www.e-rara.ch

Ein Beitrag zur Analysis der complexen Zahlen

Denzler, W.

Zürich, 1855

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-119439

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

Ein Beitrag

zur

Analysis der complexen Zahlen

von

W. DENZLER.

(Aus den Mittheilungen der zürch. naturforsch. Gesellschaft Nr. 113 besonders abgedruckt.)

Zürich,

Druck von Zürcher und Furrer.

1855.

Ein Beitrag

zur

Analysis der complexen Zahlen

von

W. DENZLER

(Aus den Mittheilungen der zürch. naturforsch. Gesellschaft
Nr. 113 besonders abgedruckt.)

Zürich.

Druck von Zürcher und Furrer.

1852.

Schon seit bald zwei Jahren beschäftigt mich die Aufgabe, die Gesetze, welche die Analysis für reelle Zahlen begründet hat, in Beziehung auf complexe Zahlen zu untersuchen, und hiebei geometrische Evidenz in Euklideischer Weise anzustreben. So sehr ich es nun auch bedaure, dass meine Arbeiten in dieser Richtung mich erst bis zur Untersuchung des Restes der Taylor'schen Reihe mit complexen Variabeln führten, ebenso sehr freue ich mich der erlangten geometrischen Einsicht in die Analysis der complexen Zahlen, deren Behandlung in den Lehrbüchern noch immer so Vieles zu wünschen übrig lässt. Der Gang dieser Arbeiten war folgender: Vorerst betrachtete ich die Gesetze der Verbindung complexer Zahlen durch Addition, Multiplication und den zugehörigen inversen Operationen. In Beziehung auf diesen Abschnitt will ich, da die Resultate bekannt sind, die Entwicklung dieser Resultate aber allein schon den Raum einer Abhandlung fordert, nur Folgendes mittheilen:

1. Suchte ich die Erklärung der Addition und Multiplikation so zu geben, dass diese die bekannten Erklärungen für reelle Zahlen als besondere Fälle enthielten.

2. Hielt ich es für unerlässlich, die Richtigkeit der Ansicht von Gauss nachzuweisen, dass nämlich, wenn die Bilder der reellen Zahlen in einer und derselben Geraden gedacht werden, die Bilder der Seitenzahlen nothwendig in Perpendikeln auf diese Gerade liegen müssen.

3. Gelang es mir, die Begründung der Gesetze in diesem Abschnitt nur sehr einfachen geometrischen Betrachtungen zu entnehmen.

Nach Beendigung dieses Abschnittes zog ich dann die Gesetze dsr Verbindung complexer Zahlen durch Potenzirung und den zugehörigen inversen Operationen in Betracht und gelangte hiebei zu folgenden Sätzen:

§. 1. Erklärungen.

1. Bedeutet p irgend eine relle Zahl, so bezeichne ich mit $\underset{\sim}{p}$ den Quotienten aus p durch den absoluten Werth von p. Ist $p = o$, so verstehe ich in diesem Falle unter $\underset{\sim}{p}$ durchaus nichts anderes als die absolute Einheit, so dass durch diese Annahme das $\underset{\sim}{p}$ immer eine bestimmte Bedeutung hat und nur eindeutig ist.

2. Durch ${}_o\sqrt[m]{a}$, wo a eine absolute Zahl und m eine positive oder negative ganze Zahl, deute ich die absolute Zahl an, die mit m potenzirt a gibt. Diese Bezeichnung ist, wie die Folge zeigen wird, nur ein besonderer Fall einer allgemeinern von mir angenommenen Bezeichnungsweise.

3. Arg.(p + qi), wo p und q reell, bezeichnet jeden Bogen, dessen Sinus $= \frac{q}{{}_o\sqrt{p^2 + q^2}}$ und dessen Cosinus $= \frac{p}{{}_o\sqrt{p^2 + q^2}}$; arg (p + qi) aber stellt denjenigen besondern Werth von Arg (p + qi) dar, der entweder $= \pi$ oder zwischen π und $- \pi$ liegt. Das Bild von arg (p + qi) in der Zahlebene ist der Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt, der einerseits von de positiven Zahllinie und anderseits von dem Gauss'schen Zahlort der Complexen p + qi begrenzt ist, und der, wenn q = o und p negativ ist, auf derjenigen Seite von der reellen Zahllinie liegt, wo sich die Bilder der positiven Seitenzahlen befinden. Mod.(p + qi) bezeichnet die

absolute Zahl, die quadrirt $p^2 + q^2$ gibt; das Bild dieses Modulus in der Zahlebene ist die Gerade aus dem Nullpunkt nach dem Zahlort von $p + qi$.

4. arc. sin p, wo p reell und $p^2 \leq 1$, bedeutet den einzigen Bogen, dessen Sinus = p und dessen absoluter Werth $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigt; arc. cos p bezeichnet den einzigen π nicht übersteigenden positiven Bogen, dessen Cosinus = p; arc. tang p und arc. cot. p, wo p reell, bedeutet den Bogen, dessen Tangente oder Cotangente = p und dessen absoluter Werth $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigt. Soll jeder Bogen, dessen Sinus, Cos, tang., cot. = p vorgestellt werden, so schreibe ich Arc. anstatt arc.

§. 2. Lehrsätze.

Bezeichnen a und b reelle Zahlen, so ist

1) $\text{Arg}\,(a + bi) = 2\gamma\pi + \arg\,(a + bi)$

wo γ sowohl o, als auch jede pos. und jede neg. ganze Zahl darstellt.

2) $\arg\,(a + bi) = \underset{\smile}{b}\,[1 - \underset{\smile}{a}]\,\frac{\pi}{2} + \text{arc. tang}\,\frac{b}{a}$

3) $= \underset{\smile}{b}\,[1 - \underset{\smile}{a}]\,\frac{\pi}{2} + \underset{\smile}{a}\,\text{arc. sin}\,\frac{b}{\sqrt[o]{a^2 + b^2}}$

4) $= \underset{\smile}{b}\,\text{arc. cos}\,\frac{a}{\sqrt[o]{a^2 + b^2}}$

§. 3. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Mit E^x, wo x irgend eine complexe Zahl, bezeichne ich die Exponentialreihe: $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$, mithin nicht die Potenz e^x, die im Allgemeinen vieldeutig ist. Da die Reihe E^x für jeden angebbaren

complexen Werth von x convergirt, so wird E^x immer eine bestimmte angebbare Complexe sein.

2) la, wo a eine absolute Zahl, bezeichne die einzige absolute Zahl, mit der e oder die irrationale Zahl 2,71828 . . . . potenzirt, a gibt.

Log (p + qi) aber, wo p und q reell, bezeichnet jede Zahl, die in E^x für x gesetzt, diesem E^x den Werth p + qi gibt.

3) Bezeichnet γ die Null, so wie auch jede positive und jede negative Zahl, p und q reelle Zahlen, so hat man die Gleichung

$$\log (p + qi) = \frac{1}{2} l(p^2 + q^2) + [2\gamma\pi + \arg (p + qi)]i$$

4) Mit ${}_\tau\log (p + qi)$ bezeichne ich den speciellen Werth $\frac{1}{2} l(p^2 + q^2) + [2\tau\pi + \arg (p + qi)]i$. Diese eindeutige Grösse ${}_\tau\log (p + qi)$ vermag übrigens, insofern man noch für τ die Null und jede positive oder negative ganze Zahl annehmen kann, jeden Werth von log (p + qi) auszudrücken.

§. 4. Lehrsätze und Erklärungen.

1) Unter $(p + qi)^{\frac{n}{m}}$, wo n und m absolute ganze Zahlen, verstehe ich die n^{te} Potenz jeder Zahl, deren m^{te} Potenz p + qi ist. Diese Potenz ist daher im Allgemeinen von dem keineswegs gleichbedeutenden Ausdruck $\sqrt[m]{(p + qi)^n}$ wohl zu unterscheiden. Die Gleichung

$$(p + qi)^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{(p + qi)^{\frac{n}{m}}}$$

stellt die Erklärung der Potenzirung irgend einer Zahl mit einem negativen Bruche dar.

Den Quotienten aus einer eindeutigen Potenz, und wenn die Potenz vieldeutig ist, aus irgend einem bestimmten besondern Werthe einer Potenz durch sich selbst werde ich auch durch die o^{te} Potenz desselben Dignanden ausdrücken, so dass $(p + qi)^o$ stets eindeutig genommen ist, nnd wenn $p + qi$ nicht o, die Einheit bedeutet. Der Fall, da auch $p + qi = o$, muss in der Rechnung stets besonders untersucht werden.

2) Bezeichnen wieder p, q und ς pos. oder neg. reelle Zahlen, γ eine unendlich vieldeutige Zahl, welche o, sowie auch jede positive und jede negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, endlich n und m positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe zu einander relative Primzahlen sind, so ist die Gleichung

$$(p + qi)^{\frac{n}{m}} = E^{\frac{n}{m}\log(p+qi)} = E^{\frac{n}{2m}l(p^2+q^2)} \times \left[\cos\left[\frac{n}{m}[2\gamma\pi + \arg(p+qi)]\right] + i\sin\left[\frac{n}{m}(2\gamma\pi + \arg(p+qi))\right]\right]$$

$$= (p + qi)^{\frac{n\varsigma}{m\varsigma}}$$

eine vollkommene, d. h. eine solche, in welcher die Werthe von irgend einem der 4 Theile auch zugleich die Werthe von jedem der übrigen Theile sind; und jeder dieser 4 Theile hat nicht mehr und nicht weniger als m verschiedene Werthe.

