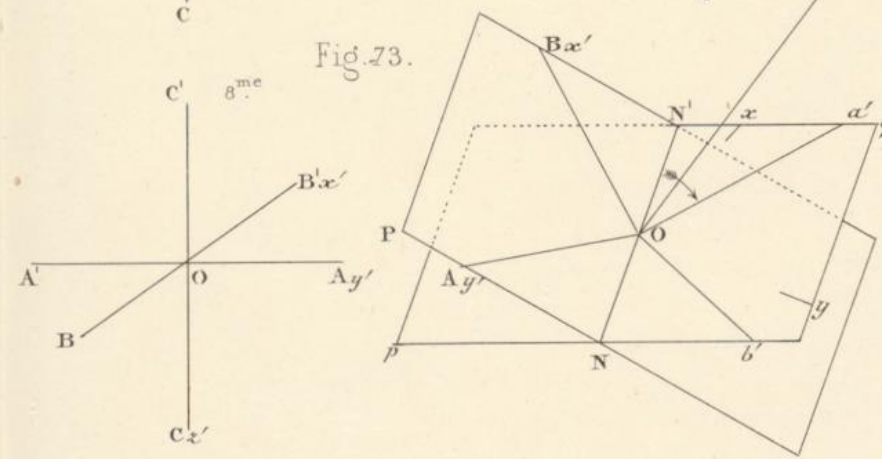
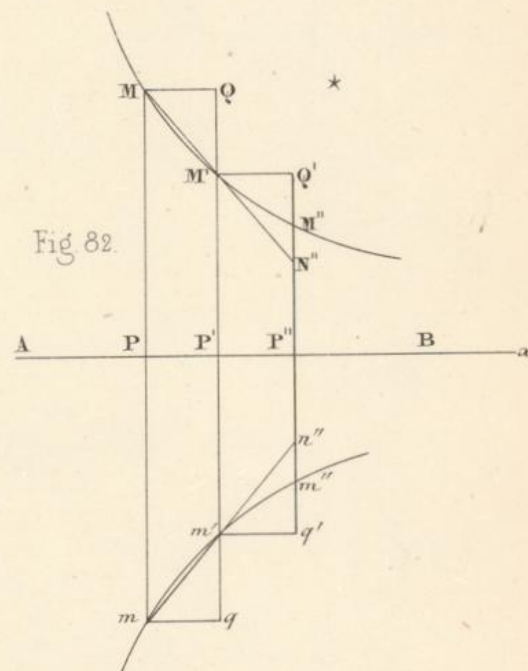
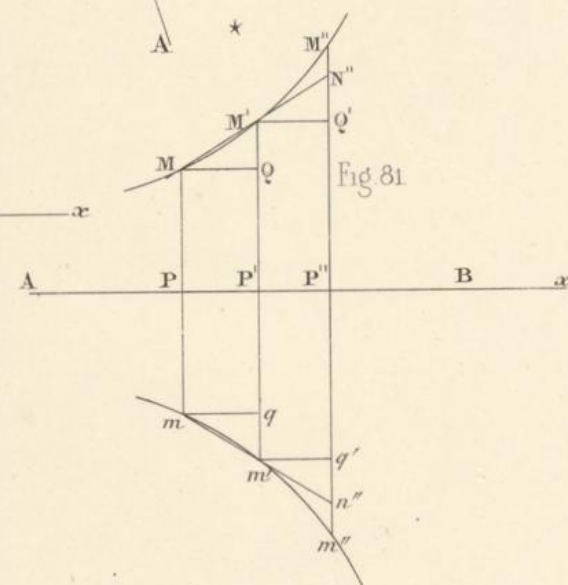
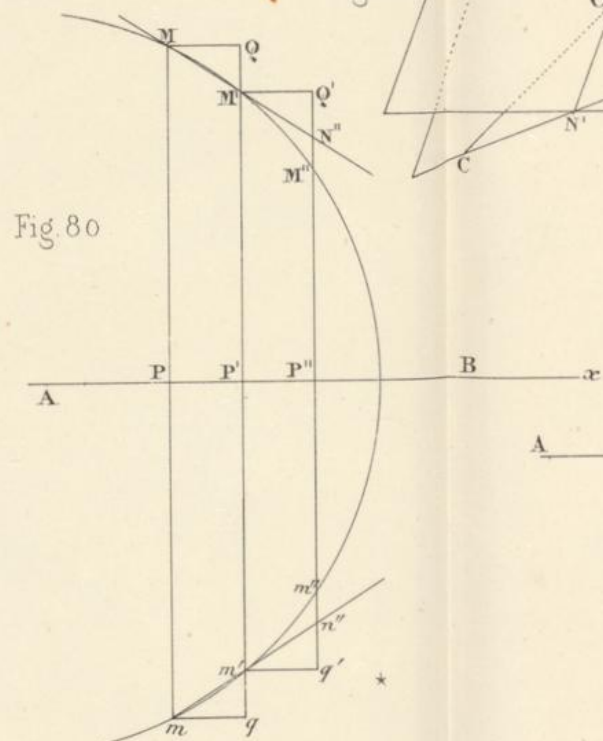
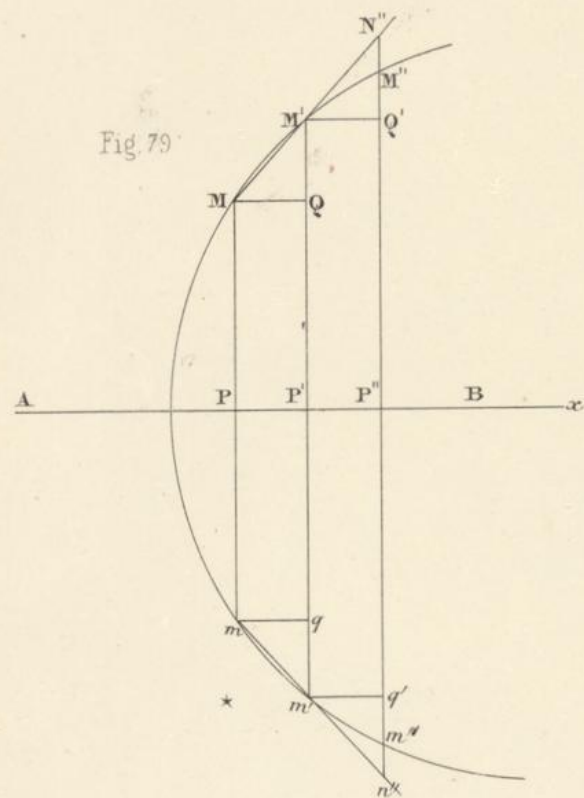
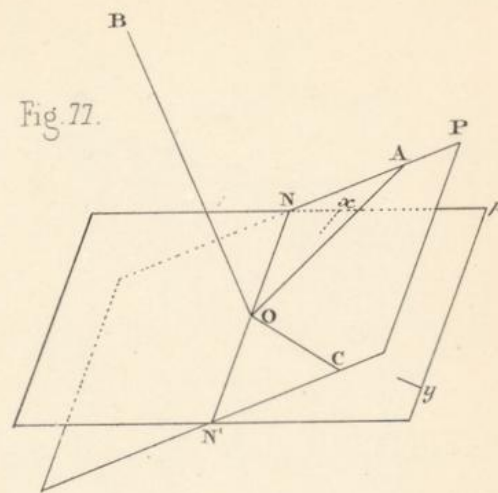
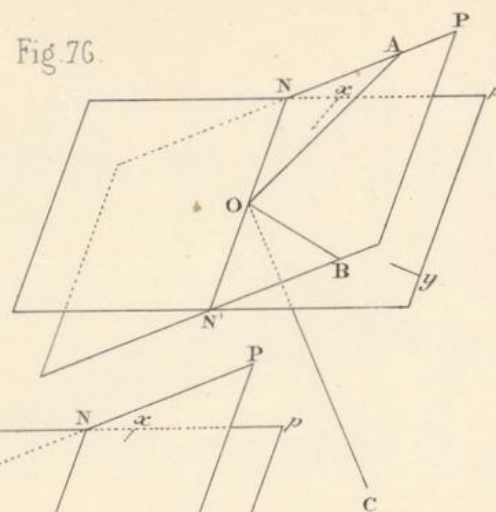
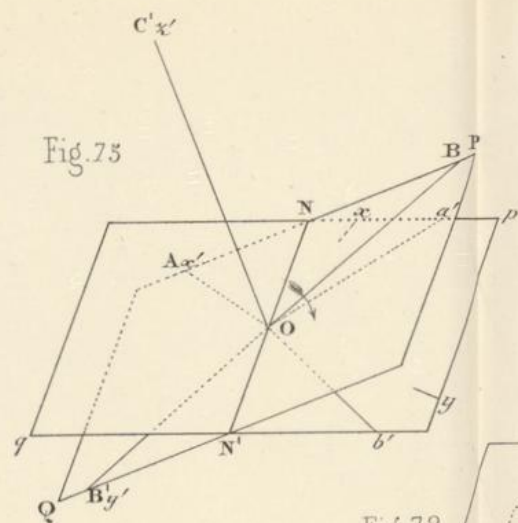
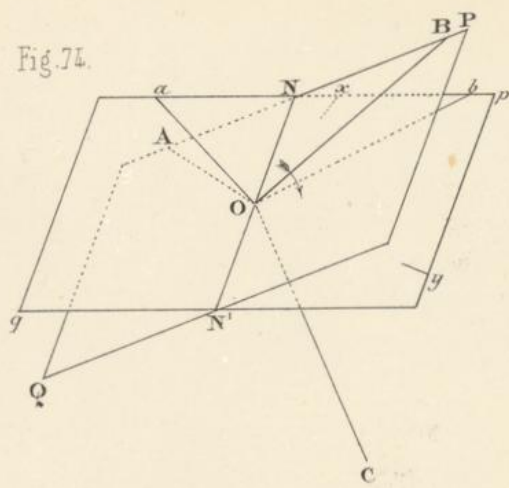
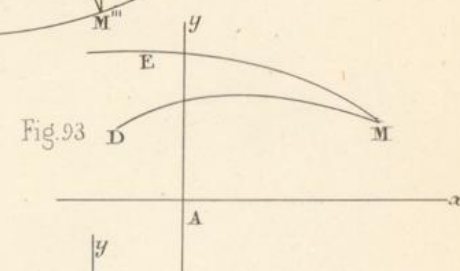
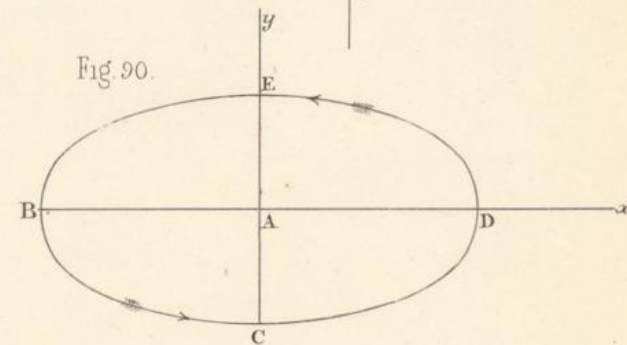
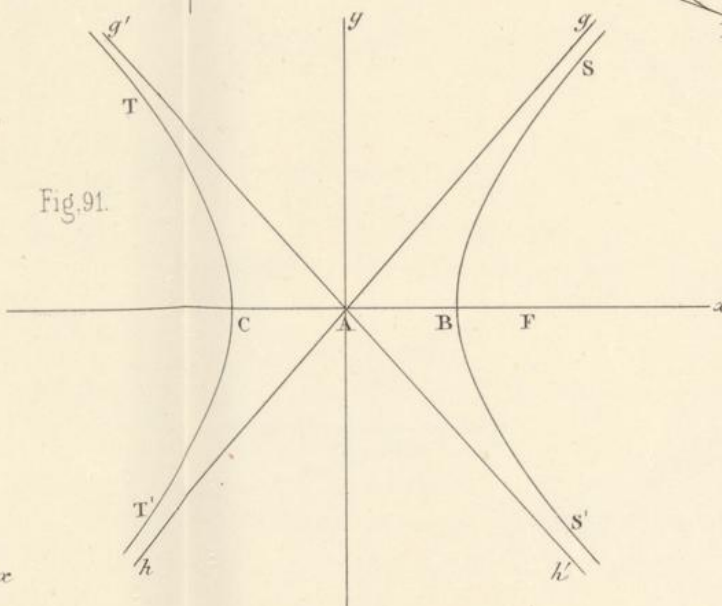
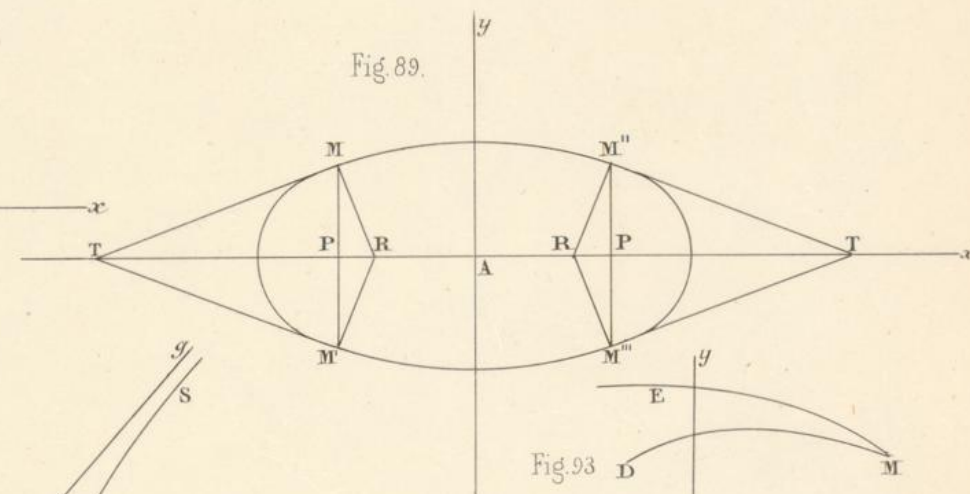
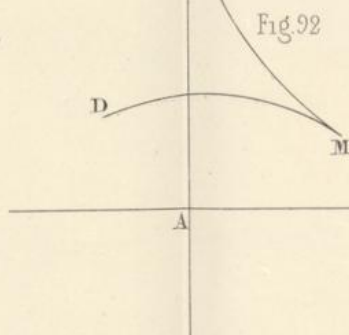
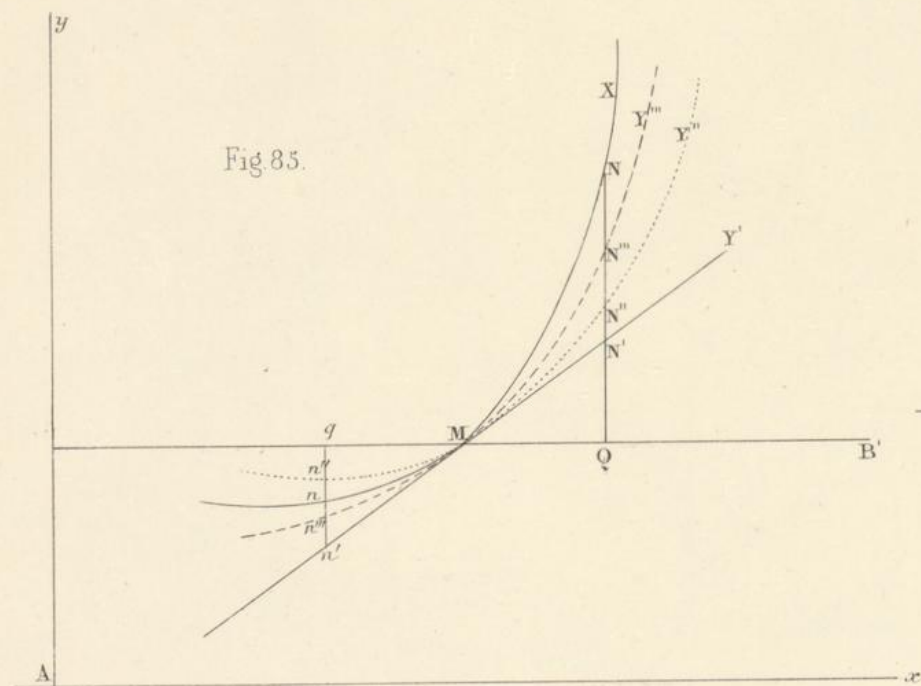
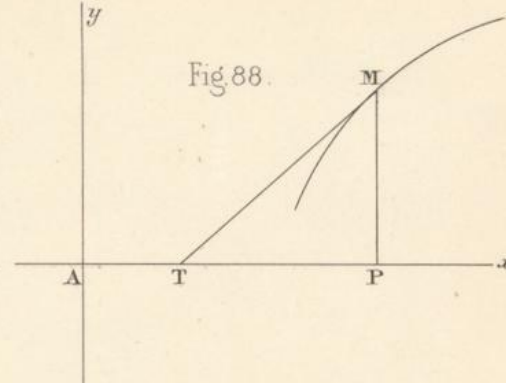
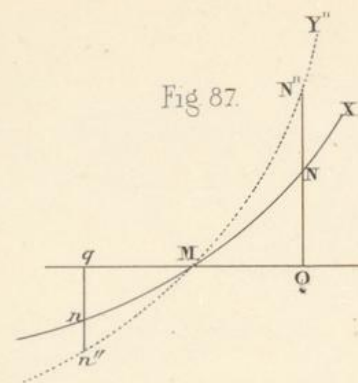
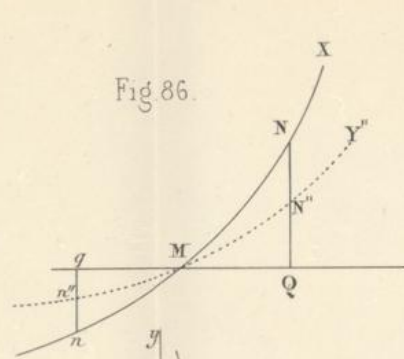
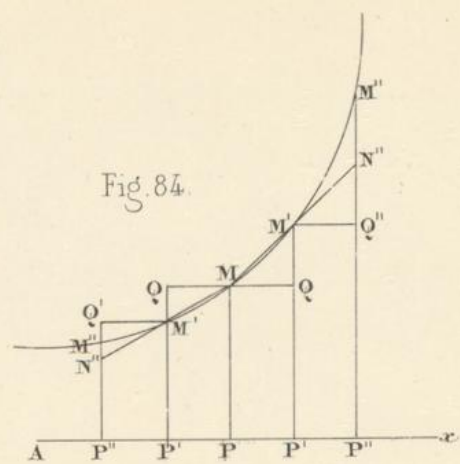
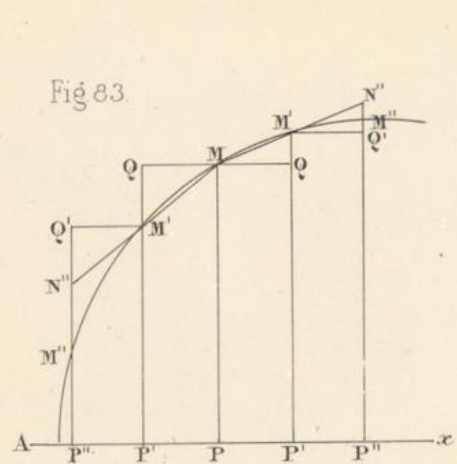


Fig.73.







