

www.e-rara.ch

**Elemente der Buchstabenrechnung, oder, Vorbereitung auf das
Studium der Algebra und Geometrie**

Tester, Christian

Zürich, 1826

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 22874

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-61559>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

12674

Kav 22874
~~7.2614.~~

3

Legat
von Herrn Professor
J. G. Stocker.

Prague
1848

3 fr.

Elemente

Nr. 63

der

Arten

Buchstabenrechnung,

oder

Vorbereitung

auf das Studium

der

Algebra und Geometrie.

Von

Christian Tester,

öffentlichem Lehrer der Mathematik und Physik in Gruz.



Zürich,

in der Gefnerschen Buchhandlung.

1826.

1760

1760

V o r r e d e.

Es ist beinahe auffallend merkwürdig, daß so zu sagen alle, welche über Jugendbildung sprechen oder schreiben, den Unterricht in der Mathematik als ein vortreffliches Bildungsmittel anpreisen; und daß dessen ungeachtet fast in allen Gymnasien, diejenigen ausgenommen, welche eine besondere Berufsfähigkeit in technischer Hinsicht beabsichtigen, weder von den Anstalten selbst, noch von den Schülern, auch nur ein Viertel so viel Kraft und Zeit auf das Fach der Mathematik verwendet wird, als man auf die Erlernung der lateinischen Sprache verwenden zu müssen glaubt. Es scheint aber, aus der Art und Weise, wie der mathematische Unterricht auf Gymnasien behandelt wird, hervorzugehen, daß diejenigen, welche der Mathematik das Wort reden, oft sich nicht deutlich genug vorstellen, unter welchen Bedingungen und in welcher Beziehung der Unterricht in diesem Fache als Bildungsmittel zu benutzen sei. Würde man diesen Punct genauer überlegen, so könnte man wohl schwerlich zugeben, weder daß dem Studium der Mathematik so wenig Kraft und Zeit gewidmet, noch daß dabei gar

häufig eine bloß inductorische, und mit unter wohl gar eine dogmatische Methode befolgt werde, welche die geistige Entwicklung der Schüler wenig fördern kann, und überdies nicht geeignet ist, junge Leute, die Talent und Lust dazu haben möchten, zum umfassendern Studium der Mathematik zweckmäßig vorzubereiten.

Eine ausführliche Abhandlung über den Unterricht in allen Zweigen der Mathematik und die Bedeutung desselben auf Gymnasien, würde als Vorrede zu meinem kleinen Buch kaum am rechten Orte seyn; aber einige Bemerkungen über den Unterricht in der Buchstabenrechnung glaube ich hier zweckmäßig anbringen zu können.

Was man, nach meiner Ansicht, durch den Unterricht in der Buchstabenrechnung beabsichtigen soll, ist folgendes:

Erstens, einige Begriffe und Urtheile, die dem Menschen von Natur zukommen, eben so gut als Augen und Ohren, ins deutliche Bewußtseyn der Schüler zu bringen; nicht bloß zum Behufe des mathematischen Unterrichtes, sondern auch damit die Schüler einzusehn anfangen, daß das Innere des Menschen, der Geist, eben so wie der Körper und alles andere in der Welt, keineswegs unabhängig zufällig, sondern ganz bestimmten, nicht zu eludirenden Gesetzen unterworfen sei.

Zweitens, Befähigung zum Auffinden derjenigen Merkmale und Verhältnisse der Dinge, durch welche die eigenthümlichen Beschaffenheiten, so wie die gegenseitigen Beziehungen derselben, am meisten begründet und characterisirt werden. Wie sehr, in dieser Absicht zu veranlassende Uebun-

gen nothwendig, und zugleich geistig entwickelnd sind, zeigt sich: wenn man bedenkt, wie häufig im gesellschaftlichen Verkehr sogenannte und auch wirklich gebildete Leute, nur wenig verwickelte Verhältnisse sich durchaus nicht deutlich vorzustellen vermögen, und deswegen, nach dem Sprüchwort, vor lauter Bäumen den Wald nicht sehen; so wie, wenn man zu erfahren Gelegenheit hat, daß, bei Auflösungen von Rechnungsaufgaben, welche das Bekannte nicht in bestimmten Zahlen, sondern in Buchstaben ausgedrückt enthalten, noch ungeübte Schüler auf eine merkwürdige Weise unbehülflich, geübtere hingegen nicht selten eine beinahe überraschende Fähigkeit an den Tag zu legen im Falle sind.

Drittens, Gewöhnung der Schüler an die allerschärfste Begränzung der Begriffe, und an genaue, mit deutlichem Bewußtseyn verbundene Begründung der Urtheile; so wie vielfältige zur Fertigkeit führende Uebung im Combiniren der Begriffe und Urtheile, zur Erwerbung und Festsetzung neuer Urtheile. Wenn man die Schüler an Deutlichkeit der Begriffe und Zusammenhang im Urtheilen, in der Mathematik so zu gewöhnen vermöchte, daß dieselbe Deutlichkeit und derselbe Zusammenhang auch in andern Zweigen des menschlichen Wissens, oder in gewöhnlich vorkommenden Verhältnissen, ihnen zum Bedürfniß würde, so hätte man in pädagogischer Hinsicht etwas Bedeutendes geleistet. Dieses Bedürfniß würde ein Streben nach Befriedigung desselben, und dieses Streben eine Uebung zur Folge haben, welche die Anlage zur genauen Einsicht nach und nach steigern und zur Fähigkeit erheben müßte.

Viertens, Vorbereitung zum Studium der Geometrie, der eigentlichen Algebra, und jedes andern Zweiges der gesammten mathematischen Wissenschaften, für diejenigen, welche mit einzelnen dieser Fächer, der geistigen Entwicklung wegen oder Berufshalber sich beschäftigen wollen, so wie für solche, welche dem Studium der Mathematik aus Liebe zur Wissenschaft ihr Leben zu widmen sich berufen fühlen. Daß es zweckmäßig sei die Buchstabenrechnung dem Unterrichte in der Geometrie vorangehen zu lassen, braucht für Sachkundige nicht bemerkt zu werden. Es gibt aber solche, welche sagen, die Buchstabenrechnung sei schwerer als die Geometrie, und deswegen müsse man, weil es gescheider sei vom Leichtern zum Schwerern überzugehen, beim mathematischen Unterricht auch die Geometrie vor der Buchstabenrechnung behandeln. Ueberdies führen sie noch an: Euklides habe ja die Geometrie vortrefflich gelehrt, ohne unsre Buchstabenrechnung zu kennen. Dieses ist wahr; aber Euklid hat, in Ermangelung unsrer Buchstabenrechnung, im 5ten, 7ten, 8ten, 9ten und 10ten Buche seiner Elemente, zum Behufe der geometrischen Beweise etwas aufgestellt, welches genau zu verstehen und im Zusammenhange zu übersehen, gewiß nicht leichter ist als unsre Buchstabenrechnung. Will man den Unterricht in der Geometrie nicht als einen die Schüler an Ungenauigkeit und Oberflächlichkeit gewöhnenden, und deswegen verderblichen Zeitvertreib behandeln, so muß man es eben machen, wie Euklid es gemacht hat, oder die Buchstabenrechnung, sie mag nun schwer oder leicht seyn, der Geometrie vorangehen lassen; weil dieses in der Natur der Sache

selbst liegt. Die Buchstabenrechnung ist übrigens schwer zu verstehen nur für solche, welche durch die unendlichen Fingulanzereien des tändelnden Lebens, oder durch eine schon längere Zeit fortgesetzte practische Berufesbeschäftigung, so sehr an das Unbestimmte oder auch an das durchaus Concrete gewöhnt sind, daß sie nichts abstract Einfaches mehr aufzufassen vermögen; und für Kinder, welche für den mathematischen Unterricht noch nicht reif sind. Solche Kinder soll man aber auch, weder mit Buchstabenrechnung noch mit Geometrie plagen, sondern durch, auf unmittelbare Anschauung sich gründendes, Kopfrechnen, und Betrachtung von sinnlich anschaulichen Gegenständen, zweckmäßiger beschäftigen, als es, der Natur der Sache nach, durch wirklichen mathematischen Unterricht geschehen kann.

Fünften, gewährt die Buchstabenrechnung bedeutende Vortheile beim Auflösen von schwierigern Rechnungsaufgaben, die zwar nicht gewöhnlich vorkommen, dennoch aber, sowohl bei Privat-Unternehmungen, als in öffentlichen bürgerlichen Verhältnissen sich darbieten können.

Daß es sehr gut wäre, wenn man durch den Unterricht in der Buchstabenrechnung die so eben ausgesprochene fünfsache Absicht erreichen könnte, wird wohl Jedermann ohne weiters zugeben, so wie daß die Möglichkeit der Erreichung dieser Absicht nicht bezweifelt werden könne. Wie aber in dieser Beziehung der Unterricht in der Buchstabenrechnung behandelt werden müsse, ist eine Frage, deren Beantwortung, wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes, den sie betrifft, nicht zu oft versucht werden kann; zumal da, bis auf den

heutigen Tag, hierüber nichts allgemein Anerkanntes gesagt worden ist.

Vor allen Dingen muß man beim Nachdenken über diesen Gegenstand nicht aus der Acht lassen, daß jede geistige Anlage des Menschen nur durch Uebung zur Fähigkeit erhoben werden kann; daß aber die Uebung, wenn durch sie geistige Kraft entwickelt werden soll, bedeutenden Zeitaufwand, nicht geringe Anstrengung und vielfältige Versuche voraussetzt. Deswegen ist es auch beim Unterricht in der Buchstabenrechnung, so wie in der Mathematik überhaupt, wenn dabei irgend etwas Ersprießliches herauskommen soll, eine wirkliche *conditio sine qua non*, daß auf Gymnasien dieses Fach, nicht als eine so ganz und gar subordinirte, wenig zu berücksichtigende Sache angesehen, sondern daß demselben, sowohl von Seiten der Anstalten, in Hinsicht auf Lehrer und Zeit, als auch von den Schülern, in Bezug auf Anstrengung und Fleiß, während den Lehrstunden und zu Hause, die gehörige Rücksicht getragen werde. Man lasse sich ja nicht irre leiten durch glänzende Erscheinungen, die etwa bei Prüfungen, auch in solchen Schulen, wo das Fach der Mathematik sehr stiefmütterlich behandelt wird, häufig zum Vorschein kommen. Etwa den Fall ausgenommen, daß ein talentvoller Schüler aus besonderer Liebe zu mathematischen Beschäftigungen, es sich von selbst herausnehme, mehr Anstrengung und Fleiß auf die Mathematik zu verwenden als in seiner Schule gebräuchlich ist, und daß zugleich der Lehrer privatim sich häufig mit ihm in dieser Beziehung beschäftige; ist es nichts als ein durch specielle Präparation elingeleiteter höchst unverschäm-

ter, für Schüler und Lehrer, in mehr als einer Rücksicht sehr verderblicher Betrug.

Ferner muß man bedenken, daß beim mathematischen Unterricht auch eine mathematische Methode befolgt werden müsse. Man muß nämlich beim Unterricht in der Buchstabenrechnung eben so gut als in der Geometrie:

Erstens, die vorkommenden Begriffe genau bestimmen, und die Merkmale derselben, nicht nur etwa in künstlich geschraubte Redensarten einkleiden, sondern ins deutliche Bewußtseyn der Schüler bringen. Dazu ist aber nöthig, daß jeder Begriff, wenn auch seine Merkmale noch so bestimmt und noch so leicht aufzufassen sind, häufig und auf mannigfaltige Weise construirt werde. In dieser Hinsicht begehen, besonders angehende Lehrer, oft einen sehr nachtheiligen Fehler, indem sie der Sache genug zu thun denken, wenn sie die Merkmale eines nun zu behandelnden Begriffes ganz sprachrichtig ausdrücken, und die Schüler, wie nach einer Zauberformel, dasselbe zu thun im Stande sind.

Zweitens, ist höchst nothwendig, daß man die Schüler mit dem Inhalte der Axiome und dem Verhältnisse derselben zum menschlichen Bewußtseyn genau bekannt mache, und sie vorläufig in hierauf Bezug habenden Anwendungen übe. Es ist ein sehr nachtheiliger Irrthum, wenn man dieses vernachlässigen zu dürfen glaubt, und voraussetzt, die Schüler müssen sich der Axiome, eben weil es Axiome sind, schon hinlänglich bewußt seyn. Die Axiome müssen allerdings im unmittelbaren Bewußtseyn der Schüler liegen; aber dieses Bewußtseyn ist kein deutliches, sondern höchstens ein klares,

und vermag deswegen in vorkommenden Fällen nicht das zu leisten, was man nur von der aus deutlichem Bewußtseyn hervorgehenden Einsicht und Ueberzeugung erwarten darf.

Drittens, soll man kein wirkliches Axiom, durch ein vielleicht weitläufiges, meistens, oder wohl immer, die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes wenigstens zum Theil voraussetzendes Raisonnement beweisen wollen. Dadurch gewinnen die Schüler keine festere Ueberzeugung, sondern werden vielmehr verwirrt, und nicht, wie es seyn soll, gewöhnt deutlich zu unterscheiden, ob man etwas als von selbst allgemein einleuchtend angenommen, oder ob man die Richtigkeit einer Behauptung auf eine überzeugende Weise dargethan habe. Wohl aber soll man alle vorkommenden Lehrsätze, die eines Beweises bedürfen, auch wirklich beweisen, und sie keineswegs so tacite gleichsam einschmuggeln, so daß die Schüler nicht recht wissen, wie sie zu mancher Annahme und Behauptung gelangt sind. Wenn sowohl elende als auch treffliche Advokaten, und vielleicht auch Lehrer sehr sublimen Wissenschaften, nicht selten ihre Zuflucht zu solchen Künsten zu nehmen sich bewogen fühlen, so mögen diese ihre guten Gründe dazu haben; in der Mathematik aber darf so etwas nicht vorkommen, weil, durch den Unterricht in diesem Fache, in den Schülern das Bedürfniß an eine lückenlos zusammenhängende Ueberzeugung geweckt werden soll.

Viertens, was die Beweise selbst anbetrifft, so ist ihr Zweck, auf deutliches Bewußtseyn sich gründende Ueberzeugung von der Richtigkeit und Gültigkeit der Urtheile. Wenn aber dieser Zweck erreicht werden soll, so muß, erstens, jeder

Theil eines Beweises gegründet werden auf deutlich erkannte vorausgesetzte Eigenschaften der Dinge, oder auf schon vorher, entweder allgemein, oder wenigstens in der vorliegenden Beziehung, als gültig anerkannte Urtheile; zweitens muß der Beweis vollkommen seyn, d. h. das Urtheil nicht nur zum Theil, sondern ganz und in allen seinen Beziehungen begründen. — Besonders in der Buchstabenrechnung wird gar häufig gegen diese Erfordernisse eines Beweises gefehlt; indem man eine unvollkommene Induction als einen vollkommenen Beweis gelten läßt. Am meisten begehen diesen Fehler gerade diejenigen Lehrer, von denen es heißt, sie können alles auf eine erstaunliche Weise leicht und faßlich machen. Mit dieser Leicht- und Faßlichmachungsfähigkeit verhält es sich aber so: das inductorische Verfahren ist vorzüglich geeignet verständlich zu machen, was man eigentlich sagen will, so daß die Schüler den Lehrer leicht verstehen. Es ist aber ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Verstehen was einer sagt, und der, auf eigenes Bewußtseyn sich gründenden Ueberzeugung, daß das Gesagte auch seine Richtigkeit habe. Wenn Jemand behauptete $\frac{a}{b}$ sei größer als $\frac{(a+1)}{(b+1)}$, und nun dieses zu beweisen die Quotienten $\frac{7}{3}$ und $\frac{8}{4}$, $\frac{20}{4}$ und $\frac{21}{5}$, $\frac{95}{5}$ und $\frac{96}{6}$ anführte, und dabei, gleichsam zum Ueberfluß, oder um ja recht gründlich zu seyn, noch bemerkte, daß man auch schon aus dem Begriffe des Quotienten dieses herleiten könne: indem, da der Quotient diejenige Zahl sei, welche anzeige, wie viele Male der Divisor im Dividendus enthalten sei, und, wenn b in a etwa 5 Male enthalten wäre, $b + 1$

wohl in $a + 5$, also nicht in $a + 1$, fünf Male enthalten seyn könne, man daraus wohl sehe, daß $\frac{a}{b}$ größer als $\frac{(a+1)}{(b+1)}$ seyn müsse; so möchte dieser, wie ich glaube, so ziemlich nach Art und Weise manches Lehrers der Buchstabenrechnung sprechen, und sogar Schüler, die eben nicht sehr an eigene Ueberzeugung gewöhnt sind, vielleicht hinlänglich befriedigen, obgleich ich, wenn ich ihn auch sehr wohl verstünde, mich doch nicht von der Richtigkeit des Urtheils, $\frac{a}{b}$ ist größer als $\frac{(a+1)}{(b+1)}$, überzeugen könnte. — Nicht zu übersehen ist auch, daß man Beweise, wie sie im 9ten §. meines Büchleins vorkommen, nur dann für vollkommen halten darf, wenn es durchaus deutlich einleuchtend ist, daß für jeden andern Fall der Beweis eben so geführt werden könnte, wie er für den behandelten Fall geführt worden ist. — Sehr wichtig ist aber, daß man die Beweise nicht so vortrage, wie etwa ein Professor auf einer Universität sie vorzutragen pflegt; namentlich bloß docirend, so daß die Zuhörer dabei, wenigstens vor der Hand, nichts anders zu thun haben, als ja recht genau aufzumerken und aufzuschreiben. Dieses ist kaum für wirkliche Studenten auf Universitäten gut, geschweige denn für Knaben, die durch den Gymnasial-Unterricht erst zur Benutzung des Unterrichtes auf Hochschulen befähigt werden sollen. Auf Gymnasien muß der Lehrer, wenigstens im mathematischen Unterricht, nicht zu den Schülern, sondern mit den Schülern über einen vorliegenden Gegenstand sprechen, sie gleichsam zu Mathe ziehen, und, nicht zugebend, daß sie vom Hun-

bertsten außs Tausendste gerathen, die Unterhaltung so leiten, daß jeder einzelne Theil eines Beweises für sich auf einem wirklich deutlichen Bewußtseyn beruhe, und der vollkommene Beweis dadurch eine auf Bewußtseyn gegründete Ueberzeugung hervorbringe. Etwas sehr Wesentliches, aber auch das Schwierigste bei diesem Verfahren ist, daß alle Schüler in ununterbrochener Theilnahme und gespannter Aufmerksamkeit erhalten werden. Weil aber in dieser Rücksicht gar vieles von der Anzahl und Individualität der Schüler abhängt, so lassen sich hierüber keine zureichenden Regeln angeben, und man muß diesen wichtigen Punct, wie vieles andere im Schulwesen, der Fähigkeit des Lehrers anheimstellen. — Theils damit den Schülern die behandelten Sätze und ihre Beweise recht deutlich und geläufig werden, so daß sie eine immer deutlichere Einsicht der Begründung und eine genaue Uebersicht des Zusammenhanges derselben sich erwerben, und bei zu machenden Anwendungen der einzelnen Sätze sogleich erinnern; theils um die Schüler im Combiniren der Begriffe und Urtheile zu üben, ist es nothwendig, daß man oft und auf mannigfaltige Weise repetire. Wenn man das ganze theoretische Pensum des Cursus durchgemacht hat, ist eine sehr erfolgreiche und für die Schüler zugleich angenehme Repetitionsweise diejenige, nach welcher man einen Schüler irgend einen, durch vorhergehende Sätze begründeten Satz beweisen läßt, und nachher eben diesen oder andere Schüler, diejenigen Sätze, auf welche er sich zum Behufe des von ihm geführten Beweises berufen hat, wieder zu beweisen auffordert, und so

fortfährt, bis man auf die unmittelbar aus Begriffen und Axiomen abgeleiteten Sätze zurückkommt.

Fünftens, ist von großer Wichtigkeit, daß man viele Aufgaben, theils in den Lehrstunden, theils zu Hause auflesen läßt. Damit dieses aber, sowohl in Bezug auf Geistesentwicklung, als auch in Hinsicht auf Befähigung zur Fortsetzung des mathematischen Studiums, und zur Auflösung von Rechnungsaufgaben, desto größere Vortheile gewähre, muß man, sobald die Schüler durch die theoretischen Sätze darauf vorbereitet sind, in den Aufgaben die gegebenen Zahlen nicht in Ziffern, sondern in Buchstaben ausdrücken. Dabei sollen aber die Bedingungen der Aufgaben in, den Schülern leicht verständlichen, genau bestimmten Ausdrücken abgefaßt seyn, so daß durchaus keine Zweideutigkeit statt haben kann. Es gibt in dieser Hinsicht zweierlei Aufgaben: entweder sind in der Aufgabe die Bedingungen, unter welchen die Auflösung möglich wird, vollständig enthalten, oder die Natur der Dinge, auf welche die Aufgabe sich bezieht, enthält Bedingungen, die als bekannt vorausgesetzt und deswegen nicht angegeben werden. Z. B. die Uhr zeigt jetzt 5 Stunden und 37 Minuten, wie viele Minuten dauert es bis der Minuten- und der Stundenzeiger auf ein und denselben Punct zeigen. Da die Erfindung der aus den Bedingungen abzuleitenden Gleichungen bei solchen Aufgaben mehr Ueberlegung erfordert, als bei jenen, so sind sie für geübtere Schüler sehr zu empfehlen; man muß sich aber gleichwohl in Acht nehmen, daß man bei den Schülern nicht Kenntnisse voraussetzt, die sie

nicht haben. Thut man dieses, so merken die Schüler, daß sie sich auf jeden Fall vergeblich hätten bemühen müssen, werden mißmuthig und verlieren die Lust zur Anstrengung. Besonders bei Aufgaben, welche zu Hause aufgelöst werden sollen, ist es eine Grundregel, daß man nur solche aufgabe, welche die Schüler ohne fremde Hülfe leicht aufzulösen im Falle wären, wenn sie das, was sie schon wissen und können recht zu benutzen wüßten. Wenn sie auch mit der richtigen Auflösung nicht gut zu Stande kommen, so entmuthigt sie dieses nicht. Es ist mir oft begegnet, daß ein Schüler, um sich zu rechtfertigen, versicherte, es sei ihm unmöglich gewesen die Aufgabe zu lösen, obgleich er mehr als eine Stunde daran gewesen sei; daß aber dieser, sobald ich ihm nur einen Wink gegeben hatte, wie die Sache anzugreifen gewesen wäre, sogleich ausrief: Ach was bin ich doch auch für ein dummer Mensch gewesen; daß ich dieses nicht gemerkt habe; ein anderes Mal soll es mir gewiß nicht wieder so ergehen. — Zur Auflösung einer Aufgabe ist zweierlei erforderlich: erstlich die Erfindung der Gleichungen, welche, den in der Aufgabe ausgesprochenen, und den, durch die Beschaffenheit der Dinge, auf welche sich die Aufgabe bezieht, gegebenen Bedingungen entsprechen; zweitens, daß, die Auflösung herbeiführende zweckmäßige Verändern und Combiniren dieser Gleichungen. In Bezug auf den ersten Punct muß man vorzüglich dahin arbeiten, daß die Schüler sich gewöhnen die Bedingungen der Aufgabe sorgfältig aufzusuchen, genau verstehen zu wollen, und die daraus abzuleitenden Gleichungen mit Bewußtseyn

darauf zu gründen. Zureichende Regeln kann man hierüber nicht geben. Wenn man aber mit den Schülern arbeitet, muß man sich von ihnen, besonders Anfangs, eine bis ins genaueste Detail gehende Rechenschaft ablegen lassen, von allem, was sie in Bezug auf die vorliegende Aufgabe meinen oder behaupten; und wenn einer etwas Unstatthafes behaupten sollte, muß man ihn ja nicht etwa kurzweg mit einem Dummkopf absfertigen, sondern ganz ruhig mit ihm intrin, und so lange untersuchen, ob und in wie fern seine Behauptung den gegebenen Bedingungen entspreche, bis er selbst merkt, daß, und warum er sich geirrt habe. Es ist nicht der Fall, daß dieses ein für den Lehrer langweiliges, und den Schülern unangenehmes und unzweckmäßig scheinendes Verfahren sei, wie man vielleicht meinen, oder wegen gewissenloser Bequemlichkeitsliebe vorgeben möchte; im Gegentheil ist es für den Lehrer meistens sehr interessant, und die Schüler ermunternd, wenn über jeden vorliegenden Gegenstand zuvörderst eine jedem offenstehende gemeinschaftliche Discussion statt hat, und nachher, nicht der Lehrer, vermöge seiner Infallibilität, sondern die jedem gewordene Einsicht entscheidet. Was den zweiten Punct anbetrifft, so ist es, wenigstens Anfangs, sehr zu empfehlen, daß die Schüler jede Veränderung oder Combination der Gleichungen, durch ausdrückliche Anführung der theoretischen Sätze zu begründen angehalten werden. Dadurch werden die Schüler immer mehr gewöhnt, nach einer auf Bewußtseyn sich gründenden ununterbrochenen Ueberzeugung von der Richtigkeit ihrer Verstan-

des=Operationen zu streben, und laufen auch nicht so leicht Gefahr, durch zu weit getriebene Analogie oder aus Unachtsamkeit Fehler zu begehen, die in Bezug auf den unmittelbaren Zweck der vorliegenden Beschäftigung falsche Resultate herbei führen müssen.