In Beziehung auf den Beweis dieses Lehrsatzes nur folgende Andeutungen: Wer sich den Zahlort von $p + qi$, ferner die Bedeutung von $(p + qi)^{\frac{1}{m}}$, wo m vorerst positiv sein soll und die Erklärung von der Multiplikation klar denkt, der wird gewiss sogleich finden, dass die Zahlorte von m verschiedenen Werthen der Potenz $(p + qi)^{\frac{1}{m}}$ in einem und demselben Kreisumfang liegen,

der in der Zahlebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschrieben ist und dessen Radius $= \varepsilon . \sqrt[m]{\text{Mod}\,(p. + qi)} = \varepsilon . E^{\frac{1}{2m} l(p^2 + q^2)}$, wo ε die die absolute Einheit in der Zahlebene vorstellende Gerade ist; und dass die Argumente dieser Zahlorte folgende sind:

$$\frac{\arg(p + qi)}{m}, \frac{2\pi + \arg(p + qi)}{m}, \frac{2 \cdot 2\pi + \arg(p + qi)}{m} \ldots$$
$$\frac{2(m - 1)\pi + \arg(p + qi)}{m}$$

Ferner käme man bei der Annahme, die Zahl der verschiedenen Werthe von $(p + qi)^{\frac{1}{m}}$ sei grösser als m, sehr leicht auf den Schluss, dass es entweder verschiedene Bogen gäbe, die m mal genommen arg $(p + qi)$ ausmachten, oder dann ein Bogen existirte, der mit m multiplizirt eine solche ganze Anzahl von ganzen Peripherieen gäbe, die zwischen 2 nur um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen läge. Von jetzt an könnte der Beweis mit Zuziehung eines bekannten Satzes aus der Theorie der Primzahlen leicht vervollständigt werden.

Für den Fall, da $m = 1$, hat der Beweis gar keine Schwierigkeiten.

§. 5. Erklärungen und Lehrsätze.

I. Bezeichnen α, β, p und q reelle Zahlen, so nehmen wir nach dem Vorgange Ohm's für den Fall, dass β nicht o, die Gleichung

$$(p + qi)^{\alpha + \beta i} = E^{(\alpha + \beta i) \log (p + qi)}$$

die dann, wenn $\beta = o$, entweder die bereits gegebene Erklärung von $(p + qi)^o$, oder dann den Lehrsatz in

§. 4 ausdrückt, als Darstellung der Erklärung von der Potenzirung irgend einer Zahl mit einer Complexen an.

II. Den speciellen Werth $E^{(\alpha+\beta i)_\tau \log(p+qi)}$ von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ bezeichne ich mit $_\tau(p+qi)^{\alpha+\beta i}$, welcher Ausdruck offenbar noch jeden der speciellen Werthe von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ vorstellen kann.

III. Wenn $\arg(p+qi)=\varphi$, $\text{Mod.}(p+qi)=m$, und γ eine unendlich vieldeutige Zahl bezeichnet, die o und jede positive, sowie auch negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, so ist die Gleichung

$$1)\quad (p+qi)^{\alpha+\beta i} = E^{\alpha lm-\beta(2\gamma\pi+\varphi)+[\beta lm+\alpha(2\gamma\pi+\varphi)]i}$$
$$= E^{\alpha lm-\beta(2\gamma\pi+\varphi)}\left[\cos[\beta lm+\alpha(2\gamma\pi+\varphi]\right.$$
$$\left.+\,i\sin[\beta lm+\alpha(2\gamma\pi+\varphi)]\right]$$

eine vollkommene, und ebenso die Gleichung

$$2)\quad (p+qi)^{-\alpha-\beta i} = \frac{1}{(p+qi)^{\alpha+\beta i}}$$

woraus aber nicht geschlossen werden darf, dass

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i}\cdot(pq+i)^{-\alpha-\beta i}=1$$

sei, da diese Gleichung offenbar eine unvollkommene wäre. Uebrigens erkennt man schon bei dem einfachen Produkt $4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ oder $\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}$, dass dieses nicht bloss den Werth 1, sondern auch den Werth — 1 hat.

IV. Sämmtliche Werthe der Potenz $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ werden auch erhalten, wenn man irgend einen speciellen Werth von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$, z. B. $_\tau(p+pi)^{\alpha+\beta i}$ mit allen Werthen von $1^{\alpha+\beta i}=E^{(\alpha+\beta i)\log 1}=E^{2\gamma\pi i(\alpha+\beta i)}$ multiplizirt, und es ist daher

1) $(p + qi)^{\alpha + \beta i} = {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} \cdot 1^{\alpha + \beta i}$

eine vollkommene Gleichung, da offenbar

$$2\gamma\pi i + {}_{\tau}\log(p + qi) = \log(p + qi)$$

Diese letztere Gleichung findet aber auch nach Weglassung des τ statt, und es ist daher auch

2) $(p + qi)^{\alpha + \beta i} = (p + qi)^{\alpha + \beta i} \cdot 1^{\alpha + \beta i}$

§. 6. Lehrsatz.

Entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz die Potenz $[1 + (p + qi)]^{\alpha + \beta i}$, so drückt die dadurch erhaltene Reihe in allen den Fällen ihrer Convergenz den speziellen Werth

${}_{0}(1 + p + qi)^{\alpha + \beta i}$ von $(1 + p + qi)^{\alpha + \beta i}$ aus.

Ich habe den Beweis dieses Lehrsatzes wiederholt und so genau mit Rücksicht auf jede Einzelnheit geprüft, dass ich in der That nicht einsehen kann, was Ohm in seinem »Geist der mathem. Analysis. 1842 pag. 143« in folgendem Satze behauptet: »die binomische Reihe drückt natürlich nur einen der Werthe von $(1 + p + qi)^{\alpha + \beta i}$ aus, aber man müsste erst in jedem Falle noch untersuchen, welcher der Werthe es ist, und man darf daher nicht so geradezu behaupten, dass man den einfachsten Werth dieser Potenz habe. Wenn aber $q = \beta = 0$, dann ist es keinem Zweifel unterworfen, dass der Werth dieser Binomialreihe der einfachste (nämlich der reelle) Werth von $(1 + p)^{\alpha}$ ist.« Es scheint hieraus die Ansicht von Ohm hervorzugehen, dass, wenn q und β nicht Nullen sind, die binomische Reihe nicht immer den Werth ${}_{0}(1 + p + qi)^{\alpha + \beta i}$, oder nach seiner Terminologie den einfachsten Werth gebe, was nach meinen Untersuchungen, deren Mittheilung jetzt zu viel Raum forderte, unrichtig wäre.

§. 7. Erklärungen und Lehrsätze.

I. Irgend eine Zahl $(p + qi)$, sei sie reell oder complex, mit einer 2^{ten} Zahl $(\alpha + \beta i)$ derselben Art depotenziren, heisst alle die Zahlen bestimmen, die mit der 2^{ten} potenzirt, Werthe geben, von welchen einer mit der ersten jener 2 Zahlen coincidirt. Das im Allgemeinen unendlich vieldeutige Ergebniss dieser Depotenzirung bezeichne ich mit $\sqrt[\alpha+\beta i]{p + qi}$

II. Lehrsatz. Bezeichnen p und q, α und β reelle Zahlen, γ die unendlich vieldeutige Zahl, die o und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, ist endlich $\varphi = \arg(p + qi)$ und $m = \text{Mod.}(p + qi)$, so hat man folgende vollkommene Gleichung:

$$1) \quad \sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi)} = (p + qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}} = E \frac{\alpha \ln m + \beta(2\gamma\pi + \varphi)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{-\beta \ln m + \alpha(2\gamma\pi + \varphi)}{\alpha^2 + \beta^2} i$$

d. h. mit Rücksicht auf die 2 ersten Theile dieser Gleichung: Jede complexe Zahl, deren $(\alpha + \beta i)^{te}$ Potenz $p + qi$ zu einem Werthe hat, ist unter den Werthen von $(p + qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$ enthalten, und jeder Werth von $(p + qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$ ist eine Zahl, deren $(\alpha + \beta i)^{te}$ Potenz $(p + qi)$ zu einem Werthe hat.

Aus 1) darf man aber nicht schliessen, dass $[(p + qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}]^{\alpha+\beta i} = p + qi$, welche Gleichung möglichst unvollkommen wäre.

Ferner ist auch folgende Gleichung eine vollkommene:

$$2) \quad \sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi)\, 1^{\alpha+\beta i}} = (p + qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

und aus dieser kann man jetzt auf die vollkommene Gleichung schliessen:

$$3) \quad (p + qi) \cdot 1^{\alpha + \beta i} = [(p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}]^{\alpha + \beta i}$$

III. Den speziellen Werth ${}_\tau(p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}$ von $\sqrt[\alpha + \beta i]{p + qi}$ stellen wir durch ${}_\tau\sqrt[\alpha + \beta i]{p + qi}$ dar, welcher Ausdruck offenbar noch jeden Werth jenes Radikals vorzustellen geeignet ist.