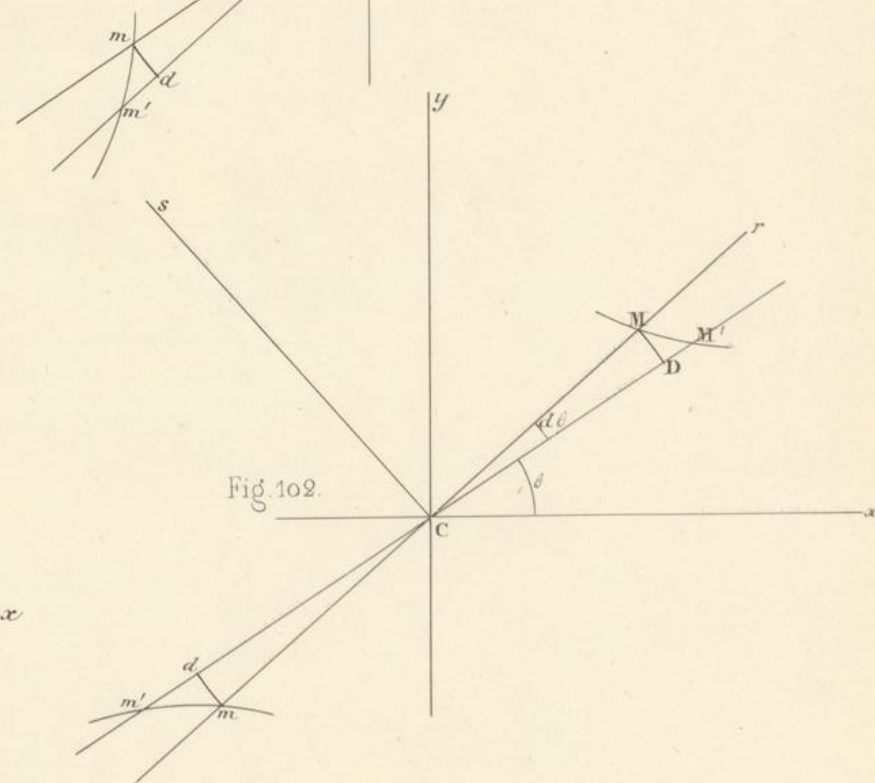
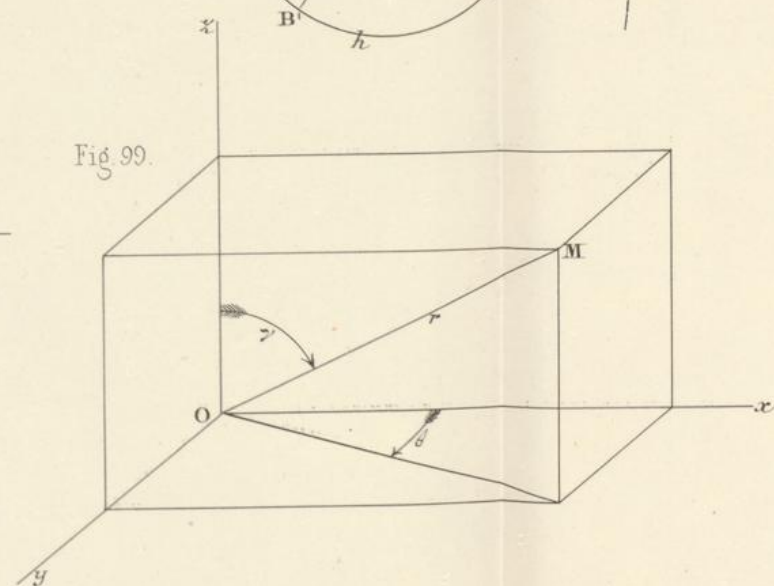
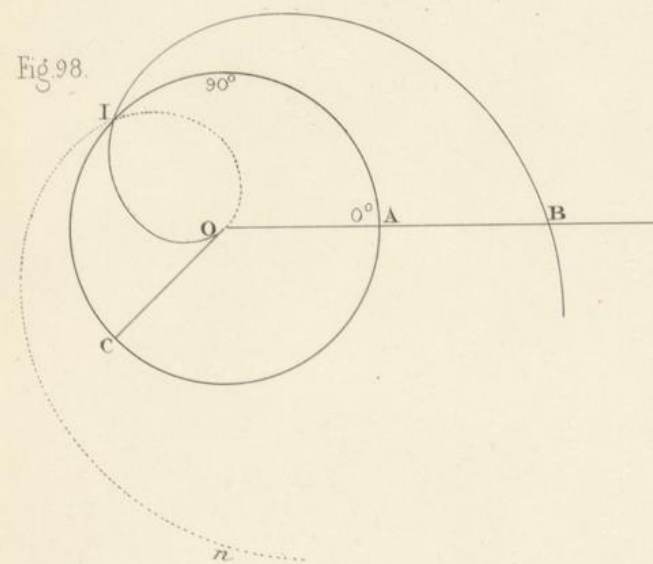
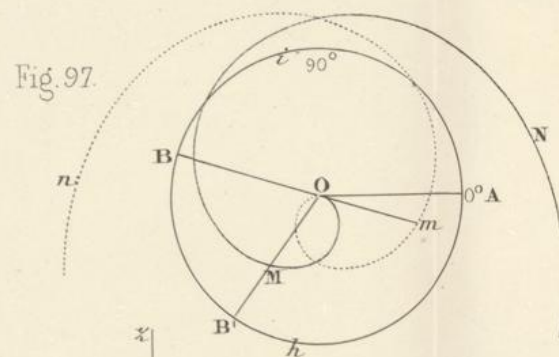
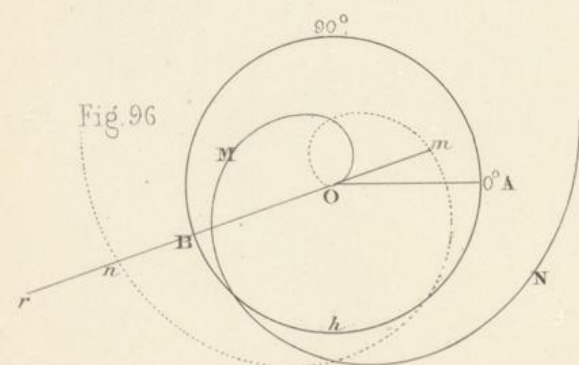
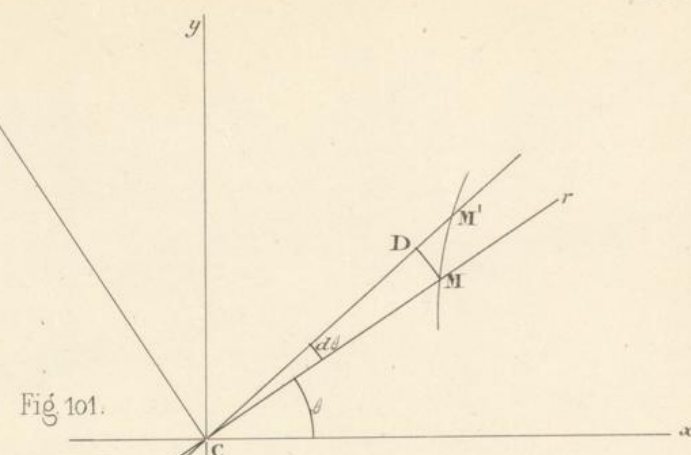
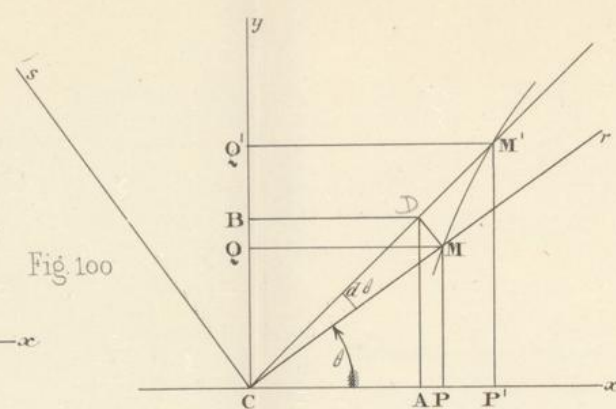
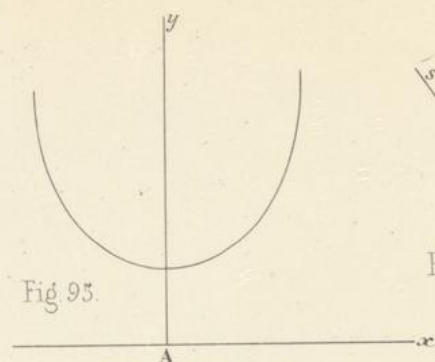
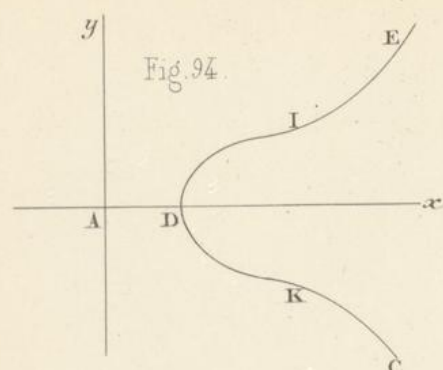


Fig. 103.

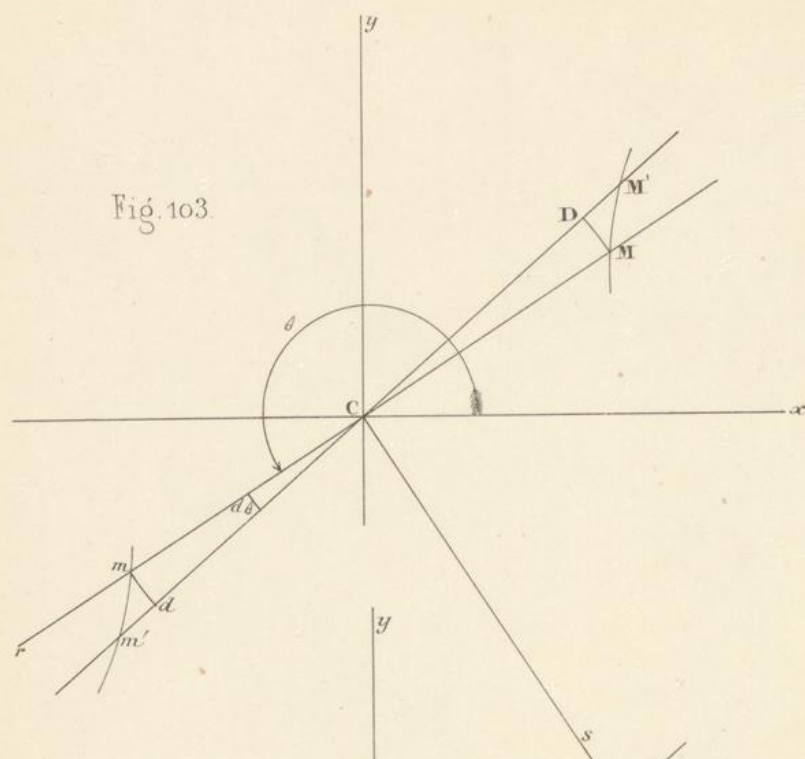


Fig. 104.

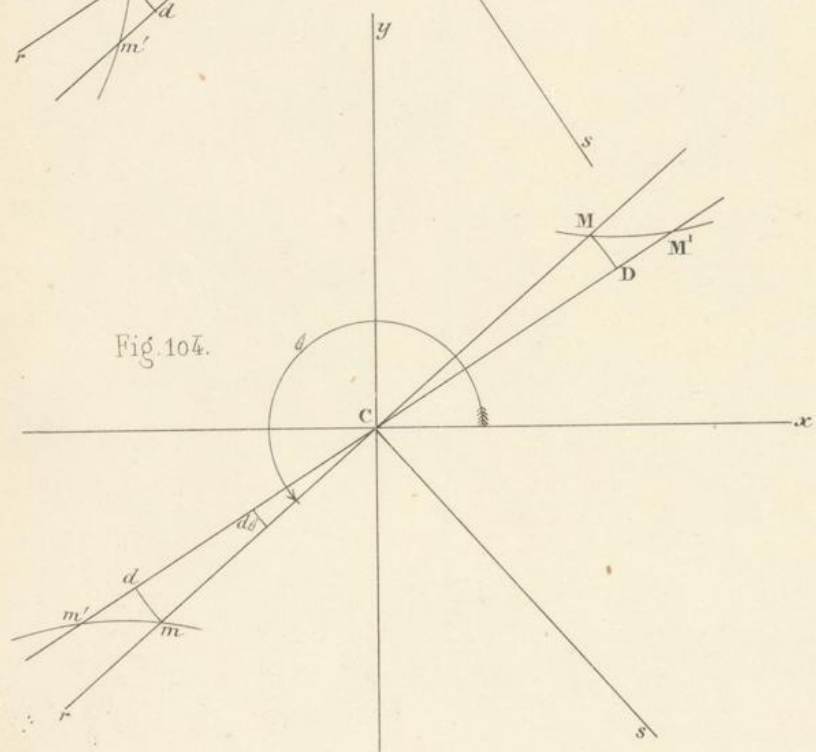


Fig. 105.

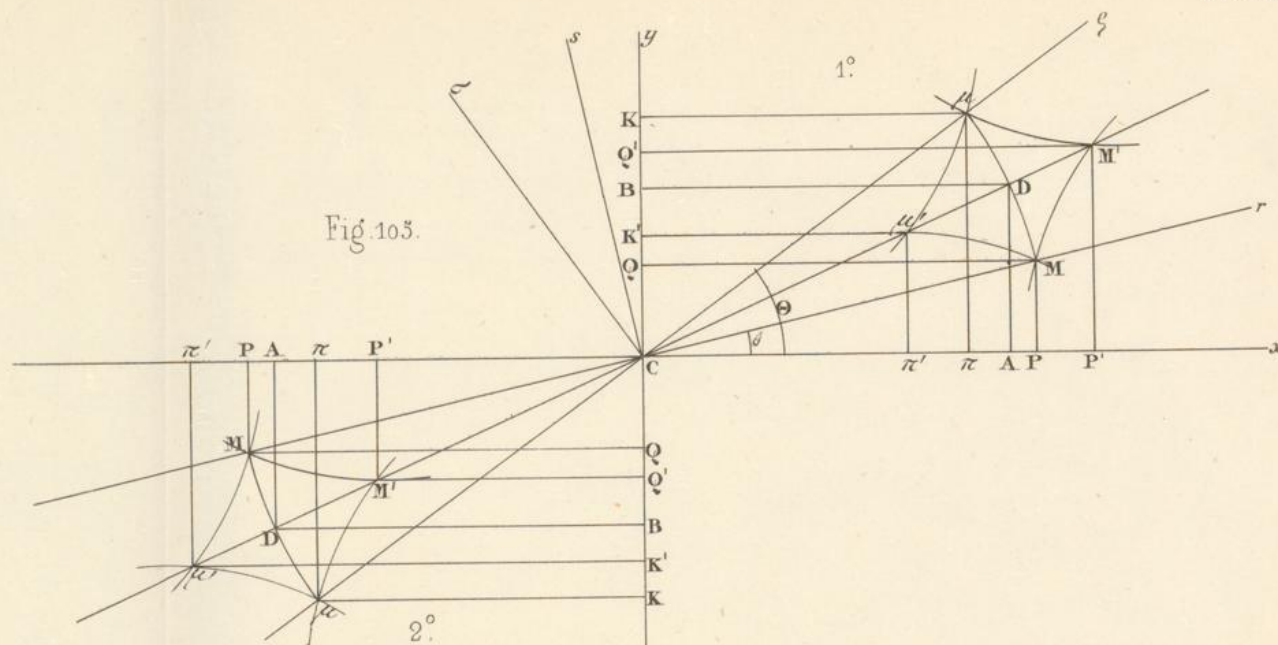


Fig. 106.

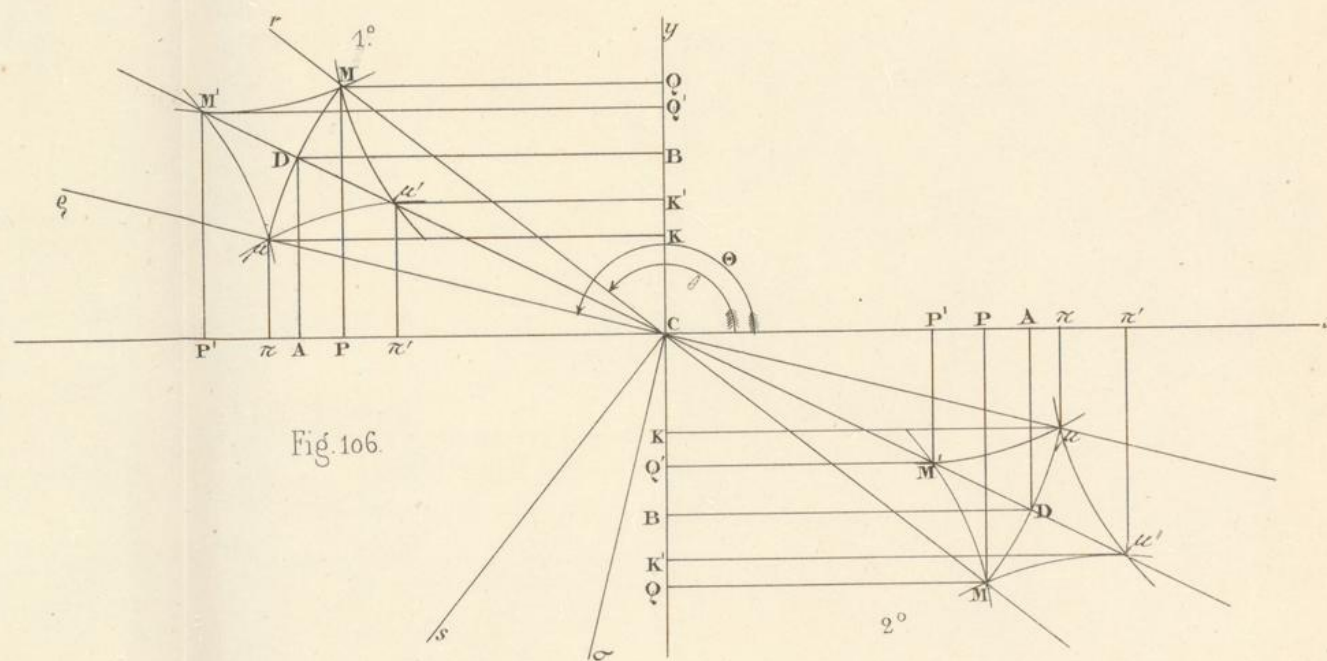


Fig. 107.