Wenn diese Bemerkungen vielleicht nichts enthalten, was für geübte Lehrer in der Mathematik neu wäre, so mögen sie gleichwohl angehende Lehrer veranlassen, über den Unterricht in der Buchstabenrechnung selbst nachzudenken, um an der Hand der Erfahrung, sich desto baldere eine auf eigne Ueberzeugung gegründete Ansicht zu erwerben. Da ich nicht mehr als dieses beabsichtige, so bitte ich, daß meine Bemerkungen auch in dieser Beziehung beurtheilt werden möchten.

Was mein Büchlein selbst anbetrifft, mag es angesehen werden als ein Versuch in den Unterricht in der Buchstabenrechnung mehr mathematische Methode zu bringen, als dabei gewöhnlich beobachtet zu werden pflegt. Ich bin in der mathematischen Literatur nicht so bewandert, daß ich mit Bestimmtheit sagen könnte, ob Jemand, früher oder gegenwärtig, die Elemente der Buchstabenrechnung so dargestellt habe wie ich. Weil ich aber doch manches, was sich hierauf bezieht, recht wohl kenne, und mir durchaus nicht bekannt ist, daß Jemand, in Hinsicht auf die Buchstabenrechnung, eine der meinigen ähnliche Methode befolgt habe, so möchte mein Büchlein, in Bezug auf Methode vielleicht etwas Neues enthalten. Nun weiß ich zwar sehr gut, daß nicht alles Neue vortrefflich, sondern vieles davon, wie manches Alte, so

schlecht ist, daß es niemals hätte geschrieben, und noch viel weniger gedruckt werden sollen. Ob dieses auch in Bezug auf mein Opusculum der Fall sei, oder ob ich, wie ich dafür halte, etwas Besseres geliefert habe als viele andere, mögen Sachkundige entscheiden. Da ich, wie man soll, lieber auf die Wahrheit kommen, als auf jeden Fall recht behalten möchte; so erwarte ich getrost die Beurtheilung meines Werkleins.

Chur, im October 1825.

Der Verfasser.

h
e
e
e
l,
t
g

1.

- I.) Jedes Ding ist das, was es ist.
- II.) Zwei Dinge sind entweder einander
der gleich oder ungleich.
- III.) Wenn zwei Dinge gleich sind, so
sind auch in allen Dingen das
eine für das Andere ersetzbar.
- IV.) Zwei ungleichartige Dinge sind auch
einander gleich groß oder nicht gleich groß.
- V.) Wenn zwei ungleichartige Dinge
zu nicht gleich groß sind, so ist
das eine entweder größer als
das Andere oder kleiner als das Andere.
- VI.) Wenn man zwei Dinge
hinzusetzt, so ist das kleinere ist der geringere
so sind sie gleich groß.

1.

- I) a ist a; b ist b; c ist c, u. s. w.
- II) a ist entweder gleich b oder nicht gleich b.
- III) Wenn a gleich ist b so kann man in jeder Rücksicht a statt b und b statt a nehmen.

2.

- I) Dinge, welche in Hinsicht auf Größe mit einander verglichen werden können, heißen gleichartige Dinge.
- II) Wenn a und b gleichartige Dinge sind, so ist a, entweder gleich groß b, oder nicht gleich groß b.
- II') Im Falle daß a nicht gleich groß b, so ist a, entweder größer als b, oder kleiner als b.
- II'') Wenn von den beiden Dingen a und b keines größer als das andere, und auch keines kleiner als das andere ist, so ist a gleich groß b.
- III) Wenn a gleich groß b, so kann man, wenn bloß die Größe der Dinge zu berücksichtigen ist, a statt b und b statt a nehmen.
- IV) Wenn a größer ist als b, und b größer ist als c, so ist a größer als c.
- V) Jedes Ding ist so groß als alle Theile aus denen es besteht zusammengenommen; aber größer als jeder einzelne Theil allein.

VI) Wenn a größer ist als b , so ist irgend ein Theil von a so groß als b .

3.

I) $a + b$ oder $b + a$ bedeutet, daß die beiden Dinge a und b zusammen gethan worden seyen.

II) Die Figur $— a$ bedeutet ein Ding, welches so beschaffen ist, daß, wenn man es zu dem Dinge a hinzuthut, aus dieser Verbindung nichts entsteht; so daß $a + — a$ so viel als nichts bedeutet. Jedes von den beiden Dingen a und $— a$ heißt das Entgegengesetzte des andern.

II') Wenn $a + b$ so viel als nichts ist, so heißt auch jedes von den beiden Dingen a und b das Entgegengesetzte des andern.

III) Zwei Dinge, von welchen jedes das Entgegengesetzte des andern ist, sind gleich groß.

Denn, weil, wenn man zwei Dinge, von denen jedes das Entgegengesetzte des andern ist, zusammen thut, aus dieser Verbindung nichts entsteht, so müssen diese beiden Dinge, so wie sie zusammengethan werden, einander gegenseitig vernichten oder aufheben. Da aber ein Ding, wenn es zu einem andern größern Dinge, als es selber ist, hinzugethan wird, dasselbe nicht vernichten oder aufheben kann, so folgt, daß von zweien Dingen, die jedes das Entgegengesetzte des andern sind, keines das größere seyn kann; und daß sie also (vermöge 2, II'') gleich groß seyn müssen.

IV) Die beiden Dinge $n + — r$ und $— n + r$ sind jedes das Entgegengesetzte des andern.

Denn wenn man sie zusammen thut, gibt es $n + — r + — n + r$. In dieser Figur aber be-

III. Wenn zwei Dingen gleich groß
sind, so kann man, wenn es bloß die
Größe der Dingen betrifft, sagen, sie
sind gleich groß, das Bedenken ist.

4.

II.) Wenn zwei Dinge gleich groß und gleich-
artigem Wasser sind, so kann man
sich nur bloß darüber vorstellen, ob
die Dinge gleich groß und gleich-
artigem Wasser sind, das eine
stark das andere weniger.

III.) Wenn zwei Dinge gleich groß und
gleichartig sind, Wasser sind und man
nimmt jedem Dinge dasselbe Wasser, so
wird das was daneben steht das gleiche
große gleichartige Wasser sein.

deutet, (vermöge II), sowohl $n + -n$ als auch $-r + r$ so viel als nichts; folglich bedeutet die ganze Figur so viel als nichts, und es ist also, (vermöge II'), von den beiden Dingen $n + -r$ und $-n + r$ jedes das Entgegengesetzte des andern.

- V) Das Ding a bestehe aus $q + q + q + q$, das Ding b bestehe aus $q + q + q$, so heißen a und b, in Bezug auf einander, Dinge gleichartigen Werthes.

Besteht aber das x aus $n + n + n + n + n$ und z aus $-n + -n + -n$, so heißen x und z, in Bezug auf einander, Dinge entgegengesetzten Werthes.

Wenn nämlich zwei gleichartige Dinge zusammengethan werden, und es entsteht daraus etwas größeres als jedes der beiden Dinge, so heißen sie Dinge gleichartigen Werthes; werden aber zwei gleichartige Dinge zusammengethan, und es entsteht daraus etwas kleineres als das eine, oder jedes der beiden Dinge, so heißen sie Dinge entgegengesetzten Werthes.

4.

- I) Daß die beiden Dinge v und y gleich groß und gleichartigen Werthes seyen, wird so angezeigt:

$$v = y.$$

- II) Wenn $a = b$, so kann man in allen Fällen, wo es bloß darauf ankommt, ob die Dinge gleich groß und gleichartigen Werthes seyen, a statt b und b statt a nehmen.

- III) Es sei $q = v$, und es werde mit beiden dasselbe vorgenommen, so wird das, was aus dem q entsteht, gleich groß und gleichartigen Werthes seyn dem was aus dem v entsteht.

5.

- I) Zwei oder mehrere gleichartige Dinge zusammenthun heißt addiren. Das was aus der Addition entsteht wird die

Summe genannt; und in Beziehung auf die Summe heißen die addirten Dinge Glieder der Summe.

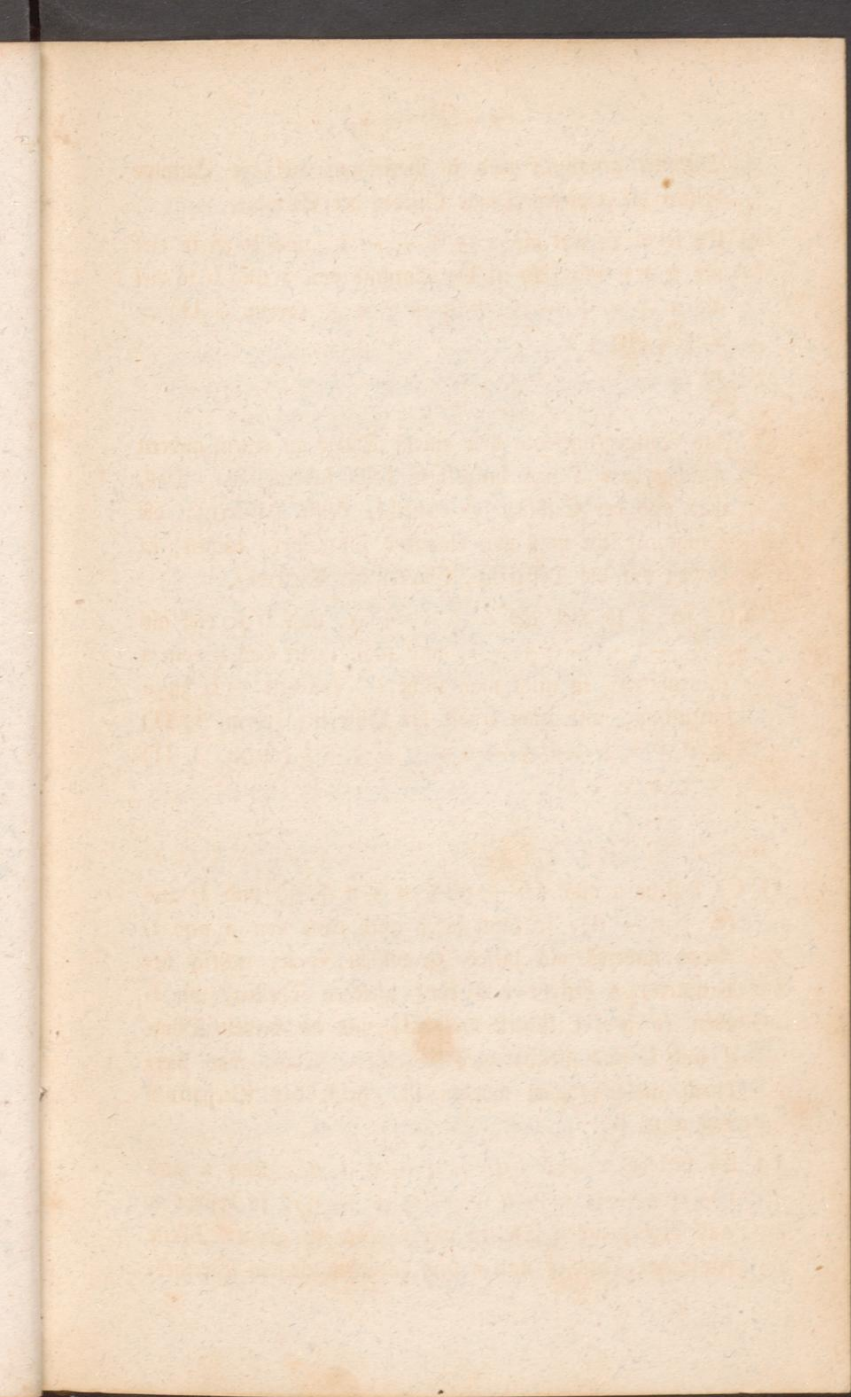
- II) Es sei a so viel als $x + z + -y$, und b sei so viel als $q + r + y$, so ist die Summe von a und b so viel als $x + z + -y + q + r + y$ (verm. 3 II) = $x + z + q + r$.

6.

- I) Das Entgegengesetzte von einem Dinge zu einem andern gleichartigen Dinge hinzuthun heißt subtrahiren. Das, was aus der Subtraction entsteht, heißt Differenz; die Dinge, welche man von einander subtrahirt, heißen, in Bezug auf die Differenz, Glieder der Differenz.
- II) Es sei a so viel als $n + v - q$, und b so viel als $n + -y + -q + -z$, und man wolle das b vom a subtrahiren, so muß man nicht b , sondern $-b$ zu a hinzuthun; und man erhält die Differenz (verm. 3, II) = $n + v + -q + -n + y + q + z$ (verm. 3. II) = $v + y + z$.

7.

- I) Es bestehe a aus $(n + n + n + n + n)$ und b aus $(n + n + n)$, so kann jeder auch ohne von a und b etwas anderes als dieses zu wissen, ganz richtig behaupten: a besteht aus fünf gleichen Theilen, wie b eben so großer Theile drei hat, und die beiden Dinge a und b sind gleichartigen Werthes. Das, was hierdurch ausgesprochen worden ist, heißt das Verhältniß von a zu b .
- I') Es bestehe x aus $(q + q + q + q)$, und z aus $(-q + -q + -q + -q + -q)$, so besteht x aus vier gleichen Theilen wie z eben so großer Theile fünf hat, und x und z sind entgegengesetzten Werthes.



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS
1911

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS
1911

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS
1911

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS
1911

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS
1911

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS
1911

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
CHICAGO, ILLINOIS
1911

Das, was hierdurch ausgesprochen worden ist, heißt das Verhältniß von x zu z .

I") Es bestehe v aus $(-r + -r + -r + -r)$, und y aus $(-r + -r + -r + -r + -r + -r + -r)$, so besteht v aus vier gleichen Theilen, wie y eben so großer Theile sieben hat, und v und y sind gleichartigen Werthes. Das, was hierdurch ausgesprochen wird, heißt das Verhältniß von v zu y .

II) Um anzuzeigen, daß man bloß das Verhältniß von p zu q in Betrachtung zu ziehen habe, schreibt man:

$$p : q,$$

so daß diese Figur, weder p noch q , sondern das Verhältniß von p zu q bedeutet. Die beiden Dinge p und q heißen Glieder des Verhältnisses; besonders wird p das Vorderglied, q das Hinterglied genannt.

III) Es bestehe a aus $(n + n + n + n + n + n + n)$, b aus $(n + n + n + n)$, c aus $(r + r + r + r + r + r + r)$, und d aus $(r + r + r + r)$,

$$\frac{a}{(n + n + n + n + n + n + n)} : \frac{b}{(n + n + n + n)}$$

und

$$\frac{c}{(r + r + r + r + r + r + r)} : \frac{d}{(r + r + r + r)}$$

so ist das Verhältniß von a zu b gleich dem Verhältnisse von c zu d . Denn in jedem dieser Verhältnisse besteht das Vorderglied aus sieben gleichen Theilen, wie das Hinterglied eben so großer Theile viere hat, und die Glieder jedes dieser Verhältnisse sind gleichartigen Werthes.

III') Es bestehe x aus $(n + n)$, v aus $(n + n + n + n + n)$, y aus $(-q + -q)$, und z aus $(-q + -q + -q + -q + -q)$,

$$\frac{x}{(n+n)} : \frac{v}{(n+n+n+n+n)}$$

und

$$\frac{y}{(-q+-q)} : \frac{z}{(-q+-q+-q+-q+-q)}$$

so ist das Verhältniß von x zu v gleich dem Verhältniſſe von y zu z. Denn in jedem dieser beiden Verhältniſſe beſteht das Vorderglied aus zwei gleichen Theilen, wie das Hinterglied eben ſo großer Theile fünf hat, und die Glieder jedes dieser Verhältniſſe ſind gleichartigen Werthes.

III'') Es beſtehe s aus $(n+n+n)$, k aus $(-n+-n+-n+-n)$, g aus $(-r+-r+-r)$, und h aus $(r+r+r+r)$,

$$\frac{s}{(n+n+n)} : \frac{k}{(-n+-n+-n+-n)}$$

und

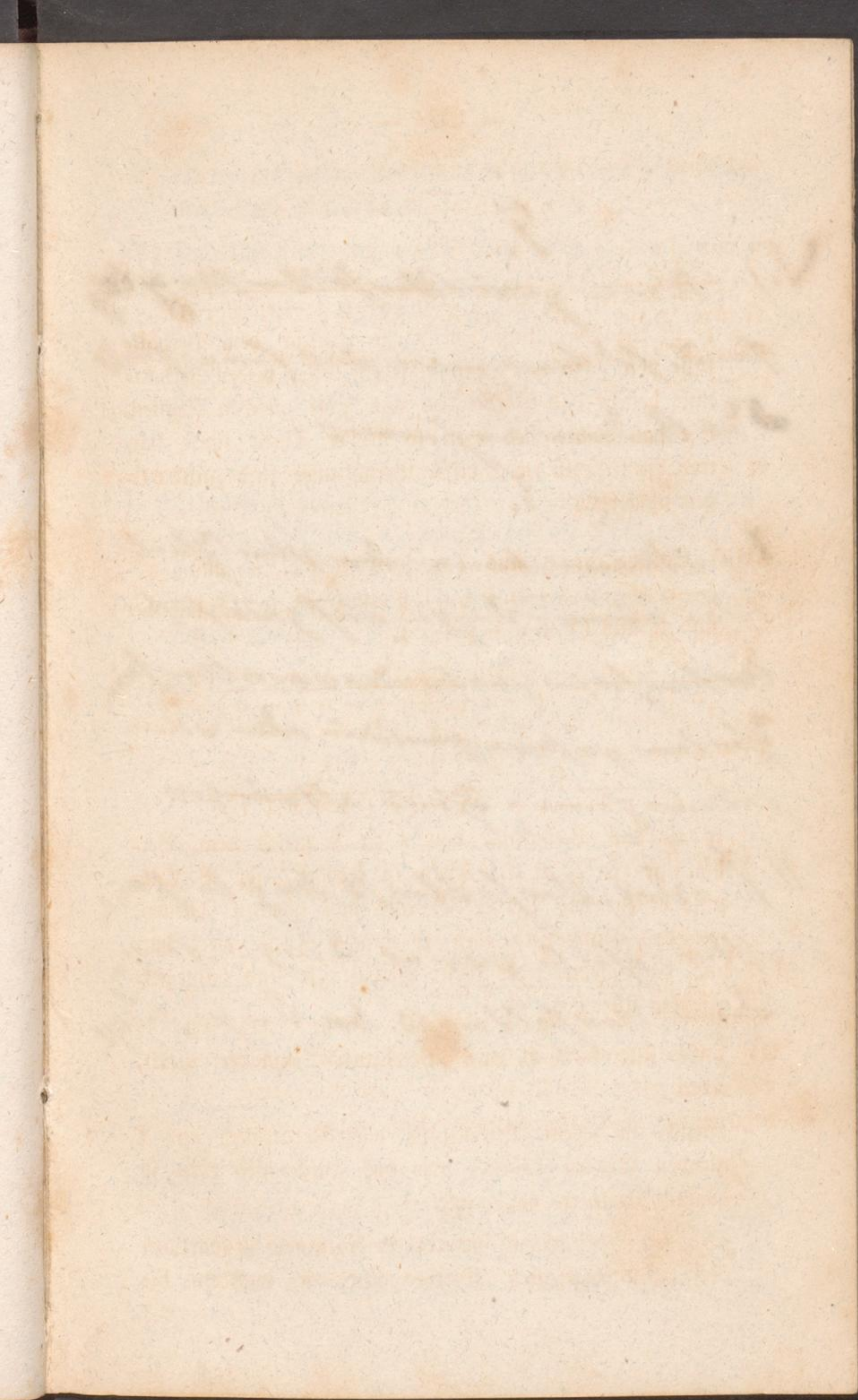
$$\frac{g}{(-r+-r+-r)} : \frac{h}{(r+r+r+r)}$$

ſo iſt das Verhältniß von s zu k gleich dem Verhältniſſe von g zu h. Denn in jedem dieser Verhältniſſe beſteht das Vorderglied aus drei gleichen Theilen, wie das Hinterglied eben ſo großer Theile viere hat, und die Glieder jedes dieser Verhältniſſe ſind entgegengesetzten Werthes.

III''') Es ſind nämlich zwei Verhältniſſe einander gleich, wenn

1stens, in jedem Verhältniſſe das Vorderglied aus f gleichen Theilen beſteht, wie das Hinterglied eben ſo großer Theile m hat; und

2dens, die Glieder des zweiten Verhältniſſes gleichartigen oder entgegengesetzten Werthes ſind, je nachdem die



7.

V.) Wenn zwei Morsfältchens
sind, so kann man das eine
das andere aufnehmen.

8.

I.) Man kann den von Spiel
man einem Ding auf gewisse
Bestandtheile, wie man es will, seinen
Spielern zuschreiben, oder es
jedem seiner Spieler allein.

II.) Das Morsfältchens der Spielerei
den Spielern gewisse Dinge ist
dem Morsfältchens der Dinge selbst.

Glieder des ersten Verhältnisses gleichartigen oder entgegengesetzten Werthes sind.

IV) Daß das Verhältniß von a zu b gleich sei dem Verhältniß von c zu d wird so angezeigt:

$$a : b :: c : d$$

V) Wenn $v : y :: x : z$, so kann man $v : y$ statt $x : z$ und $x : z$ statt $v : y$ nehmen.

8.

I) Es bestehe a aus $(n + n + n + n + n)$, und es sei a' der v te Theil von a , und n' der v te Theil von n , so ist $(n' + n' + n' + n' + n')$ auch der v te Theil von a , oder so viel als a' ; so daß man annehmen kann a' bestehe aus $(n' + n' + n' + n' + n')$.