Nach dieser Bezeichnung ist ${}_0\sqrt{4} = {}_{2\gamma}\sqrt{4} = - {}_{2\gamma+1}\sqrt{4} = 2$.

§. 8. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Irgend eine Zahl $p_1 + q_1 i$ durch eine 2^{te} $(p + qi)$ logarithmiren heisst, jede Zahl bestimmen, mit welcher $p + qi$ potenzirt eine Potenz gibt, die $p_1 + q_1 i$ zu einem Werthe hat. Das Ergebniss der Logarithmation wird durch $\log^{p + qi}(p_1 + q_1 i)$ bezeichnet.

2) Die Gleichung

$$\log^{p + qi}(p_1 + q_1 i) = \frac{\log (p_1 + q_1 i)}{\log (p + qi)}$$

ist eine vollkommene. Hieraus aber folgt keineswegs, dass auch $(p + qi)^{\frac{\log (p_1 + q_1 i)}{\log (p + qi)}} = p_1 + q_1 i$ eine vollkommene Gleichung ist, obschon $p + qi$ mit jedem Werthe von $\frac{\log (p_1 + q_1 i)}{\log (p + qi)}$ potenzirt eine Potenz erzeugt, unter deren Werthen sich auch $(p_1 + q_1 i)$ befindet. Hingegen ist die Gleichung

$${}_\tau(p + qi)^{\frac{\log (p_1 + q_1 i)}{\log (p + qi)}} = p_1 + q_1 i$$

eine vollkommene.

3) Den Quotienten $\frac{\log (p_1 + q_1 i)}{_\tau\log (p + qi)}$ bezeichne ich mit $\log\limits^{_\tau p + qi} (p_1 + q_1 i)$, so dass dieser Ausdruck jede Zahl darstellt, mit welcher $p + qi$ potenzirt immer $p_1 + q_1 i$ gibt, insofern bei dieser Potenzirung stets nur derjenige specielle Werth heraus gehoben wird, der dem Index τ der Potenz angehört.

4) Die Gleichung

$$_{\tau_1}\log\limits^{_\tau p + qi} (p_1 + q_1 i) = \frac{_{\tau_1}\log (p_1 + q_1 i)}{_\tau\log (p + qi)}$$

stellt die Erklärung des ersten Theils derselben dar. Diese eindeutige Grösse $_{\tau_1}\log\limits^{_\tau p + qi} (p_1 + q_1 i)$, welche übrigens so lange für τ und τ_1 nicht bestimmte Zahlen gesetzt sind, noch jeden Werth von $\log\limits^{p + qi} (p_1 + q_1 i)$ auszudrücken vermag, ist offenbar das, womit $p + qi$ potenzirt, $p_1 + q_1 i$ gibt, wenn nämlich τ der Index des Ergebnisses jener Potenzirung ist, d. h. man hat:

$$_\tau(p + qi)^{_{\tau_1}\log\limits^{_\tau p + qi} (p_1 + q_1 i)} = p_1 + q_1 i$$

5) Wenden wir diese Erklärungen und Lehrsätze auf die Logarithmen mit der Basis e oder 2,71828 . . . an, so gelangen wir zu folgenden Gleichungen, in welchen $m_1 = \text{Mod.}\ (p_1 + q_1 i)$ und $\varphi_1 = \arg\ (p_1 + q_1 i)$.

$$\log\limits^{e} (p_1 + q_1 i) = \frac{\log (p_1 + q_1 i)}{\log e}$$

Dabei ist: $_{\tau e}^{\frac{\log (p_1 + q_1 i)}{_\tau\log e}} = p_1 + q_1 i$

$$\log^{\tau e}(p_1 + q_1 i) = \frac{\log(p_1 + q_1 i)}{\log^{\tau} e}$$

$$\tau_1 \log^{\tau e}(p_1 + q_1 i) = \frac{\tau_1 \log(p_1 + q_1 i)}{\log^{\tau} e} =$$

$$= \frac{lm_1 + 2\tau\pi\,(2\tau_1\pi + \varphi_1)}{1 + (2\tau\pi)^2} + i\,\frac{2\tau_1\pi + \varphi_1 - 2\tau\pi lm_1}{1 + (2\tau\pi)^2}$$

6) Wir sehen hieraus, dass jeder Logarithmus eine Function des Logarithmanden, der Basis und zweier von einander unabhängigen Unbestimmten ist, und der früher betrachtete nur von einer Unbestimmten abhängende log (p + qi) nicht jeden Werth vorstellt, mit dem e potenzirt eine Potenz erzeugt, unter deren Werthen sich p + qi befindet; wie diess übrigens auch leicht schon aus dem Umstande erhellet, dass E^x eben nicht = e^x, sondern, wenn x eindeutig, lediglich nur den einzigen Werth von e^x ausdrückt, den die Exponentialreihe $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots$ gibt. So ist z. B. $-\sqrt[0]{e}$ oder $-e^{\frac{1}{2}}$ ein Werth von $e^{\frac{1}{2}}$, mithin $\frac{1}{2}$ ein besonderer Werth des Logarithmus von $-\sqrt[0]{e}$ in Beziehung auf die Basis e. Aber $\frac{1}{2}$ ist nicht ein Werth von $\log -\sqrt[0]{e}$ oder von $\frac{1}{2} + (2\gamma + 1)\,\pi i$, wohl aber ein Werth von $\log^{e} -\sqrt[0]{e}$. Es ist nämlich

$$\tau_1 \log^{1+2\tau_1 e} -\sqrt[0]{e} = \frac{1}{2}$$

§. 9. Lehrsätze.

Die Begründung der in den folgenden Paragraphen enthaltenen Resultate meiner Arbeiten liess mich 2 Sätze finden, die ich hier eben um des Folgenden willen mittheile:

1) Bezeichnen a, b, c, d .... eindeutige positive oder negative ganze Zahlen

ε eine ganze Zahl über 1, die zum grössten gemeinschaftlichen Faktor n der absoluten Werthe (a, b, c, d ....) eine relative Primzahl ist.

γ, γ_1, γ_2, γ_3 .... jede derselben eine unendlich vieldeutige Zahl, die ausser der Null jede positive und jede negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat:

so ist der Quotient

$$\frac{a\gamma + b\gamma_1 + c\gamma_2 + d\gamma_3 \ldots\ldots}{\varepsilon}$$

eine Summe aus 2 Summanden, von welchen der eine unendlich vieldeutig, aber immer eine positive oder negative ganze Zahl oder o ist, der 2te Summand aber nur ε deutig ist, und folgende ε Werthe enthält:

$$\frac{o}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}, \frac{3}{\varepsilon} \ldots\ldots \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

2) Bezeichnet a eine positive ganze Zahl,

b eine n deutige reelle Zahl mit den Werthen b_1, b_2, b_3 ... b_n,

γ eine unendlich vieldeutige Zahl, die o und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat:

so ist die Exponentialreihe

$$E^{(\frac{\gamma}{a} + b)\, 2\pi i} \quad *$$

---

*) $E^{(\frac{\gamma}{a} + b)\, 2\pi i}$ ist immer wohl zu unterscheiden von der Potenz $e^{(\frac{\gamma}{a} + b)\, 2\pi i}$, die in diesem Falle unendlich vieldeutig wäre.

(ag) deutig, wo g eine positive n nicht übersteigende ganze Zahl bezeichnet.

§. 10.

Wenn man bei der Rechnung mit unendlich vieldeutigen Grössen stets vollkommene Gleichungen anstrebt, wie sich diess zur Erzielung richtiger Resultate oft durchaus nicht vermeiden lässt; so wird man bald finden, welche grosse Vorsicht die Rechnung verlangt, und wie unendlich verschieden diese von der Rechnung mit eindeutigen Grössen ist. Bezeichnen z. B. γ und γ_1 vieldeutige, hingegen ε und ε_1 eindeutige Grössen, so darf man offenbar für $\gamma - \gamma$ nicht o, für $2\gamma - \gamma$ nicht γ, für $\frac{\gamma}{\gamma}$ nicht 1, für $\frac{2\gamma}{3\gamma}$ nicht $\frac{2}{3}$ u. s. f. setzen; man darf ferner aus der vollkommenen Gleichung

$\gamma + \varepsilon = \gamma_1$ nicht auf $\varepsilon = \gamma_1 - \gamma$

$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \gamma_1$ » » $\varepsilon = \gamma\gamma_1$ u. s. f. schliessen.

Dieser Umstand brachte mich auf den Gedanken, die Rechnung mit vieldeutigen Grössen auf eine solche mit eindeutigen zu reduciren. Die Realisirung dieses Gedankens führte mich dann zur Beantwortung der Frage: Wenn man irgend eine vollkommene Gleichung zwischen vieldeutigen Grössen hat, z. B.

$$\text{Arc. cos } (p + qi) + \text{Arc. cos } (p_1 + q_1 i)$$
$$= \text{Arc. cos } \left[(p+qi)(p_1+q_1 i) - \sqrt{[1-(p+qi)^2][1-(p_1+q_1 i)^2]}\right]$$

wie lässt sich dann jeder specielle Werth des einen Theils der Gleichung mit der nöthigen Bestimmtheit herausheben, und wie kann der herausgehobene Werth dem andern Theil der Gleichung entnommen werden? Solche Gleichungen, welche die vollständige Antwort auf diese Frage geben, will ich gesonderte Gleichungen heissen.