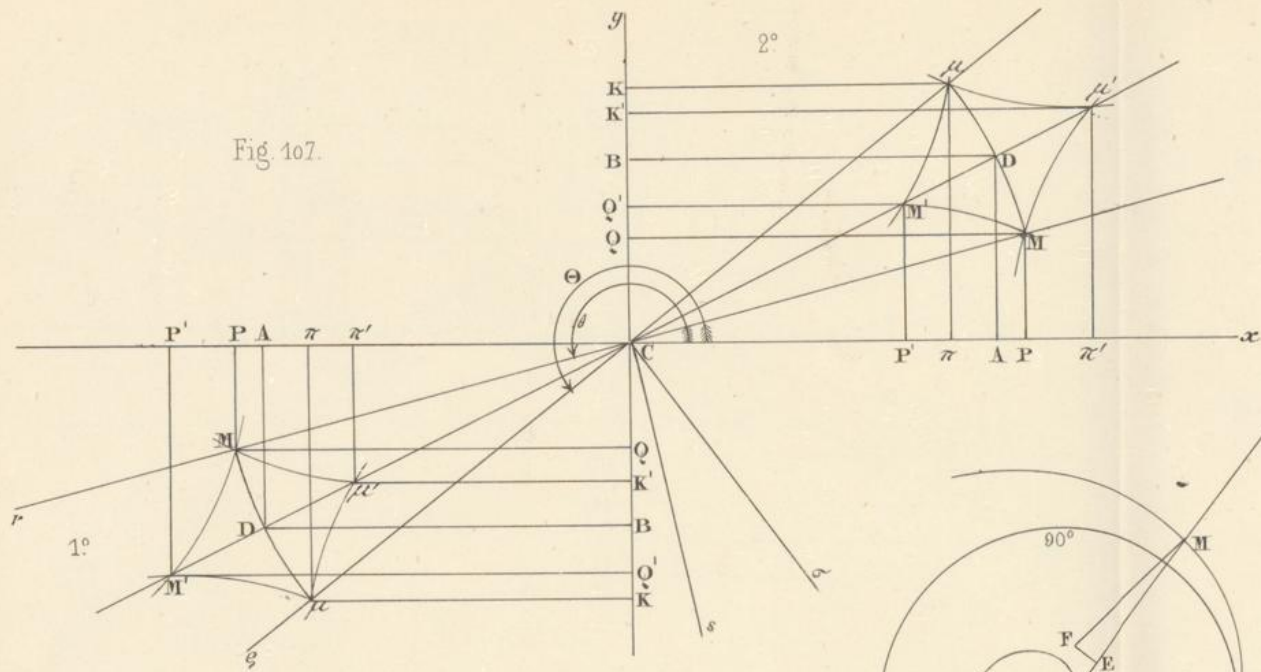


Fig. 108.

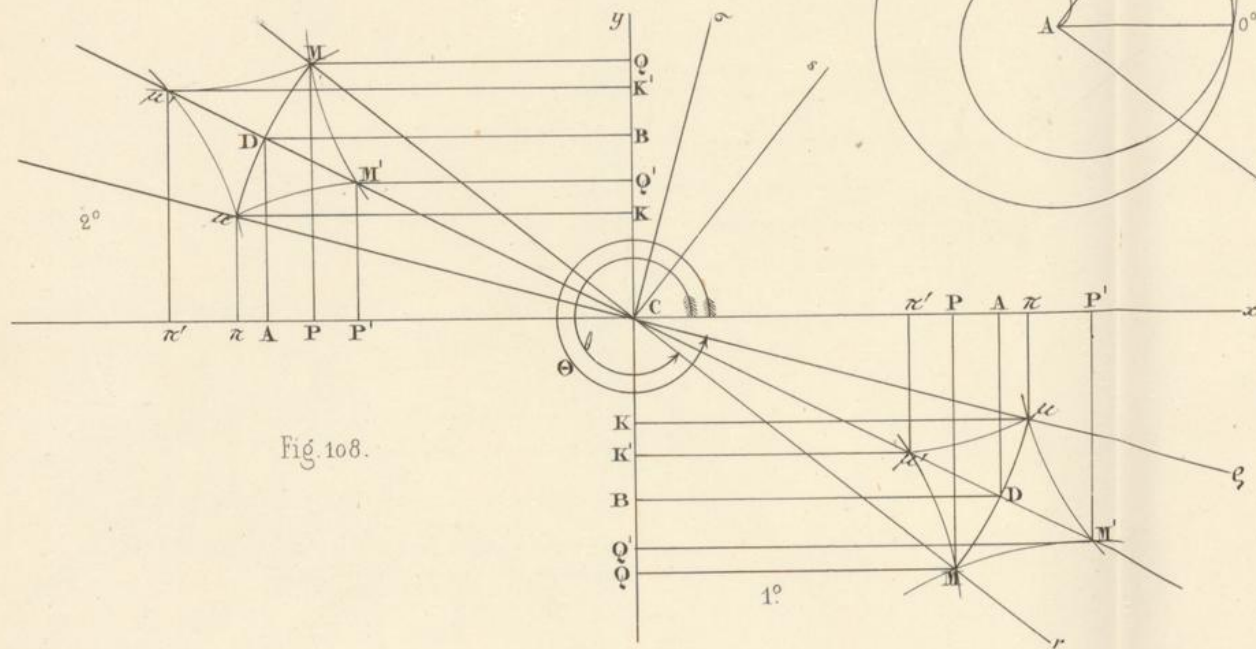


Fig. 110.

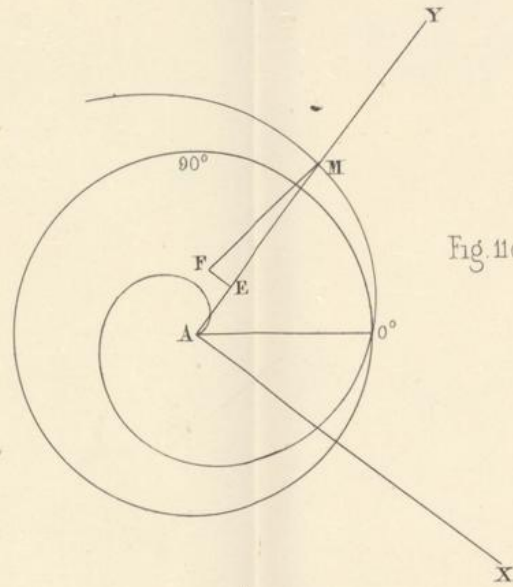


Fig. 109.

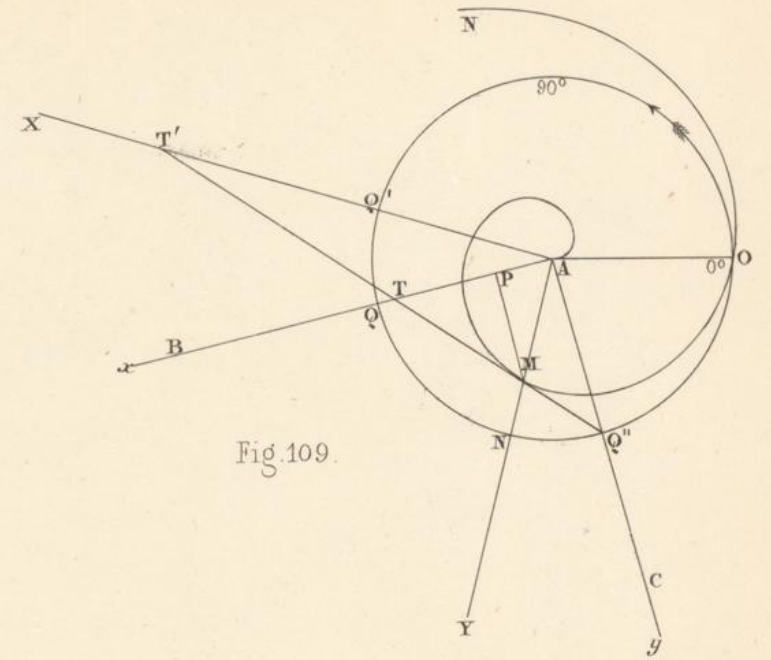


Fig. 111.

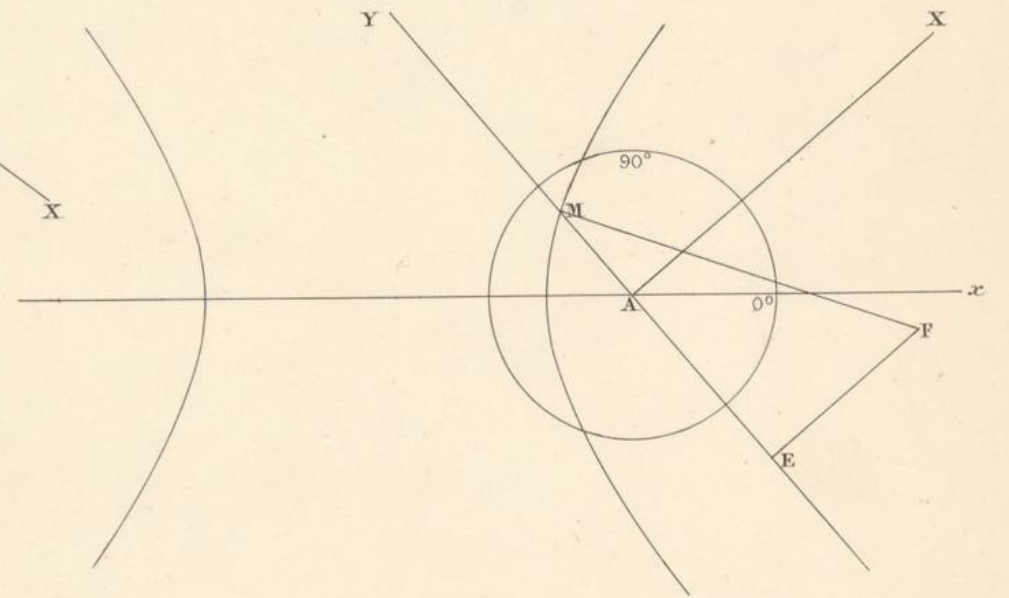


Fig.112.

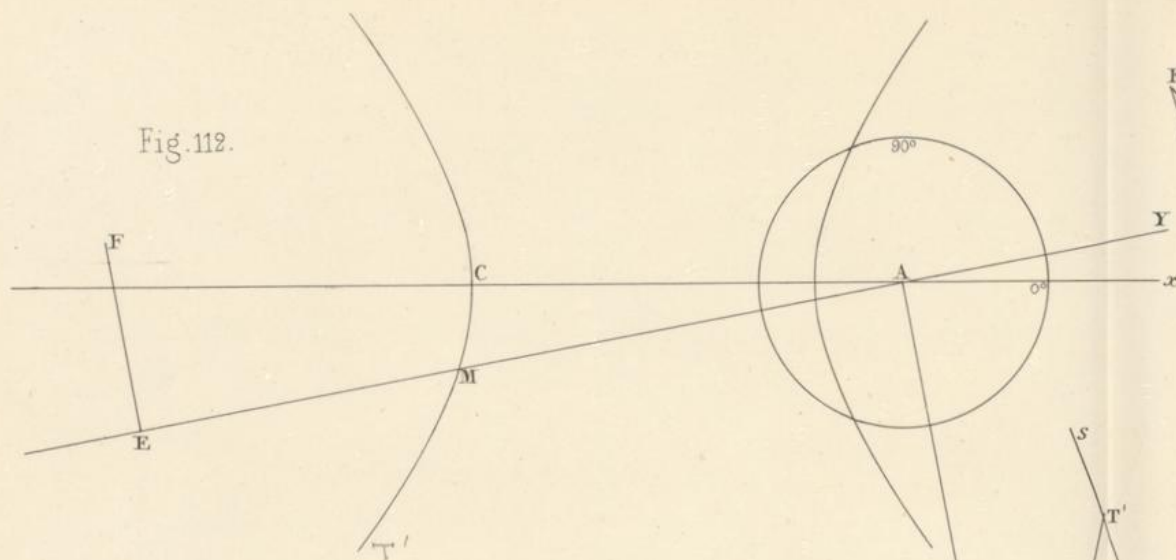


Fig.113.

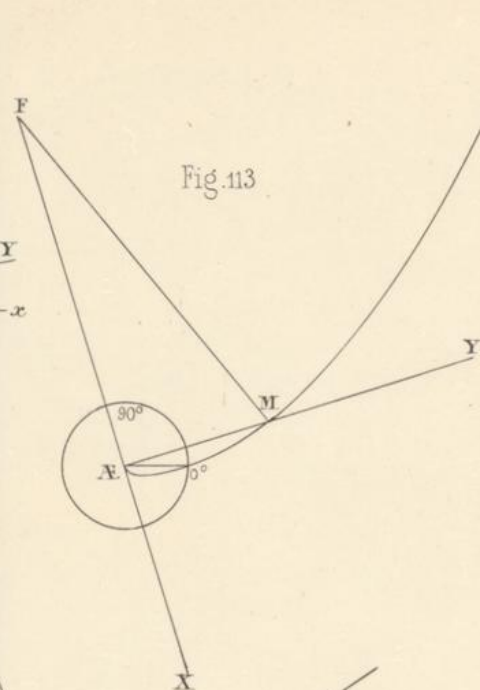


Fig.114.

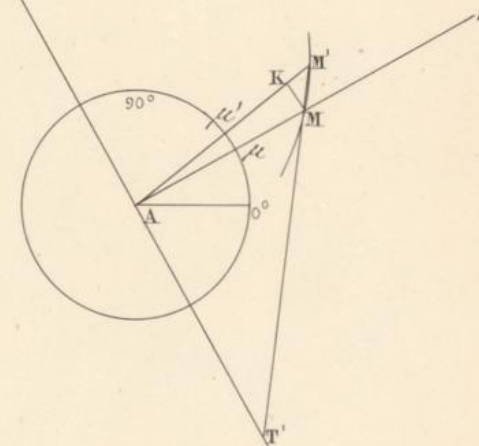


Fig.116.

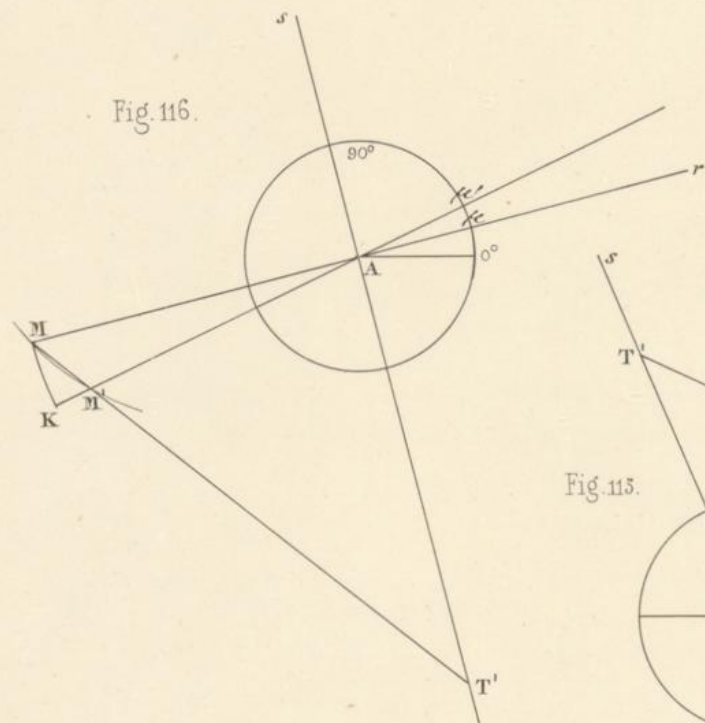


Fig.117.

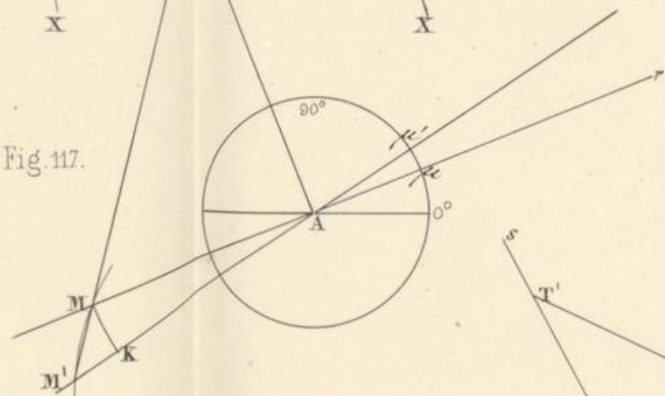


Fig.115.

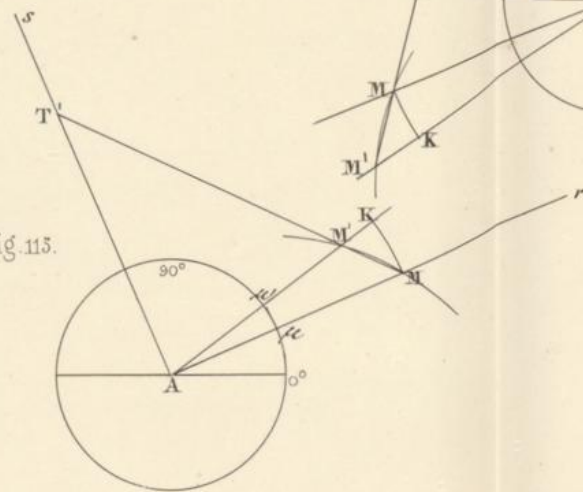


Fig.118.

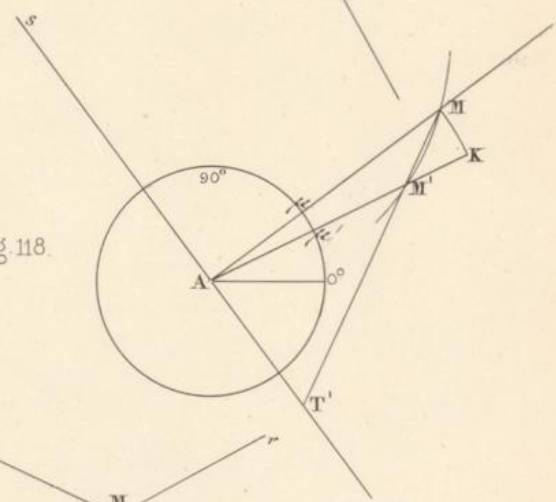


Fig.119.