II) Es sei a' der v te Theil von a und b' der v te Theil von b , so ist

$$a' : b' :: a : b.$$

Denn wenn

A) $\frac{a}{(n + n + n + n + n)} : \frac{b}{(n + n + n + n)}$
so ist, weil n' auf jeden Fall der v te Theil von n seyn wird, (vermöge I)

$\frac{a'}{(n' + n' + n' + n' + n')} : \frac{b'}{(n' + n' + n' + n')}$
so daß sich aus der unmittelbaren Anschauung die Gleichheit der beiden Verhältnisse $a' : b'$ und $a : b$ ergibt.

Wenn aber

B) $\frac{a}{(n + n + n + n + n)} : \frac{b}{(-n + -n + -n + -n)}$
so ist, da (vermöge 3, III) n und $-n$ gleich groß sind, auch der v te Theil von n (verm. | 2, III) gleich groß dem v ten Theile von $-n$, so daß, wenn n' der

vte Theil von n ist, $-n'$ der vte Theil von $-n$ seyn muß. Man erhält also (verm. I)

$$\frac{a'}{(n' + n' + n' + n' + n')} : \frac{b'}{(-n' + -n' + -n' + -n')'}$$

so daß sich, auch für diesen Fall, die Gleichheit der beiden Verhältnisse $a' : b'$ und $a : b$ aus der unmittelbaren Anschauung ergibt.

9.

- I) Wenn zwei gleiche Verhältnisse sind, und man setzt statt irgend zweier Glieder ihr Entgegengesetztes, so gibt es wieder zwei Verhältnisse, die einander gleich sind.

Es sei

$$\frac{a}{q + q + q + q} : \frac{b}{q + q + q + q + q}$$

A) $\frac{a}{(q + q + q + q)} : \frac{b}{(q + q + q + q + q)}$

∴

$$\frac{c}{(r + r + r + r)} : \frac{d}{(r + r + r + r + r)'}$$

so erhält man durch das Setzen des Entgegengesetzten der Glieder b und c

$$\frac{a}{q + q + q + q} : \frac{-b}{-q + -q + -q + -q + -q}$$

A') $\frac{a}{(q + q + q + q)} : \frac{-b}{(-q + -q + -q + -q + -q)}$

∴

$$\frac{-c}{-r + -r + -r + -r} : \frac{d}{(r + r + r + r + r)}$$

$\frac{(-r + -r + -r + -r)}{(r + r + r + r + r)}$

Denn in jedem dieser beiden Verhältnisse besteht das Vorderglied aus vier gleichen Theilen, wie das Hinterglied eben so großer Theile fünf hat, und die Glieder jedes dieser beiden Verhältnisse sind entgegengesetzten Werthes.

Es sei

$$\frac{g}{-n + -n + -n} : \frac{h}{n + n + n + n}$$

B) $\frac{g}{(-n + -n + -n)} : \frac{h}{(n + n + n + n)}$

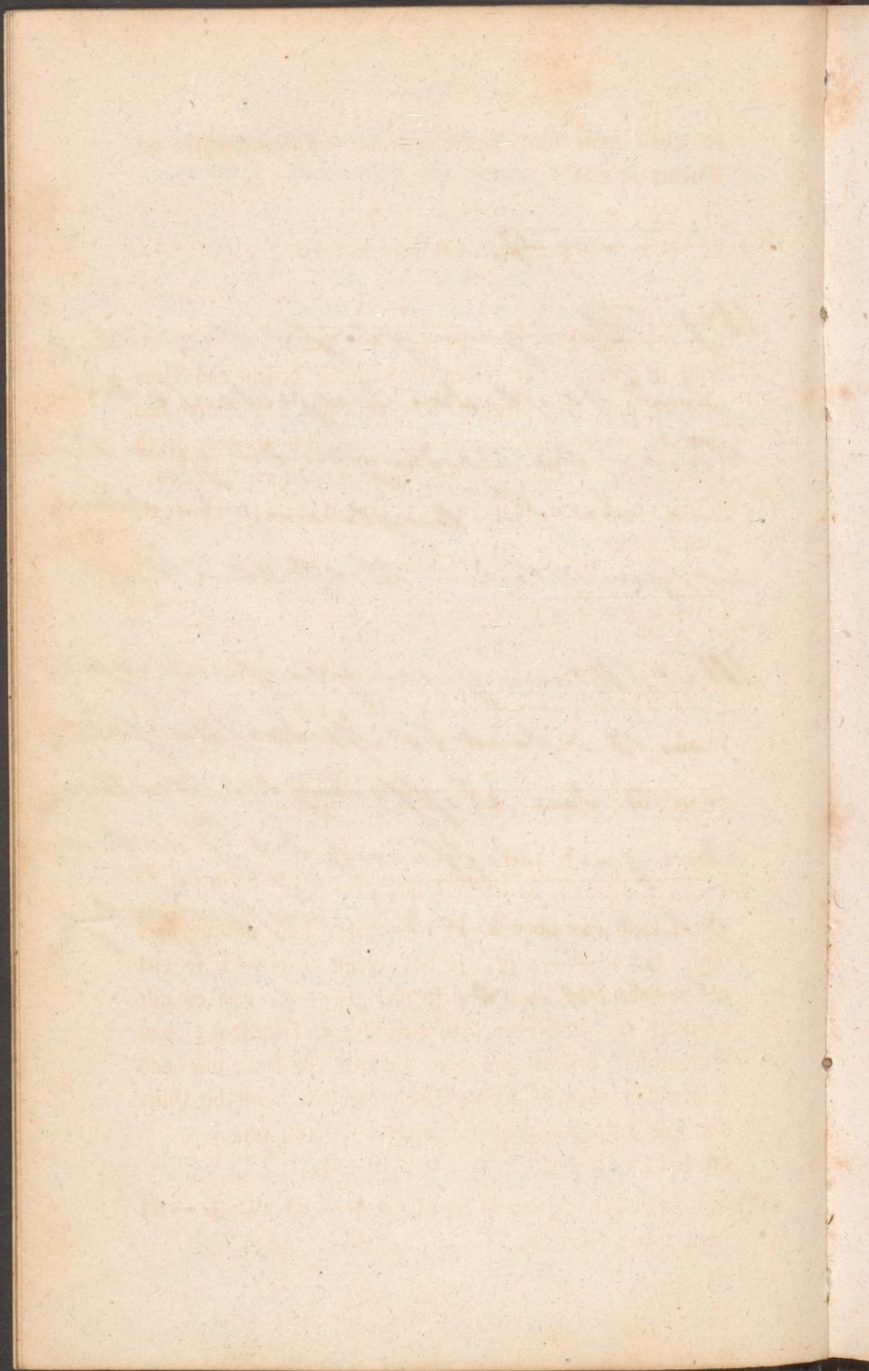
∴

$$\frac{k}{r + r + r} : \frac{v}{-r + -r + -r + -r}$$

$\frac{(r + r + r)}{(-r + -r + -r + -r)}$

II.) Mennigmal gleiche Mordfällch.
 sind, so ist das Mordfällch. der
 Thäter das Mordfällch. der Thäter, und
 das Mordfällch. der Thäter das Mordfällch.
 der Thäter, und das Mordfällch. der Thäter
 das Mordfällch. der Thäter.

III.) Mennigmal gleiche Mordfällch.
 sind, so ist das Mordfällch.
 der Thäter das Mordfällch. der Thäter, und
 das Mordfällch. der Thäter das Mordfällch.
 der Thäter, und das Mordfällch. der Thäter
 das Mordfällch. der Thäter.



so erhält man durch das Setzen des entgegengesetzten der
Glieder k und v ,

$$B') \frac{\frac{g}{(-n \div -n \div -n)}}{(-r \div -r \div -r)} : \frac{\frac{h}{(n \div n \div n \div n)}}{(r \div r \div r \div r)}$$

$$\frac{-k}{(-r \div -r \div -r)} : \frac{-v}{(r \div r \div r \div r)}$$

denn in jedem dieser beiden Verhältnisse besteht das Vorderglied aus drei gleichen Theilen, wie das Hinterglied eben so großer Theile viere hat, und die Glieder jedes dieser beiden Verhältnisse sind entgegengesetzten Werthes.

II) Es sei $a : b :: c : d$, so ist $(a \div c) : (b \div d) :: a : b :: c : d$.

Denn wenn

$$\frac{a}{(n \div n \div n \div n)} : \frac{b}{(-n \div -n \div -n)}$$

$$\frac{c}{(-r \div -r \div -r \div -r)} : \frac{d}{(r \div r \div r \div r)}$$

so ist

$$\frac{(a \div c)}{(n \div -r \div n \div -r \div n \div -r \div n \div -r \div n \div -r)}$$

$$\frac{(b \div d)}{(-n \div r \div -n \div r \div -n \div r)} :: a : b :: c : d.$$

Denn weil (vermöge 3, IV) $-n \div r$ das Entgegengesetzte des $n \div -r$ ist, so ist, wenn $n \div -r$ so viel als x bedeutet, $-n \div r$ so viel als $-x$, und es gilt demnach für jedes der drei Verhältnisse folgendes: das Vorderglied besteht aus vier gleichen Theilen, wie das Hinterglied eben so großer Theile drei hat, und die Glieder sind entgegengesetzten Werthes. Es ist also

$$(a \div c) : (b \div d) :: a : b :: c : d.$$

III) Es sei $a : b :: c : d$ so ist $(a \div -c) : (b \div -d) :: a : b :: c : d$.

Denn wenn $a : b :: c : d$, so ist (verm. I) auch
 $a : b :: -c : -d$, folglich (verm. II)
 $(a \div -c) : (b \div -d) :: a : b :: c : d$.

IV) Wenn $a : b :: c : d$, so ist auch $a : c :: b : d$.

Denn wenn

$$\frac{a}{(n \div n \div n \div n)} : \frac{b}{(-n \div -n \div -n \div -n \div -n)} \\ :: \frac{c}{(-r \div -r \div -r \div -r)} : \frac{d}{(r \div r \div r \div r \div r)}$$

so ist n der vierte Theil von a und $-r$ der vierte Theil von c , folglich (vermöge 8, II)

$n : -r :: a : c$, und hieraus (verm. I)

A) $-n : r :: a : c$.

Es ist aber auch $-n$ der fünfte Theil von b , und r ebenfalls der fünfte Theil von d , folglich (verm. 8, II)

B) $-n : r :: b : d$.

Folglich aus A und B, (verm. 7, V)

$$a : c :: b : d,$$

10.

I) Wenn $a : b :: x : x$, so ist $a = b$

II) Wenn $a : x :: b : x$, so ist $a = b$.

Denn wenn

$a : x :: b : x$, so ist, (verm. 9, IV),

$a : b :: x : x$, also, (verm. I)

$$a = b.$$

11.

Die Figur $a . b$ heißt Product aus a und b , und bedeutet ein solches Ding, daß

$$a . b : b :: a : 1.$$

Die beiden Dinge a und b heißen in Bezug auf $a . b$

IV.) Wenn zwei mit Würfeln ansehnliche
 sind, so ist das Würfelspiel der
 Würfelspieler gleich dem Würfelspiel
 der Hinterspieler.

10.

I.) Wenn zwei gleich große Würfelspieler sind
 und die Spieler des einen Würfelspieler
 sind gleich groß und gleichartig an
 Wurf, so sind die Spieler des anderen
 gleich groß und gleichartig an Wurf.

II.) Wenn zwei gleich große Würfelspieler sind
 die Hinterspieler sind gleich groß und
 gleichartig an Wurf, so ist es der
 der Würfelspieler oder der Spieler des einen
 zu setzen. II.

11.

I.) Ein Spieler a b spielt das Produkt
 von a und b und b und c und c und a, so ist die
 des Würfelspieler gleich dem a b.

I.) Wenn zwei Producten sind, die einen gemeinsamen Factor haben, so ist das Product des einen Productes zu einer nicht gemeinsamen Factor gleich dem Product des anderen Productes zu einer nicht gemeinsamen Factor. -

II.) Wenn 2. Producten sind, die einen gemeinsamen Factor haben, so ist das Product des einen Productes zu einer gemeinsamen Factor gleich dem Product des anderen Productes zu einer gemeinsamen Factor. -

I.) Wenn ein Product aus einem Factor ist, so ist dieses gleich groß wie gleichzeitigen Product des anderen Factor. -

II.) Wenn man ein Product fortsetzt, so ist dieses gleich groß wie gleichzeitigen Product des anderen Factor. -

I. und II.) Wenn der eine Factor

Factoren oder Glieder des Productes. Das Product aus den Factoren und dem 1 bestimmen heißt multipliciren. Für a, b sagt man es sei b mit a zu multipliciren.

12.

I) $a, x : x :: a, y : y.$

Denn es ist (verm. 11)

$$a, x : x :: a : 1, \text{ und}$$

$$a, y : y :: a : 1, \text{ folglich (verm. 7, V)}$$

$$a, x : x :: a, y : y.$$

Vermöge 9, IV erhält man aus I auch

II) $a, x : a, y :: x : y.$

13.

I) $1, a = a.$

Denn es ist (verm. 11)

$$1, a : a :: 1 : 1, \text{ folglich (verm. 10, I)}$$

$$1, a = a.$$

II) $(-1), a = -a.$

Denn es ist (verm. 11)

$$(-1), a : a :: -1 : 1, \text{ also (verm. 9, I)}$$

$$(-1), a : -a :: -1 : -1, \text{ folglich (verm. 10, I)}$$

$$(-1), a = -a.$$

14.

I) $(-a), b = -a, b$

Denn es ist (verm. 11)

$$(-a), b : b :: -a : 1, \text{ und}$$

$$a, b : b :: a : 1, \text{ folglich (verm. 9, I).}$$

$$-a, b : b :: -a : 1, \text{ also (verm. 7, V)}$$

$$(-a), b : b :: -a, b : b, \text{ und demnach (verm. 10, II)}$$

$$(-a), b = -a, b.$$

II) $a, (-b) = -a, b.$

Denn es ist (verm. 11)

$$a.(-b) : -b :: a : 1, \text{ und}$$

$$a. b : b :: a : 1, \text{ folglich (verm. 7, V)}$$

$$a.(-b) : -b :: a.b : b; \text{ aber hieraus (verm. 9, I)}$$

$$a.(-b) : -b :: -a.b : -b, \text{ also (verm. 10, II)}$$

$$a.(-b) = -a.b.$$

III) Aus I und II folgt (verm. 4, II)

$$(-a).b = a.(-b)$$

IV) $(-a).(-b) = a.b$

Denn es ist (verm. 11)

$$(-a).(-b) : -b :: -a : 1 \text{ und}$$

$$a. b : b :: a : 1, \text{ also (verm. 9, I)}$$

$$a.b : -b :: -a : 1, \text{ folglich (verm. 7, V)}$$

$$(-a).(-b) : -b :: a.b : -b, \text{ und demnach (verm. 10, II)}$$

$$(-a).(-b) = a.b.$$

15.

I) Die Figur $n.v.x$ bedeutet ein Product aus n und v, x , und heißt ein Product aus drei Factoren.

Die Figur $q.n.v.x$ bedeutet ein Product aus q und n, v, x , und heißt ein Product aus vier Factoren.

Oder allgemein bedeutet $a.b.c.d....q.r$ ein Product aus a und $b.c.d....q.r$, und heißt ein Product aus n Factoren.

II) $a.b = b.a.$

Denn es ist (verm. 11)

$$a.b : b :: a : 1, \text{ und}$$

$$b.a : a :: b : 1, \text{ also (verm. 9, IV)}$$

$$b.a : b :: a : 1, \text{ folglich, (verm. 7, V)}$$

$$a.b : b :: b.a : b, \text{ und hieraus (verm. 10, II)}$$

$$a.b = b.a.$$

III) $n.v.p = p.n.v.$

Denn es ist (verm. 11 und I)

1) nimmt Produktungsgeldes ist, so wird
das ganze Produktungsgeldes. —

II) Wenn die Faktoren eines Produk-
tes ungeteilt sind, so ist das Produkt
positiv.

15.)

II. II' II'' II''' Die Ordnung der Fak-
toren ist gleichgültig. — Ein Produkt
kann man die Ordnung der Faktoren
ändern, so daß das Produkt dieselbe
Größe bleibt. —

IV) Wenn man ein Produkt aus zwei
Faktoren setzt wie dann das eine a. b
und das andere c. d. e. ist, so ist die
das Produkt gleich groß und gleich,
wenn man dasselbe dem Produkt
aus a. b. c. d. e. —

$n.v.p : v.p :: n : 1$, (verm. 12, II und 7, V),
 $:: v.n : v.1$, (verm. II), $:: n.v : 1.v ::$, (verm. 13, I),
 $:: n.v : v$, (verm. 12, II und 7, V), $:: p.n.v : p.v$,
 (verm. II.) $:: p.n.v : v.p$; also (verm. 7, V und 10, II)
 $n.v.p = p.n.v.$

II'') $a.b.c.d = c.a.d.b.$

Denn es ist (vermäge 11 und I)

$a.b.c.d : b.c.d :: a : 1$, (verm. 12, II u. 7, V), $:: b.a : b.1$,
 (verm. II und 13, I), $:: b.a : b$, (verm. 12, II) $:: d.b.a : d.b$,
 (verm. II'), $:: a.d.b : d.b$, (verm. 12, II), $:: c.a.d.b : c.d.b$.
 (verm. II') $:: c.a.d.b : b.c.d$; also, (verm. 7, V u. 10, II)
 $a.b.c.d = c.a.b.d.$

II''') Eben so kann man beweisen, daß die Ordnung der
 Factoren das Product nicht ändert, wenn auch 5, 6, 7,
 oder so viel man will, Factoren sind. Wenn nämlich der
 Satz für ein Product aus n Factoren bewiesen ist, kann
 er, wie oben bewiesen werden für ein Product aus
 $(n + 1)$ Factoren.

III) Die Figur $(a.b).(c.d.e)$ bedeutet ein Product aus
 zwei Factoren, von denen der eine $a.b$, der andere
 $c.d.e$ ist.

IV) $(a.b).(c.d.e) = a.b.c.d.e.$

Denn es ist (verm. 11)

$(a.b).(c.d.e) : c.d.e :: a.b : 1$, also (verm. 9, IV)
 $(a.b).(c.d.e) : a.b :: c.d.e : 1$, (verm. 12, II) $:: b.c.d.e : b.1$,
 (verm. II u. 13, I) $:: b.c.d.e : b$, (verm. 12, II) $::$
 $a.b.c.d.e : a.b$; folglich (verm. 7, V u. 10, II)
 $(a.b).(c.d.e) = a.b.c.d.e.$

16.

I) Ein Product aus beliebig vielen gleichen Factoren heißt
 eine Potenz jedes dieser Factoren; nämlich $a, a, a, \dots, a$
 ist eine Potenz des Factors a .

Ist eine Potenz ein Product aus n gleichen Factoren, so heißt sie die n te Potenz. Es ist nämlich a, a die 2te, a, a, a die 3te, a, a, a, a die 4te Potenz des Factors a .

II) Es bedeutet a^2 so viel als a, a ; a^3 so viel als a, a, a ; a^4 so viel als a, a, a, a ; und a^n so viel als $a, a, a, a, \dots, a$.

In den Figuren a^2, a^3, a^4 , und a^n heißen die Zahlen 2, 3, 4 und n Exponenten der Potenz.

17.

I) $a^n \cdot a^v = a^{(n+v)}$

Denn es ist (verm. 16. II)

$a^n \cdot a^v = (a, a, a, \dots, a) \cdot (a, a, a, a, \dots, a)$, (verm. 15, IV),
 $= a, a, a, \dots, a, a, a, a, \dots, a$, und dieses ist offenbar ein
 Product aus $(n + v)$ gleichen Factoren, also verm. 16, II)
 $= a^{(n+v)}$; folglich (verm. 4, II)

$$a^n \cdot a^v = a^{(n+v)}$$

II) $(a^n)^v = a^{v \cdot n}$.

Denn es ist (vermöge 16. II)

$(a^n)^v = a^n, a^n, a^n, \dots, a^n$, (verm. I), $= a^{(n+n+n+\dots+n)}$
 $= a^{v \cdot n}$; folglich (verm. 4, II)

$$(a^n)^v = a^{v \cdot n}$$

III) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Denn es ist (vermöge 16, II)

$a^n \cdot b^n = (a, a, a, \dots, a) \cdot (b, b, b, \dots, b)$, (verm. 15, IV) =
 $a, a, a, \dots, a, b, b, b, \dots, b$, (verm. 15, II'''), =
 $a, b, a, b, a, b, \dots, a, b$, (verm. 15, IV) =

16.

II) Ein Fingerring ist das ist
und er wird bedacht sein
und es ist das, was man
a. H. -

I) Wenn man drei Produkte hat,
 die den ersten Faktor gemeinschaftlich
 hat haben, so sind diese gleich einem
 Produkte, dessen erster Faktor der
 gemeinschaftliche Faktor, der zwischen
 die zwei (Differenz) der nicht gemein-
 schaftlichen Faktoren ist.

II.) Wenn man drei Produkte
 hat, die den zweiten Faktor gemein-
 schaftlich haben, so sind diese gleich
 einem Produkte, dessen erster Faktor,
 der die zwei (Differenz) der nicht
 gemeinschaftlichen Faktoren, der gemein-
 schaftliche Faktor der gemeinschaftlichen ist.

$(a.b).(a.b).(a.b)....(a.b), (\text{verm. 16, II}) = (a.b)^n$, also,
(verm. 4, II)

$$a^n.b^n = (a.b)^n.$$

18.

I) $a.b \div a.q \div -a.v = a.(b \div q \div -v)$

Denn es ist (verm. 11)

$$a.b : b :: a : 1,$$

$$a.q : q :: a, 1,$$

$$a.v : v :: a : 1, \text{ und}$$

$$a.(b \div q \div -v) : (b \div q \div -v) :: a : 1, \text{ also (verm. 7, V)}$$

$$a.b : b :: a.q : q :: a.v : v :: a.(b \div q \div -v) : (b \div q \div -v).$$

Hieraus aber (verm. 9, II und 7, V)

$$(a.b \div a.q) : (b \div q) :: a.v : v; \text{ folglich (verm. 9, III u. 7, V)}$$

$$(a.b \div a.q \div -a.v) : (b \div q \div -v) :: a.(b \div q \div -v) : (b \div q \div -v);$$

und demnach (verm. 10, II)

$$a.b \div a.q \div -a.v = a.(b \div q \div -v).$$

II) $a.x \div b.x \div -c.x = (a \div b \div -c).x.$

Denn es ist (verm. 15, II)

$$a.x \div b.x \div -c.x = x.a \div x.b \div -x.c, (\text{verm. I}) =$$

$$x.(a \div b \div -c), (\text{verm. 15, II}) = (a \div b \div -c).x; \text{ also} \\ (\text{verm. 4, II})$$

$$a.x \div b.x \div -c.x = (a \div b \div -c).x.$$

III) $(a \div b)^2 = a^2 \div 2.a.b \div b^2.$

Denn es ist (verm. 16, II),

$$(a \div b)^2 = (a \div b).(a \div b), (\text{ver. II}) = a.(a \div b) \div b.(a \div b),$$

$$(\text{verm. I}) = a.a \div a.b \div b.a \div b.b, (\text{verm. 16, II und 15, II})$$

$$= a^2 \div 2.a.b \div b^2; \text{ also verm. 4, II)}$$

$$(a \div b)^2 = a^2 \div 2.a.b \div b^2.$$

IV) $(a + -b)^2 = a^2 + -2 \cdot a \cdot b + b^2$.