§. 11. Lehrsätze.

I. Bezeichnen p, q, α und β reelle Zahlen überhaupt, hingegen τ und τ_1 nur positive oder negative ganze Zahlen, o nicht ausgeschlossen, so hat man die gesonderte Gleichung:

1) $$ {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} = {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} \cdot {}_{\tau_1-\tau}1^{\alpha+\beta i} $$

2) $$ {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} = {}_{\tau}(p+di)^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} $$

Die Gleichung 1) zeigt, dass jeder Werth von $(p+qi)^{\alpha+\beta i} \cdot (p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}$ zugleich ein Werth von $(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} \cdot 1^{\alpha+\beta i}$; und umgekehrt, jeder Werth des letztern Ausdruckes zugleich ein Werth vom erstern ist, woraus natürlich folgt, dass

3) $$ (p+qi)^{\alpha+\beta i} \cdot (p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} \cdot 1^{\alpha+\beta i} $$

eine vollkommene Gleichung ist. Obschon nun 1) eine Gleichung zwischen eindeutigen Grössen ist, so lehrt sie doch dasselbe, was die Gleichung 3) zwischen unendlich vieldeutigen Grössen; aber ausserdem zeigt sie, wie die Werthe des ersten Theils von 3) mit Bestimmtheit gesondert werden können, und wie jeder Werth des ersten Theils von 3) dem 2^{ten} Theil derselben entnommen werden kann. Ferner kann man auf 1) alle Umformungsgesetze für eindeutige Grössen anwenden, während diess bei 2) nicht möglich ist. Leichte Folgerungen von 1) sind die Gleichungen:

4) $$ {}_{\tau}1^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau+\tau_1}1^{\alpha+\beta i} $$

5) $\quad {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} = {}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha + \beta i} \cdot {}_{\tau - \tau_1}1^{\alpha + \beta i}$

6) $\dfrac{{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i}}{{}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}} = {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \cdot {}_{\tau - \tau_1}1^{\alpha_1 + \beta_1 i}$

$$= {}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \cdot {}_{\tau - \tau_1}1^{\alpha + \beta i}$$

7) $\quad {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} = \dfrac{{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i}}{{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}}$

und hieraus wieder die vollkommene Gleichung:

8) $\quad \dfrac{(p + qi)^{\alpha + \beta i}}{(p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}} = (p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \cdot 1^{\alpha_1 + \beta_1 i}$

$$= (p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \cdot 1^{\alpha + \beta i}$$

Anstatt der Gleichungen 3) und 8) gibt Ohm in seinem System der Math. VIII. p. 8 folgende:

$$(p + qi)^{\alpha + \beta i} \cdot (p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}$$
$$= (p + qi)^{\alpha + \beta i + \alpha_1 + \beta_1} \, e^{2\pi i[\mu(\alpha + \beta i) + \gamma(\alpha_1 + \beta_1 i)]}$$
$$(p + qi)^{\alpha + \beta i} : (p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}$$
$$= (p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \, e^{2\pi i[\mu(\alpha + \beta i) + \gamma(\alpha_1 + \beta_1 i)]}$$

deren Richtigkeit aber nicht aufgehoben wird, wenn man von den 2 unendlich vieldeutigen Zahlen μ und γ, deren Werthe o und jede pos. oder neg. ganze Zahl sind, irgend eine derselben = o setzt, wodurch die Formeln in die von mir Berechneten übergehen.

II. Bezeichnet a eine complexe Zahl,
p und q pos. oder neg. ganze Zahlen, deren absol. Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind,
r und s pos. oder neg. ganze Zah-

len, deren absol. Werthe r_1 und s_1 relative Primzahlen sind,

τ den grössten gemeinschaftlichen Faktor für q_1 und s_1,

$\tau\tau_1$ den grössten gemeinschaftlichen Faktor für die absol. Werthe von $ps \pm qr$ und qs,

so hat man folgende Relationen:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe

$$\text{von } a^{\frac{p}{q}} \times : a^{\frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{\tau}$$

2) Die Zahl der verschiedenen Werthe

$$\text{von } a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{\tau\tau_1}$$

3) Die Zahl der den Ausdrücken $\left[a^{\frac{p}{q}} \times : a^{\frac{r}{s}}\right]$ und $a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}}$ gemeinsamen Werthe ist $= \frac{q_1 s_1}{\tau\tau_1}$

4) Es ist nur dann $a^{\frac{p}{q}} \times : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}}$,

wenn $\tau_1 = 1$,

wenn demnach der grösste gemeinschaftliche Faktor von q_1 und s_1 gleich demjenigen der absoluten Werthe von $(ps \pm qr)$ und qs ist.

Es ist wohl kaum nothwendig zu bemerken, dass hier entweder durchgehends nur die obern Operationszeichen, oder dann nur die untern zu nehmen sind.

Anmerkung. Ohm behauptet in seinem »Geist der mathem. Analysis 1842 p. 133«, die Gleichung in 4) bedürfe dann schon einer Correction, wenn τ nicht 1 ist. Diess ist nach den obigen Behauptungen nicht richtig, wie übrigens schon die Gleichung

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$$

zeigt, die ohne Correction eine vollkommene ist.

§. 12. Lehrsätze.

I. Wenn μ die Bedeutung der o, oder einer positiven oder negativen ganzen Zahl hat und zugleich so bestimmt wird, dass $[2\mu\pi + \arg(p + qi) + \arg(p_1 + q_1 i)]$ zu einem Bogen wird, der entweder $= \pi$ ist oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, wenn also

$$2\mu\pi + \arg.(p + qi) + \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \quad (1$$

so ist

$$_\tau(p + qi)^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau_1}(p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} \quad (2$$

$$= {}_{\tau+\tau_1-\mu}[(p + qi)\ (p_1 + q_1 i)]^{\alpha+\beta i}$$

Spätere Untersuchungen zwangen mich, Gleichungen von der Beschaffenheit der 1) aufzulösen. Man findet bloss aus der Vorstellung von $\arg(p + qi)$ und $\arg(p_1 + q_1 i)$ in der Zahlebene, dass in jedem Falle:

$$\mu = -\frac{1}{16}[q + q_1]\ [1 - p\ p_1] \times \quad (3$$

$$\Big[\Big[1 - \underline{-(p_1^2q^2 - p^2q_1^2)^2}\Big]\ \Big[1 - p\,\underline{p^2q_1^2 - p_1^2q^2}\Big] +$$

$$\Big[1 + \underline{-(p_1^2q^2 - p^2q_1^2)^2}\Big]\ [1 - q]\Big] -$$

$$\cdot\frac{1}{8}[q + q_1]\ [1 - p]\ [1 - p_1]$$

II. Wenn γ eine pos. oder neg. Zahl oder o, und

$$2\gamma\pi + \arg.(p + qi) - \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \quad (1$$

so ist

$$_\tau(p + qi)^{\alpha+\beta i} : {}_{\tau_1}(p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau-\tau_1-\gamma}\left(\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i}\right)^{\alpha+\beta i} \quad (2$$

$$\gamma = -\frac{1}{16}[q - q_1][1 - p\,p_1] \times \tag{3}$$

$$\Big[\Big[1 - \underbrace{-(p_1^2q^2 - p^2q_1^2)^2}\Big][1 - p\,\underbrace{p^2q_1^2 - p_1^2q^2}] +$$

$$[1 + \underbrace{-(p_1^2q^2 - p^2q_1^2)^2}][1 - q]\Big] -$$

$$-\frac{1}{8}[1 - p_1]\Big[[q - q_1][1 - p] - [1 + \underbrace{-q^2 - q_1^2}][1 + p]\Big]$$

III. Aus den Gleichungen I. 2) und II. 2) ergeben sich unmittelbar die vollkommenen Gleichungen:

$$(p + qi)^{\alpha+\beta i} \cdot (p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} \tag{1}$$

$$= [(p + qi)\ (p_1 + q_1 i)]^{\alpha+\beta i}$$

$$\frac{(p + qi)^{\alpha+\beta i}}{(p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i}} = \left(\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i}\right)^{\alpha+\beta i} \tag{2}$$

Anmerkung. Ohm hat in seinem »Geist der math. Analysis 1842 pag 122« für die Rechnung mit den einfachsten Werthen der Potenzen (d. h. nach meiner eingeführten Bezeichnung solchen Potenzen, deren Index = o ist) die Gleichungen aufgestellt:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \text{und} \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Diese beiden Gleichungen sind nach den Lehrsätzen I. und II. im Allgemeinen unrichtig, was übrigens schon aus folgendem Beispiel erhellet: Es ist ${}_o(-1)^{\frac{1}{2}} = +i$ und ${}_o(+1)^{\frac{1}{2}} = +1$). Es müsste also nach der ersten jener 2 Gleichungen ${}_o(-1)^{\frac{1}{2}} \cdot {}_o(-1)^{\frac{1}{2}}$ oder $i^2 = {}_o[(-1)\ (-1)]^{\frac{1}{2}}$ $= +1$ und nach der zweiten $\frac{{}_o 1^{\frac{1}{2}}}{{}_o(-1)^{\frac{1}{2}}}$ oder $\frac{1}{i} = \left(\frac{1}{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ $= i$ sein. Die Lehrsätze I. und II. geben für diesen

Fall: ${}_0(-1)^{\frac{1}{2}} \cdot {}_0(-1)^{\frac{1}{2}} = {}_{-1}1^{\frac{1}{2}} = -1$ und $\frac{{}_0 1^{\frac{1}{2}}}{{}_0(-1)^{\frac{1}{2}}}$ $= {}_{-1}(-1)^{\frac{1}{2}} = -i$, wie es sein soll.