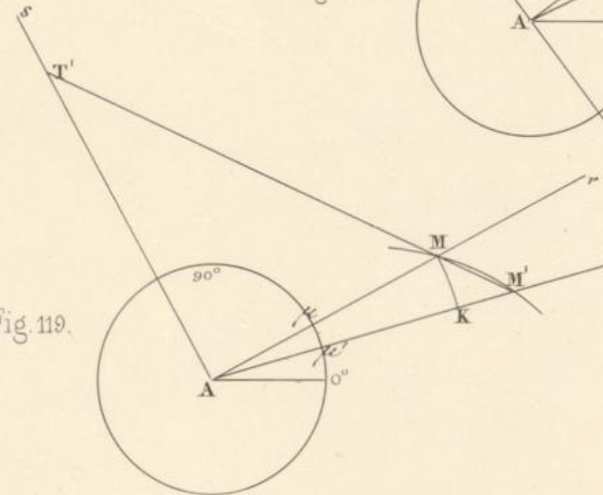


Fig. 120.

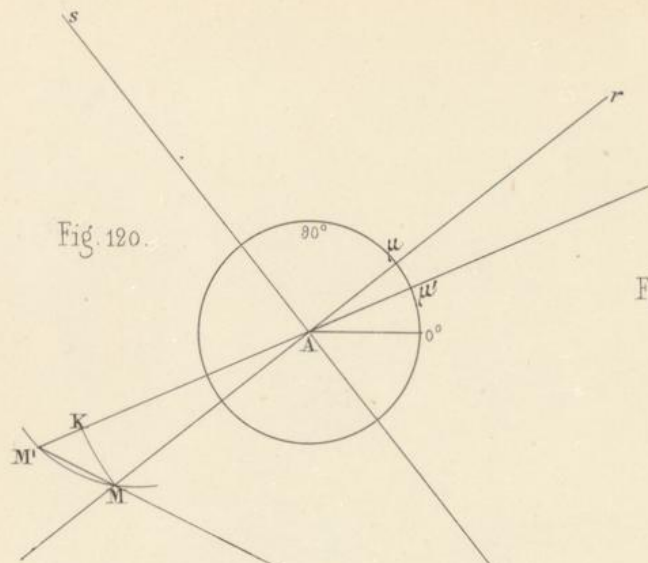


Fig. 122.

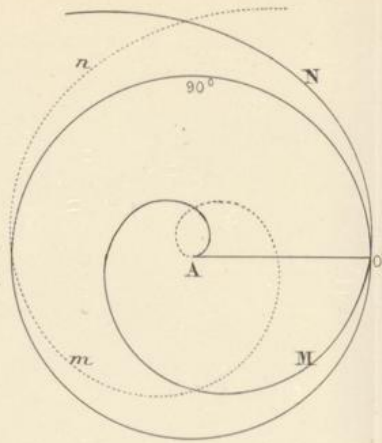


Fig. 125.

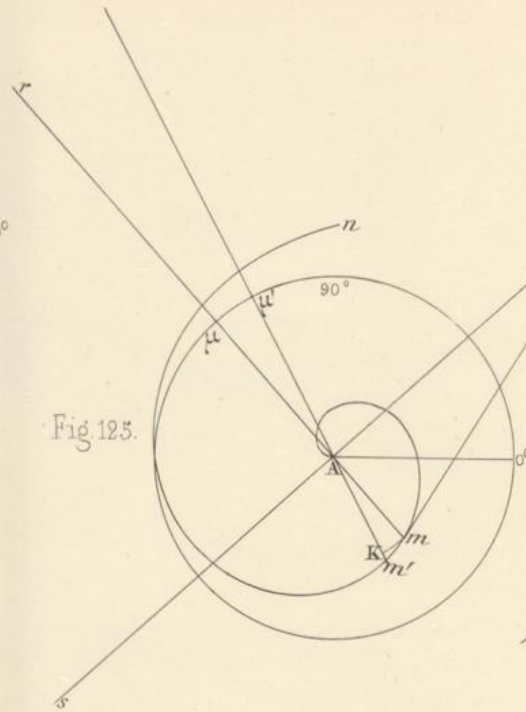


Fig. 124.

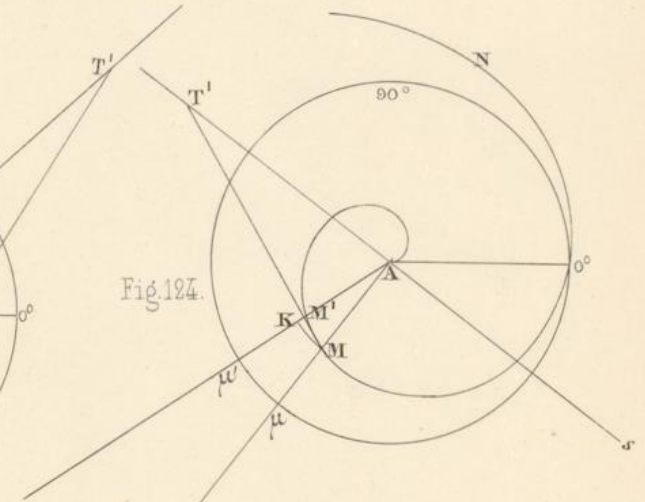


Fig. 121.

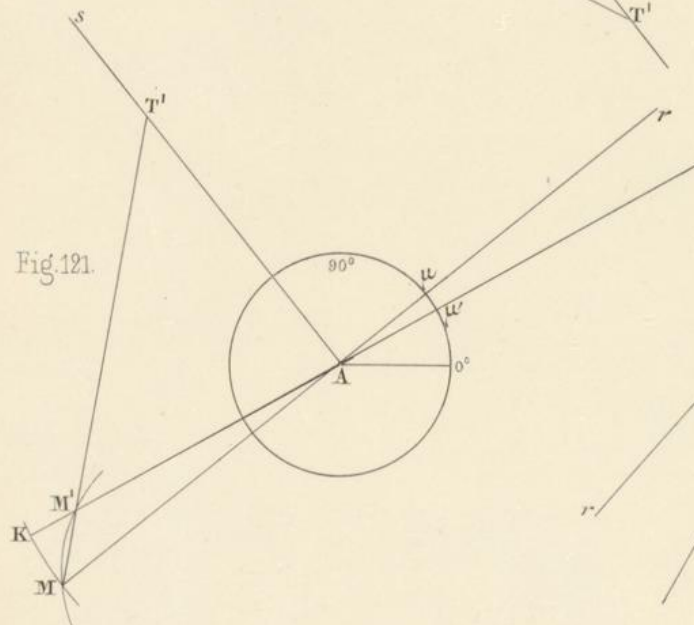


Fig. 123.

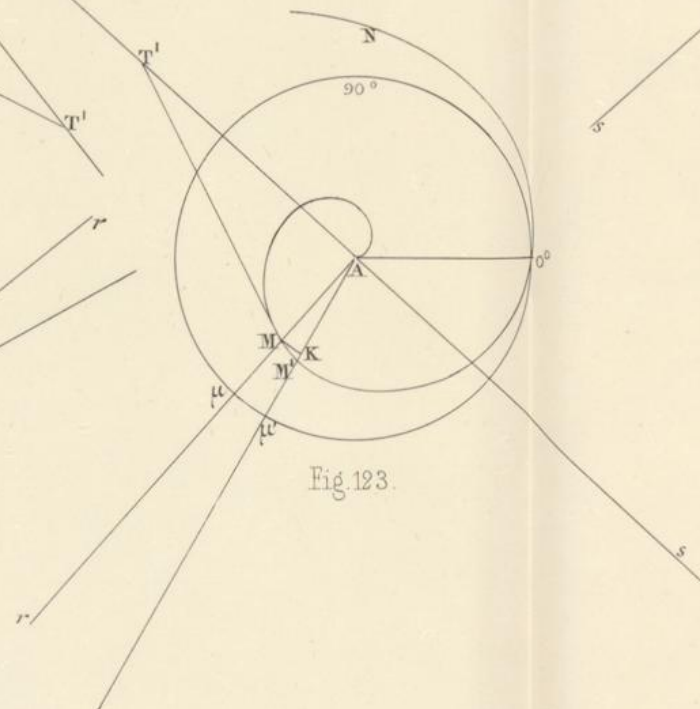
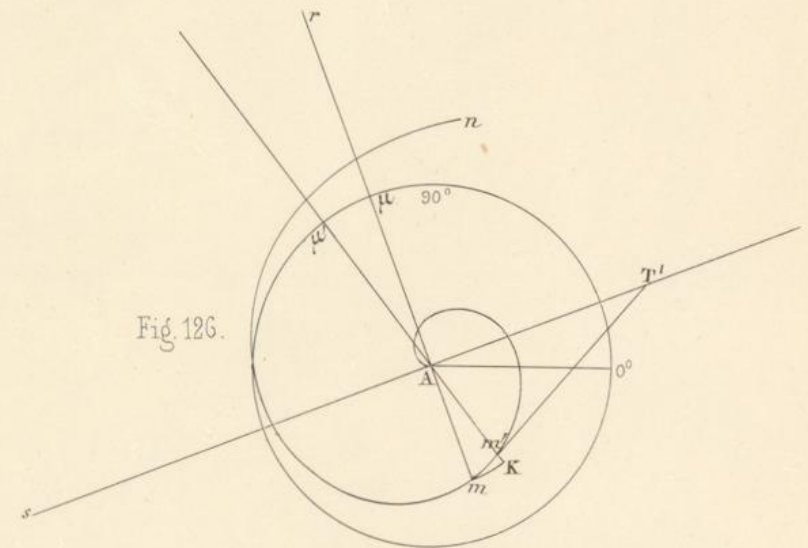
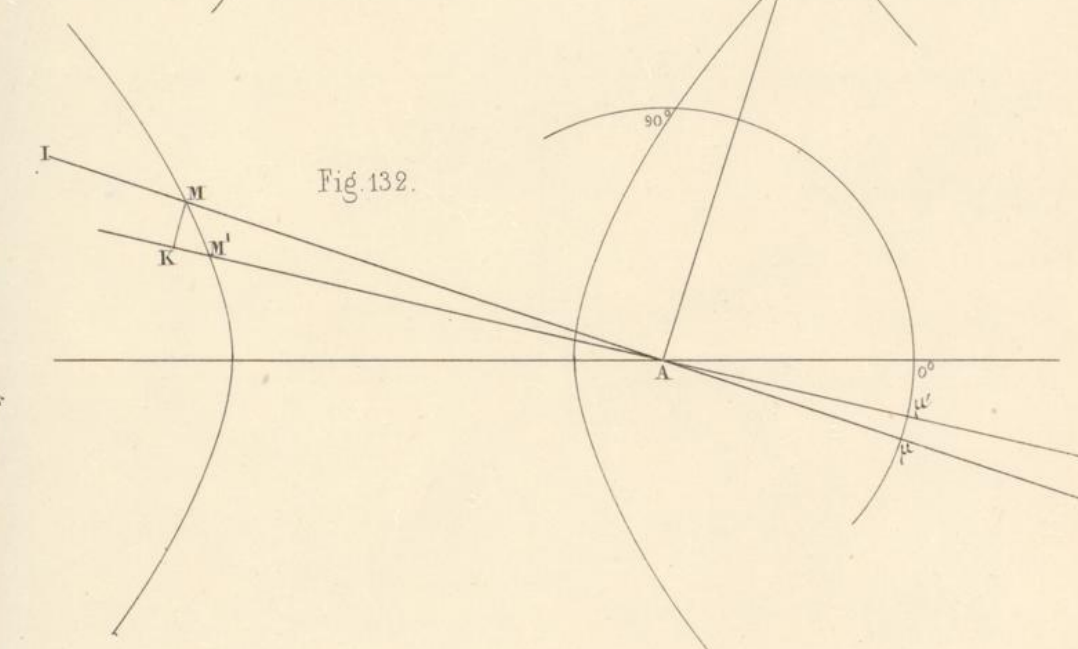
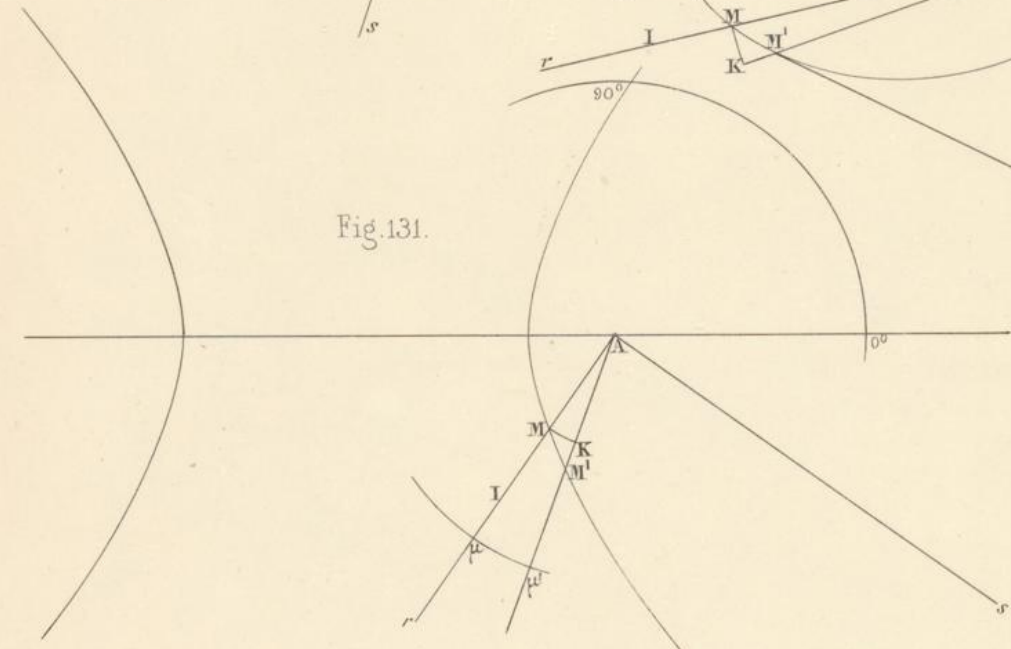
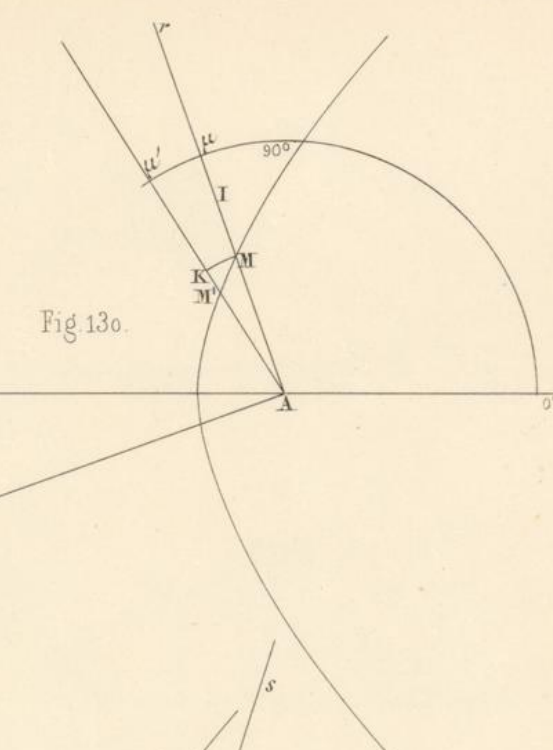
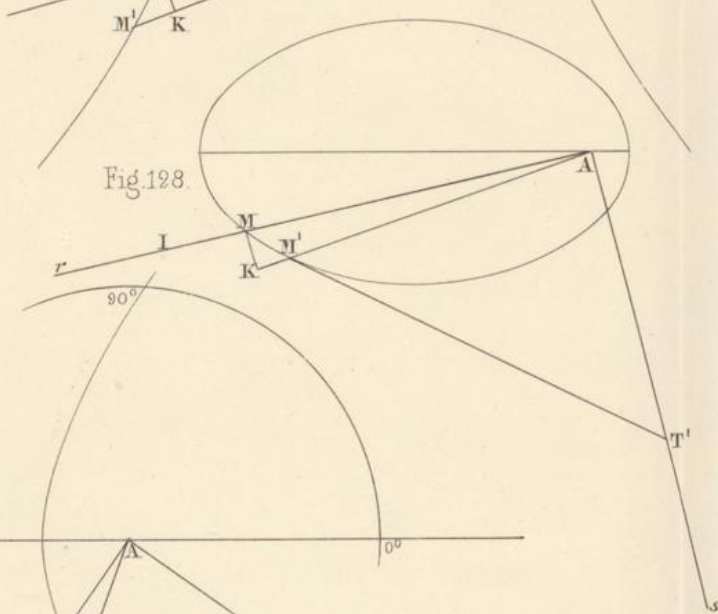
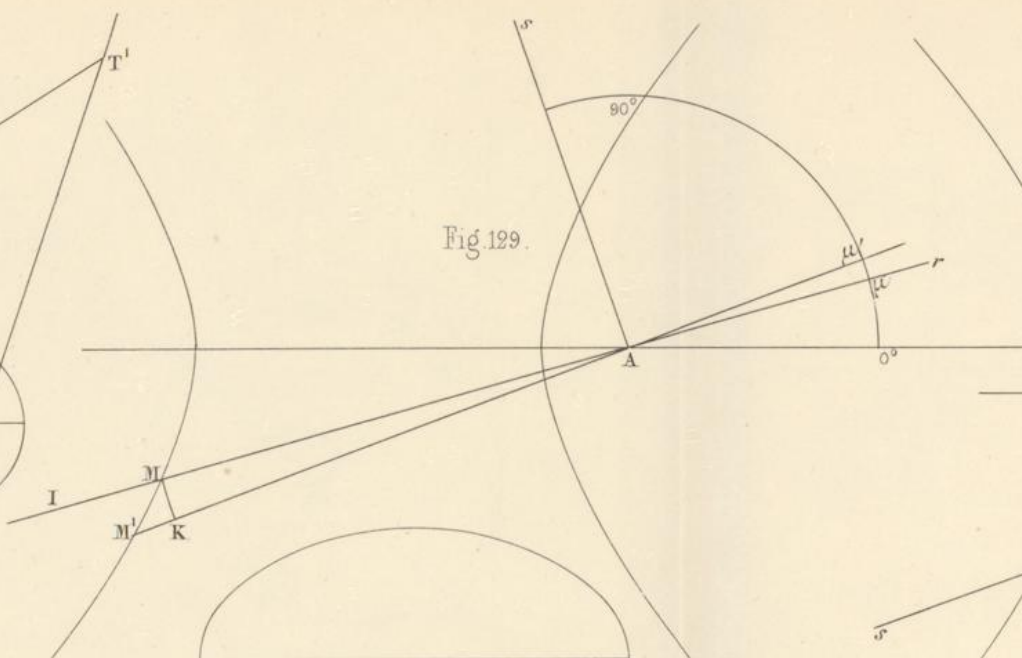
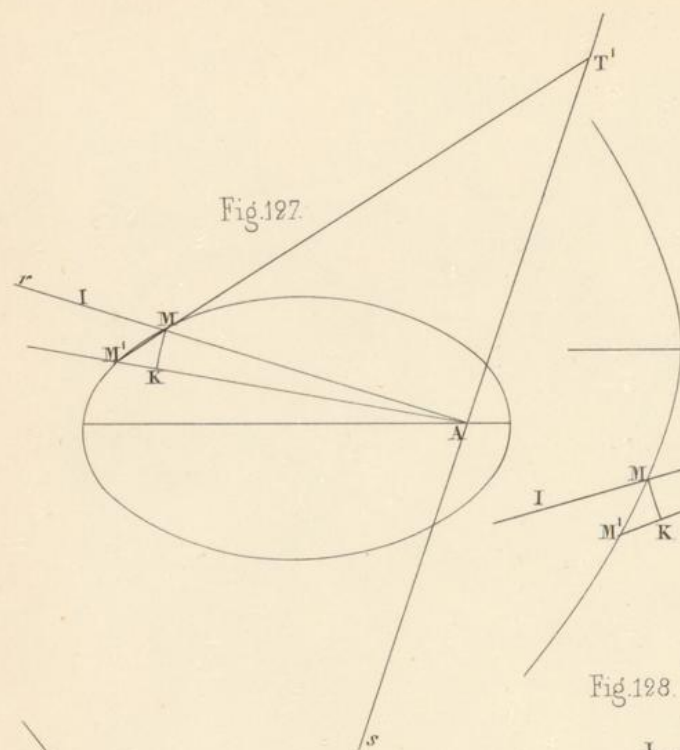


Fig. 126.