Denn es ist, (verm. 16, II),

$$\begin{aligned} (a + -b)^2 &= (a + -b) \cdot (a + -b), (\text{ver. II}), = a \cdot (a + -b) + \\ &-b \cdot (a + -b), (\text{verm. I}), = a \cdot a + -a \cdot b + -b \cdot a + b \cdot b, \\ (\text{verm. 3, II}) &= a \cdot a + -a \cdot b + -b \cdot a + b \cdot b, (\text{verm. 16, II und} \\ &15, \text{ II}) = a^2 + -2 \cdot a \cdot b + b^2; \text{ also, (verm. 4, II),} \\ (a + -b)^2 &= a^2 + -2 \cdot a \cdot b + b^2. \end{aligned}$$

V) $(a + b) \cdot (a + -b) = a^2 + -b^2$.

Denn es ist, (verm. II),

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a + -b) &= a \cdot (a + -b) + b \cdot (a + -b), (\text{verm. I}) = \\ a \cdot a + -a \cdot b + b \cdot a + -b \cdot b, (\text{verm. 16, II, 15, II u. 3, II}) &= \\ a^2 + -b^2; \text{ also, (verm. 4, II),} \\ (a + b) \cdot (a + -b) &= a^2 + -b^2. \end{aligned}$$

19.

I) Wenn $a:b::c:d$, so ist $a \cdot d = b \cdot c$.

Denn es ist, (verm. 12, II und 15, II)

$$\begin{aligned} a \cdot d : b \cdot d :: a : b, (\text{verm. der Annahme}), :: c : d, \\ (\text{verm. 12, II}), :: b \cdot c : b \cdot d; \text{ folglich, (verm. 7, V} \\ \text{und 10, II)} \\ a \cdot d &= b \cdot c. \end{aligned}$$

II) Wenn $n \cdot v = p \cdot q$, so ist $n:p::q:v$ und $n:q::p:v$.

Denn es ist, (verm. 12, II)

$$\begin{aligned} n \cdot p : n \cdot v :: p : v, \text{ und (verm. der Annahme),} \\ n \cdot p : n \cdot v :: n \cdot p : p \cdot q, (\text{verm. 15, II}), :: p \cdot n : p \cdot q, \\ (\text{verm. 12, II}) :: n : q; \text{ also, (verm. 7, V)} \\ n : q :: p : v, \text{ und demnach, (verm. 10, IV)} \\ n : p :: q : v. \end{aligned}$$

19.

I Wenn 2 gleiche Messigkeiten sind, so ist
das Product der äußeren Glinder gleich
gegründet gleichförmigen Maßstab der
Producten von der inneren Glinder. —

II Wenn zwei gleiche Producte sind,
so ist das Messgewicht von der Länge,
das die meisten Producten zu einem
gemeinen Producte Liefert das gleiche
Producten zu einem anderen Liefert das gleiche
Producten. —

III) Wenn $a : b :: c : d$,

$e : f :: g : h$ und

$i : k :: l : m$, so ist

$a.e.i : b.f.k :: c.g.l : d.h.m$.

Denn nach der Annahme und vermöge I ist

$a.d = b.c$,

$e.h = f.g$ und

$i.m = k.l$; folglich, (verm. 4, II),

$(a.d).(e.h).(i.m) = (b.c).(f.g).(k.l)$. Hieraus, (ver. 15, IV),

$a.d.e.h.i.m = b.c.f.g.k.l$, also (verm. 15, II'''),

$a.e.i.d.h.m = b.f.k.c.g.l$, folglich, (verm. 15, IV),

$(a.e.i).(d.h.m) = (b.f.k).(c.g.l)$, und demnach, (verm. II),

$a.e.i : b.f.k :: c.g.l : d.h.m$,

IV) Wenn $a : b :: o : d$,

$b : n :: r : v$ und

$n : q :: x : c$, so ist

$a : q :: r : x : d : v$

Denn es ist, nach der Annahme, und verm. III u. 15, II',

$b.n.a : b.n.q :: c.r.x : c.d.v$, folglich (verm. 15, IV)

$(b.n).a : (b.n).q :: c.r.x : c.d.v$, also (verm. 12, II)

$a : q :: r.x : d.v$,

V) Wenn $a : b :: c : d$, so ist $a^n : b^n :: c^n : d^n$.

Denn es ist, nach der Annahme und verm. I,

$a.d = b.c$, also (verm. 4, II)

$(a.d)^n = (b.c)^n$, folglich (verm. 17, III)

$a^n.d^n = b^n.c^n$, und demnach (verm. II)

$a^n : b^n :: c^n : d^n$,

I) Die Figur $\frac{a}{n}$ heißt Quotient aus a und n , und bedeutet ein solches Ding, daß

$$\frac{a}{n} : a :: 1 : n.$$

Die beiden Dinge a und n heißen, in Bezug auf $\frac{a}{n}$, Glieder des Quotienten; besonders aber heißt a Dividendus, n Divisor. Den Quotienten aus den Gliedern und dem 1 bestimmen heißt dividiren. Für $\frac{a}{n}$ sagt man es sei a durch n zu dividiren.

II) Weil $\frac{a}{n} : a :: 1 : n$, so ist, (verm. 9, IV), auch

$$\frac{a}{n} : 1 :: a : n.$$

21.

I) $\frac{a}{n} : a :: \frac{b}{n} : b.$

Denn es ist, (vermöge 20),

$$\frac{a}{n} : a :: 1 : n, \text{ und}$$

$$\frac{b}{n} : b :: 1 : n, \text{ folglich, (verm. 7, V),}$$

$$\frac{a}{n} : a :: \frac{b}{n} : b. \text{ Hieraus aber, (verm. 9, IV), auch}$$

II) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} :: a : b.$

22.

I) $\frac{a}{1} = a.$

Denn es ist (verm. 20),

$$\frac{a}{1} : a :: 1 : 1, \text{ also, (verm. 10, I)}$$

$$\frac{a}{1} = a.$$

II, Vortheil des Verhältnisses des $\frac{a}{n}$ zu 1. Ist gleich
(s. oben. §. IV) dem Verhältniss des a zu n .

21.

I, Wenn man 2 Quotienten hat,
die einander gleich sein können, so ist das
Verhältniss des einen Quotienten zu seinem
Dividenden das gleiche dem Verhältniss des andern
zu seinem Dividenden.

II, Vortheil des Verhältnisses zweier Quotienten,
die einander gleich sein können, ist gleich
dem Verhältniss ihrer Dividenden.

22.

I, Ein Quotient 1, wenn der Divisor 1. Ist
ist gleich der Zahl und gleichartig dem
Nenner des Dividenden.

II.) Ein Quotient, in dem der Divi-
sor -1 ist, ist gleich dem Divi-
dend und der Divisor -1 ist gleich dem
Quotienten.

III.) Ein Quotient, in dem der Divi-
dend und Divisor 1 ist, ist gleich dem
Dividenden.

W 3.

IV.) Wenn der Divisor gleich dem
Quotienten negativ ist, so ist der
Dividend gleich dem Quotienten negativ

II) $-\frac{a}{1} = -a.$

Denn es ist, (verm. 20),

$$\frac{a}{-1} : a :: 1 : -1, \text{ folglich, (verm. 9, I)}$$

$$\frac{a}{-1} : -a :: -1 : -1, \text{ also, (verm. 10, I)}$$

$$\frac{a}{-1} = -a.$$

III) $\frac{a}{a} = 1.$

Denn es ist, (verm. 20),

$$\frac{a}{a} : a :: 1 : a, \text{ folglich, (verm. 10, II),}$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

23.

I) $\frac{-a}{n} = -\frac{a}{n}.$

Denn es ist, (verm. 20).

$$\frac{-a}{n} : -a :: 1 : n \text{ und}$$

$$\frac{a}{n} : a :: 1 : n, \text{ folglich, (verm. 7, V)}$$

$$\frac{-a}{n} : -a :: \frac{a}{n} : a, \text{ also, (verm. 9, I)}$$

$$\frac{-a}{n} : -a :: -\frac{a}{n} : -a, \text{ demnach, (verm. 10, II)}$$

$$\frac{-a}{n} = -\frac{a}{n}.$$

II) $\frac{a}{-n} = -\frac{a}{n}.$

Denn es ist, (verm. 20)

$$\frac{a}{-n} : a :: 1 : -n, \text{ und}$$

$$\frac{a}{n} : a :: 1 : n, \text{ folglich, (verm. 9, I)}$$

$$-\frac{a}{n} : a :: 1 : -n, \text{ also, verm. 7, V)}$$

$$\frac{a}{-n} : a :: -\frac{a}{n} : a, \text{ demnach, (verm. 10, II)}$$

$$\frac{a}{-n} = -\frac{a}{n}.$$

III) Aus I und II folgt, (verm. 4, II)

$$\frac{-a}{n} = \frac{a}{-n}.$$

IV) $\frac{-a}{-n} = \frac{a}{n}.$

Denn es ist, (verm. 20)

$$\frac{-a}{-n} : -a :: 1 : -n \text{ und}$$

$$\frac{a}{n} : a :: 1 : n, \text{ folglich, (verm. 9, I)}$$

$$\frac{a}{n} : -a :: 1 : -n, \text{ also, (verm. 7, V)}$$

$$\frac{-a}{-n} : -a :: \frac{a}{n} : -a, \text{ demnach, (verm. 10, II)}$$

$$\frac{-a}{-n} = \frac{a}{n}$$

24.

I) $\frac{v.a}{v.n} = \frac{a}{n}$

Denn es ist, (verm. 20, II),

$$\frac{v.a}{v.n} : 1 :: v.a : v.n, \text{ (verm. 12, II)} :: a : n, \text{ (verm. 21, II)}$$

III.) Ein Quotient, dessen Divisor,
 und Nenner ist, ist gleich zwei und
 gleichzeitigen Mannschaften selbst
 Quotienten des Divisors und Nenners
 ist.

IV.) Wenn die Glieder eines Quotienten
 Annahmen sind so ist der Quotient
 positiv.

24.

I.) Wenn man ein Quotient $\frac{a}{n}$ setzt
 und $\frac{v.a}{v.n}$ so ist dieses gleich dem
 Quotienten $\frac{a}{n}$.

II.) Wenn man ein Quotient
hat aus $\frac{x}{y}$ so ist dieses gleich
dem Quotienten $\frac{x \cdot z}{y}$.

25.

I.) Wenn man ein Produkt aus
zwei Faktoren hat, und man von
einem ein Quotient ist, und der andere
dieses so ist dieses Produkt gleich
einem Quotienten, dessen Dividende
die Dividende des einen Quotienten
das Produkt aus dem Divisor des
Divisoren der beiden Quotienten

$$:: \frac{a}{n} : \frac{n}{n}, (\text{verm. 22, III}), :: \frac{a}{n} : 1; \text{ also, (verm. 7, V}$$

und 10, II)

$$\frac{v.a}{v.n} = \frac{a}{n}.$$

$$\text{II)} \quad \frac{\frac{a}{v}}{\frac{n}{v}} = \frac{a}{n}.$$

Denn es ist, (verm. 20, II),

$$\frac{\frac{a}{v}}{\frac{n}{v}} : 1 :: \frac{a}{v} : \frac{n}{v}, (\text{verm. 21, II}), :: a : n, (\text{verm. 21, II}) ::$$

$$\frac{a}{n} : \frac{n}{n}, (\text{verm. 22, III}) \frac{a}{n} : 1; \text{ also, (verm. 7, V u. 10, II)}$$

$$\frac{\frac{a}{v}}{\frac{n}{v}} = \frac{a}{n}$$

25.

$$\text{I)} \quad \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{r} = \frac{a.b}{n.r}$$

Denn es ist (verm. 20, II)

$$\frac{a}{n} : 1 :: a : n \text{ und}$$

$$\frac{b}{r} : 1 :: b : r, \text{ also, (verm. 19, III),}$$

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{r} : 1 :: a.b : n.r, (\text{verm. 21, II}), :: \frac{a.b}{n.r} : \frac{n.r}{n.r},$$

$$(\text{verm. 22, III}) :: \frac{a.b}{n.r} : 1; \text{ folglich, (verm. 7, V u. 10, II)}$$

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{r} = \frac{a \cdot b}{n \cdot r}$$

$$\text{II)} \quad v \cdot \frac{n}{r} = \frac{v \cdot n}{r}$$

Denn es ist, (verm. 22, I),

$$v \cdot \frac{n}{r} = \frac{v}{1} \cdot \frac{n}{r}, (\text{verm. I}), = \frac{v \cdot n}{1 \cdot r}, (\text{verm. 13, I}),$$

$$= \frac{v \cdot n}{r}; \text{ also, (verm. 4, II),}$$

$$v \cdot \frac{n}{r} = \frac{v \cdot n}{r}$$

$$\text{III)} \quad \frac{a}{q} \cdot x = \frac{a \cdot x}{q}$$

Denn es ist, (verm. 15, II)

$$\frac{a}{q} \cdot x = x \cdot \frac{a}{q}, (\text{verm. II}) = \frac{x \cdot a}{q}, (\text{verm. 15, II})$$

$$= \frac{a \cdot x}{q}; \text{ also, (verm. 4, II)}$$

$$\frac{a}{q} \cdot x = \frac{a \cdot x}{q}$$

26.

$$\text{I)} \quad \frac{\frac{a}{n}}{\frac{v}{r}} = \frac{a \cdot r}{n \cdot v}$$

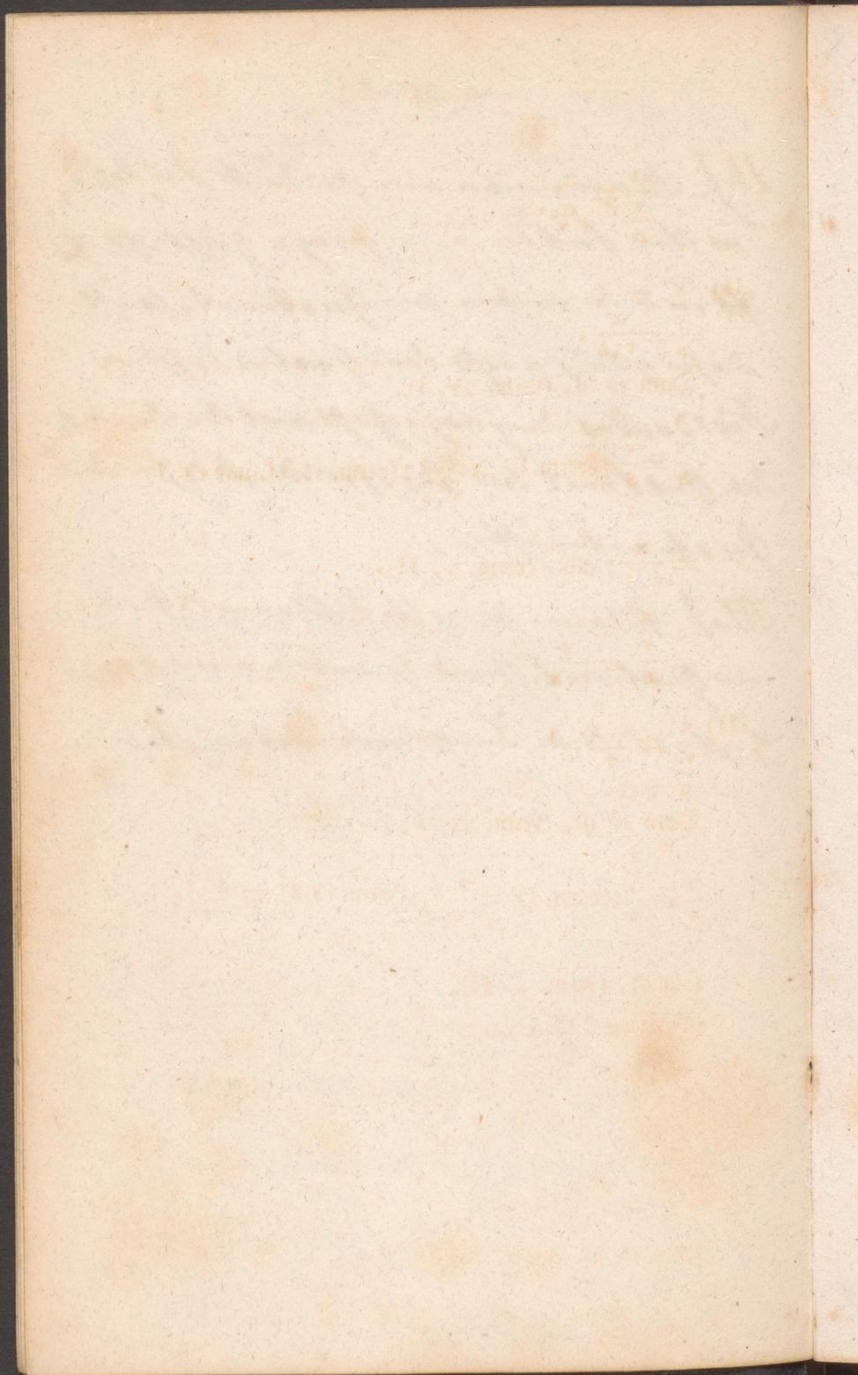
Denn es ist, (verm. 24, I),

$$\frac{\frac{a}{n}}{\frac{v}{r}} = \frac{\frac{r \cdot a}{r \cdot n}}{\frac{n \cdot v}{n \cdot r}}, (\text{verm. 15, II}) = \frac{\frac{a \cdot r}{n \cdot r}}{\frac{n \cdot v}{n \cdot r}}, (\text{verm. 24, II}) = \frac{a \cdot r}{n \cdot v}$$

also, (verm. 4, II)

II.) Wenn man ein Produkt hat und dessen
esster Factor eine ganze Zahl ist, so
ist und die andere ein Quotient, so ist
das Ergebnis von dem Quotienten dessen
Dividendes die ganze Zahl auch die Divisor
des Quotienten, der die erste der Divisor der
Quotienten ist.

III.) Wenn der erste Factor eines Produkts
ein Quotient ist und die andere eine ganze
Zahl, so ist das Ergebnis in dem II.)



$$\frac{\frac{a}{n}}{\frac{v}{r}} = \frac{a \cdot r}{n \cdot v}$$

II) $\frac{\frac{x}{v}}{s} = \frac{x}{v \cdot s}.$

Denn es ist, (verm. 22, I),

$$\frac{\frac{x}{v}}{s} = \frac{\frac{x}{v}}{\frac{s}{1}}, \text{ (verm. I.)} = \frac{x \cdot 1}{v \cdot s}, \text{ (verm. 15, II, und 13, I)}$$

$$= \frac{x}{v \cdot s}; \text{ also, (verm. 4, II)}$$

$$\frac{\frac{x}{v}}{s} = \frac{x}{v \cdot s}$$

III) $\frac{\frac{x}{v}}{z} = \frac{x \cdot z}{v}.$

Denn es ist, (verm. 22, I),

$$\frac{\frac{x}{v}}{z} = \frac{\frac{x}{v}}{\frac{1}{z}}, \text{ (verm. I.)} = \frac{x \cdot z}{1 \cdot v}, \text{ (verm. 13, I.)} = \frac{x \cdot z}{v};$$

folglich, (verm. 4, II),

$$\frac{\frac{x}{v}}{z} = \frac{x \cdot z}{v}$$

27.

I) $n \cdot \frac{a}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a.$

Denn es ist, (verm. 25, II)

$$n \cdot \frac{a}{n} = \frac{n \cdot a}{n}, \text{ (verm. 13, I), } = \frac{n \cdot a}{n \cdot 1}, \text{ (verm. 24, I)}$$

$$= \frac{a}{1}, \text{ (verm. 22, I)} = a; \text{ also, (verm. 4, II)}$$

$$n \cdot \frac{a}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a.$$

II) Wenn $n \cdot x = q$, so ist $x = \frac{q}{n}$

Denn, vermöge der Annahme und 4, III, ist

$$\frac{n \cdot x}{n} = \frac{q}{n} \text{ . also (verm. I)}$$

$$x = \frac{q}{n}$$

28.

I) $\frac{a^n}{a^v} = a^{(n+ -v)}$

Denn es ist, (verm. 17, I)

$$a^v \cdot a^{(n+ -v)} = a^{(v+n+ -v)} = a^n, \text{ also, (verm. 27 II)}$$

$$\frac{a^{(n+ -v)}}{a^v} = \frac{a^n}{a^v}.$$

I') $a^0 = 1.$

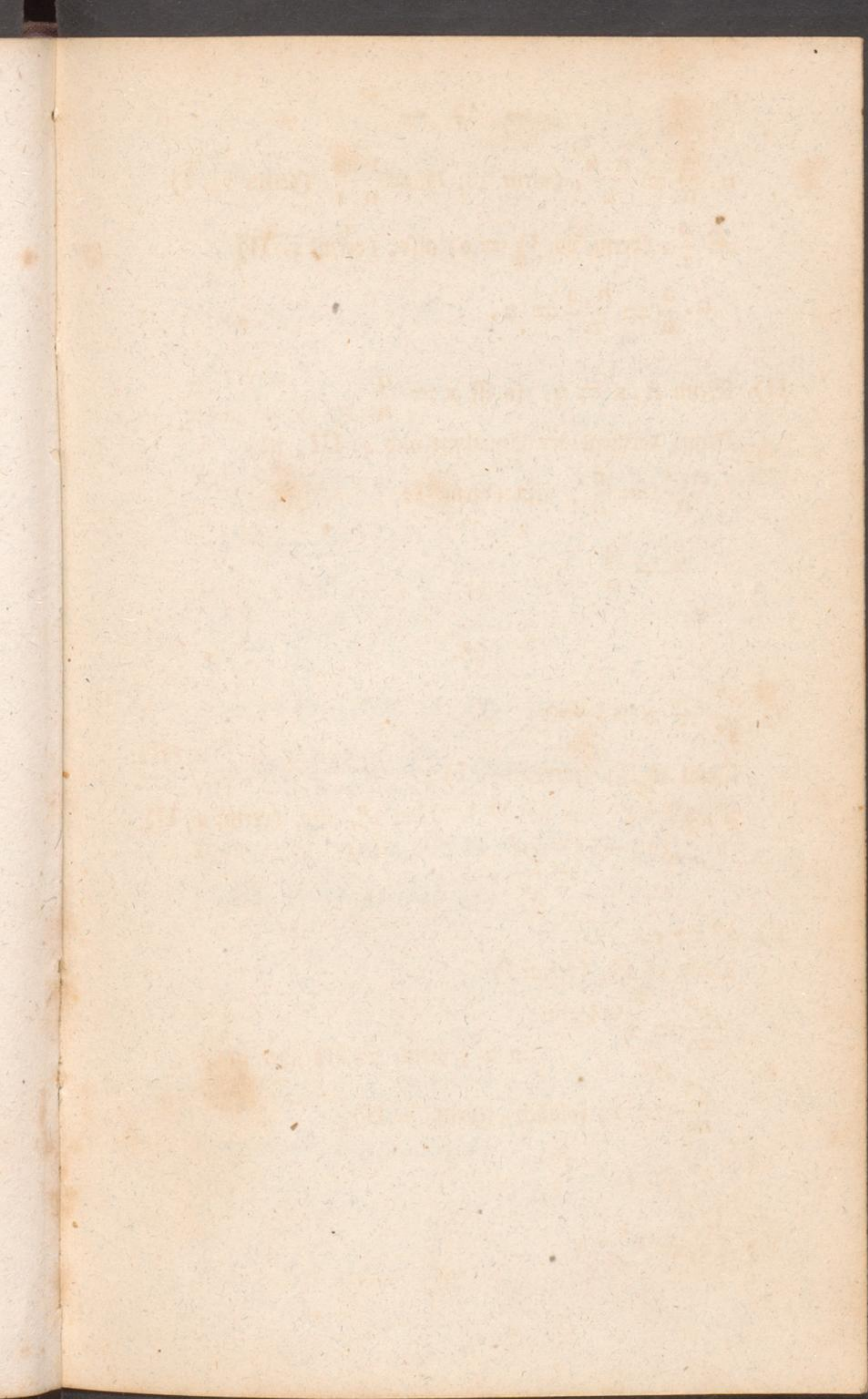
Denn es ist, (verm. I)