Die beiden Ohm'schen Gleichungen sind in dem Falle, da x eine positive oder negative ganze Zahl oder o ist, stets richtig, in jedem andern Falle aber durchaus nur dann zulässig, wenn für die erste [arg.a + arg.b] entweder $= \pi$ oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und in Beziehung auf die zweite Gleichung arg a — arg.b ebenfalls ein solcher Bogen ist, wie aus I. und II. sogleich klar wird.

§. 13. Lehrsätze.

I. Wenn $m = \text{Mod.}(p + qi)$ und $\varphi = \text{arg.}(p + qi)$, wenn ferner

γ reell, aber nicht gebrochen und zugleich

$$2\gamma\pi + \beta\ln + \alpha(2\tau\pi + \varphi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \quad (1$$

so hat man die gesonderte Gleichung:

$${}_{\tau_1}\left[{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \quad (2$$

$$= {}_{\tau}(p + qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)} \cdot {}_{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

woraus sich sogleich die vollkommene Gleichung:

$$\left[(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p + qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)} \cdot 1^{\alpha_1+\beta_1 i} \quad (3$$

ergibt.

II. Bezeichnet a irgend eine complexe Zahl,
p und q pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind,
r und s pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind,

m den grössten gemeinschaftlichen Faktor für r_1 und q_1,

m_1m den grössten gemeinschaftlichen Faktor für $p_1 r_1$ und $q_1 s_1$, mithin m_1 denjenigen für p_1 und s_1,

so hat man folgende Beziehungen:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe

von $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ ist $= \frac{q_1 s_1}{m}$

2) Die Zahl der verschiedenen Werthe

von $a^{\frac{pr}{qs}}$ ist $= \frac{q_1 s_1}{m m_1}$

3) Die Zahl der den beiden Potenzen $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ und $a^{\frac{pr}{qs}}$ gemeinsamen Werthe ist $= \frac{q_1 s_1}{m m_1}$

4) Es ist nur dann: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$, wenn $m_1 = 1$. wenn mithin die absoluten Werthe von p und s relative Primzahlen sind.

Anmerkung. Ohm behauptet in seinem „Geist der mathem. Anal. pag. 122«, wenn wir unsere Zeichen gebrauchen, dass

$${}_0\left[{}_0(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} = {}_0(p + qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)}$$

Diess ist im Allgemeinen nach dem Lehrsatze I. unrichtig, was übrigens auch schon folgendes Beispiel zeigt:

Es ist

$$(-1)^2 = 1, \quad {}_0 1^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (-1)^1 = -1;$$

mithin wäre nach der Ohm'schen Gleichung

$${}_0\left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{ oder } 1 = {}_0(-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1.$$

Der Lehrsatz I. giebt in diesem Falle $\gamma = -1$, und mithin die Gleichung

$$_0[(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot {}_{-1}1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Die Ohm'sche Gleichung ist durchaus nur dann richtig, wenn für γ aus der Gleichung

$$2\gamma\pi + \beta\mathrm{lm} + \alpha\varphi = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ und } -\pi)$$

der Werth o, oder, wenn $\beta_1 = 0$, ein solcher Werth für γ gezogen wird, der mit α_1 multiplicirt, eine pos. oder neg. ganze Zahl oder o als Produkt erzeugt, welch' letzterer Fall z. B. immer eintritt, wenn α_1 nicht gebrochen, und eben $\beta_1 = 0$ ist.

Ohm sagt in derselben Schrift pag. 134: »Die Gleichung $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{\mu}{\gamma}} = a^{\frac{m\mu}{n\gamma}}$ ist eine vollkommen richtige und bedarf keiner Correction in allen den besondern Fällen, in denen die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mu}{\gamma}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, und zu gleicher Zeit m und γ, desgleichen n und μ keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.« Hierüber möchten wir nur bemerken, dass es in dieser Frage nach II. 4) nicht auf die Beschaffenheit von n und μ ankömmt. So sind z. B.

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{1}} = a \quad \text{und} \quad \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$$

vollkommene Gleichungen, obschon hier n und μ den gemeinschaftlichen Theiler 3 oder 2 haben.

§. 14. Lehrsätze.

I. Wenn $m = \mathrm{Mod}(p + qi)$ und $\varphi = \arg(p + qi)$, wenn ferner

γ_1 und γ reell, aber nicht gebrochen, und

$2\gamma_1\pi + \beta_1 lm + \alpha_1(2\tau\pi + \varphi) = (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi)$

$2\gamma\pi + \beta lm + \alpha(2\tau\pi + \varphi) = (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi)$

so hat man die gesonderte Gleichung:

$$_{\tau_1}\left[_{\tau}(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot {}_{\tau_0}1^{\alpha+\beta i}$$

$$= {}_{-\gamma_1+\tau_0}\left[_{\tau}(p + qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}\right]^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

$$_{\tau_1}\left[_{\tau}(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

$$= {}_{-\gamma_1}\left[_{\tau}(p + qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}\right]^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

und hieraus die vollkommene Gleichung

$$\left[(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot 1^{\alpha+\beta i}$$

$$= \left[(p + qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}\right]^{\alpha+\beta i} \cdot 1^{\alpha_1+\beta_1 i}.$$

II) Bezeichnet a eine complexe Zahl

p und q pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe p_1 und q_1 rel. Primzahlen sind,

r und s pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe r_1 und s_1 rel. Primzahlen sind,

m den grössten gemeinschaftlichen Faktor für q_1 und r_1,

m_1 den grössten gemeinschaftlichen Faktor für p_1 und s_1,

wo mithin m und m_1 rel. Primzahlen sind, und mm_1 der grösste gemeinschaftliche Faktor für p_1r_1 und q_1s_1 ist, so findet folgendes Statt:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe

$$\text{von}\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{m} \text{ und von } \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{q_1 s_1}{m_1}$$

2) Die Zahl der den beiden Potenzen $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ und $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}}$ gemeinsamen Werthe ist $= \frac{q_1 s_1}{m m_1}$

3) Die Zahl der verschiedenen Werthe sowohl von $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \cdot 1^{\frac{p}{q}}$, als auch von $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot 1^{\frac{r}{s}} = q_1 s_1$

4) Es ist nur dann $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}}$, wenn $m = m_1$, mithin $m = m_1 = 1$, wenn also nicht bloss q_1 und r_1, sondern auch p_1 und s_1 relative Primzahlen sind.

5) Es ist nur dann $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot 1^{\frac{r}{s}}$, wenn $m = 1$.

6) Wenn $m > 1$, so gibt es keine Potenz, mit der $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}}$ multiplicirt ein mit $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ gleichbedeutendes Produkt gäbe.

7) Es ist in jedem Falle: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \cdot 1^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot 1^{\frac{r}{s}}$

§. 15. Aufgabe.

Die Gleichung:

$$\gamma_1\left[\gamma(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot \gamma_0 1^{\alpha+\beta i} \qquad (1$$

$$= \gamma_{1+\varepsilon_1}\left[\gamma+\varepsilon(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot \gamma_0 + \varepsilon_0 1^{\alpha+\beta i}$$

nach ε, ε_1 und ε_0 in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung.

Man löse die Gleichungen

$$2\mu\pi + 2\alpha\varepsilon\pi = (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi) \qquad (2$$

$$2\mu_1\pi + \beta \mathrm{lr} + \alpha(2\gamma\pi + \varphi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \quad (3$$

$$2(\mu_0 + \mu_1 + \mu + \alpha\varepsilon)\pi + \beta \mathrm{lr} + \alpha(2\gamma\pi + \varphi) = \quad (4$$
$$= (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

wo $r = \mathrm{Mod.}(p + qi)$ und $\varphi = \arg.(p + qi)$, nach μ, μ_1 und μ_0 in ganzen Zahlen auf, substituire dann die gefundenen Werthe in die Gleichungen

$$\beta\varepsilon_0 + \beta_1(\varepsilon_1 + \mu_0) + (\alpha_1\beta + \alpha\beta_1)\varepsilon = -\beta_1\mu \quad (5$$

$$\alpha\varepsilon_0 + \alpha_1(\varepsilon_1 + \mu_0) + (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)\varepsilon = -\alpha_1\mu - \varsigma \quad (6$$

und löse endlich diese 2 letztern Gleichungen nach ε, ε_1, ε_0 und ς in ganzen Zahlen auf. Die Auflösungen dieser Gleichungen sind dann die Auflösungen der gegebenen Gleichungen, und umgekehrt.