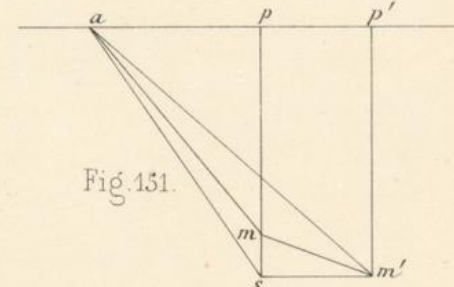
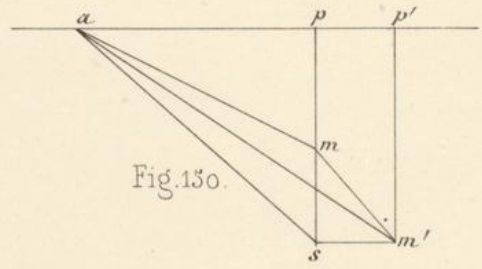
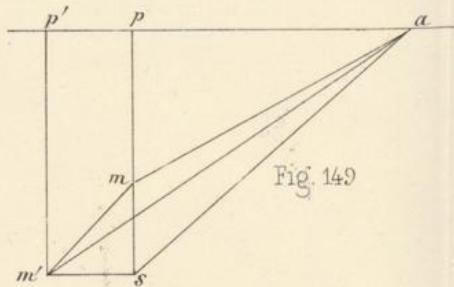
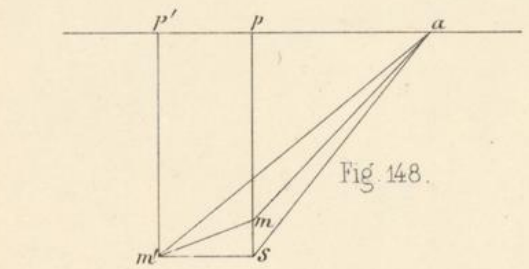
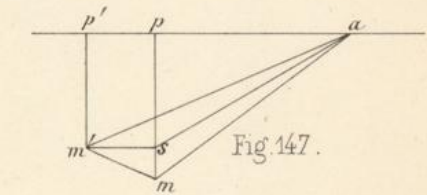
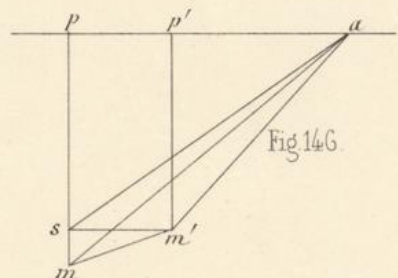
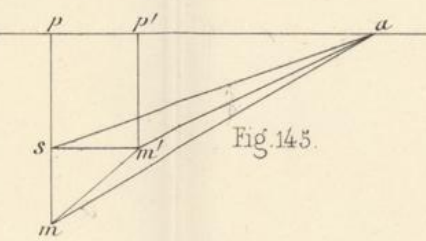
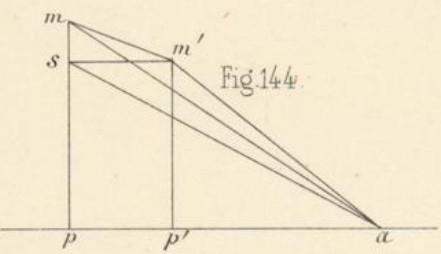
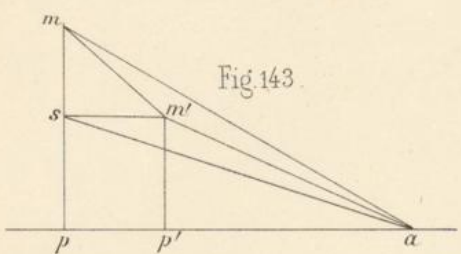
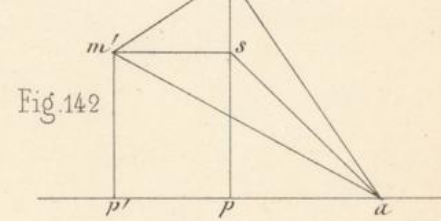
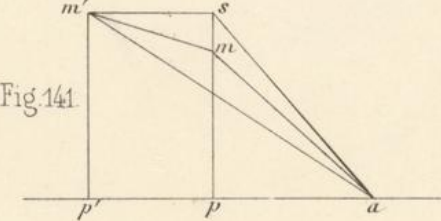
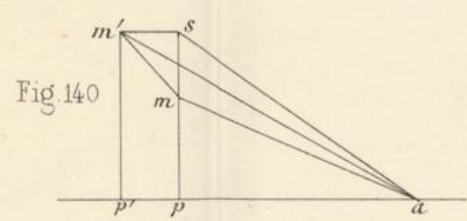
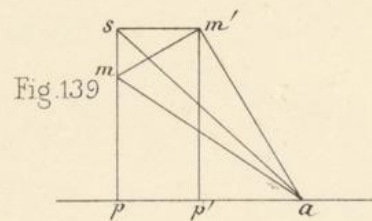
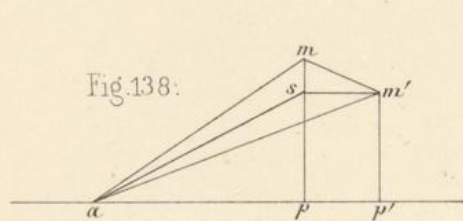
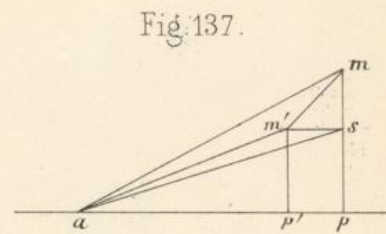
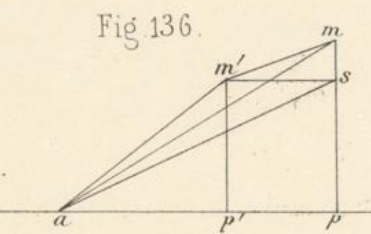
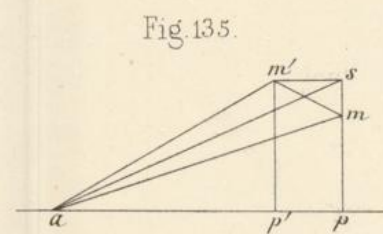
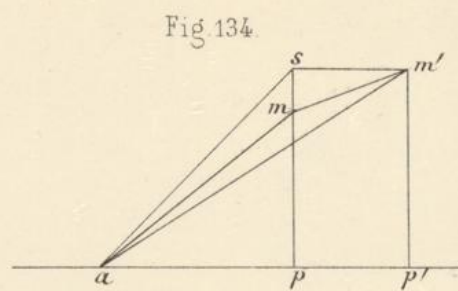
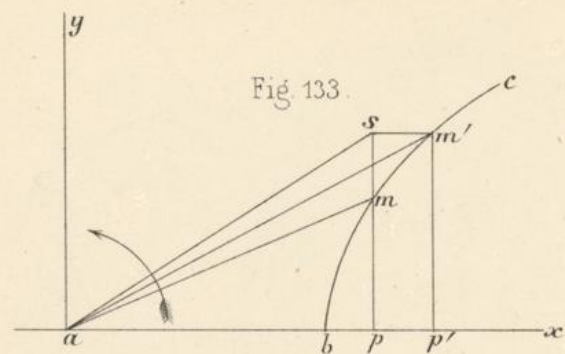


Fig. 152.

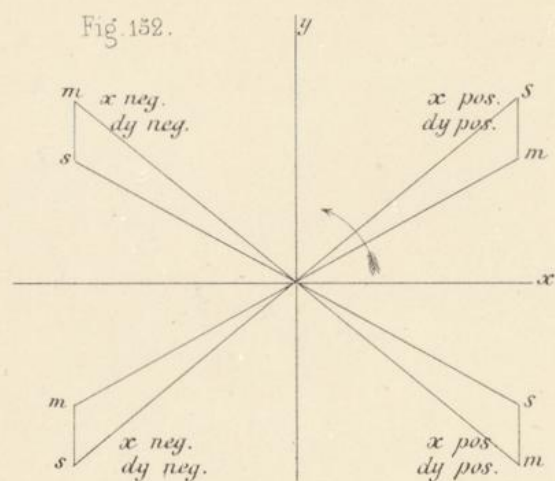


Fig. 153.

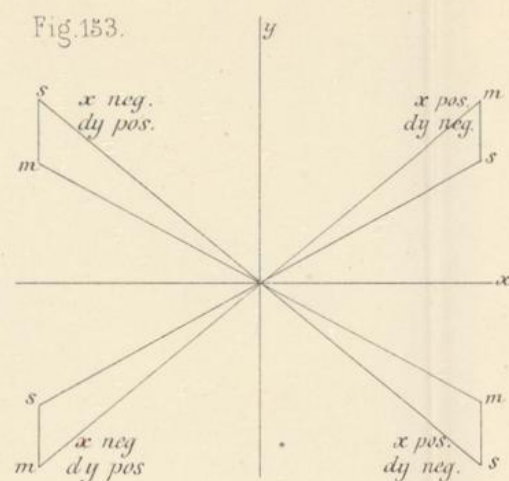


Fig. 156.

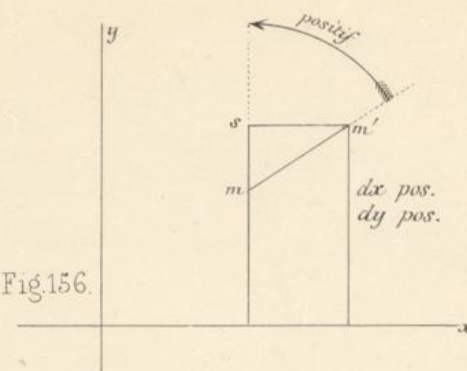


Fig. 157.

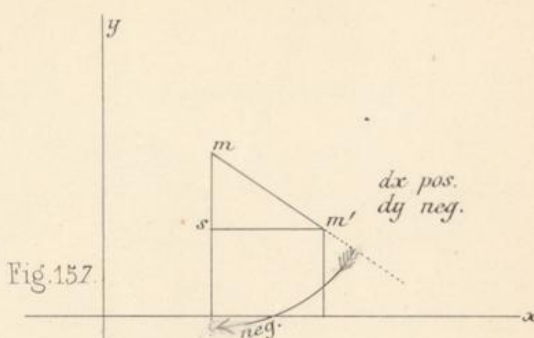


Fig. 158.

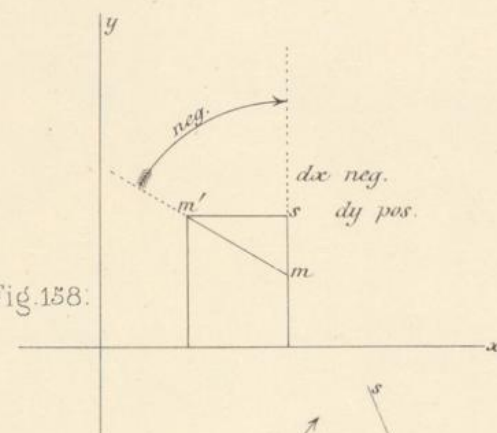


Fig. 159.

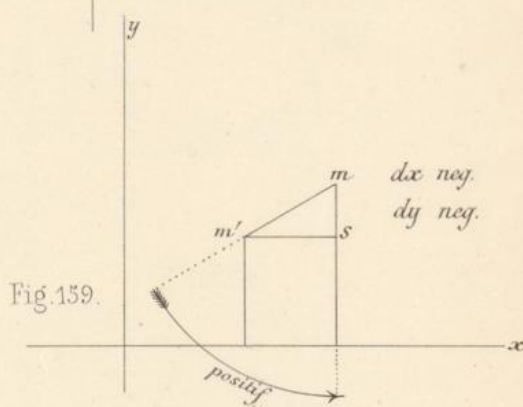


Fig. 160.

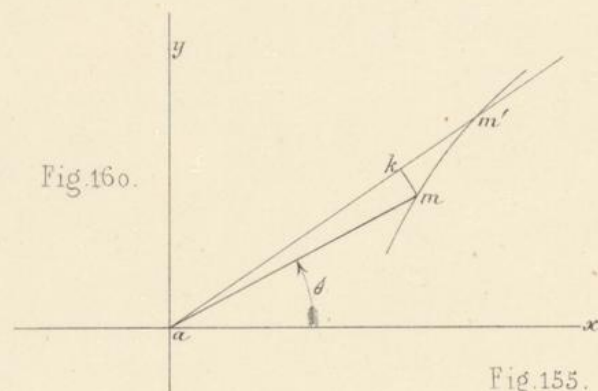


Fig. 154.

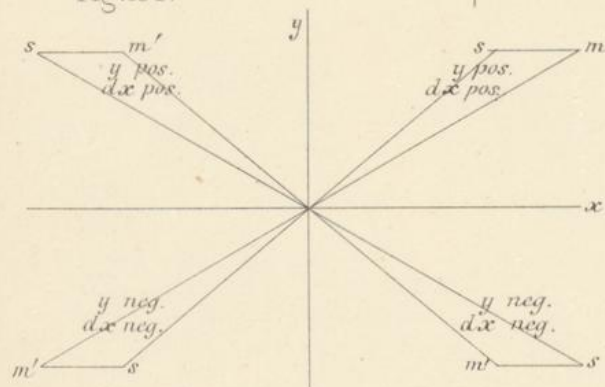


Fig. 155.