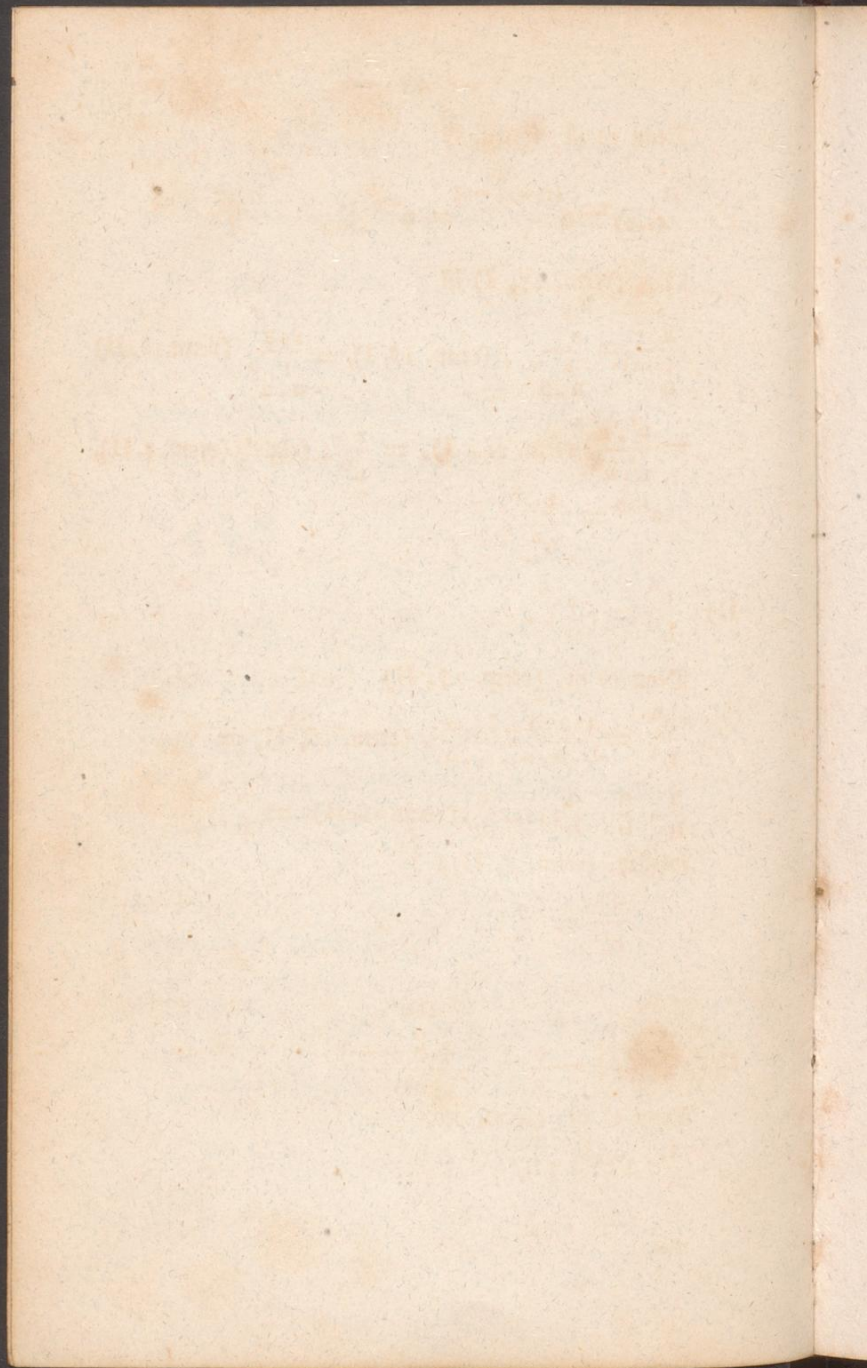
$$\frac{a^n}{a^n} = a^{(n+ -n)} = a^0; \text{ verm. 22 III aber ist}$$

$$\frac{a^n}{a^n} = 1; \text{ folglich, (verm. 4, II),}$$

$$a^0 = 1.$$

I'') $a^{-n} = \frac{1}{a^n},$





Denn es ist, (verm. I)

$$\frac{a^r}{a^{(r+n)}} = a^{(r-r-n)} = a^{-n};$$

aber, (verm. 17, I) ist

$$\frac{a^r}{a^{(r+n)}} = \frac{a^r}{a \cdot a^n}, \text{ (verm. 13, I), } = \frac{1 \cdot a^r}{a \cdot a^n} \text{ (verm. 15, II)}$$

$$= \frac{a^r \cdot 1}{a^r \cdot a^n} \text{ verm. 24, I), } = \frac{1}{a^n}; \text{ folglich, (verm. 4, II),}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$\text{II) } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Denn es ist, (verm. 16, II)

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \dots a}{b \cdot b \cdot b \dots b}, \text{ (verm. 25, I), } =$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots \frac{a}{b}, \text{ (verm. 16, II), } = \left(\frac{a}{b}\right)^n;$$

folglich, (verm. 4, II),

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

29.

$$\text{I) } \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \dots + \frac{c}{n} = \frac{(a + b + \dots + c)}{n}$$

Denn es ist, (verm. 20, I),

$$\frac{a}{n} : a :: 1 : n,$$

$$\frac{b}{n} : b :: 1 : n,$$

$$\frac{c}{n} : c :: 1 : n, \text{ und}$$

$$\frac{(a + b + -c)}{n} : (a + b + -c) :: 1 : n; \text{ folgl. (verm. 7, V),}$$

$$\frac{a}{n} : a :: \frac{b}{n} : b :: \frac{c}{n} : c :: \frac{(a + b + -c)}{n} : (a + b + -c),$$

folglich, (verm. 9, II und 7, V)

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) : (a + b) :: \frac{c}{n} : c, \text{ also (verm. 9, III und 7, V)}$$

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + -\frac{c}{n}\right) : (a + b + -c) : \frac{(a + b + -c)}{n}$$

: (a + b + -c), und demnach, (verm. 10, II)

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + -\frac{c}{n} = \frac{a + b + -c}{n}.$$

$$\text{II) } \frac{a}{n} + \frac{v}{r} = \frac{(r \cdot a + n \cdot v)}{n \cdot r}$$

Denn es ist, (verm. 24, I)

$$\frac{a}{n} + \frac{v}{r} = \frac{r \cdot a}{r \cdot n} + \frac{n \cdot v}{n \cdot r}, \text{ (verm. 15, II, u. I) } = \frac{(r \cdot a + n \cdot v)}{n \cdot r}$$

also, (verm. 4, II)

$$\frac{a}{n} + \frac{v}{r} = \frac{(r \cdot a + n \cdot v)}{n \cdot r}.$$

$$\text{III) } x + \frac{a}{n} = \frac{n \cdot x + a}{n}.$$

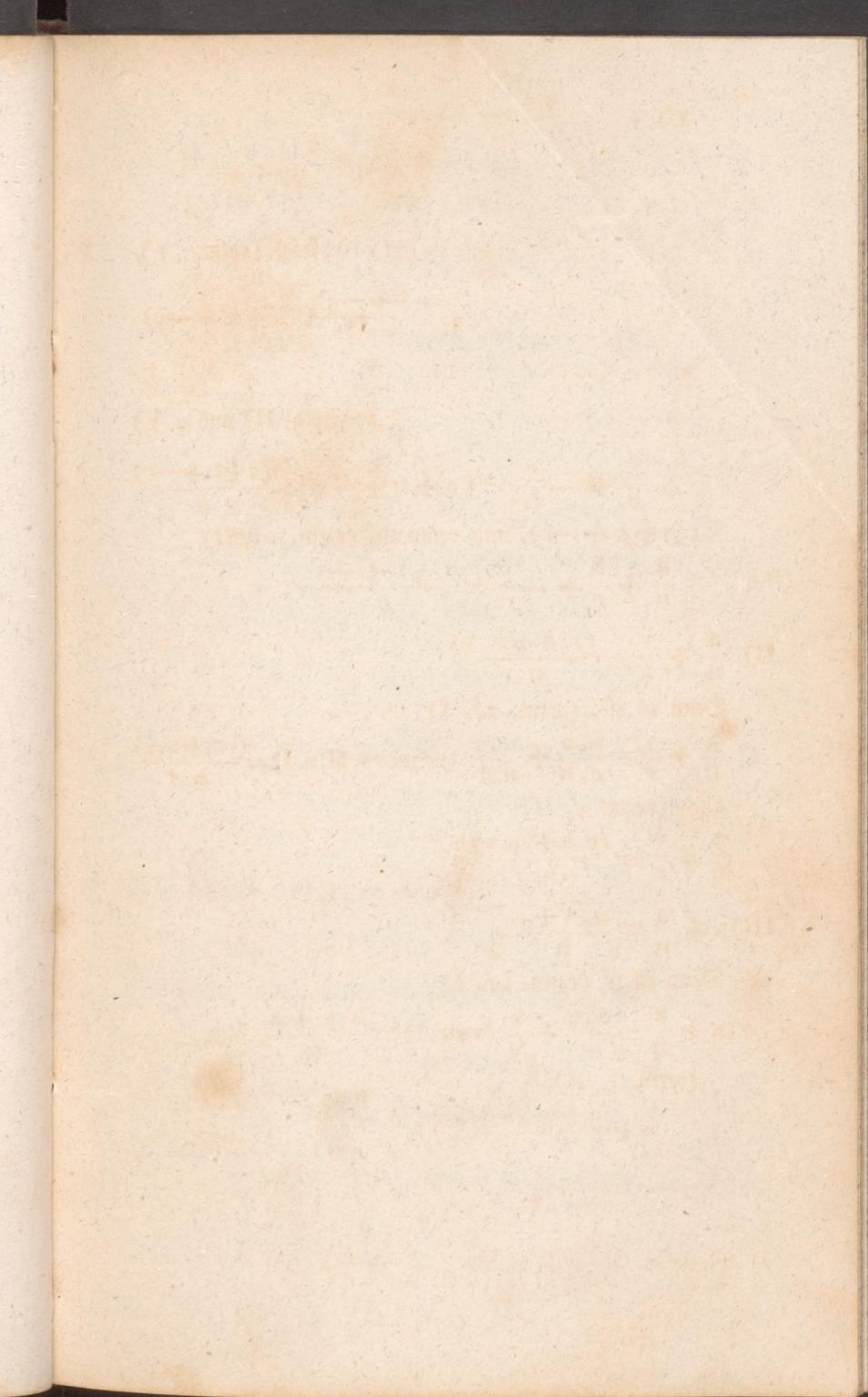
Denn es ist (verm. 27, I)

$$x + \frac{a}{n} = \frac{n \cdot x}{n} + \frac{a}{n}, \text{ (verm. I) } = \frac{n \cdot x + a}{n}, \text{ also,}$$

(verm. 4, II)

$$x + \frac{a}{n} = \frac{n \cdot x + a}{n}.$$

I) Wenn $a : b :: c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



I) Die Figur $\sqrt[n]{v}$ heißt die nte Wurzel aus v , und bedeutet ein solches Ding, dessen nte Potenz v ist.

Das n heißt Exponent der Wurzel.

II) $(\sqrt[n]{x})^n$ ist also x .

III) $\sqrt[n]{(q^n)}$ ist q

Denn (vermöge I ist $\sqrt[n]{(q^n)}$ ein solches Ding, dessen nte Potenz, die nte Potenz von q ist; es ist aber offenbar gerade q dasjenige Ding, dessen nte Potenz die nte Potenz von q ist, folglich ist q so viel als $\sqrt[n]{(q^n)}$.

IV) $(\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{(a \cdot b)}$.

Denn es ist (verm. III)

$$(\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{\left\{ \left(\sqrt[n]{a} \right) \cdot \left(\sqrt[n]{b} \right) \right\}^n} \quad (\text{ver. 17, III}) =$$

$$\sqrt[n]{\left\{ \left(\sqrt[n]{a} \right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b} \right)^n \right\}} \quad (\text{verm. II}) = \sqrt[n]{\{a \cdot b\}}; \text{ also,}$$

(verm. 4, II)

$$(\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{(a \cdot b)}.$$

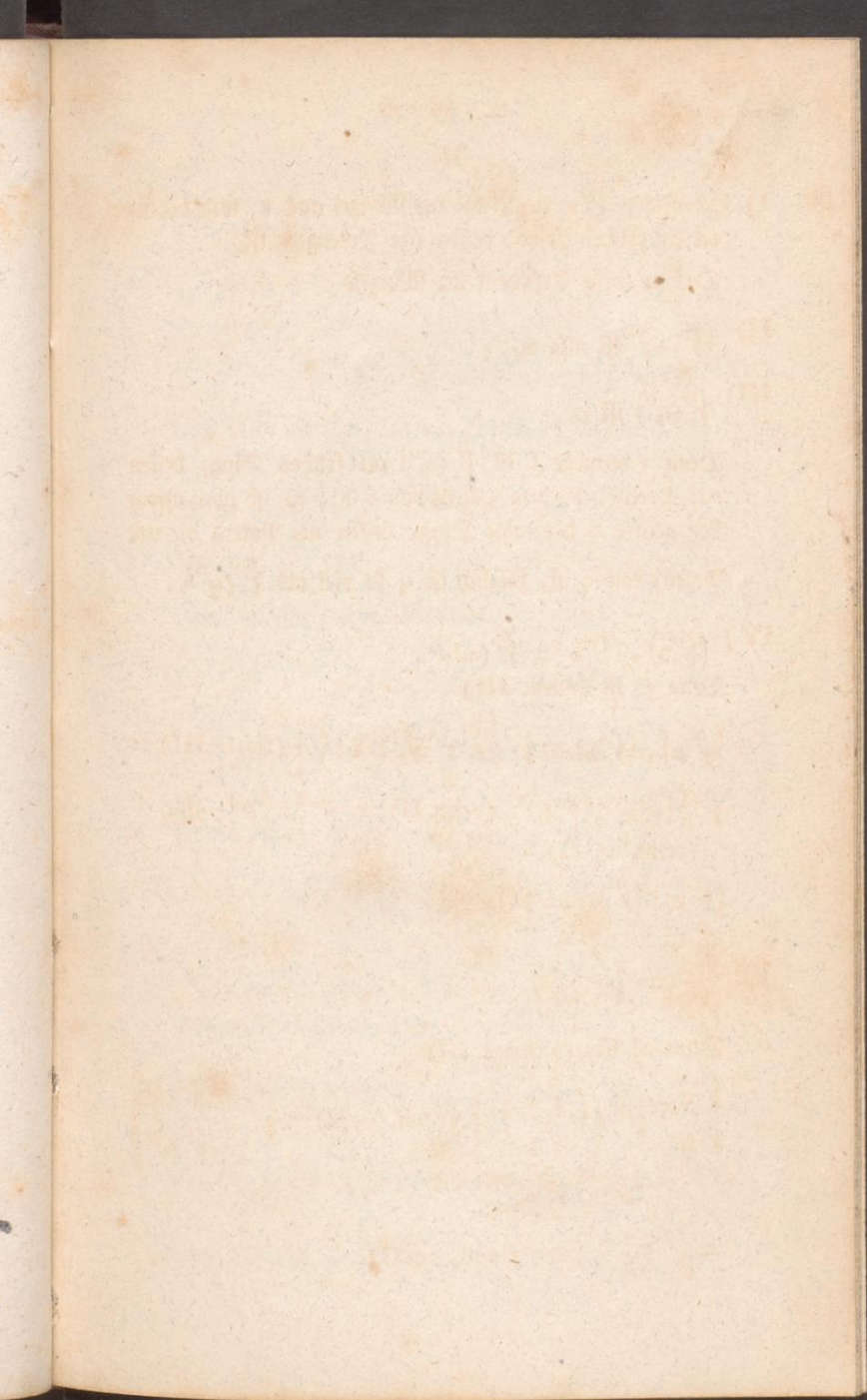
V) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}$

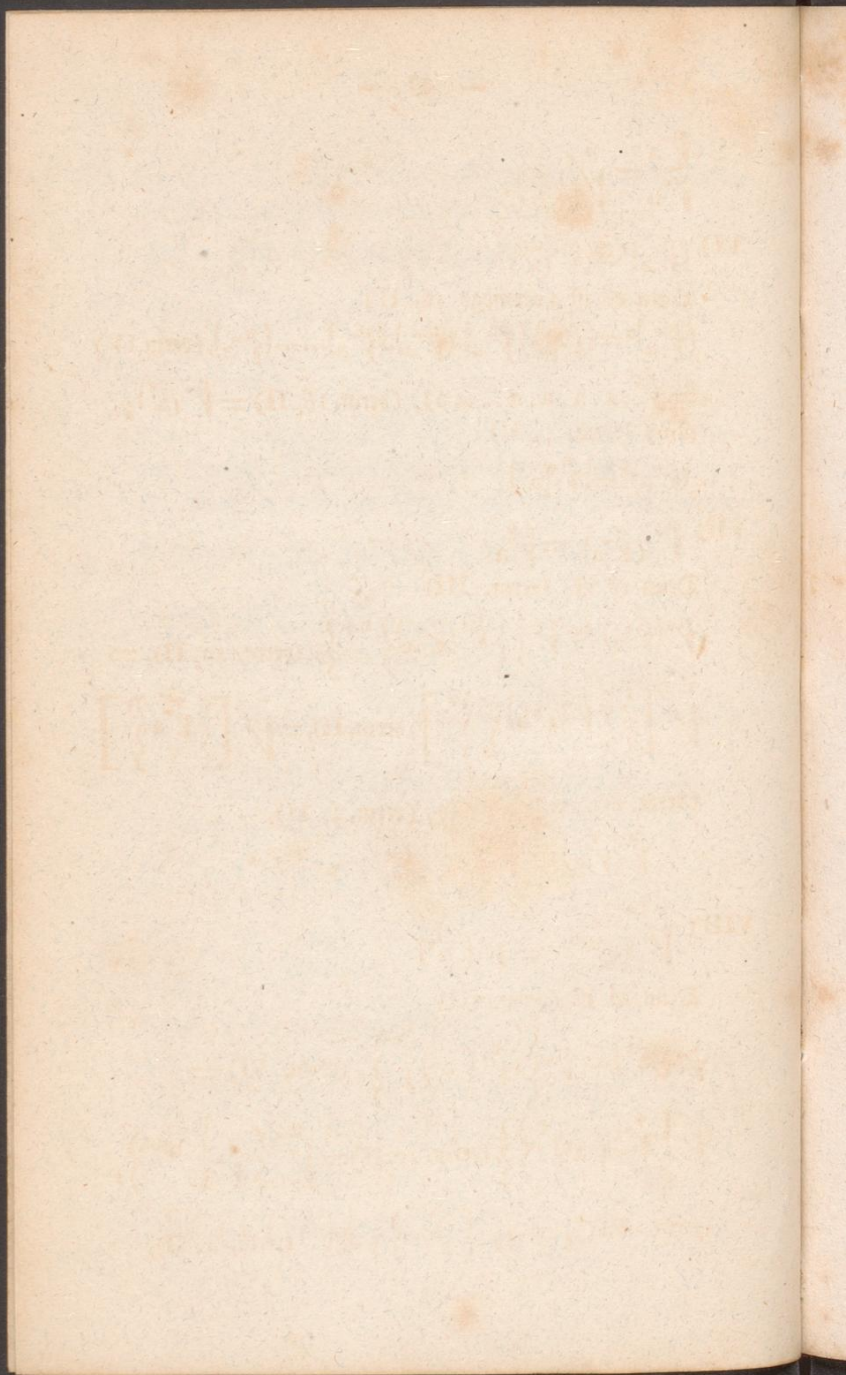
Denn es ist, (vermöge III)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n} \quad (\text{verm. 28, II}) = \sqrt[n]{\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}}$$

(verm. II)

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}; \text{ also, (verm. 4, II)}$$





$$\frac{\overset{n}{V}a}{\overset{n}{V}b} = \overset{n}{V}\left(\frac{a}{b}\right).$$

$$\text{VI)} \quad (\overset{n}{V}a)^v = \overset{n}{V}(a^v)$$

Denn es ist (vermöge 16, II)

$$(\overset{n}{V}a)^v = (\overset{n}{V}a) \cdot (\overset{n}{V}a) \cdot (\overset{n}{V}a) \cdot (\overset{n}{V}a) \dots (\overset{n}{V}a), \text{ (verm. IV)}$$

$$= \overset{n}{V}(a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a), \text{ (verm. 16, II)} = \overset{n}{V}(a^v);$$

also, (verm. 4, II)

$$(\overset{n}{V}a)^v = \overset{n}{V}(a^v)$$

$$\text{VII)} \quad \overset{n}{V}(\overset{v}{V}a) = \overset{n.v}{V}a$$

Denn es ist, (verm. III)

$$\overset{n}{V}(\overset{v}{V}a) = \overset{n.v}{V}\left\{\left(\overset{n}{V}(\overset{v}{V}a)\right)^{n.v}\right\}, \text{ (verm. 17, II),} =$$

$$\overset{n.v}{V}\left[\left\{\left(\overset{n}{V}(\overset{v}{V}a)\right)^n\right\}^v\right], \text{ verm. II),} = \overset{n.v}{V}\left[\left\{\overset{v}{V}a\right\}^v\right]$$

(verm. II), = $\overset{n.v}{V}a$; also, (verm. 4, II),

$$\overset{n}{V}(\overset{v}{V}a) = \overset{n.v}{V}a.$$

$$\text{VIII)} \quad \overset{n.v}{V}(a^{n.x}) = \overset{v}{V}(a^x)$$

Denn es ist (verm. III)

$$\overset{v}{V}(a^x) = \overset{n}{V}\left\{\left(\overset{v}{V}(a^x)\right)^n\right\}, \text{ (verm. VI) =}$$

$$\overset{n}{V}\left\{\overset{v}{V}\left((a^x)^n\right)\right\}, \text{ (verm. 17, II) = } \overset{n}{V}\left\{\overset{v}{V}(a^{n.x})\right\},$$

(verm. VII), = $\overset{n.v}{V}(a^{n.x})$; also, (verm. 4, II),

$$\overset{n.v}{V}(a^{n.x}) = \overset{v}{V}(a^x)$$

$$\text{IX) } \left\{ \overset{n}{V}(a^x) \right\} \cdot \left\{ \overset{v}{V}(b^z) \right\} = \overset{n.v}{V}(a^{v.x} \cdot b^{n.z})$$

Denn es ist, (verm. VIII),

$$\left\{ \overset{n}{V}(a^x) \right\} \cdot \left\{ \overset{v}{V}(b^z) \right\} = \left\{ \overset{v.n}{V}(a^{v.x}) \right\} \cdot \left\{ \overset{n.v}{V}(b^{n.z}) \right\},$$

$$(\text{verm. 15, II, und IV}), = \overset{n.v}{V}(a^{v.x} \cdot b^{n.z}); \text{ also,}$$

(verm. 4, II),

$$\left\{ \overset{n}{V}(a^x) \right\} \cdot \left\{ \overset{v}{V}(b^z) \right\} = \overset{n.v}{V}(a^{v.x} \cdot b^{n.z})$$

$$\text{X) } \frac{\overset{n}{V}(a^x)}{\overset{v}{V}(b^z)} = \overset{n.v}{V}\left(\frac{a^{v.x}}{b^{n.z}}\right),$$