Setzt man z. B. in die gegebene Gleichung 2 für γ, dann 5 für ε_1, 30 für ε und — 36 für ε_0, so hat man eine identische Gleichung.

Die Aufgabe kann im Allgemeinen nur dann gelöst werden, wenn p, q, α, β, α_1, β_1 und γ in bestimmten Zahlen gegeben sind, dagegen können γ_1 und γ_0 beliebig gegeben sein, und es sind von γ_1 und γ_0 die Zahlen ε, ε_1 und ε_0 ganz unabhängig.

Die Auflösung dieser Aufgabe involvirt mehrere interessante Lehrsätze als Specialitäten.

§. 16. Aufgaben.

I. Die Gleichung

$$(p + qi)^{\alpha+\beta i} = (p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} \quad (1$$

nach $p + qi$, und die Gleichung

$$\tau(p + qi)^{\alpha+\beta i} = \tau_1(p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} \quad (2$$

nach $p + qi$ und τ aufzulösen.

Auflösung.

Die Gleichung I. wird nur dann identisch, wenn man

3) $p + qi = (p_1 + q_1 i) \cdot E^{\frac{\log 1}{\alpha + \beta i}} = (p_1 + q_1 i) \cdot 1^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}$

setzt.

Bezeichnet ς irgend eine pos. oder neg. ganze Zahl oder o, so wird die Gleichung 2) nur dann identisch, wenn man

4) $p + qi = (p_1 + q_1 i) \cdot E^{\frac{\varsigma \log 1}{\alpha + \beta i}}$ und

5) $\tau = \tau_1 - \gamma$

setzt, wo γ aus folgender Gleichung zu ziehen ist:

6) $2\gamma\pi + \text{arg.}(p_1 + q_1 i) + \frac{2\alpha\pi\varsigma}{\alpha^2 + \beta^2} = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$

woraus ohne Schwierigkeit folgt, dass:

7) $\text{Mod.}(p + qi) = E^{\frac{2\beta\varsigma\pi}{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \text{Mod.}(p_1 + q_1 i)$

8) $\text{arg.}(p + qi) = \text{arg.}(p_1 + q_1 i) + \frac{2\alpha\varsigma\pi}{\alpha^2 + \beta^2} + 2(\tau_1 - \tau)\pi$

wenn nämlich τ, oder, wenn man $\tau = \tau_1$ annähme, die ς so bestimmt wird, dass der zweite Theil der Gleichung 8) zu einem Bogen wird, der entweder $= \pi$ ist, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt.

Man hat z. B. folgende identische Gleichungen:

$$_{11}\left[13{,}172\left(\cos\frac{11}{30}\pi + i\sin\frac{11}{30}\pi\right)\right]^{1+3i}$$

$$= {}_{11}\left[2\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)\right]^{1+3i}$$

$${}_{6}\left[7\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right)\right]^{\frac{3}{5}} = {}_{4}(-7)^{\frac{3}{5}}$$

II. Bezeichnen α und β, wie oben, eindeutige Grössen, und hat man die vollkommene Gleichung

$$(x + yi)^{\alpha+\beta i} = P + Qi$$

so muss nothwendig

$$P + Qi = (P + Qi) \cdot 1^{\alpha+\beta i}$$

und

$$x + yi = (P + Qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

III. Die Gleichung

$$_{\tau}(x + yi)^{\alpha+\beta i} = P + Qi$$

wo α, β, P und Q eindeutige Zahlen bezeichnen, nach $x + yi$ und τ aufzulösen.

Auflösung.

Es ist immer

$$x + yi = E^{\frac{\mu^{\log(P+Qi)}}{\alpha+\beta i}} = {}_{\mu}(P + Qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

Zur Ermittlung des τ nehme man nun μ beliebig reell, nur nicht gebrochen an, bestimme hierauf μ_1 in ganzen Zahlen so, dass

$$2\mu_1\pi + \frac{\alpha[2\mu\pi + \arg.(P + Qi)] - \beta \operatorname{lMod.}(P + Qi)}{\alpha^2 + \beta^2} =$$

$$= (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi)$$

und löse endlich die Gleichungen

$$\beta(\mu_1 + \tau) = 0$$

$$\alpha(\mu_1 + \tau) = \varsigma$$

nach τ und ς in ganzen Zahlen auf. Jeder der auf diese Weise für τ erhaltenen Werthe gehört den für τ verlangten Werthen an, und umgekehrt.

§. 17. Lehrsatz.

Die Gleichung

$$_{\tau}(p + qi)^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

wird nur dann identisch, wenn

$$\alpha + \beta i = (\alpha_1 + \beta_1)\,{}_{\tau_1}\log(p + qi) + {}_{\varsigma}\log 1$$

gesetzt wird, wo ς beliebig reell, jedoch nicht gebrochen, angenommen werden darf.

§. 18. Aufgaben.

I. Welche besondere Werthe der $(\alpha + \beta i)^{\text{ten}}$ Potenz von $\sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi)} \cdot \sqrt[\alpha+\beta i]{{}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}}$ coincidiren mit $(p + qi) \cdot {}_{\mu}1^{\alpha+\beta i}$?

Auflösung.

Es sei

$$1)\quad {}_{\tau_2}\left[\sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi) \cdot {}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}}\right]^{\alpha+\beta i} = (p + qi) \cdot {}_{\mu}1^{\alpha+\beta i}$$

Zur Berechnung der Werthe von τ_2 löse man nun von den 2 Gleichungen

$$2)\quad 2\tau_0\pi + 2\tau_1\pi\alpha + \arg.(p + qi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

$$3)\quad 2\tau_3\pi + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\left[2\pi(\tau + \tau_0) + \arg.(p + qi) + 2\alpha\tau_1\pi\right] - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\left[1 \text{ Mod.}(p + qi) - 2\beta\tau_1\pi\right] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

die 2) nach τ_0, dann die 3) nach τ_3 in ganzen Zahlen auf, setze dann den für τ_3 gefundenen Werth in die Gleichungen

$$4)\quad \beta(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = \beta\mu$$

$$5)\quad \alpha(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = \alpha\mu + \varsigma$$

und löse endlich diese 2 letztern Gleichungen nach τ_2 und ς in ganzen Zahlen auf. Die für τ_2 auf diese Weise erhaltenen Werthe sind die Auflösungen der Gleichung 1) nach τ_2, und umgekehrt.

Setzt man z. B. $\beta = \tau_1 = \mu = 0$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $p = 16$

so wird nach den obigen Gleichungen $\tau_3 = 4$ und $\tau_2 = 4\,(1 + \varsigma)$, woraus natürlich folgt, dass nur dann ${}_{\tau_2}\left[{}_1\sqrt[1/4]{16}\right]^{1/4} = 16$, wenn τ_2 entweder o oder eine reelle ganze Zahl ist, die 4 als Faktor enthält. Diess Beispiel zeigt zugleich, wie nothwendig die Beibehaltung des β in der Gleichung 4) ist.

II. Die Gleichung

1) $${}_{\tau}\sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi) \cdot {}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}} = {}_{\mu}(p + qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

nach μ aufzulösen.

Auflösung.

Man bestimme zuerst τ_o, das nicht gebrochen sein darf, so, dass

$$2\tau_o\pi + \arg.(p + qi) + 2\alpha\tau_1\pi = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

wird, und löse hierauf die Gleichungen

$$\beta(\tau + \tau_o) = \beta\mu$$

$$\frac{\alpha\mu}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha(\tau + \tau_o)}{\alpha^2 + \beta^2} + g$$

nach μ und g in ganzen Zahlen auf. Dadurch gelangt man nur zu den sämmtlichen verlangten Werthen von μ.

§. 19. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt ist, dass

1) $$2\mu\pi + \arg.(p + qi) + \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

so hat man folgende gesonderte Gleichungen:

2) $${}_{\tau}\log[(p + qi)(p_1 + q_1 i)] = {}_{\tau}\log(p + qi) + {}_{\mu}\log(p_1 + q_1 i)$$

3) $$\tau_1 + \tau_0 - {}_{\mu}\log[(p + qi)\ (p_1 + q_1 i)]$$
$$= {}_{\tau_1}\log(p + qi) + {}_{\tau_0}\log(p_1 + q_1 i)$$

und hieraus die vollkommene Gleichung:

4) $\log[(p + qi)\ (p_1 + q_1 i)] = \log(p + qi) + \log(p_1 + q_1 i)$

II. Wenn γ reell, aber nicht gebrochen und so bestimmt ist, dass

5) $2\gamma\pi + \arg.(p + qi) - \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$

so hat man die gesonderten Gleichungen

6) $${}_\tau\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = {}_\tau\log(p + qi) - {}_\gamma\log(p_1 + q_1 i)$$

7) $${}_{\tau_1 - \tau_0 - \gamma}\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = {}_{\tau_1}\log(p + qi) - {}_{\tau_0}\log(p_1 + q_1 i)$$

und hieraus die vollkommene Gleichung

8) $$\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = \log(p + qi) - \log(p_1 + q_1 i)$$