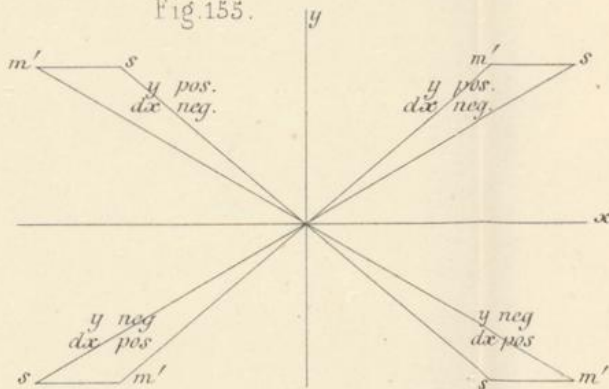
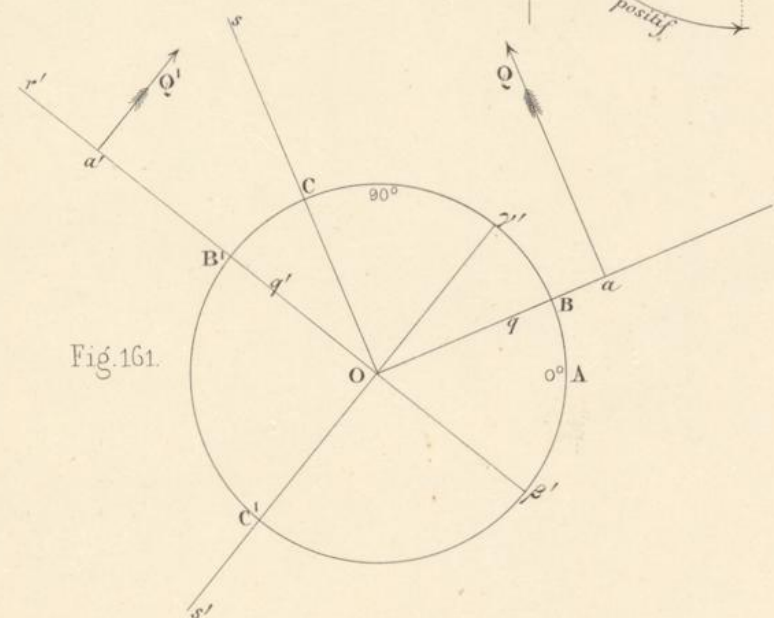
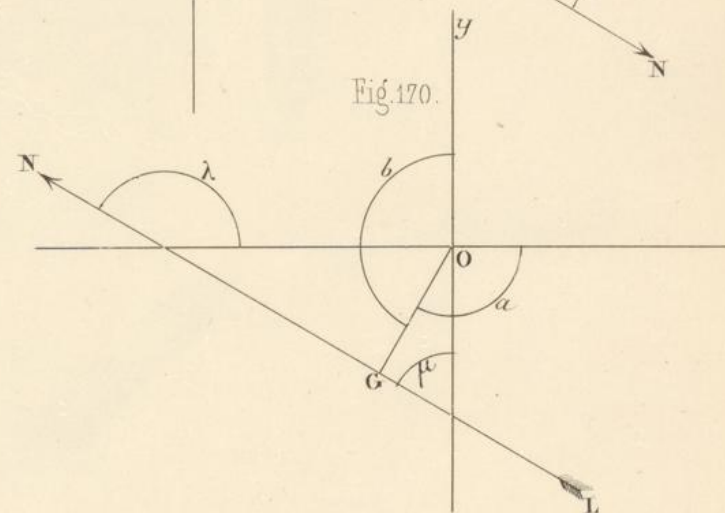
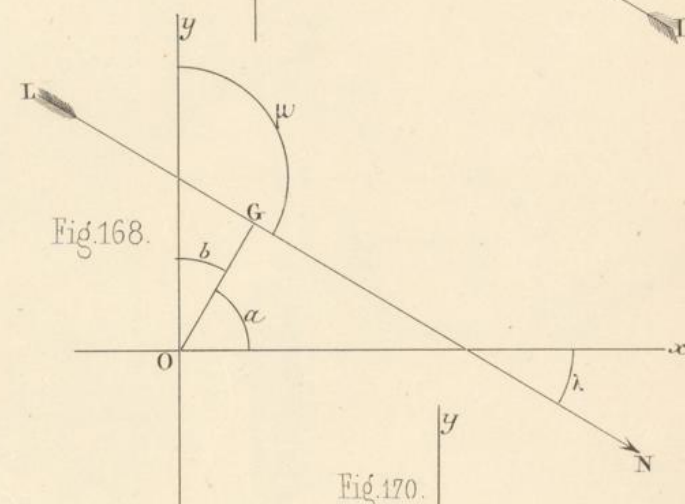
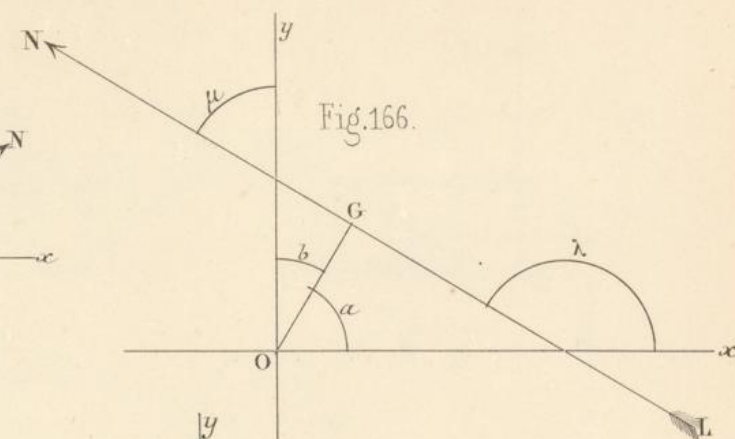
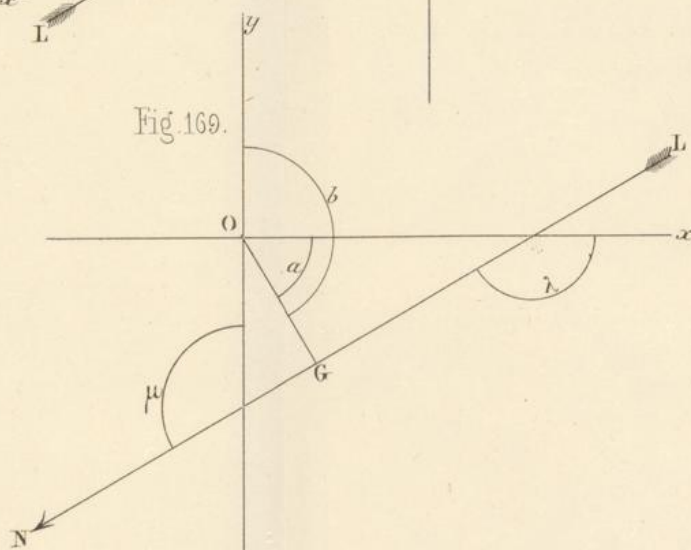
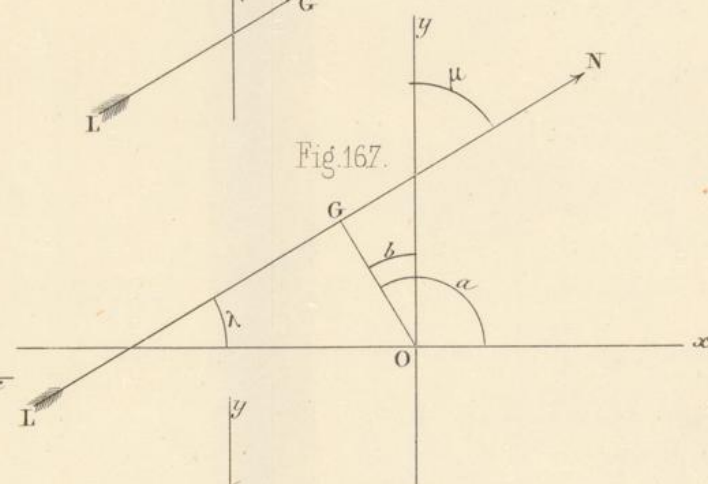
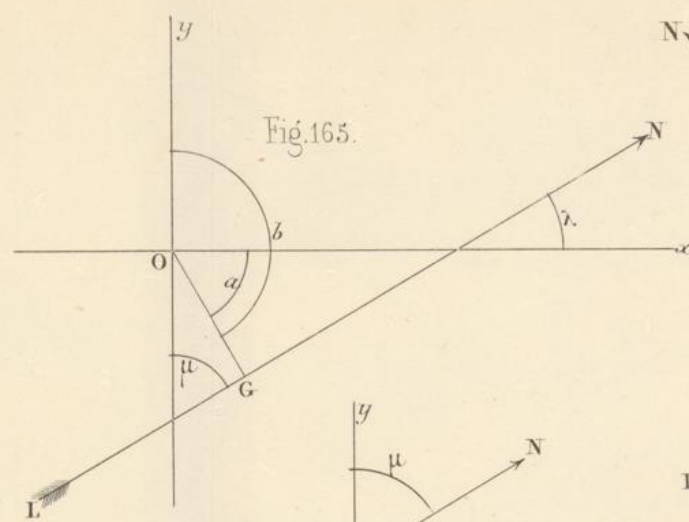
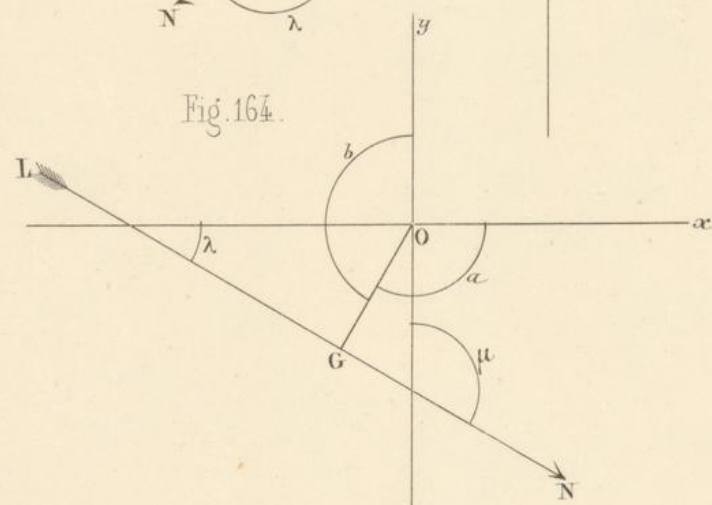
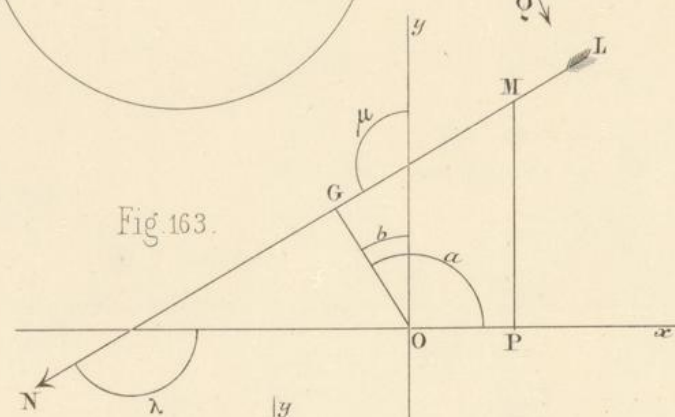
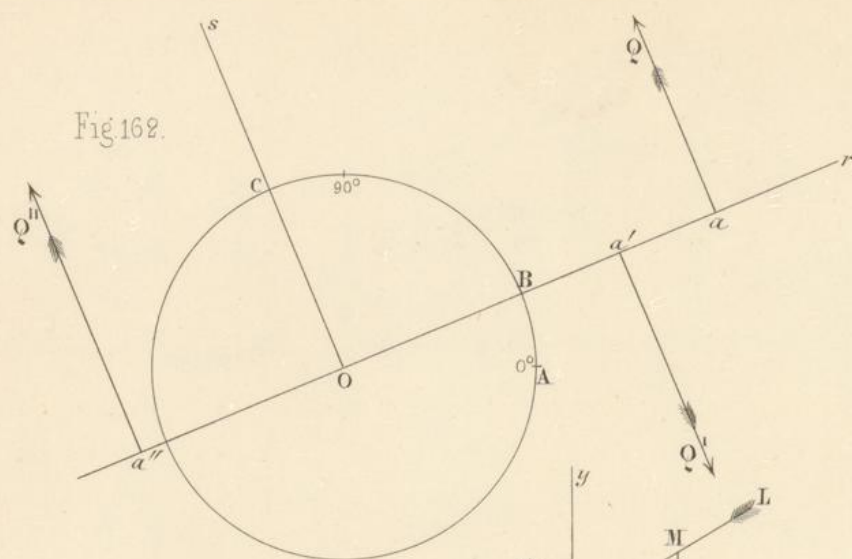
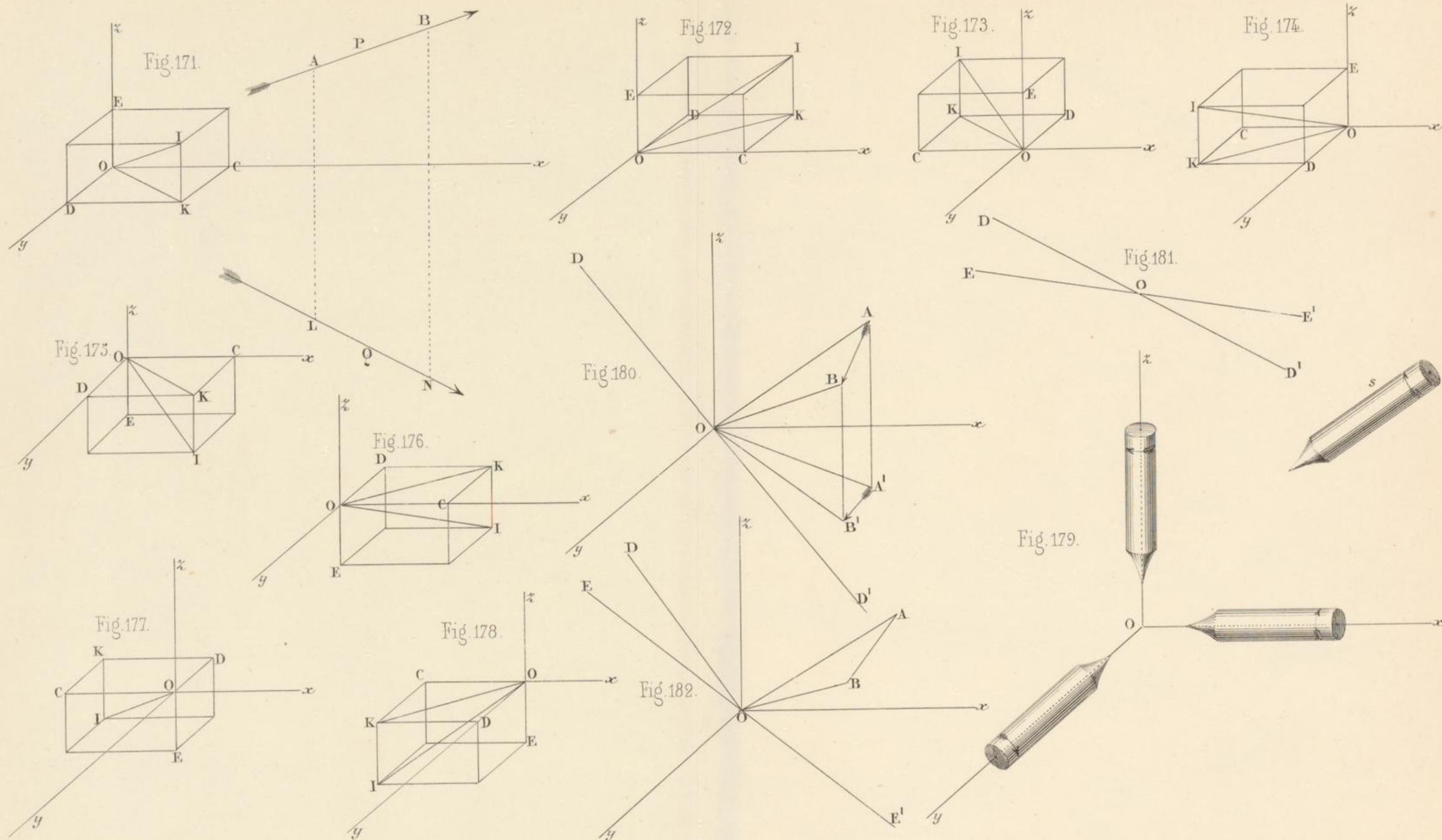
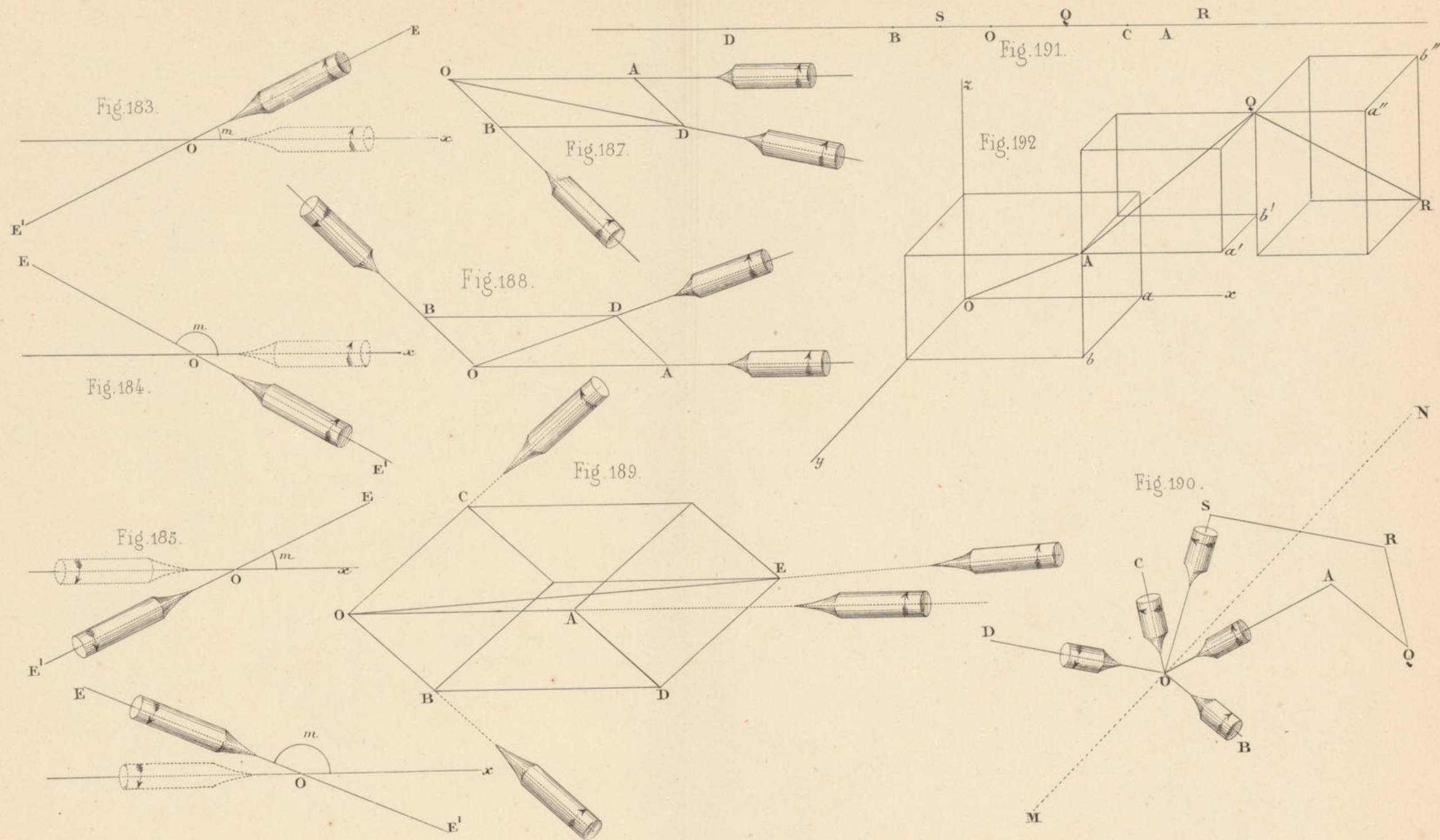


Fig. 161.