Denn es ist, (verm. VIII),

$$\frac{\overset{n}{V}(a^x)}{\overset{v}{V}(b^z)} = \frac{\overset{v.n}{V}(a^{v.x})}{\overset{n.v}{V}(b^{n.z})}, (\text{verm. 15, II; u. V}), =$$

$$\overset{n.v}{V}\left(\frac{a^{v.x}}{b^{n.z}}\right); \text{ also, (verm. 4, II),}$$

$$\frac{\overset{n}{V}(a^x)}{\overset{v}{V}(b^z)} = \overset{n.v}{V}\left(\frac{a^{v.x}}{b^{n.z}}\right).$$

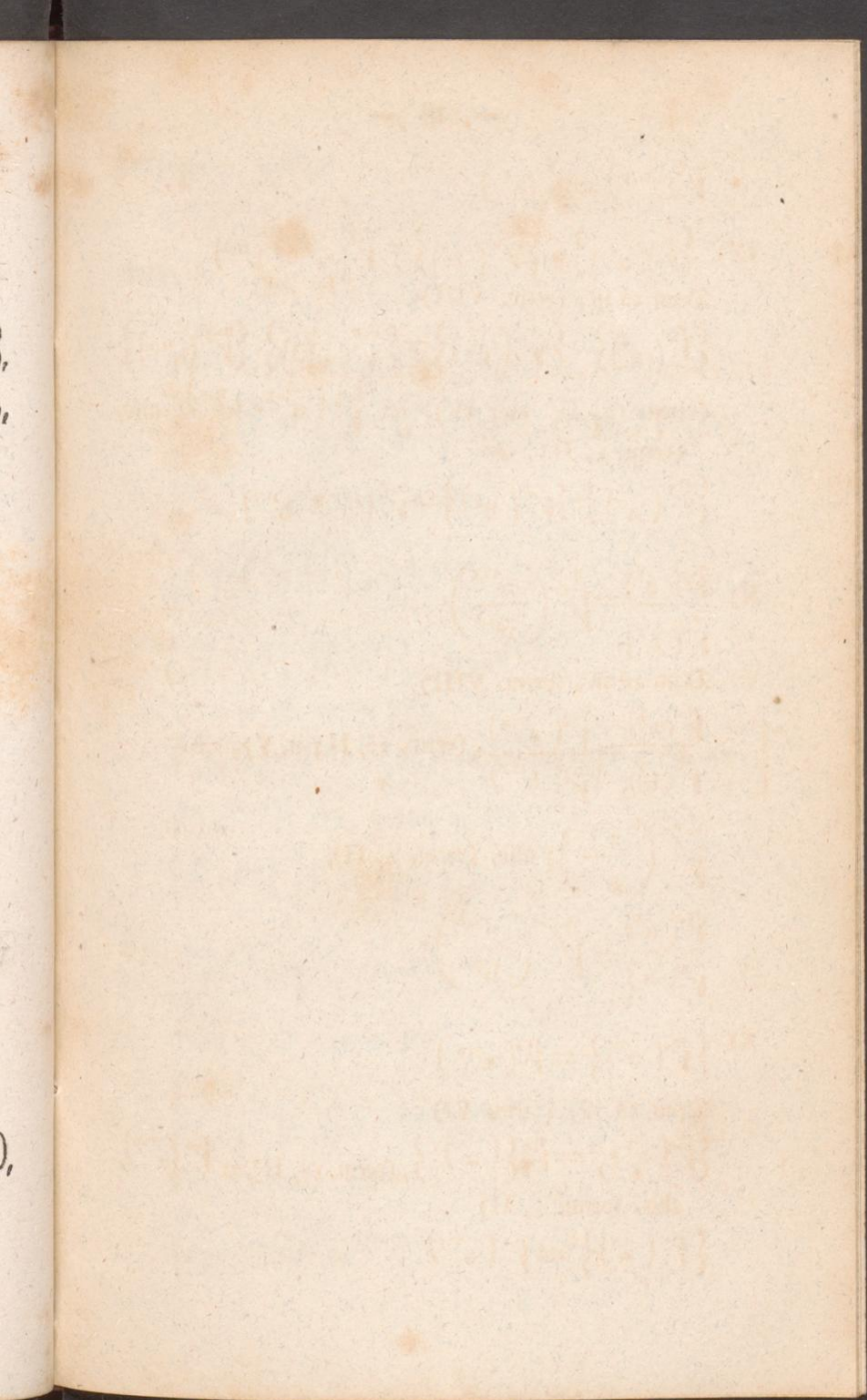
$$\text{XI} \left\{ \overset{n}{V}(a^v) \right\}_r = \overset{n}{V}(a^{r.v})$$

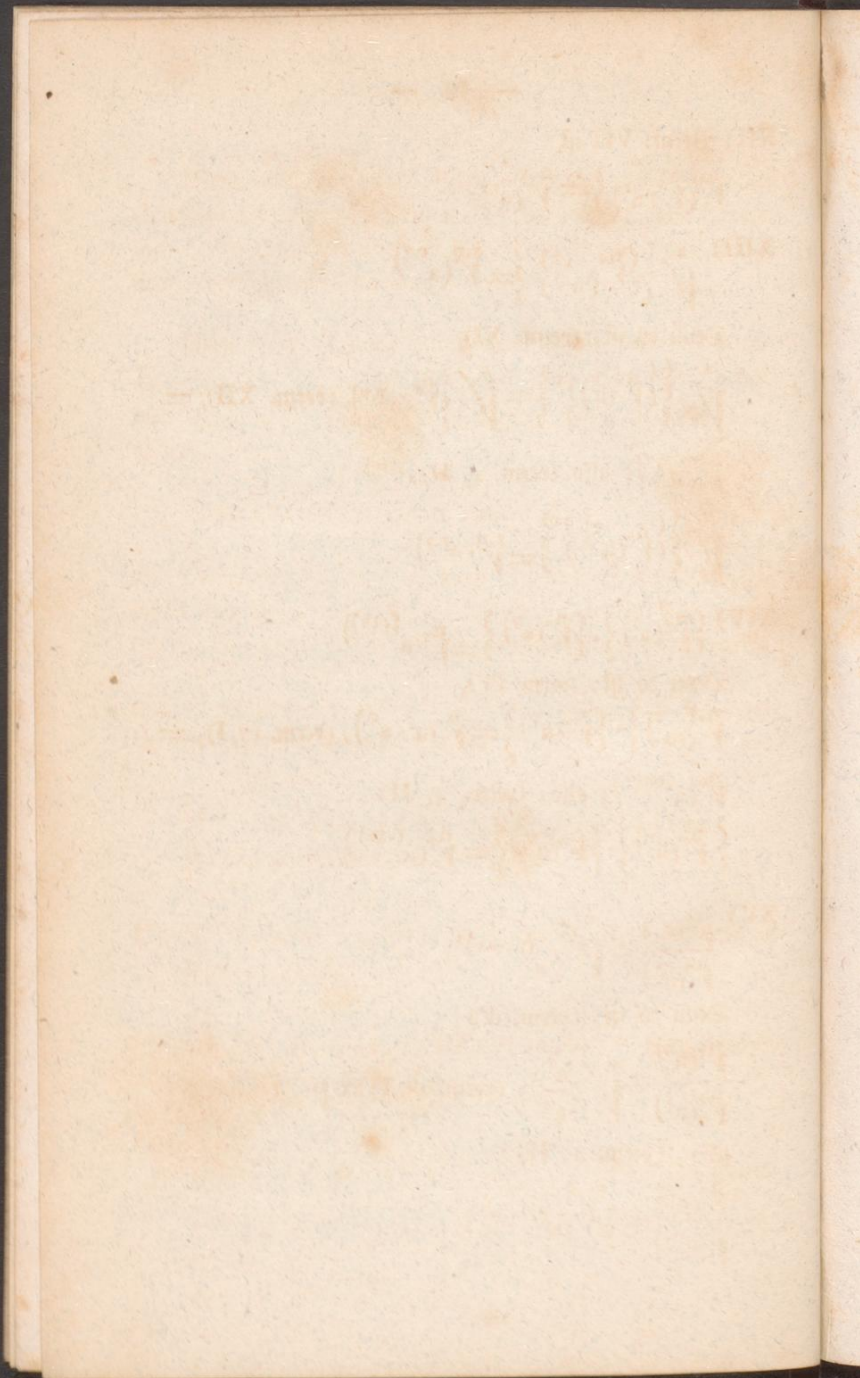
Denn es ist, (verm. VI)

$$\left\{ \overset{n}{V}(a^v) \right\}_r = \overset{n}{V}\left\{ (a^v)^r \right\}, (\text{verm. 17, II}), = \overset{n}{V}(a^{r.v}),$$

also, (verm. 4, II)

$$\left\{ \overset{n}{V}(a^v) \right\}_r = \overset{n}{V}(a^{r.v})$$





XII) Verm. VII ist

$$\sqrt[n]{\sqrt[r]{(a^r)}} = \sqrt[n]{a^r}.$$

XIII) $\sqrt[x]{\left\{\sqrt[n]{(a^r)}\right\}^r} = \sqrt[x]{\sqrt[n]{a^{r \cdot v}}}$

Denn es ist, (verm. XI)

$$\sqrt[x]{\left\{\left(\sqrt[n]{(a^r)}\right)^r\right\}} = \sqrt[x]{\sqrt[n]{(a^{r \cdot v})}}, \text{ (verm. XII), } =$$

$$\sqrt[x]{\sqrt[n]{a^{r \cdot v}}}; \text{ also (verm. 4, II),}$$

$$\sqrt[x]{\left\{\left(\sqrt[n]{(a^r)}\right)^r\right\}} = \sqrt[x]{\sqrt[n]{a^{r \cdot v}}}.$$

XIV) $\left\{\sqrt[n]{(a^r)}\right\} \cdot \left\{\sqrt[n]{(a^v)}\right\} = \sqrt[n]{(a^{(r+v)})}$

Denn es ist, (verm. IV),

$$\sqrt[n]{(a^r)} \cdot \sqrt[n]{(a^v)} = \sqrt[n]{(a^r \cdot a^v)}, \text{ (verm. 17, I), } =$$

$$\sqrt[n]{(a^{(r+v)})}; \text{ also, (verm. 4, II)}$$

$$\left\{\sqrt[n]{(a^r)}\right\} \cdot \left\{\sqrt[n]{(a^v)}\right\} = \sqrt[n]{(a^{(r+v)})}$$

XV) $\frac{\sqrt[n]{(a^r)}}{\sqrt[n]{(a^v)}} = \sqrt[n]{(a^{(r-v)})}.$

Denn es ist, (verm. V)

$$\frac{\sqrt[n]{(a^r)}}{\sqrt[n]{(a^v)}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a^r}{a^v}\right)}, \text{ (verm. 28, I) } = \sqrt[n]{(a^{(r-v)})};$$

also, (verm. 4, II)

$$\frac{\sqrt[n]{(a^r)}}{\sqrt[n]{(a^v)}} = \sqrt[n]{(a^{(r-v)})}.$$

Wenn man statt a die Figur a^1 schreibt, und das 1 als Exponent der Potenz betrachtet, so hat dieses genau genommen keinen Sinn; indem eine Potenz ein Product aus wenigstens zwei Factoren seyn muß.

Eben so ist es auch mit der Figur $a^{\frac{v}{n}}$, wenn $\frac{v}{n}$ etwa $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, oder überhaupt keine ganze Zahl bedeutet; denn $a^{\frac{1}{5}}$ entspricht keineswegs dem Begriffe einer Potenz.

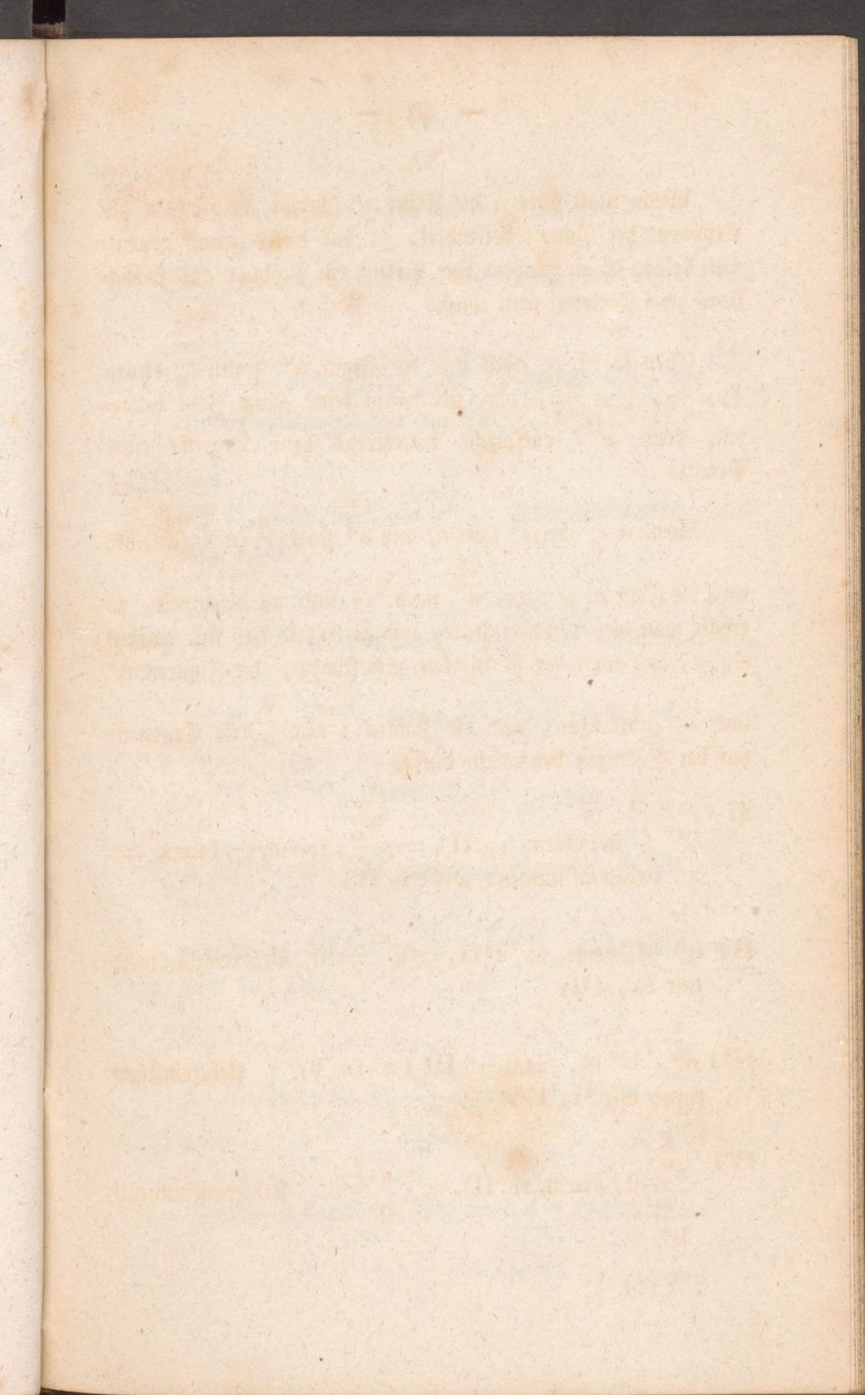
Wenn man aber a^1 statt a , und $a^{\frac{v}{n}}$ statt $\sqrt[n]{a^v}$ schreibt, und die Figuren a^1 und $a^{\frac{v}{n}}$ nach 17 und 28 behandelt, so erhält man dieselben Resultate, wie in 31, so daß sich daraus ergibt, daß man der Richtigkeit unbeschadet, die Figuren a^1 und $a^{\frac{v}{n}}$ gebrauchen, und die Zahlen 1 und $\frac{v}{n}$ wie Exponenten der Potenzen behandeln dürfe.

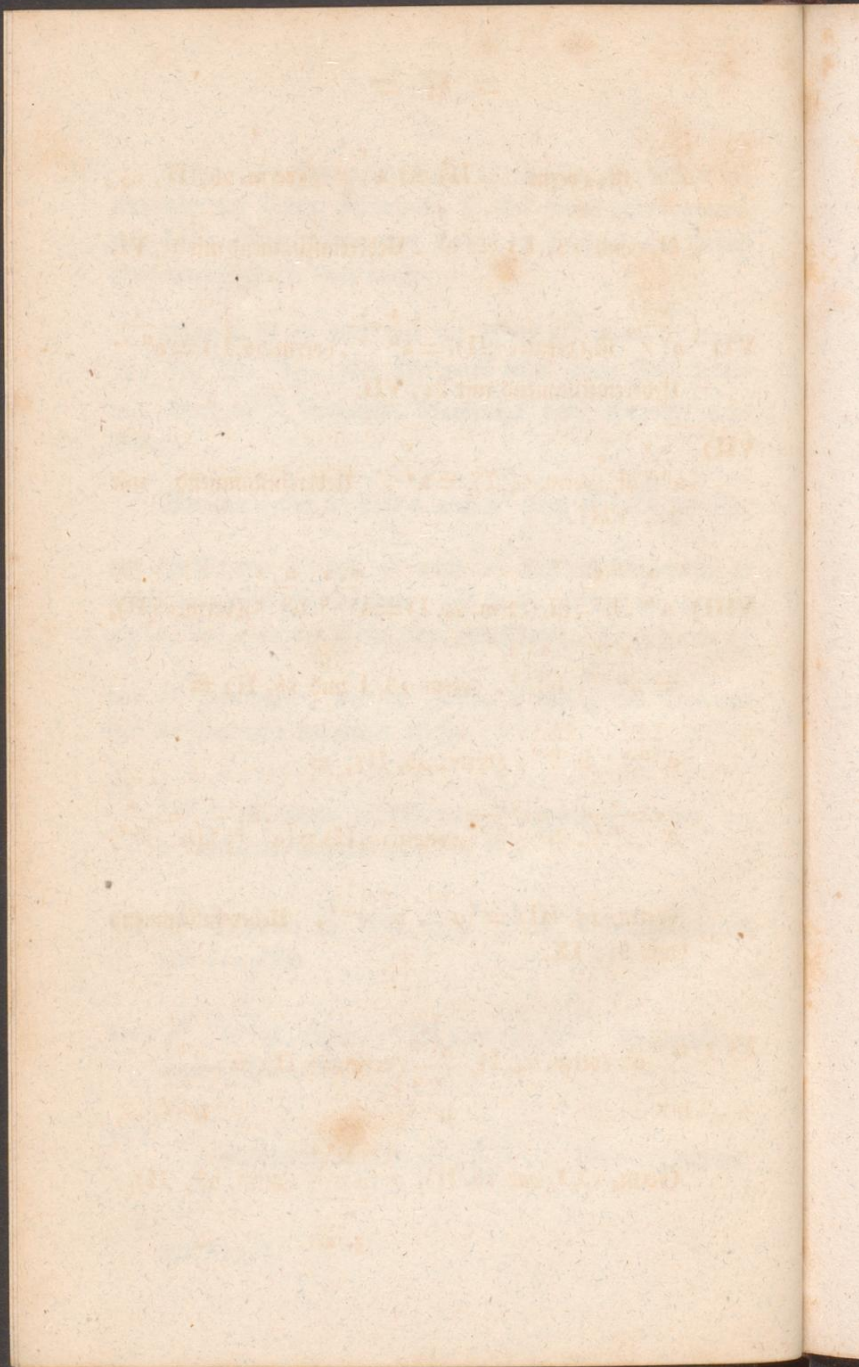
I) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$ ist, (verm. 17, II), $= x^{\frac{n \cdot \frac{1}{n}}{n}}$, (verm. 27, I) $= x^1 = x$. Uebereinstimmend mit 31, II.

II) $q^{\frac{n}{n}}$ ist, verm. 22, III), $= q^1 = q$. Uebereinstimmend mit 31, III)

III) $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$ ist, (nach, 17, III) $= (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$. Uebereinstimmend mit 31, IV.

IV) $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ ist, (verm. 28, II), $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$. Uebereinstimmend mit 31, V.





V) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^v$ ist, (verm. 17, II) $= a^{\frac{v \cdot \frac{1}{n}}{n}}$, (verm. 25, II, 15, II, und 13, I) $= a^{\frac{v}{n}}$. Uebereinstimmend mit 31, VI.

VI) $\left(a^{\frac{1}{v}}\right)^{\frac{1}{n}}$ ist, (verm. 17, II) $= a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{v}}$, (verm. 25, I) $= a^{\frac{1}{n \cdot v}}$. Uebereinstimmend mit 31, VII.

VII) $\frac{n \cdot x}{a^{\frac{1}{n \cdot v}}}$ ist, (verm. 24, I) $= a^{\frac{x}{v}}$. Uebereinstimmend mit 31, VIII.

VIII) $a^{\frac{x}{n}} \cdot b^{\frac{z}{v}}$ ist, (verm. 24, I) $= a^{\frac{v \cdot x}{v \cdot n}} b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}}$, (verm. 15, II),
 $= a^{\frac{v \cdot x}{n \cdot v}} \cdot b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}}$, (verm. 13, I und 15, II) $=$
 $a^{\frac{v \cdot x \cdot I}{n \cdot v}} \cdot b^{\frac{n \cdot z \cdot I}{n \cdot v}}$, (verm. 25, II), $=$
 $a^{\frac{v \cdot x \cdot \frac{1}{n \cdot v}}{n \cdot v}} \cdot b^{\frac{n \cdot z \cdot \frac{1}{n \cdot v}}{n \cdot v}}$, (verm. 17, II) $= (a^{\frac{v \cdot x}{n \cdot v}})^{\frac{1}{n \cdot v}} (b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}})^{\frac{1}{n \cdot v}}$,
 (verm. 17, III) $= (a^{\frac{v \cdot x}{n \cdot v}} \cdot b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}})^{\frac{1}{n \cdot v}}$. Uebereinstimmend mit 31, IX.