Anmerkung 1. Ohm hat in seinem „Geist der math. Anal. 1842, pag. 117“, wenn wir unsere Bezeichnung beibehalten, das Stattfinden folgender Gleichungen behauptet:

$${}_0\log[(p + qi)\ (p_1 + q_1 i)] = {}_0\log(p + qi) + {}_0\log(p_1 + q_1 i)$$

$${}_0\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = {}_0\log(p + qi) - {}_0\log(p_1 + q_1 i)$$

Diese beiden Gleichungen sind aber nach I. und II. unrichtig, wie diess übrigens auch schon folgendes einfache Beispiel zeigt: Es ist ${}_0\log - 1 = \pi i$ und ${}_0\log + 1 = 0$. Setzt man nun in den Ohm'schen Gleichungen $q = q_1 = 0$ und $p = p_1 = -1$, so findet sich:

${}_0\log[(-1)\ (-1)]$ oder $0 = {}_0\log(-1) + {}_0\log(-1)$ oder $2\pi i$

$${}_0\log\frac{+1}{-1} \text{ oder } \pi i = {}_0\log 1 - {}_0\log(-1) \text{ oder } -\pi i$$

Die obigen Lehrsätze I. und II. aber geben in diesem Falle $\mu = -1$ und $\gamma = +1$, mithin:

$$_0\log[(-1)(-1)] = {}_0\log(-1) + {}_0\log -1 + {}_{-1}\log 1$$
$$= 2\pi i - 2\pi i$$

$$_0\log\frac{+1}{-1} = {}_0\log 1 - {}_0\log -1 + {}_1\log 1 = -\pi i + 2\pi i$$

Von den Ohm'schen Gleichungen ist die erste durchaus nur dann richtig, wenn $\arg(p + qi) + \arg(p_1 + q_1 i)$ ein Bogen ist, der entweder $= \pi$ oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und die 2^{te}, wenn $\arg(p + qi) - \arg(p_1 + q_1 i)$ ebenfalls ein solcher Bogen ist.

Anmerkung 2. So wenig man aus der Gleichung 8) schliessen darf, dass im Falle $p + qi = p_1 + q_1 i$ die Gleichung Statt finde: $\log 1 = 0$; eben so wenig geht aus 4) die Gleichung $\log(p + qi)^2 = 2\log(p + qi)$ hervor. Die sämmtlichen Werthe des 2^{ten} Theils dieser Gleichung sind zwar auch Werthe des ersten Theils, aber nicht umgekehrt. So ist z. B., wenn γ eine unendlich vieldeutige Zahl darstellt, die 0 und jede pos. oder neg. ganze Zahl zu ihren Werthen hat, jeder der unendlich vielen Werthe des Ausdrücks $4\gamma\pi i$ ein Werth von $\log(-1)^2$; aber auch nicht einen einzigen von allen diesen Werthen vermag $2\log(-1)$ zu geben.

§. 20. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt wird, dass

1) $$2\mu\pi + \beta\,\text{lMod.}(p + qi) + \alpha[2\tau_1\pi + \arg.(p + qi)]$$
$$= (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

2) $$_\tau\log_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)_{\tau_1}\log(p + qi) + {}_{\tau+\mu}\log 1$$

$$(\alpha + \beta i)_{\tau_1}\log(p + qi) = -{}_\mu\log_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha+\beta i} \quad (3$$

Aus der 2) folgt dann die vollkommene Gleichung:

4) $\log(p + qi)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)\log(p + qi) + \log 1$

II. Aus I. ergeben sich folgende bemerkenswerthe Specialitäten: wenn

1) $2\mu_1\pi + \frac{1}{m}[2\tau_1\pi + \arg.(p + qi)] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$

wo m aber nur eine pos. oder neg. ganze Zahl bedeuten darf; so ist:

2) $${}_\tau\log_{\tau_1}\sqrt[m]{(p + qi)} = \frac{\tau_1 + (\mu_1 + \tau)m\log(p + qi)}{m}$$

und hieraus bei derselben Bedeutung von m

3) $$\log\sqrt[m]{(p + qi)} = \frac{1}{m}\log(p + qi)$$

Wenn ferner

4) $2\mu_o\pi + \frac{1}{m}[2\tau_1\pi + \arg.(p + qi)^m] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$

wo wieder m nur eine pos. oder neg. ganze Zahl bedeutet; so ist:

5) $$\tau_1 + m(\mu_0 + \tau)\log(p + qi)^m = m\,{}_\tau\log_{\tau_1}\sqrt[m]{(p + qi)^m}$$

und hieraus

6) $$\log(p + qi)^m = m\log\sqrt[m]{(p + qi)^m}$$

So ist z. B. $\log 3^2 = 2\log\sqrt{3^2} = 2\log(\pm 3)$ und nicht $= 2\log 3$, da sämmtliche in dem Ausdruck $l9 + 2(2\gamma + 1)\pi i$ enthaltenen Werthe nur Werthe von $\log 3^2$, nicht auch zugleich von $2\log 3$ sind.

In dem besondern Falle, da α ein positiver oder negativer ächter Bruch, findet immer auch die Gleichung Statt:

7) $${}_o\log_o(p + qi)^\alpha = \alpha_o\log(p + qi)$$

Anmerkung. In „Ohm's Geist der math. Anal. 1842, p. 122“ findet sich, wenn wir unsere Bezeichnungsweise gebrauchen, die Gleichung behauptet

$$_{o}\log_{o}(p + qi)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)\,{}_{o}\log(p + qi)$$

Diess ist unrichtig. Setzen wir z. B. $p = -e = -2{,}718\ldots$, $q = \beta = o$, $\alpha = 2$; so findet man aus dieser Gleichung

$$_{o}\log(-e)^{2} \text{ oder } 2 = 2\,{}_{o}\log(-e) = 2(1 + \pi i)$$

Die obige Gleichung I. 1) aber gibt in diesem Falle $\mu = -1$, und hernach die Gleichung I. 2)

$$_{o}\log(-e)^{2} = 2\,{}_{o}\log(-e) + {}_{-1}\log 1 = 2(1 + \pi i) - 2\pi i$$

Die Ohm'sche Gleichung ist durchaus nur dann richtig, wenn $\beta\,\text{lMod}(p + qi) + \alpha\,\arg(p + qi)$ entweder $= \pi$, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt.

§. 21. Lehrsätze.

I. Wenn

$$1) \qquad {}_{\tau_1}\log(p_1 + q_1 i) = {}_{\gamma_1}\log(p_1 + q_1 i)$$

so muss nothwendig

$$2) \qquad \frac{\tau_1 - \gamma_1}{\tau - \gamma} = \frac{\text{lMod.}(p_1 + q_1 i)}{\text{lMod.}(p + qi)} = \frac{2\tau_1\pi + \arg.(p_1 + q_1 i)}{2\tau\pi + \arg.(p + qi)}$$

In dem besondern Falle, da $\tau_1 = \tau = \arg(p_1 + q_1 i) = o$ muss $\frac{\text{lMod}(p_1 + q_1 i)}{\text{lMod}(p + qi)} = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ sein. Die Gleichung 2) drückt hier die Bedingungen aus, unter welchen die beiden Indices eines Logarithmus bei constantem Werthe desselben eine Aenderung verstatten.

II) Wenn P eine reelle Zahl bezeichnet, so ist von den 2 Gleichungen

$$1) \qquad {}_{\gamma_1}\log(p_1 + q_1 i) = P$$

2) $P = \frac{lMod.(p_1 + q_1 i)}{lMod.(p + qi)} = \frac{2\gamma_1\pi + arg.(p_1 + q_1 i)}{2\gamma\pi + arg.(p + qi)}$

jede eine Folge der andern.

III. Von den 3 Gleichungen:

1) $\gamma_1^{\gamma p+qi}\log(p_1 + q_1 i) = P + Qi$

2) $\gamma = \frac{P\,lMod.(p + qi) - lMod.(p_1 + q_1 i) - Q\,arg.(p + qi)}{2\pi Q}$

3) $\gamma_1 = \frac{(P^2 + Q^2)\,lMod.(p + qi) - lMod.(p_1 + q_1) - Q\,arg.(p_1 + q_1 i)}{2\pi Q}$

ist die erste eine Folge der 2 übrigen, und umgekehrt.

Anmerkung. Mit Hülfe der 2 letztern Lehrsätze kann leicht untersucht werden, ob eine gegebene Zahl ein Werth von einem durch den Logarithmanden und die Basis gegebenen Logarithmus ist. So findet man z. B., dass $0{,}0247\ldots - 0{,}155\ldots i$ zwar nicht ein Werth von $\log^{e} e$, wohl aber von $\log^{e} e$, und zwar der specielle Werth ${}_{0}\log^{1e} e$ ist.