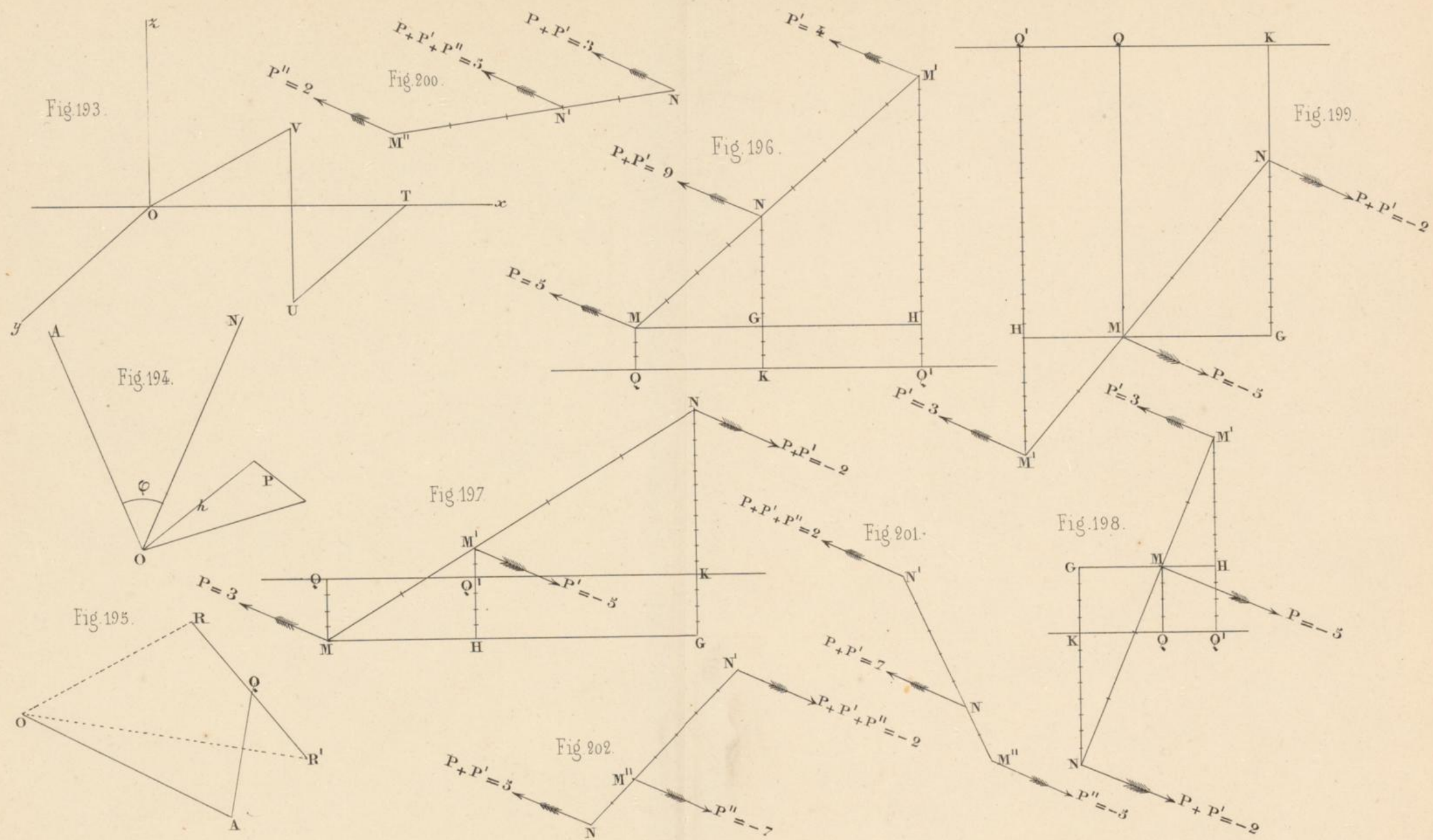


Fig. 203.

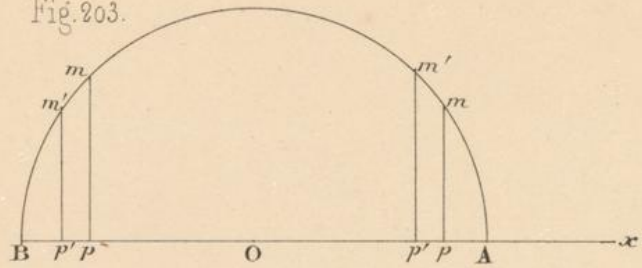


Fig. 204.

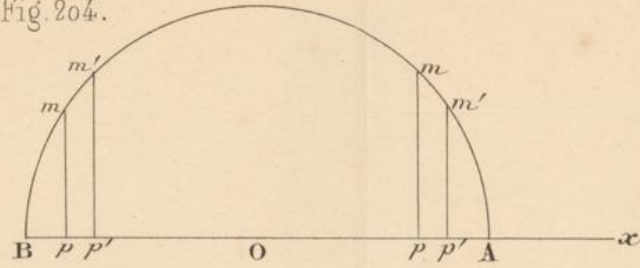


Fig. 205.

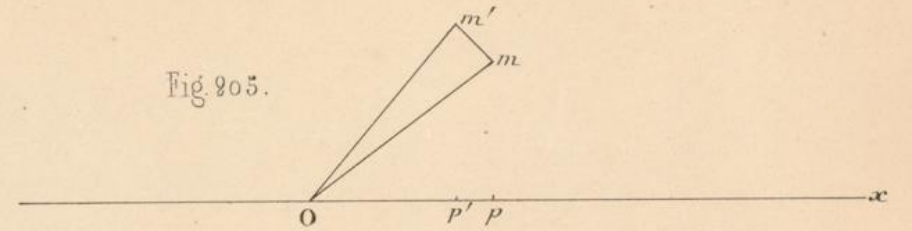


Fig. 206.

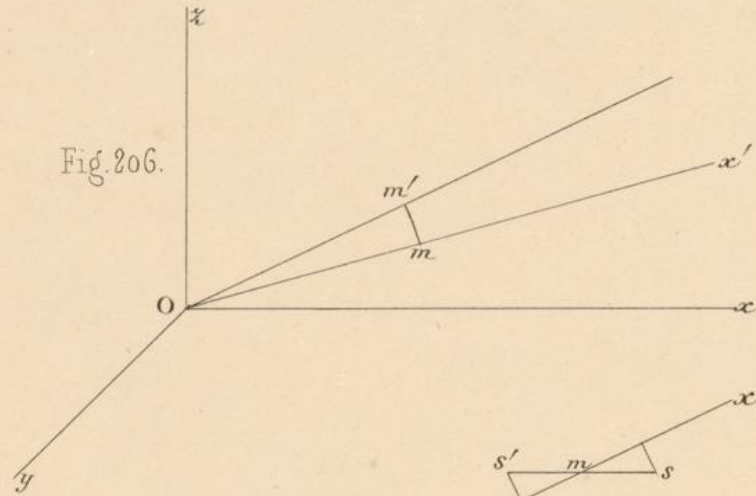


Fig. 207.

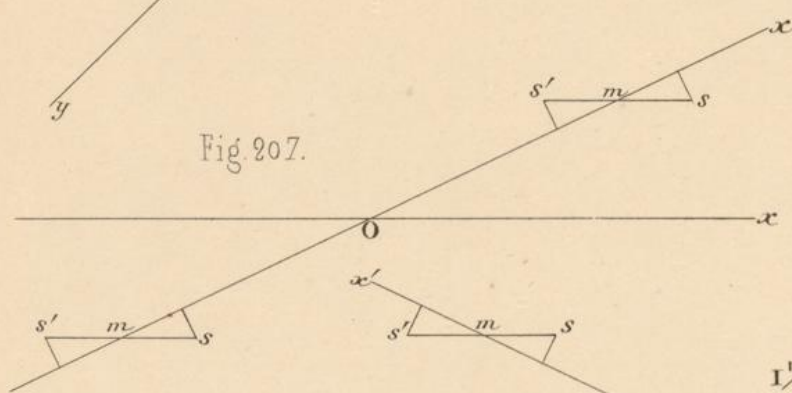


Fig. 208.

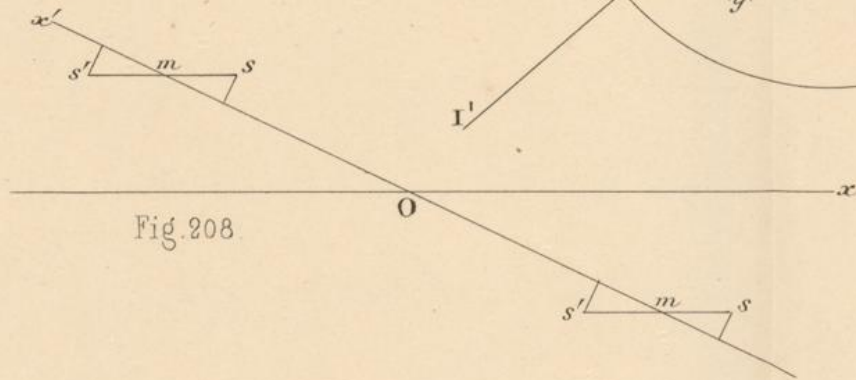


Fig. 209.

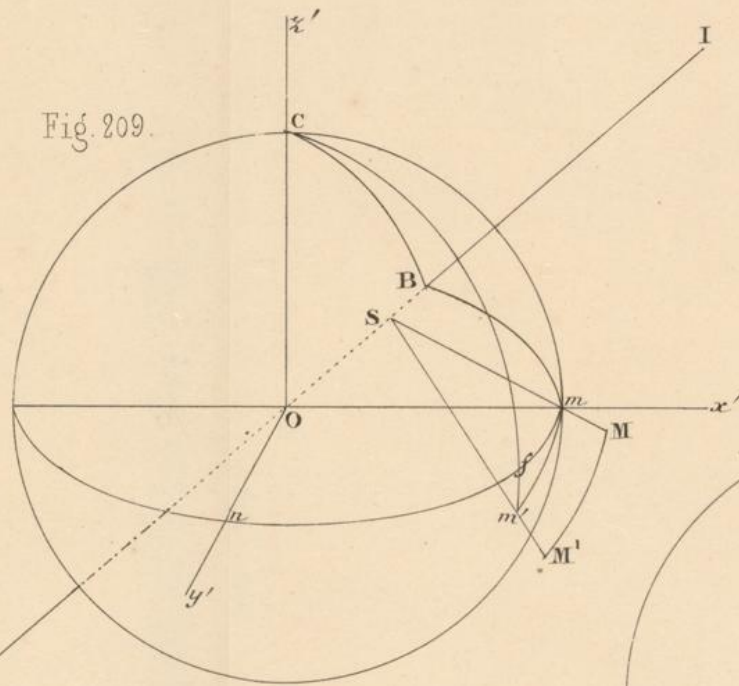


Fig. 210.

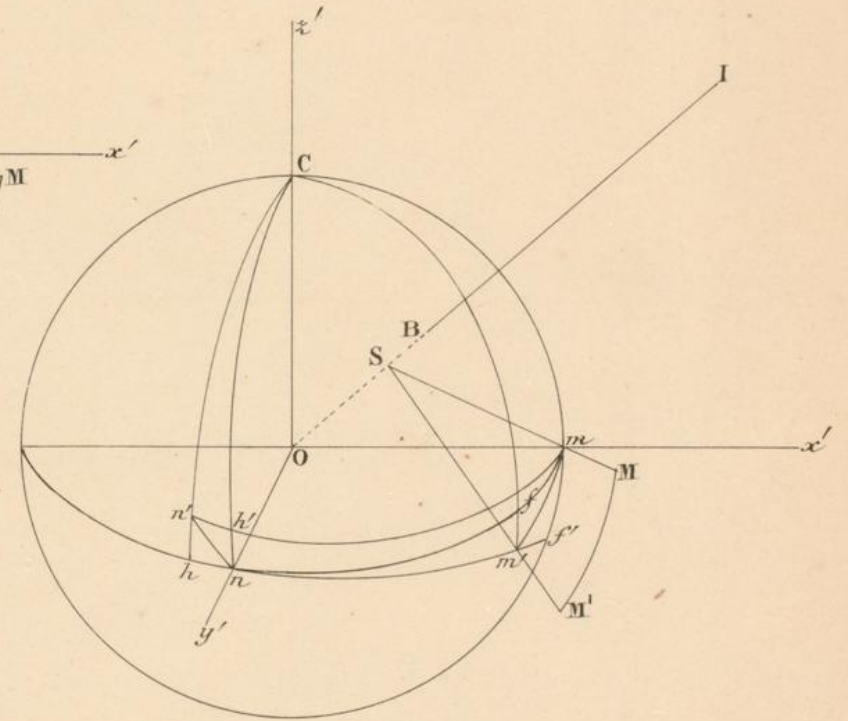
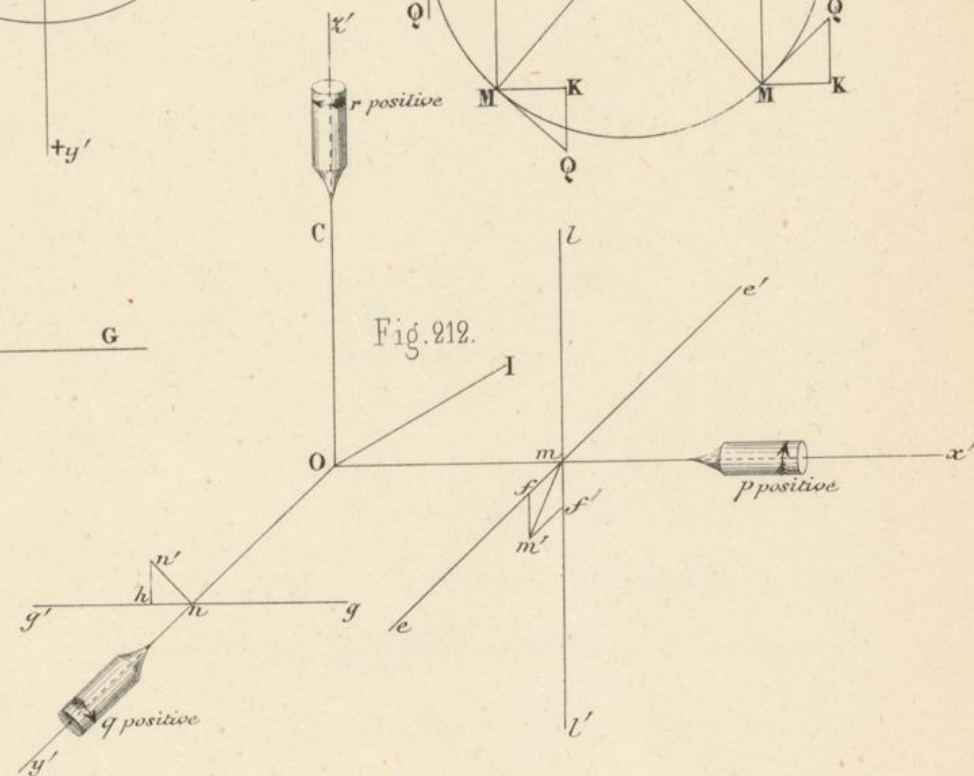
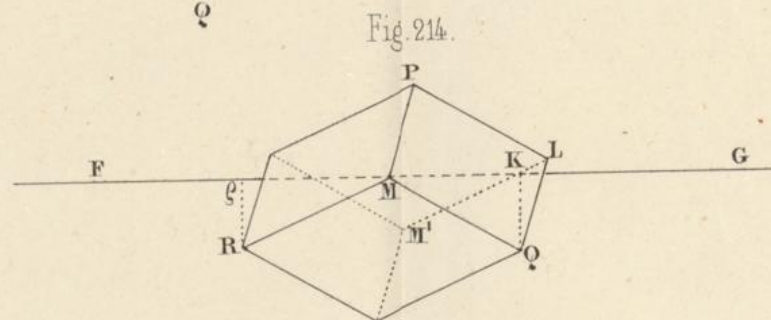
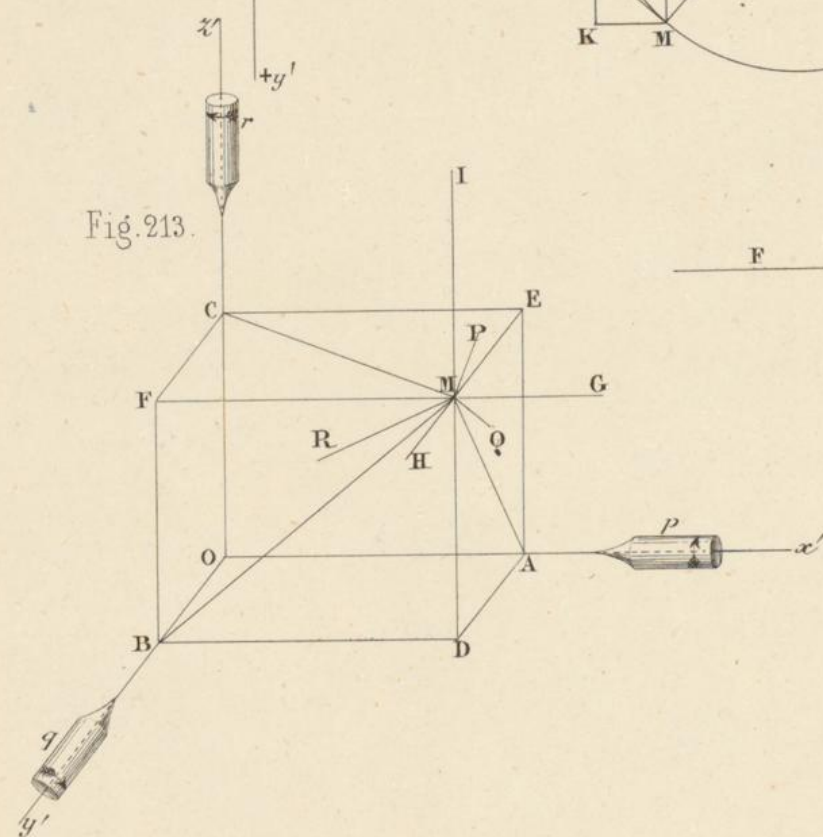
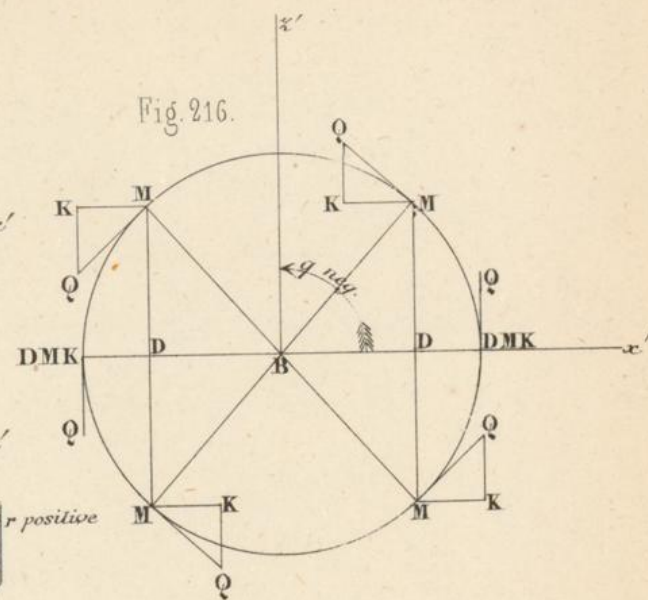
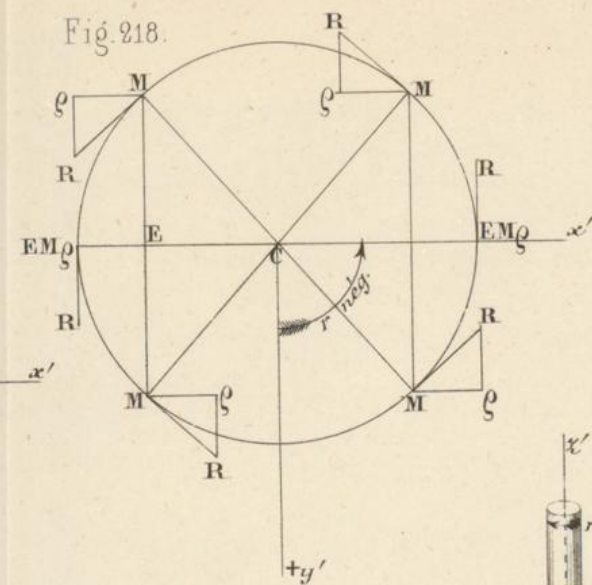
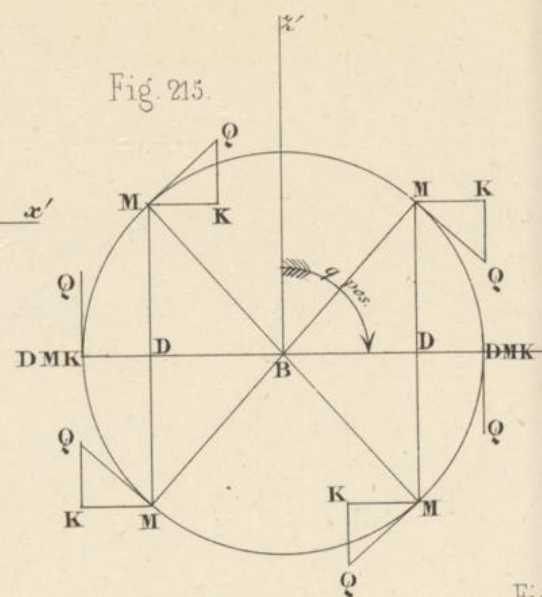
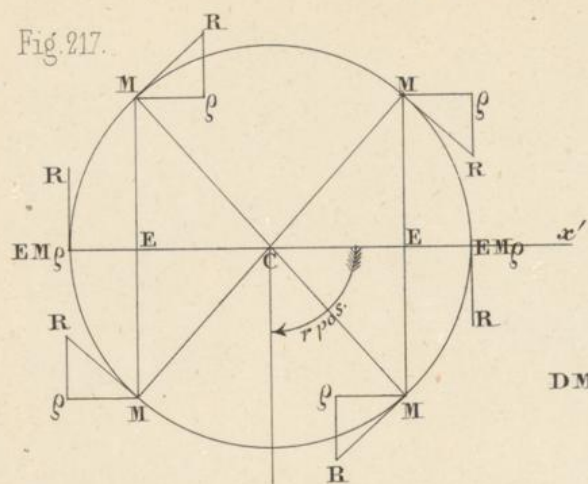


Fig. 211.