IX) $\frac{a^{\frac{x}{n}}}{b^{\frac{z}{v}}}$ ist, (verm. 24, I), $\frac{a^{\frac{v \cdot x}{v \cdot n}}}{b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}}}$ (verm. 15, II) $= \frac{a^{\frac{v \cdot x}{n \cdot v}}}{b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}}}$
 (verm. 13, I, und 15, II) $= \frac{a^{\frac{v \cdot x \cdot I}{n \cdot v}}}{b^{\frac{n \cdot z \cdot I}{n \cdot v}}}$ (verm. 25, II),

$$\frac{a^{\frac{v \cdot x}{n \cdot v}}}{b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}}}, (\text{verm. 17, II}) = \frac{(a^{\frac{v \cdot x}{n \cdot v}})^{\frac{1}{n \cdot v}}}{(b^{\frac{n \cdot z}{n \cdot v}})^{\frac{1}{n \cdot v}}}, (\text{verm. 28, II})$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{v \cdot x}{n \cdot z}}}{b} \right)^{\frac{1}{n \cdot z}}. \text{ Uebereinstimmend mit 31, X.}$$

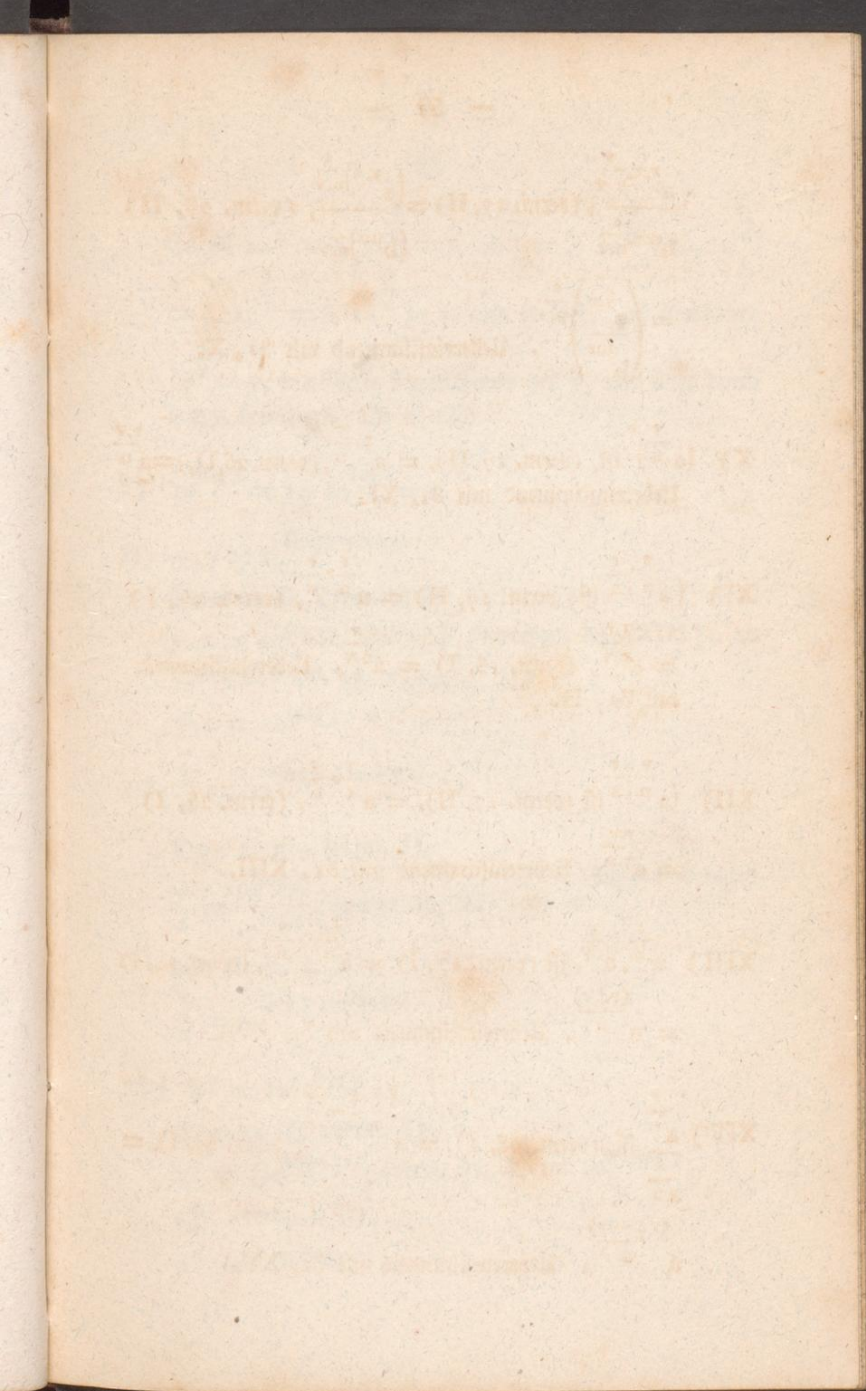
X) $\left(a^{\frac{v}{n}} \right)^r$ ist, (verm. 17, II), $= a^{\frac{r \cdot v}{n}}$, (verm. 25, II,) $= a^{\frac{r \cdot v}{n}}$
 Uebereinstimmend mit 31, XI.

XI) $\left(a^{\frac{r}{v}} \right)^{\frac{1}{n}}$ ist, verm. 17, II) $= a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{r}{v}}$, (verm. 25, I)
 $= a^{\frac{I \cdot r}{n \cdot v}}$, (verm. 13, I) $= a^{\frac{r}{n \cdot v}}$. Uebereinstimmend
 mit 31, II.

XII) $\left(a^{\frac{v}{n}} \right)^{\frac{r}{x}}$ ist (verm. 17, II), $= a^{\frac{r}{x} \cdot \frac{v}{n}}$, (verm. 25, I)
 $= a^{\frac{r \cdot v}{x \cdot n}}$. Uebereinstimmend mit 31, XIII.

XIII) $a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{v}{n}}$ ist (verm. 17, I) $= a^{\frac{(r+v)}{n}}$, (verm. 29, I)
 $= a^{\frac{(r+v)}{n}}$. Uebereinstimmend mit 31, XIV.

XIV) $\frac{a^{\frac{r}{n}}}{a^{\frac{v}{n}}}$ ist, (verm. 28, I), $= a^{\frac{(r-v)}{n}}$, verm. 29, I), $=$
 $a^{\frac{(r-v)}{n}}$. Uebereinstimmend mit 31, XV.



1. The first part of the paper is devoted to a general
discussion of the subject, and to a statement of the
principles which govern the arrangement of the
different parts of the work.

2. The second part of the paper is devoted to a
detailed description of the different parts of the
work, and to a statement of the principles which
govern their arrangement.

3. The third part of the paper is devoted to a
detailed description of the different parts of the
work, and to a statement of the principles which
govern their arrangement.

4. The fourth part of the paper is devoted to a
detailed description of the different parts of the
work, and to a statement of the principles which
govern their arrangement.

Es sei $10^{\frac{a}{n}} = 1$, $10^{\frac{b}{n}} = 2$, $10^{\frac{c}{n}} = 3$, $10^{\frac{d}{n}} = 4$, $10^{\frac{e}{n}}$
 $= 5$, $10^{\frac{f}{n}} = 6$, $10^{\frac{g}{n}} = 7$, und so fort, daß überhaupt
 $10^{\frac{x}{n}} = y$, so heißt $\frac{x}{n}$ Logarithmus des y , und wird durch
 $\log y$ bezeichnet. Es ist also

I) $10^{\log y} = y$; $10^{\log z} = z$,

II) $y \cdot z = 10^{(\log y + \log z)}$

Denn es ist, (vermöge I)

$y \cdot z = 10^{\log y} \cdot 10^{\log z}$, (vermöge 32, XIII), =
 $10^{(\log y + \log z)}$, also (verm. 4, II)

$y \cdot z = 10^{(\log y + z)}$

III) $\frac{y}{z} = 10^{(\log y + -\log z)}$

Denn es ist, (verm. I),

$\frac{y}{z} = \frac{10^{\log y}}{10^{\log z}}$, (verm. 32, XIV) = $10^{(\log y + -\log z)}$

also (verm. 4, II),

$\frac{y}{z} = 10^{(\log y + -\log z)}$

IV) $y^v = 10^{v \cdot \log y}$

Denn es ist, (verm. I),

$y^v = (10^{\log y})^v$, (verm. 32, X) = $10^{v \cdot \log y}$;

also, (verm. 4, II),

$y^v = 10^{v \cdot \log y}$

$$V) \sqrt[n]{y} = 10^{\frac{\log y}{n}}.$$

Denn es ist, (verm. I)

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{10^{\frac{\log y}{n}}} = \sqrt[n]{10^{\frac{x}{n}}}, \text{ (verm. 32, XI) =}$$

$$10^{\frac{\frac{x}{n}}{n}}, \text{ (verm. 26, II), = } 10^{\frac{x}{n^2}} = 10^{\frac{\log y}{n^2}}; \text{ also, (verm. 4, II),}$$

$$\sqrt[n]{y} = 10^{\frac{\log y}{n^2}}.$$

34.

I) Wenn $a = b$, so ist, (verm. 4, II), $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

II) Wenn $x^n = q$, so ist $x = \sqrt[n]{q}$.

Denn, wenn

$x^n = q$, so ist (verm. I)

$$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{q}; \text{ also (verm. 31, III)}$$

$$x = \sqrt[n]{q}.$$

III) Wenn $a:b::c:d$, so ist $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

Denn nach der Annahme und verm. 19, I ist $a \cdot d = b \cdot c$; also, (verm. I),

$$\sqrt[n]{a \cdot d} = \sqrt[n]{b \cdot c}. \text{ Hieraus aber, (verm. 31, IV),}$$

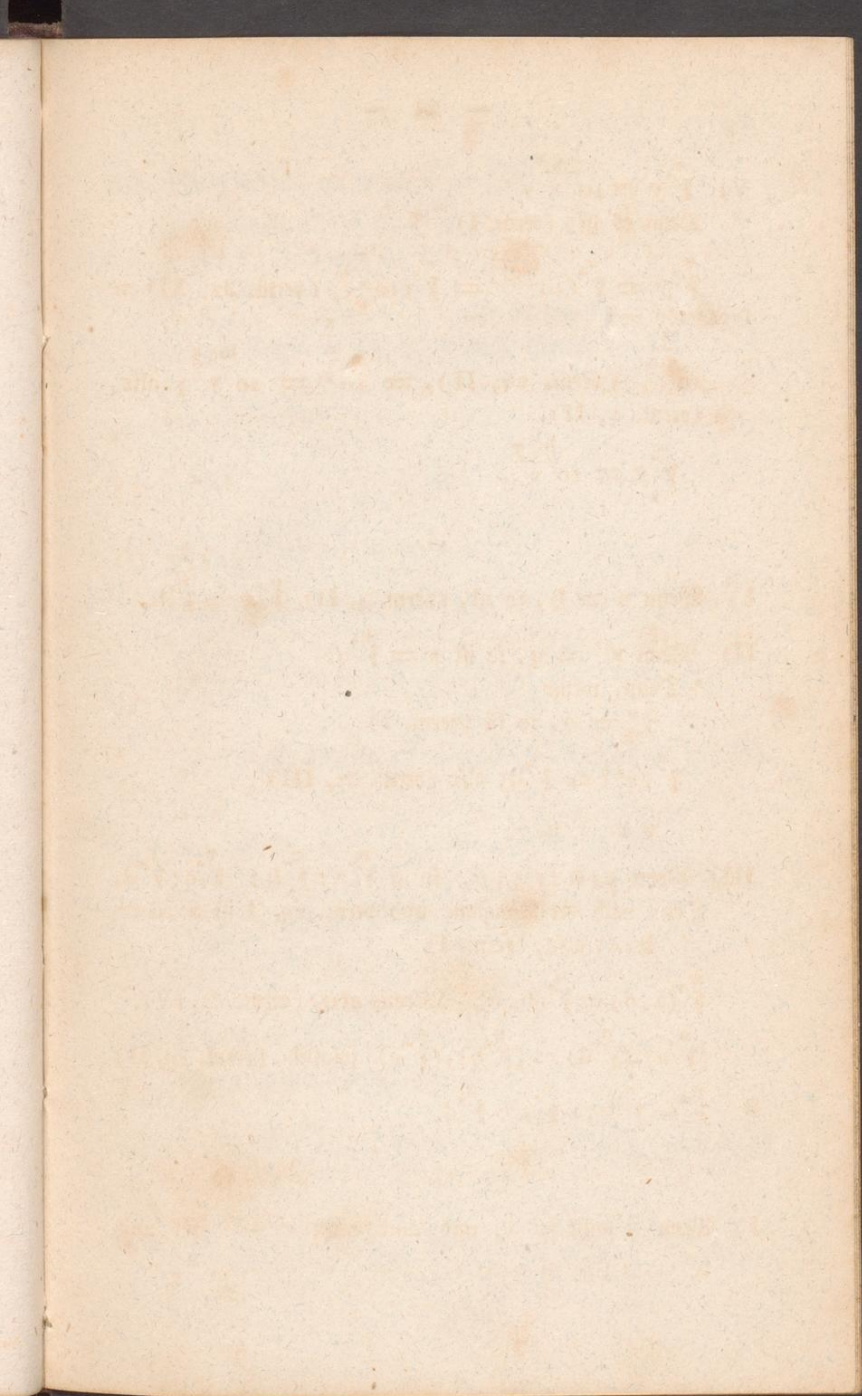
$$(\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{d}) = (\sqrt[n]{b}) \cdot (\sqrt[n]{c}), \text{ folglich, (verm. 19, II)}$$

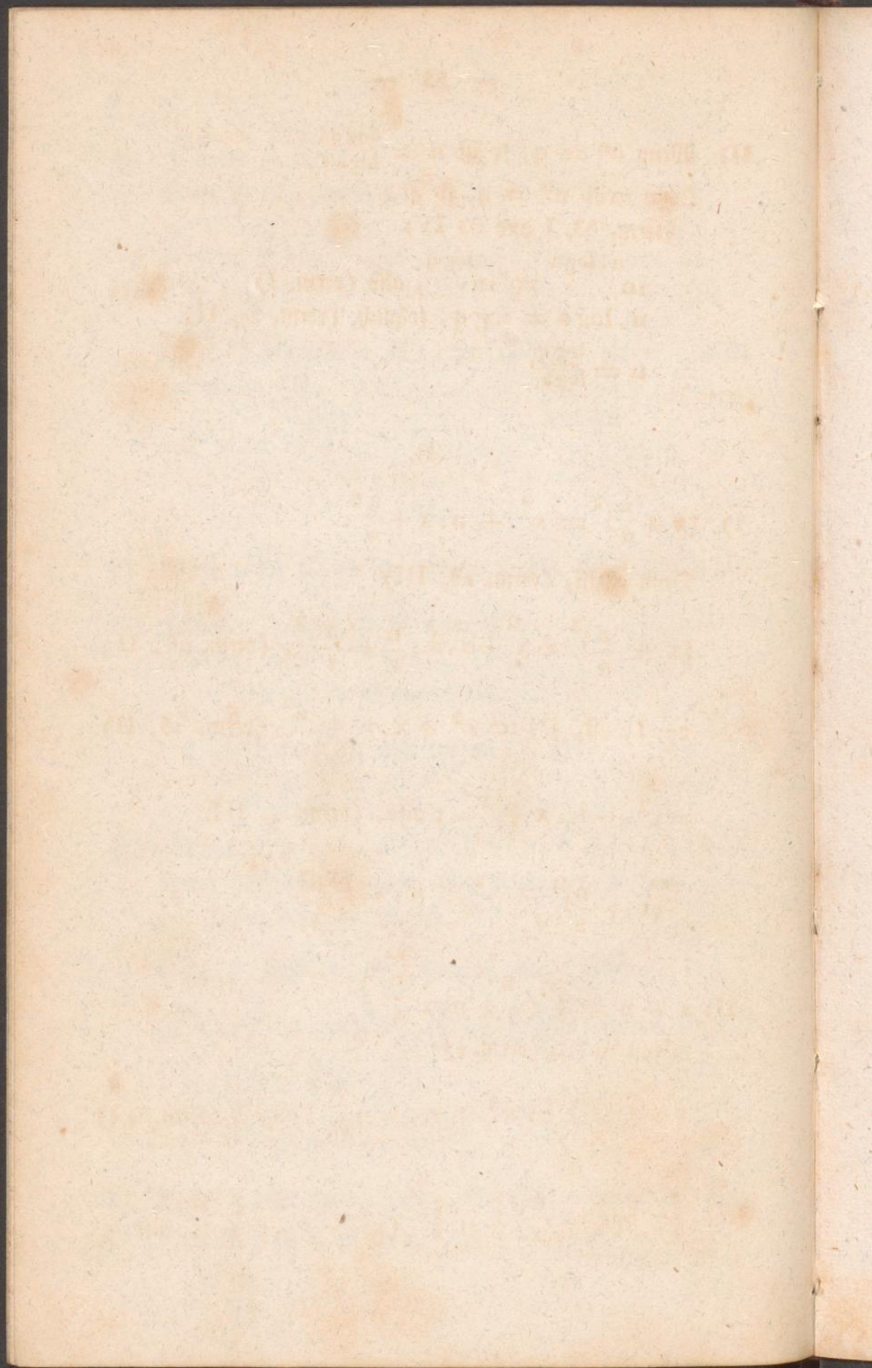
$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}.$$

35.

I) Wenn a nicht $= 1$, und auch nicht $= -1$ ist, und

$$a^n = a^r, \text{ so ist } n = r.$$





II) Wenn $a^n = q$, so ist $n = \frac{\log q}{\log a}$.

Denn wenn $a^n = q$, so ist,

(verm. 33, I und 33 IV)

$$10^{n \cdot \log a} = 10^{\log q}, \text{ also (verm. I)}$$

$$n \cdot \log a = \log q, \text{ folglich, (verm. 27, II)}$$

$$n = \frac{\log q}{\log a}.$$

36.

$$\text{I) } \left(x + \frac{n}{2}\right)^2 = x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4}.$$

Denn es ist, (verm. 18, III)

$$\left(x + \frac{n}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}\right)^2, \text{ (verm. 25, II;}$$

$$27, \text{ I; } 28, \text{ II)} = x^2 + x \cdot n + \frac{n^2}{2^2}, \text{ (verm. 15, II)}$$

$$= x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4}; \text{ also, (verm. 4, II),}$$

$$\left(x + \frac{n}{2}\right)^2 = x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4}.$$

$$\text{II) } x + n = \sqrt[2]{x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4}}$$

Denn es ist, (verm. I)

$$\left(x + \frac{n}{2}\right)^2 = x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4}, \text{ folglich, (verm. 34, I)}$$

$$\sqrt[2]{\left(x + \frac{n}{2}\right)^2} = \sqrt[2]{x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4}}, \text{ also,}$$

(verm. 31, III),

$$x + \frac{n}{2} = \sqrt[2]{(x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4})}.$$

$$\text{III) } (x + -\frac{n}{2})^2 = x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4}$$

Denn es ist, (verm. 18, IV)

$$(x + -\frac{n}{2})^2 = x^2 + -2 \cdot x \cdot \frac{n}{2} + (\frac{n}{2})^2, \text{ (verm.}$$

$$25, \text{ II; } 27, \text{ I; } 28, \text{ II}), = x^2 + -x \cdot n + \frac{n^2}{2^2}$$

$$\text{(verm. 15, II)} = x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4}; \text{ also, (ver.}_4, \text{ II),}$$

$$(x + -\frac{n}{2})^2 = x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4}.$$

$$\text{IV) } x + -\frac{n}{2} = \sqrt[2]{(x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4})}$$

Denn es ist, (vermöge III)

$$(x + -\frac{n}{2})^2 = x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4}, \text{ folgl. (verm. 34, I),}$$

$$\sqrt[2]{(x + -\frac{n}{2})^2} = \sqrt[2]{(x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4})}, \text{ also,}$$

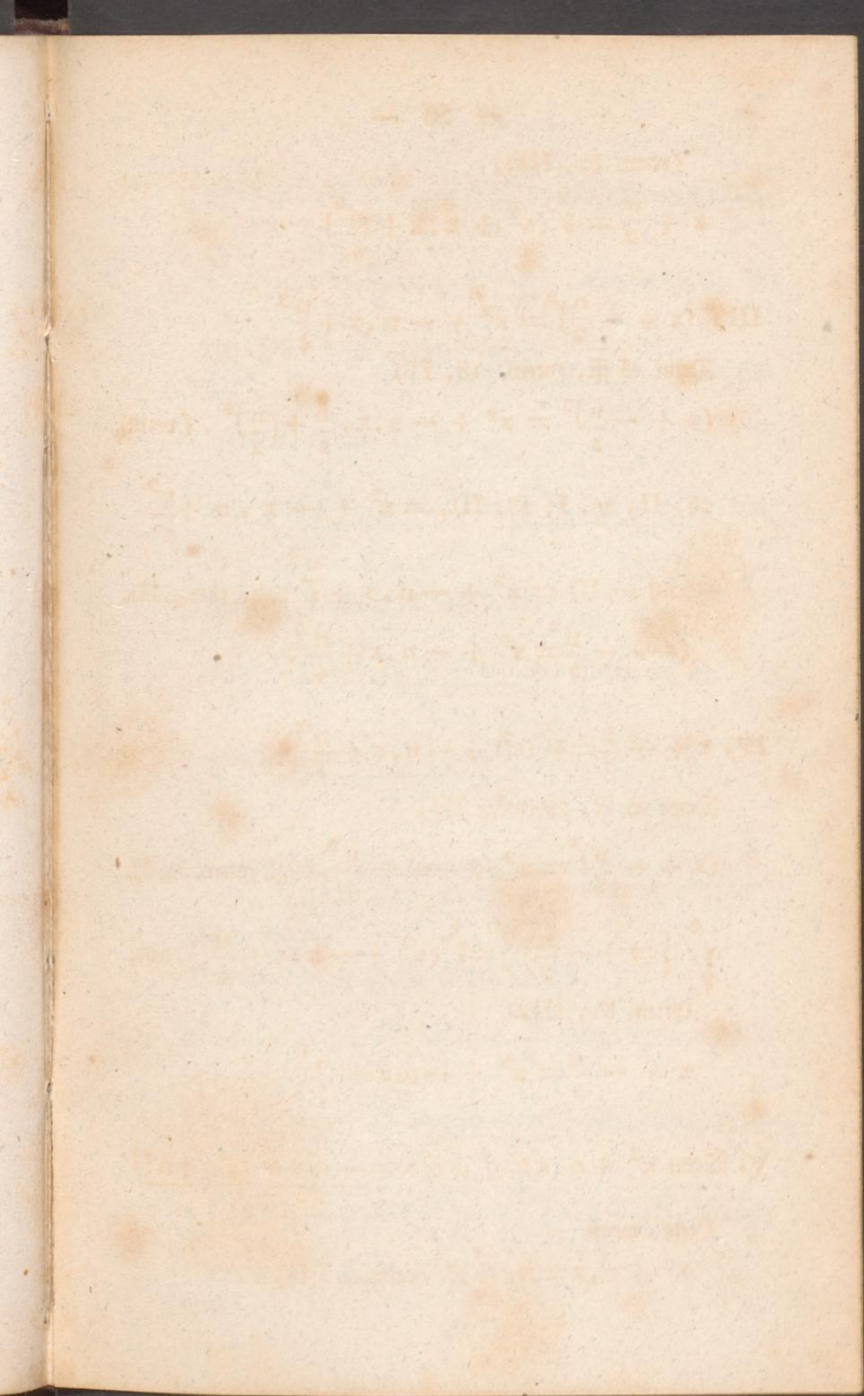
(verm. 31, III)

$$x + -\frac{n}{2} = x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4}.$$

• V) Wenn $x^2 + n \cdot x = q$, so ist $x = \frac{-n + \sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2}.$

Denn, wenn

$$x^2 + n \cdot x = q, \text{ so ist, (verm. } 4, \text{ III)}$$



1) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ (Potenzgesetz)

2) $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ (Potenzgesetz)

3) $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ (Potenzgesetz)

4) $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$ (Potenzgesetz)

5) $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$ (Potenzgesetz)

6) $\frac{1}{x^7} = x^{-7}$ (Potenzgesetz)

7) $\frac{1}{x^8} = x^{-8}$ (Potenzgesetz)

8) $\frac{1}{x^9} = x^{-9}$ (Potenzgesetz)

9) $\frac{1}{x^{10}} = x^{-10}$ (Potenzgesetz)

10) $\frac{1}{x^{11}} = x^{-11}$ (Potenzgesetz)

11) $\frac{1}{x^{12}} = x^{-12}$ (Potenzgesetz)

12) $\frac{1}{x^{13}} = x^{-13}$ (Potenzgesetz)

13) $\frac{1}{x^{14}} = x^{-14}$ (Potenzgesetz)

14) $\frac{1}{x^{15}} = x^{-15}$ (Potenzgesetz)

$$x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4} = q + \frac{n^2}{4}, \text{ folglich, (verm. 29, III),}$$

$$x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4} = \frac{4 \cdot q + n^2}{4}, \text{ also, (verm. 34, I)}$$

$$\sqrt[2]{(x^2 + n \cdot x + \frac{n^2}{4})} = \sqrt[2]{(\frac{4 \cdot q + n^2}{4})}, \text{ hieraus}$$

(verm. II und 31, V)

$$x + \frac{n}{2} = \frac{\sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{\sqrt[2]{4}} = \frac{\sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2}, \text{ und}$$

demnach (verm. 4, II und 3, II)

$$x = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2} \text{ oder (verm. 29, I)}$$

$$x = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2}.$$

VI) Wenn $x^2 + -n \cdot x = q$, so ist $x = \frac{n + \sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2}$

Denn, wenn

$$x^2 - n \cdot x = q, \text{ so ist, (verm. 4, III)}$$

$$x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4} = q + \frac{n^2}{4}, \text{ folgL (verm. 29, III)}$$

$$x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4} = \frac{4 \cdot q + n^2}{4}, \text{ also, (verm. 34, I)}$$

$$\sqrt[2]{(x^2 + -n \cdot x + \frac{n^2}{4})} = \sqrt[2]{(\frac{4 \cdot q + n^2}{4})}, \text{ hieraus,}$$

(verm. 34, II; 31, V)

$$x + \frac{n}{2} = \frac{\sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{\sqrt[2]{2}} = \frac{\sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2}, \text{ und}$$

demnach, (verm. 4, III, und 3, II)

$$x = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2} \text{ oder, (verm. 29, I),}$$

$$x = \frac{n + \sqrt[2]{(4 \cdot q + n^2)}}{2}.$$

37.