§. 22. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt wird, dass

1) $2\mu\pi + arg.(p_1 + q_1 i) + arg.(p_2 + q_2 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

2) $${}_{\tau_1}^{\tau p+qi}\log[(p_1 + q_1 i)(p_2 + q_2 i)]$$
$$= {}_{\tau_1}^{\tau p+qi}\log(p_1 + q_1 i) + {}_{\mu}^{\tau p+qi}\log(p_2 + q_2 i)$$

3) $$\tau_1+\gamma_1-\mu^{\gamma p+qi}\log[(p_1+q_1i)\cdot(p_2+q_2i)]+$$
$$\tau_1^{\tau p+qi}\log(p_1+q_1i)\cdot\gamma-\tau^{\gamma p+qi}\log 1=\tau_1^{\tau p+qi}\log(p_1+q_1i)+\gamma_1^{\gamma p+qi}\log(p_2+q_2i)$$

4) $$\tau_1+\gamma_1-\mu^{\tau p+qi}\log[(p_1+q_1i)\ (p_2+q_2i)]$$
$$=\tau_1^{\tau p+qi}\log(p_1+q_1i)+\gamma_1^{\tau p+qi}\log(p_2+q_2i)$$

und aus dieser letztern die vollkommene Gleichung:

5) $$\log^{\tau p+qi}[(p_1+q_1i)\ (p_2+q_2i)]=\log^{\tau p+qi}(p_1+q_1i)+\log^{\tau p+qi}(p_2+q_2i)$$

II. Wenn ζ reell, aber nicht gebrochen ist, und so bestimmt wird, dass

1) $2\zeta\pi+\arg.(p_1+q_1i)-\arg.(p_2+q_2i)=(\pi$ od. zw. π u. $-\pi)$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

2) $$\tau_1\log^{\tau p+qi}\frac{p_1+q_1i}{p_2+q_2i}=\tau_1^{\tau p+qi}\log(p_1+q_1i)-{}_-\zeta^{\tau p+qi}\log(p_2+q_2i)$$

3) $$\tau_1-\gamma_1-\zeta\log^{\gamma p+qi}\frac{p_1+q_1i}{p_2+q_2i}+\tau_1^{\tau p+qi}\log(p_1+q_1i)\cdot\gamma-\tau^{\gamma p+qi}\log 1$$
$$=\tau_1^{\tau p+qi}\log(p_1+q_1i)-\gamma_1^{\gamma p+qi}\log(p_2+q_2i)$$

4) $$\tau_1-\gamma_1-\zeta\log^{\tau p+qi}\frac{p_1+q_1i}{p_2+q_2i}=\tau_1^{\tau p+qi}\log(p_1+q_1i)-\gamma_1^{\tau p+qi}\log(p_2+q_2i)$$

und hieraus die vollkommene Gleichung:

5) $$\log^{\tau p+qi}\frac{p_1+q_1i}{p_2+q_2i}=\log^{\tau p+qi}(p_1+q_1i)-\log^{\tau p+qi}(p_2+q_2i)$$

Zusatz. Die Weglassung des τ aus den Gleichungen I. 5) und II. 5) würde diese Gleichungen in unvollkommene verwandeln; die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen hätten dann unendlichmal mehr Werthe als

die links. Eine brauchbare vollkommene Gleichung zwischen $\overset{c}{\log}(ab)$ oder $\overset{c}{\log}\frac{a}{b}$ und den beiden Zahlen $\overset{c}{\log} a$ und $\overset{c}{\log} b$ wird wohl kaum existiren.

Anmerkung. In Ohm's »Geist der math. Anal. 1842 pag. 126« findet man 2 Lehrsätze, die in unsern Zeichen sich durch folgende Gleichungen darstellen lassen:

$$\overset{{}_0p+qi}{{}_0\log}[(p_1 + q_1i)\ (p_2 + q_2i)] = \overset{{}_0p+qi}{{}_0\log}(p_1 + q_1i) + \overset{{}_0p+qi}{{}_0\log}(p_2 + q_2i)$$

$$\overset{{}_0p+qi}{\log}\frac{p_1 + q_1i}{p_2 + q_2i} = \overset{{}_0p+qi}{{}_0\log}(p_1 + q_1i) - \overset{{}_0p+qi}{{}_0\log}(p_2 + q_2i)$$

Für den Fall, da $p + qi = e = 2{,}718\ldots$, fanden wir diese Gleichungen schon im §. 19 im Allgemeinen unrichtig. Richtig wird die erste nur in dem besondern Falle, da $\arg(p + qi) + \arg(p_1 + q_1i)$ ein Bogen ist, der entweder gleich π oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und die 2^{te} jener zwei Gleichungen nur dann, wenn $\arg(p_1 + q_1i) - \arg(p_2 + q_2i)$ ein Bogen von derselben Beschaffenheit ist.

§. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen und so bestimmt wird, dass

1) $2\mu\pi + \beta\,\text{lMod.}(p_1 + q_1i) + \alpha[2\gamma\pi + \arg.(p_1 + q_1i)] =$
(π od. zw. π u. $-\pi$)

so hat man die gesonderten Gleichungen:

$$\overset{{}_\tau p+qi}{{}_\zeta\log_\gamma}(p_1 + q_1i)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)\,\overset{{}_\tau p+qi}{{}_\gamma\log}(p_1 + q_1i) + \overset{{}_\tau p+qi}{\zeta+\mu\log}\,1 \quad (2$$

$$(\alpha + \beta i)\,\overset{{}_\tau p+qi}{{}_\gamma\log}(p_1 + q_1i) = \overset{{}_\tau p+qi}{-\mu\log_\gamma}(p_1 + q_1i)^{\alpha+\beta i} \quad (3$$

Die erste dieser 2 Gleichungen gibt sofort die vollkommene Gleichung:

4) $\log(p_1 + q_1)^{\alpha+\beta i}_{\tau p+qi} = (\alpha + \beta i)\log(p_1 + q_1 i)_{\tau p+qi} + \log 1_{\tau p+qi}$

II. Folgerungen von I. sind folgende Sätze:

Wenn

$$2\mu_1\pi + \frac{1}{m}[2\gamma\pi + \arg.(p_1 + q_1 i)] = (\pi \text{ od zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \quad (1$$

wo m aber nur eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten darf; so ist

2) $$\zeta\log_\gamma \sqrt[m]{(p_1 + q_1 i)}_{\tau p+qi} = \frac{1}{m} \cdot \gamma + m(\zeta+\mu_1)\log(p_1 + q_1 i)_{\tau p+qi}$$

und hieraus bei derselben Bedeutung von m:

3) $$\log \sqrt[m]{(p_1 + q_1 i)}_{p+qi} = \frac{1}{m} \cdot \log(p_1 + q_1 i)_{p+qi}$$

Wenn ferner

$$2\mu\pi + \frac{1}{m}[2\gamma\pi + \arg(p_1 + q_1 i)^m] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \quad (4$$

wo wieder m nur eine pos. oder neg. ganze Zahl bedeutet, so ist:

5) $$\gamma + m(\zeta+\mu)\log(p_1 + q_1 i)^m_{\tau p+qi} = m\,\zeta\log_\gamma \sqrt[m]{(p_1 + q_1 i)^m}_{\tau p+qi}$$

und hieraus:

6) $$\log(p_1 + q_1 i)^m_{p+qi} = m\log \sqrt[m]{(p_1 + q_1 i)^m}_{p+qi}$$

In dem besondern Falle, da α ein positiver oder negativer ächter Bruch ist, findet stets auch folgende Gleichung Statt:

$$_\tau\log_\tau(p + qi)^\alpha_{\tau p+qi} = \alpha\,{}_\tau\log(p + qi)_{\tau p+qi}$$

Anmerkung 1. Wenn in I. 4) die τ weggelassen würden, so erhielte man eine Gleichung, bei der zwar

sämmtliche Werthe des ersten Theils auch zugleich Werthe des 2^{ten} Theils wären, hingegen unendlich viele Werthe des 2^{ten} Theils sich alsdann nicht unter den Werthen des ersten Theils befänden.

Anmerkung 2. In Ohm's »Geist der math. Anal. 1842, pag. 126« findet sich, wenn wir unsere Zeichen beibehalten:

$$ {}_{o}^{p+qi}\log_{o}(p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)\,{}_{o}^{p+qi}\log(p + qi) $$

Diese Gleichung ist durchaus nur in dem besondern Falle richtig, da $[\beta \,|\, \mathrm{Mod}(p_1 + q_1 i) + \arg(p_1 + q_1 i)]$ entweder $= \pi$, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt. Uebrigens haben wir für den Fall, da $p + qi = e = 2{,}718\ldots$, die Unrichtigkeit dieser Gleichung schon im §. 20 bemerkt.

§. 24.

Die logarithmische Reihe $(p + qi) - \frac{1}{2}(p + qi)^2 + \frac{1}{3}(p + qi)^3 - \ldots\ldots$ gibt in den sämmtlichen Fällen ihrer Convergenz den speziellen Werth ${}_{o}\log(1 + p + qi)$ von $\log(1 + p + qi)$, was leicht daraus gefolgert werden kann, dass die binomische Reihe für $(1 + p + qi)^{\alpha+\beta i}$, so oft sie convergirt, den besondern Werth ${}_{o}(1 + p + qi)^{\alpha+\beta i}$ und die Exponentialreihe E^{p+qi} den speziellen Werth ${}_{o}e^{p+qi}$ von e^{p+qi} ausdrückt.

Die Fortsetzung dieser Mittheilungen, welche der Raum dieser Blätter nicht gestattet, muss ich einer spätern Gelegenheit vorbehalten.

Küsnach, den 11. März 1855.