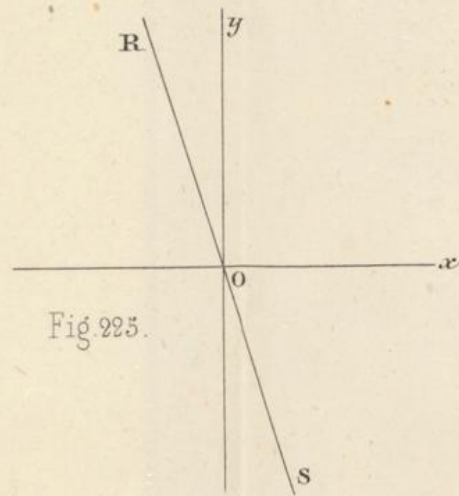
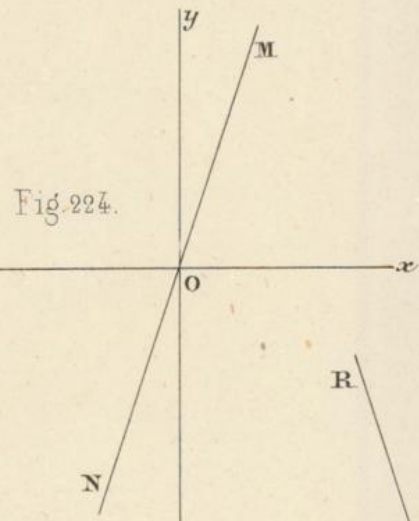
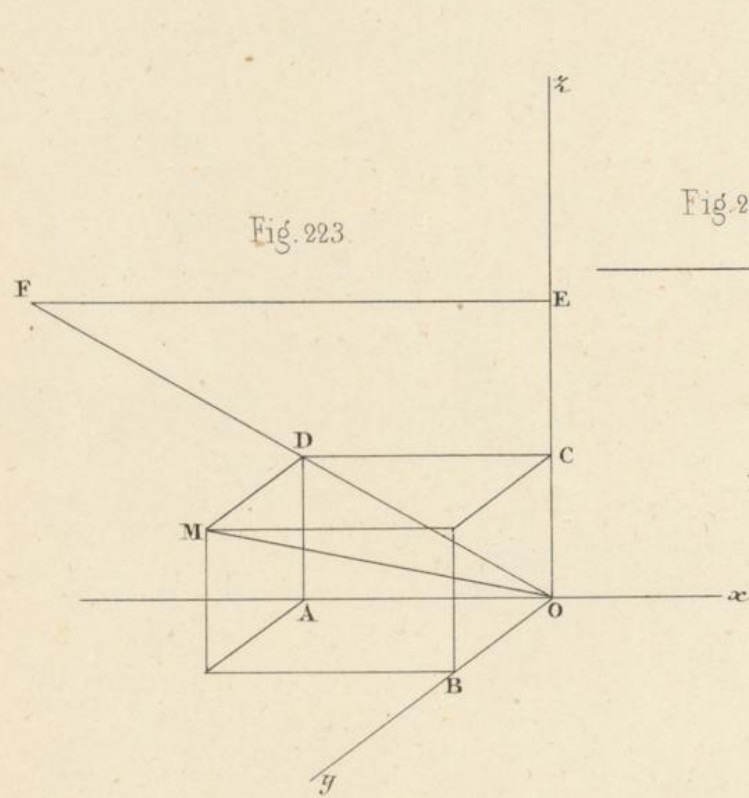
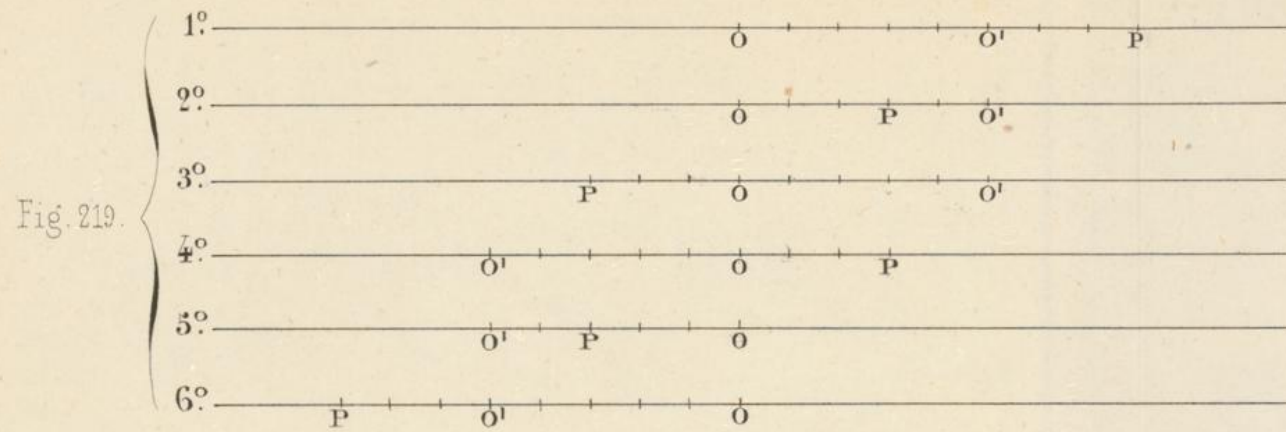
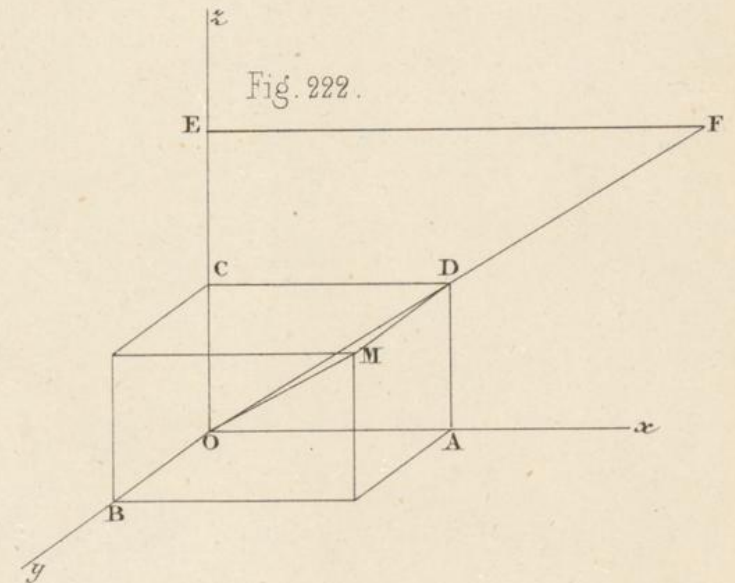
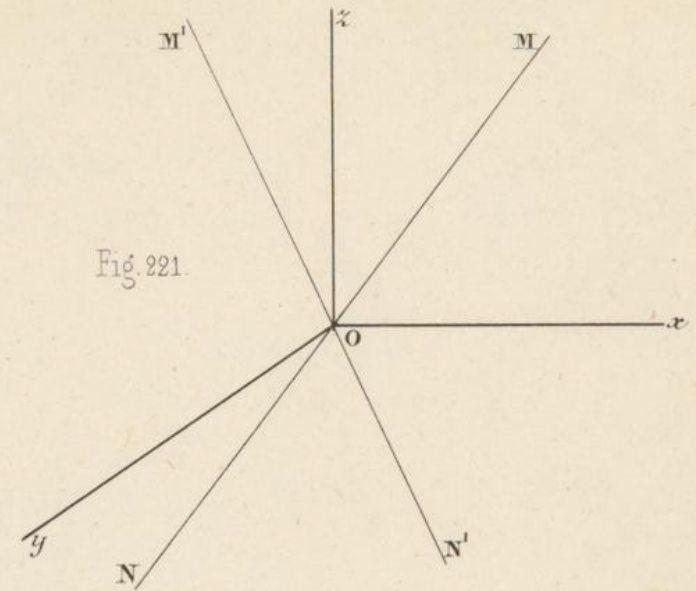
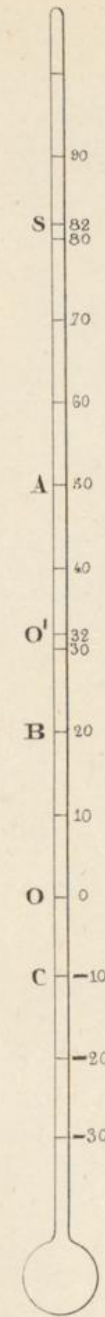
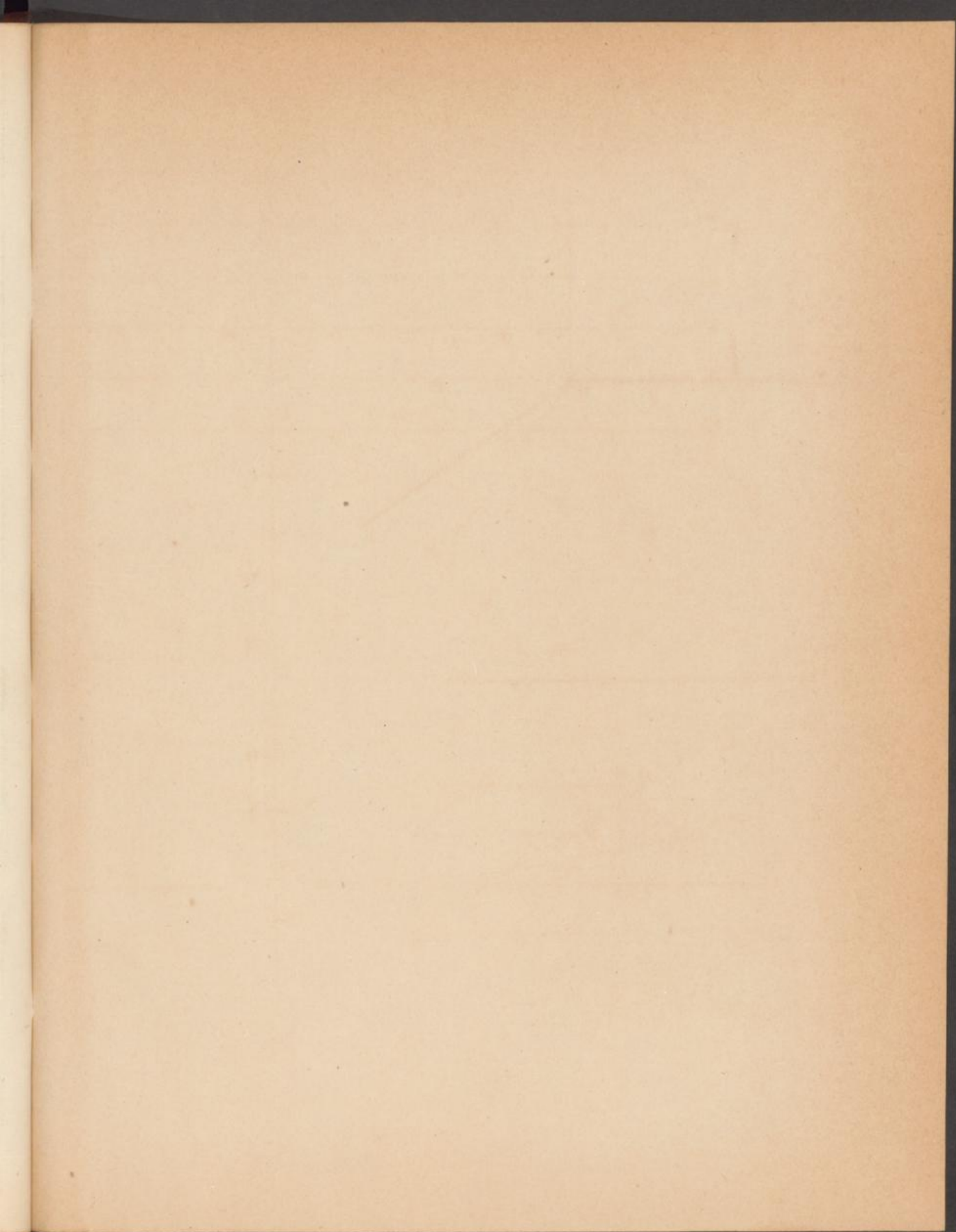
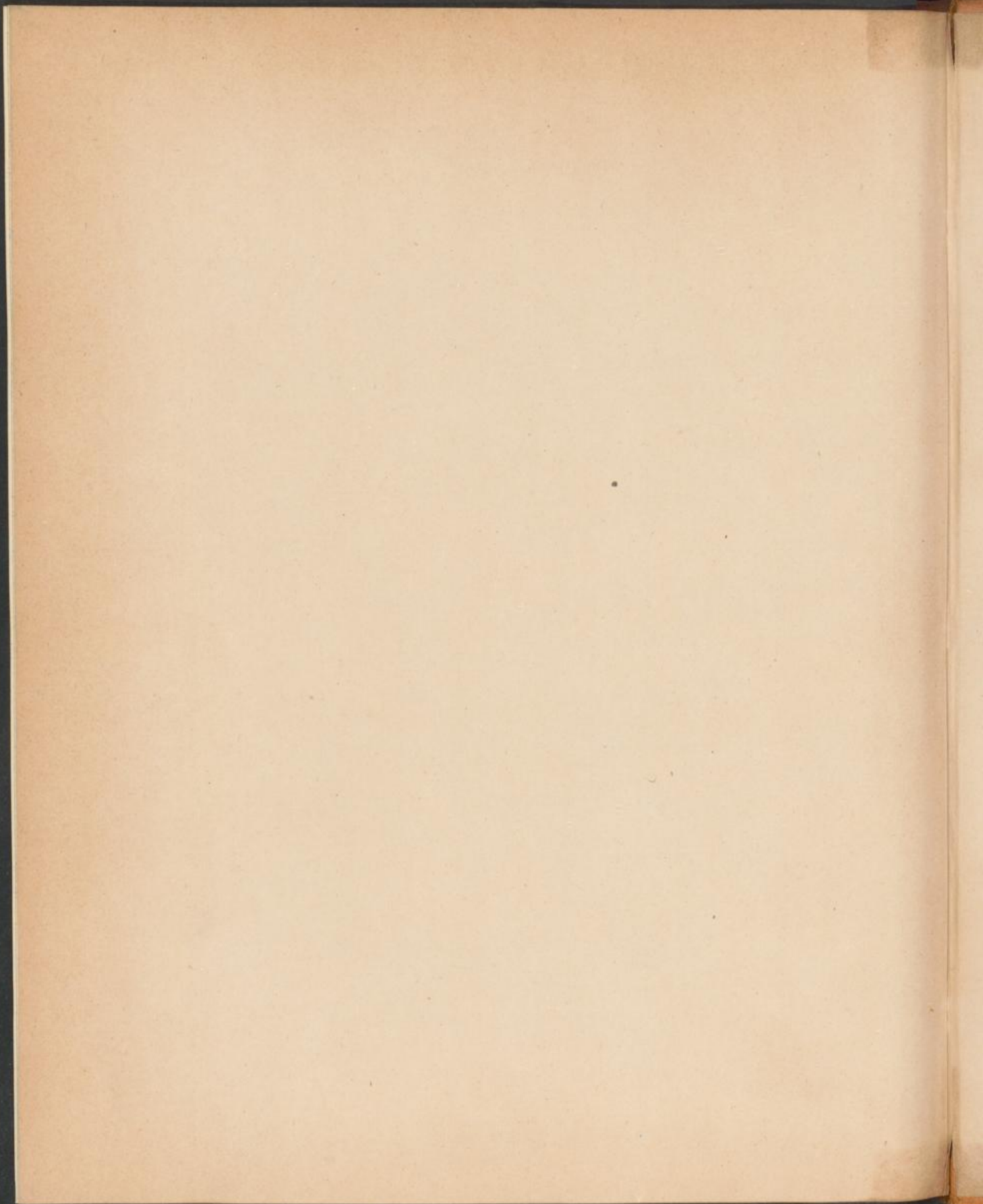


Fig. 220.







ETH Zürich
Bibliothek

7

7891

Abt.	T
------	---

Summer

כ

Band

Teil

Auf.

5

1

11

12/72

BUCHKARTE
Bitte nicht herausnehmen!

34258