I) Die Figur $a + a + d + a + 2.d + a + 3.d + a + 4.d + a + 5.d + \dots$ heißt eine arithmetische Reihe. Die einzelnen durch Addition verbundenen Dinge $a, a + d, a + 2.d, \dots$ heißen Glieder der Reihe; das d heißt Exponent der Reihe.

II) Einer arithmetischen Reihe 10tes Glied ist $a + 9.d$, und überhaupt einer arithmetischen Reihe n tes Glied ist $a + (n + -1).d$.

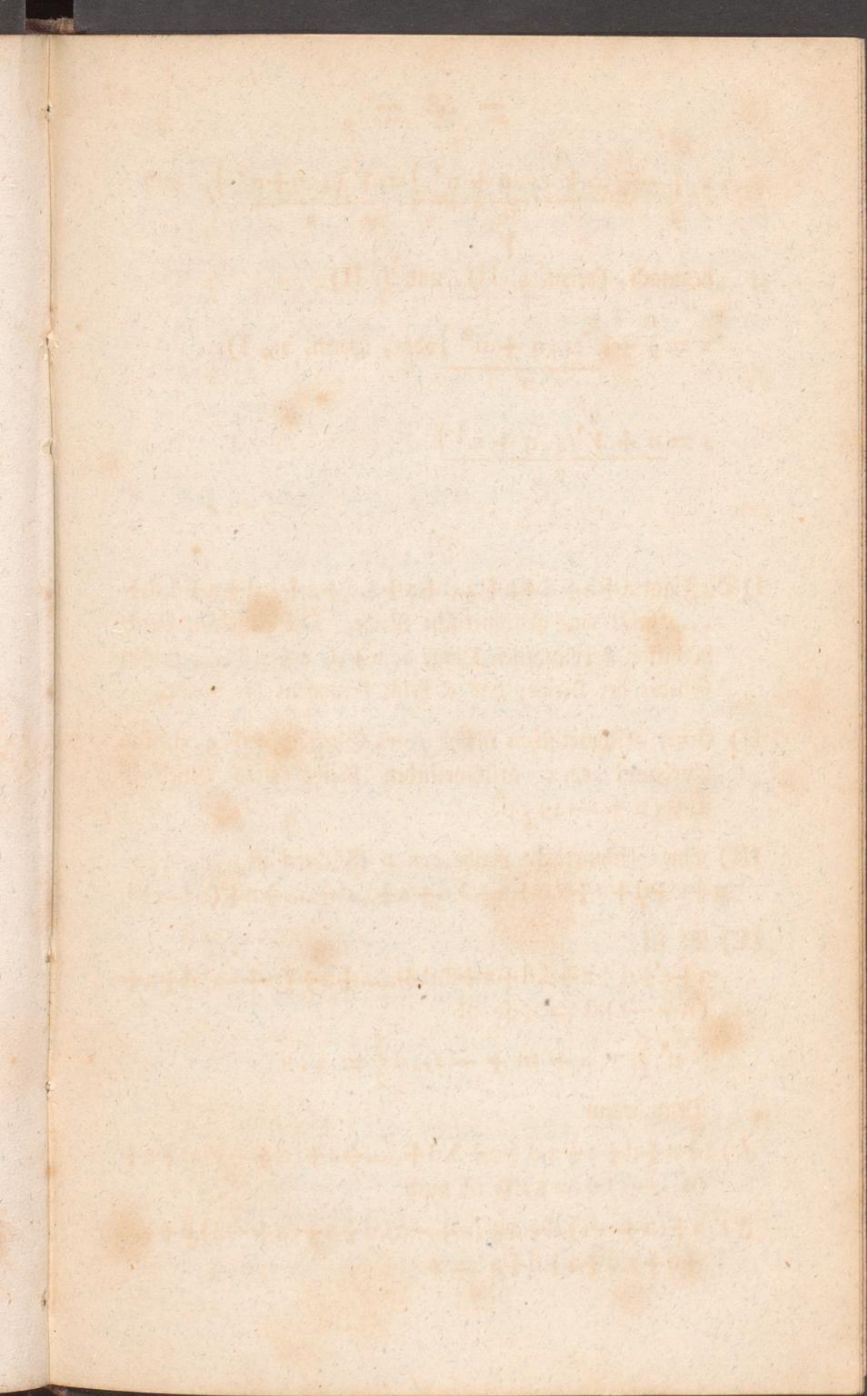
III) Eine arithmetische Reihe von n Gliedern ist
 $a + a + d + a + 2.d + a + 3.d + a + 4.d + \dots + a + (n + -1).d$.

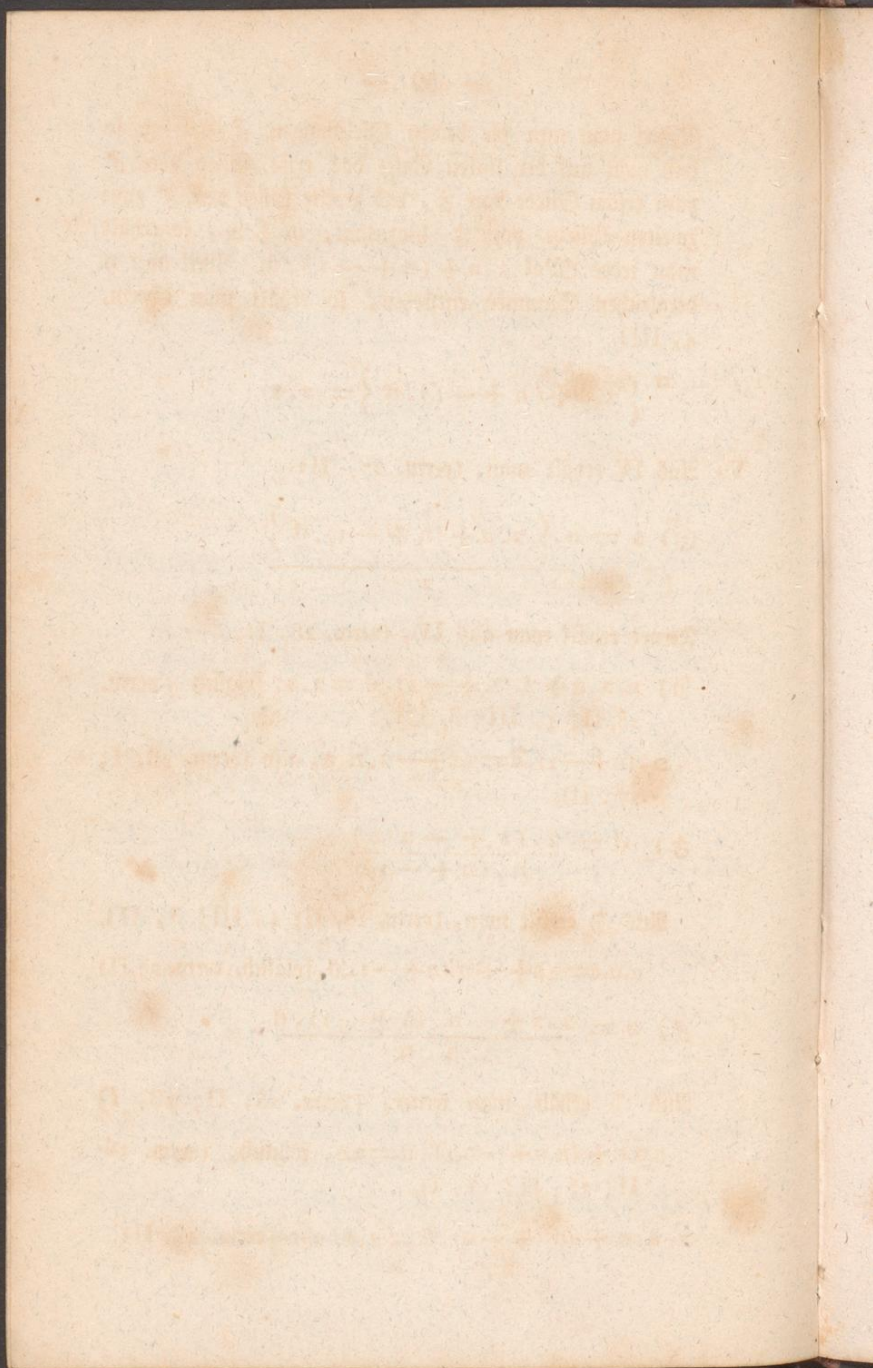
IV) Es sei
 $a + a + d + a + 2.d + a + 3.d + \dots + a + (n + -2).d + a + (n + -1).d = s$, so ist
 $n \cdot \{ 2 \cdot a + (n + -1).d \} = 2 \cdot s$.

Denn wenn

3) $a + a + d + a + 2.d + a + 3.d + \dots + a + (n + -2).d + a + (n + -1).d = s$, so ist auch

3) $a + (n + -1).d + a + (n + -2).d + a + (n + -3).d + \dots + a + 2.d + a + d + a = s$





Addirt man nun die beiden Gleichungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ so daß man auf der linken Seite das erste Glied von $\mathcal{F}$ zum ersten Gliede von $\mathcal{G}$, das zweite Glied von $\mathcal{F}$ zum zweiten Gliede von $\mathcal{G}$ hinzuthut, u. s. w., so erhält man jedes Mal $2 \cdot a + (n + 1) \cdot d$. Weil aber n dergleichen Summen entstehen, so erhält man (verm. 4, III)

$$n \cdot \{ 2 \cdot a + (n + 1) \cdot d \} = 2 \cdot s$$

V) Aus IV erhält man, (verm. 27, II)

$$\textcircled{C}) \quad s = \frac{n \cdot \{ 2 \cdot a + (n + 1) \cdot d \}}{2}$$

Ferner erhält man aus IV, (verm. 18, I),

$$\textcircled{D}) \quad n \cdot 2 \cdot a + n \cdot (n + 1) \cdot d = 2 \cdot s; \text{ folglich (verm. 15, II; 4, III; 3, II),}$$

$$n \cdot (n + 1) \cdot d = 2 \cdot s + 2 \cdot n \cdot a, \text{ also (verm. 18, I; 27, II),}$$

$$\textcircled{E}) \quad d = \frac{2 \cdot (s + n \cdot a)}{n \cdot (n + 1)}$$

Aus $\textcircled{D}$ erhält man, (verm. 15, II; 4, III; 3, II),

$$2 \cdot n \cdot a = 2 \cdot s + n \cdot (n + 1) \cdot d, \text{ folglich, (verm. 27, II)}$$

$$\textcircled{F}) \quad a = \frac{2 \cdot s + n \cdot (n + 1) \cdot d}{2 \cdot n}$$

Aus $\textcircled{D}$ erhält man ferner, (verm. 15, II; 18, I)

$$2 \cdot a \cdot n + (n \cdot n + n \cdot 1) \cdot d = 2 \cdot s, \text{ folglich, (verm. 16, II; 15, II; 13, I)}$$

$$2 \cdot a \cdot n + (n^2 + n) \cdot d = 2 \cdot s, \text{ also (verm. 18, II)}$$

$2 \cdot a \cdot n + n^2 \cdot d + -n \cdot d = 2 \cdot s$. Hieraus aber
(verm. 15, II; 18, II),

$d \cdot n^2 + (2 \cdot a + -d) \cdot n = 2 \cdot s$, folglich, (verm. 4, III),

$\frac{d \cdot n^2 + (2 \cdot a + -d) \cdot n}{d} = \frac{2 \cdot s}{d}$, oder (verm. 29, I; 27, I)

$n^2 + \frac{(2 \cdot a + -d) \cdot n}{d} = \frac{2 \cdot s}{d}$, also, (verm. 25, III),

$n^2 + \frac{(2 \cdot a + -d) \cdot n}{d} = \frac{2 \cdot s}{d}$. Aus dieser Gleichung

erhält man nun, (verm. 36, V),

$$n = \frac{-\frac{(2 \cdot a + -d)}{d} + \sqrt{\left(4 \cdot \frac{2 \cdot s}{d} + \left(\frac{2 \cdot a + -d}{d}\right)^2\right)}}{2}, \text{ verm.}$$

25 II; 24, I; 15, II; 28, II; 29, I),

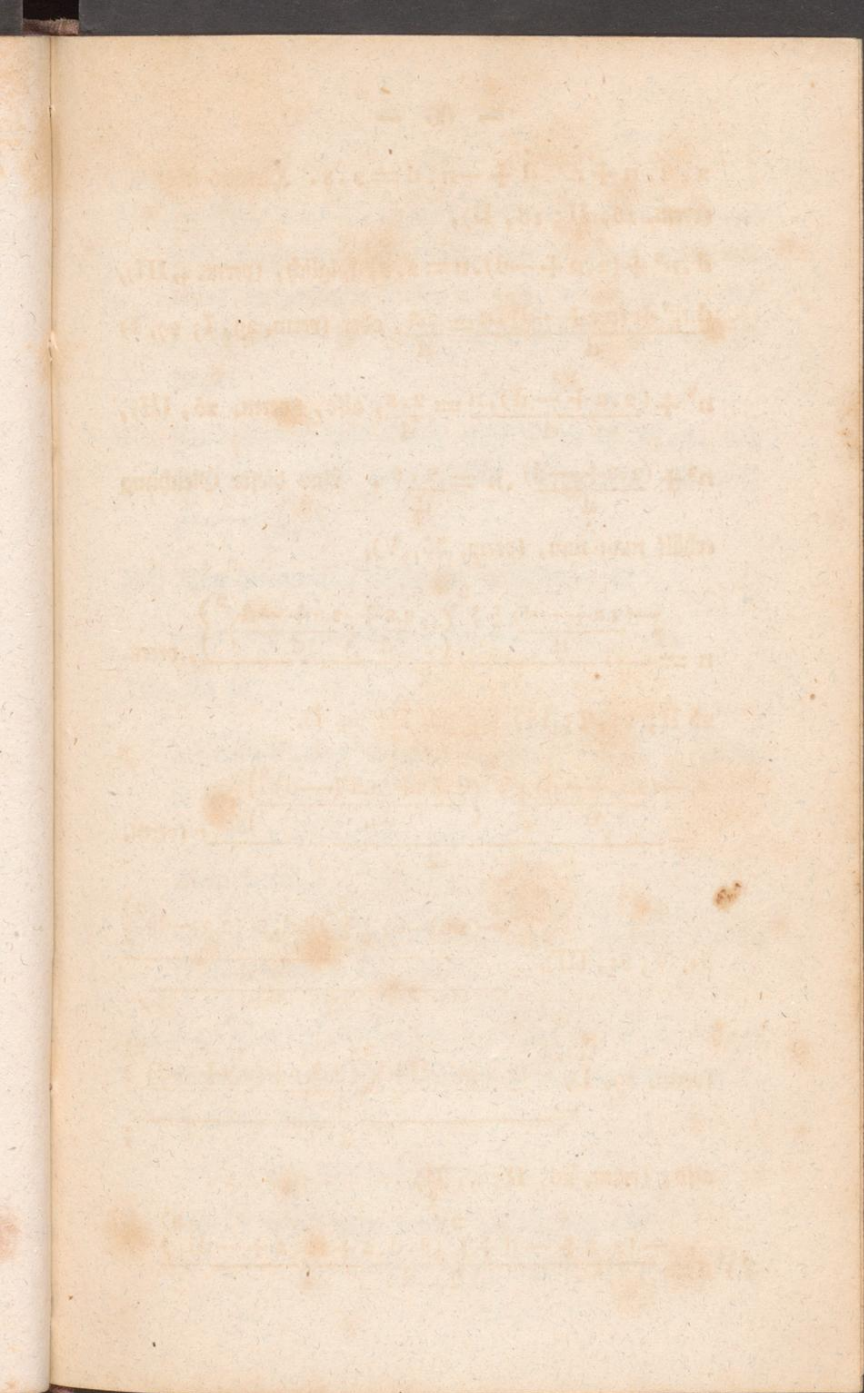
$$= \frac{-\frac{(2 \cdot a + -d)}{d} + \sqrt{\left(\frac{8 \cdot d \cdot s + (2 \cdot a + -d)^2}{d^2}\right)}}{2}, \text{ (verm.}$$

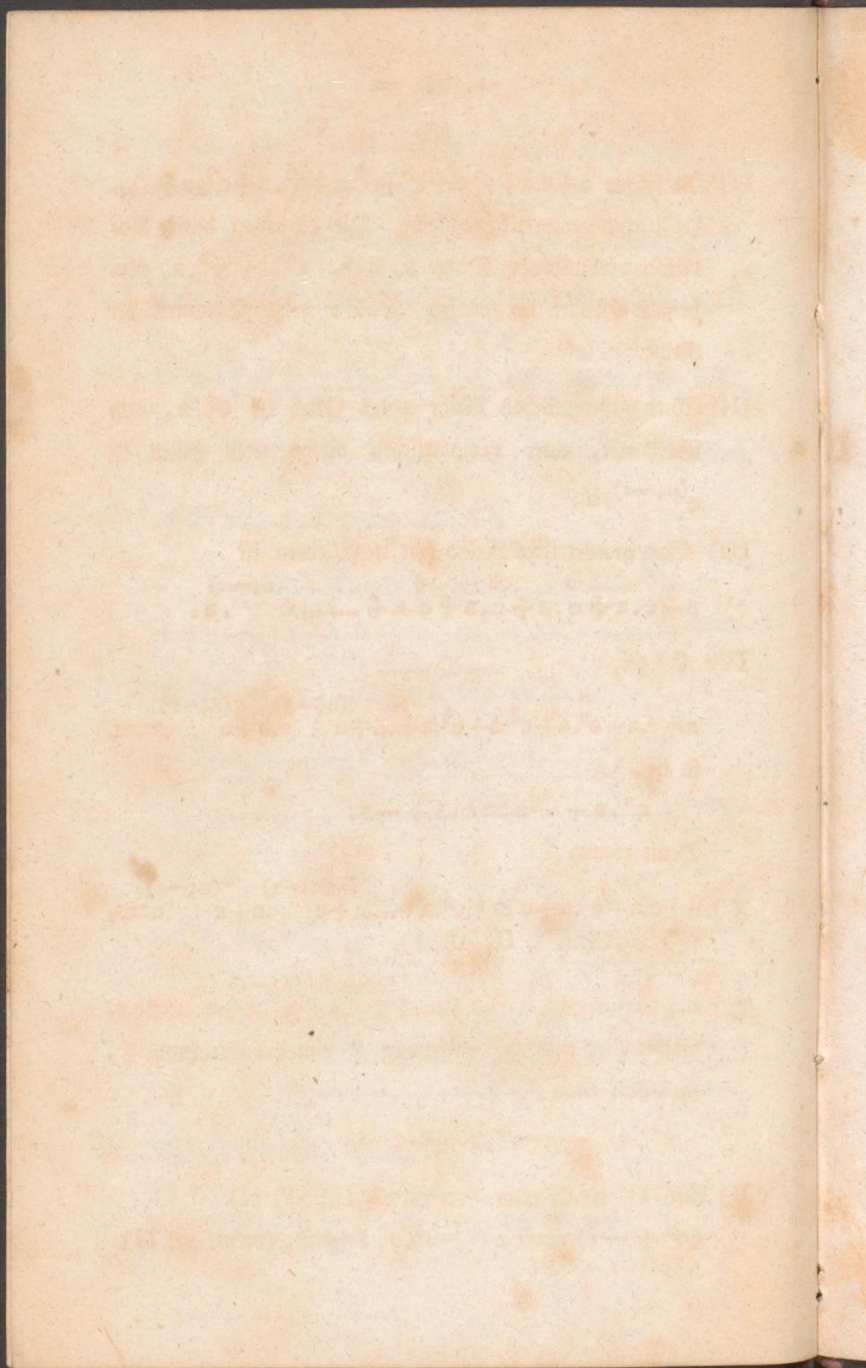
$$31, V; 31, III), = \frac{-\frac{(2 \cdot a + -d)}{d} + \sqrt{\left(\frac{8 \cdot d \cdot s + (2 \cdot a + -d)^2}{d}\right)}}{2},$$

$$\text{(verm. 29, I), } \frac{-\frac{(2 \cdot a + -d)}{d} + \sqrt{\left(\frac{8 \cdot d \cdot s + (2 \cdot a + -d)^2}{d}\right)}}{2};$$

also, (verm. 26, II; 4, II)

$$\text{?) } n = \frac{-\frac{(2 \cdot a + -d)}{d} + \sqrt{\left(\frac{8 \cdot d \cdot s + (2 \cdot a + -d)^2}{d}\right)}}{2}, d,$$





I) Die Figur $a + e.a + e^2.a + e^3 + e^4.a + e^5.a + e^6.a + \dots$ heißt eine geometrische Reihe. Die einzelnen durch Addition verbundenen Dinge $a, e.a, e^2.a, e^3.a, \text{etc.}$ heißen Glieder der Reihe. Das e heißt Exponent der Reihe.

II) Einer geometrischen Reihe 10tes Glied ist $e^9.a$, und überhaupt, einer geometrischen Reihe ntes Glied ist $e^{(n-1)}.a$.

III) Eine geometrische Reihe von n Gliedern ist

$$a + e.a + e^2.a + e^3.a + e^4.a + \dots + e^{(n-1)}.a.$$

IV) Es sei,

$$a + e.a + e^2.a + e^3.a + e^4.a + \dots + e^{(n-2)}.a + e^{(n-1)}.a = s,$$

so ist,

$$e^n.a + -a = e.s + -s.$$

Denn wenn,

$$\text{J) } a + e.a + e^2.a + e^3.a + e^4.a + \dots + e^{(n-2)}.a + e^{(n-1)}.a = s,$$

so ist, (verm. 4, II; 18, I),

$$\text{Z) } e.a + e^2.a + e^3.a + e^4.a + \dots + e^{(n-2)}.a + e^{(n-1)}.a = e.s.$$

Subtrahirt man die Gleichung J von der Gleichung Z,

so erhält man,

$$e^n.a + -a = e.s + -s.$$

V) Aus IV erhält man, (verm. 13, II; 18, II)

$$(e^n + -1).a = (e + -1).s, \text{ folglich, (verm. 27, II)}$$

$$\odot) s = \frac{(e^n + 1) \cdot a}{(e + 1)}, \text{ und}$$

$$\text{)) } a = \frac{(e + 1) \cdot s}{(e^n + 1)}$$

Aus IV erhält man, (verm. 4, III; 3, II; 13, II; 18, II),

$$e^n \cdot a = (e + 1) \cdot s + a; \text{ folglich, (verm. 27, II),}$$

$$e^n \cdot a = \frac{(e + 1) \cdot s + a}{a}, \text{ also, (verm. 35, II)}$$

$$4) n = \frac{\log \left(\frac{(e + 1) \cdot s + a}{a} \right)}{\log e}.$$

